

درس دوم

قضیه کسینوس ها

می دانیم که در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$). با داشتن طول های دو ضلع $(AB=c)$ و $(AC=b)$ می توانیم اندازه وتر مثلث $(BC=a)$ را بر حسب b و c به دست آوریم: $a^2 = b^2 + c^2$ حال می بینیم که اگر $\hat{A}$ مساوی 90° هم نباشد، می توانیم این کار را انجام دهیم.

۱ فعالیت

در مثلث ABC ($\hat{A} < 90^\circ$), ارتفاع BH را رسم کرده ایم. با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث های قائم الزاویه، جاهای خالی را پر کنید:

$$\cos A = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c \cdot \cos A \quad \text{و} \quad CH = b - AH = b - c \cdot \cos A$$

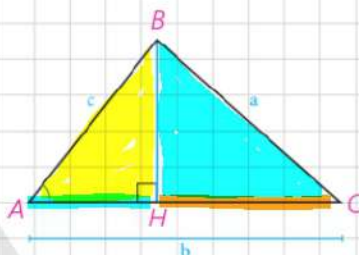
$$\sin A = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \cdot \sin A$$

$$\Delta BHC: BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = (c \cdot \sin A)^2 + (b - c \cdot \cos A)^2$$

$$a^2 = c^2 \sin^2 A + b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cos^2 A$$

$$= c^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + b^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos A$$

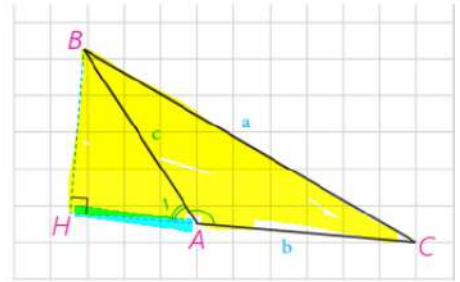


$$(b - c \cos A)^2$$

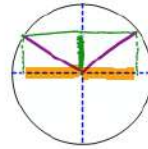
حال به کمک اتحاد های جبری و اتحاد مثلثاتی $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ نشان دهید:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

اکنون در مثلث ABC ($\hat{A} > 90^\circ$) ارتفاع BH را در بیرون مثلث رسم می‌کنیم.
اگر $\hat{A}_1$ زاویه خارجی رأس A باشد با توجه به اینکه $\hat{A}_1 = 180^\circ - \hat{A}$ داریم:
 $\sin A_1 = \dots$ و $\cos A_1 = \dots$ و در مثلث ABH نیز با توجه به تعریف نسبت‌های
مثلثاتی می‌توان نوشت:



$$\hat{A} + \hat{A}_1 = 180^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin A = \sin A_1 \\ \cos A_1 = -\cos A \end{cases}$$



$$\sin A_1 = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \cdot \sin A_1 \xrightarrow{\sin A = \sin A_1} BH = c \cdot \sin A$$

$$\cos A_1 = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c \cdot \cos A_1 \xrightarrow{\cos A_1 = -\cos A} AH = -c \cdot \cos A$$

$$\Delta BHC: a^2 = BH^2 + CH^2$$

$$CH = b + AH = b - c \cdot \cos A$$

$$\begin{aligned} a^2 &= (c \cdot \sin A)^2 + (b - c \cdot \cos A)^2 = c^2 \cdot \sin^2 A + b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cdot \cos^2 A \\ &= c^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + b^2 - 2bc \cdot \cos A = c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos A \end{aligned}$$

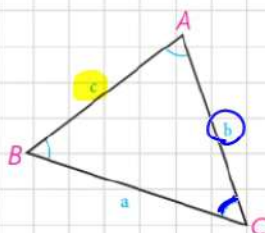
math-pilevar.ir

و با ساده کردن عبارت‌ها نشان دهید:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

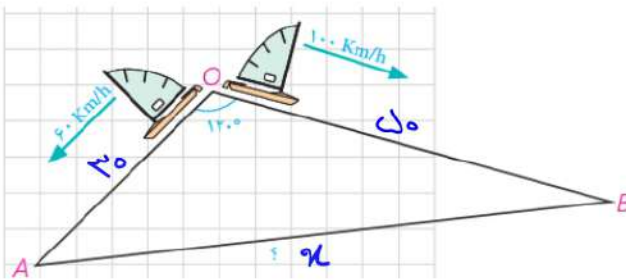
سؤال: در حالتی که زاویه A قائمه باشد، این رابطه به چه صورت در می‌آید؟

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 90^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$



قضیه کسینوس‌ها: در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A, & b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \end{aligned}$$



مثال: دو قایق از یک نقطه در دریاچه‌ای با سرعت‌های ۶۰ km/h و ۱۰۰ km/h و با زاویه ۱۲۰° از هم دور می‌شوند. نیم ساعت بعد دو قایق در چه فاصله‌ای از یکدیگر هستند؟

$$V_1 = \frac{d_1}{t} \Rightarrow d_1 = V_1 \cdot t = 40 \times \frac{1}{2} = 20$$

$$V_2 = \frac{d_2}{t} \Rightarrow d_2 = V_2 \cdot t = 100 \times \frac{1}{2} = 50$$

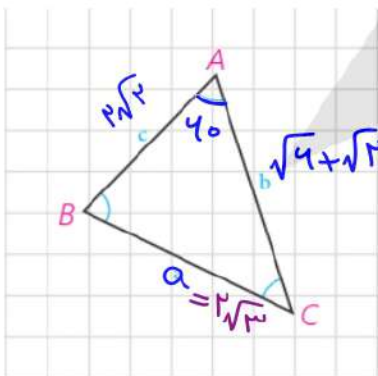
$$x^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2 \times d_1 \times d_2 \times \cos 120^\circ$$

$$x^2 = 20^2 + 50^2 - 2 \times 20 \times 50 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 400 + 2500 + 1000 = 3900$$

$$x = \sqrt{3900} = 70$$

$$\cos(180 - 60) = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$$

کاردکلاس



در مثلث ABC، $AB = 2\sqrt{2}$ ، $AC = \sqrt{4} + \sqrt{2}$ و $\hat{A} = 40^\circ$
۱- طول ضلع BC را به کمک قضیه کسینوس‌ها به دست آورید.

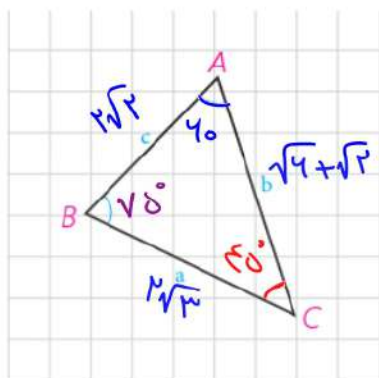
$$a^2 = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{4} + \sqrt{2})^2 - 2(2\sqrt{2})(\sqrt{4} + \sqrt{2}) \times \cos 40^\circ$$

$$a^2 = 16 + 4 + 2\sqrt{12} + 2 - 2(2\sqrt{12} + 4) \times \frac{1}{2}$$

$$a^2 = 16 + 2\sqrt{12} + 2 - 2\sqrt{12} - 4 = 14$$

$$a = \sqrt{14} = 2\sqrt{3}$$

↓
۴ × ۳



۲- اندازه $\hat{C}$ را به کمک قضیه سینوس‌ها به دست آورید و از آنجا اندازه $\hat{B}$ را هم بیابید.

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin A} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} \Rightarrow$$

$$\sin C = \frac{\sin A \times 2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \sqrt{2}}{\cancel{2} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow C = 45^\circ$$

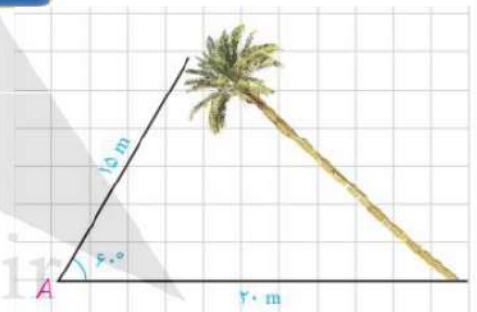
$$\hat{B} = 180 - (\hat{A} + \hat{C}) = 180 - (40 + 45) = 180 - 85 = 95$$



تمرین

۱- یک درخت کج از نقطه A روی زمین، که در فاصله ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویه 60° دیده می‌شود. اگر فاصله A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است:

الف) طول درخت



ب) سینوس زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

پ) فاصله نوک درخت از زمین