فصل سوم

# ۳
# روابط طولی در مثلث

## قضیهٔ سینوس‌ها

### یادآوری

منظور از روابط طولی، رابطه‌هایی است که در مورد اندازه‌های پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها در شکل‌های مختلف، بحث می‌کند. در سال گذشته روابط طولی زیر را در مثلث قائم‌الزاویه دیدیم :

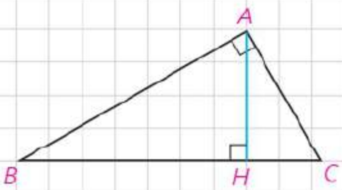
۱ــ $AB^2=BC.BH$

۲ــ $AC^2=BC.CH$

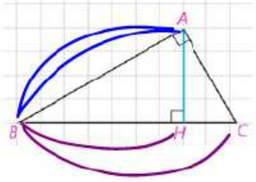
۳ــ $AH^2=BH.CH$

۴ــ $AB^2+AC^2=BC^2$

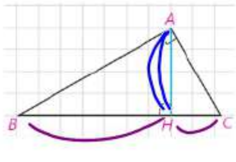
۵ــ $AB.AC=BC.AH$



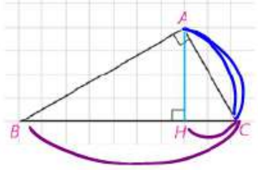

اینک به ادامهٔ بحث در مثلث‌های دلخواه می‌پردازیم.



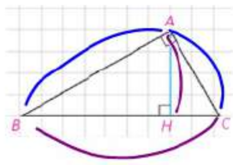

$AB^2=BH.BC$




$AH^2=BH.CH$




$AC^2=CH.BC$




$AB\times AC=AH.BC$

**فعالیت ۱**

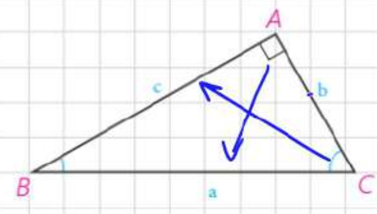
در کتاب ریاضی ۱ (پایهٔ دهم) با تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه آشنا شدید. با توجه به تعریف سینوس زاویه در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، جاهای خالی را پر کنید :

$\sin x = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$

$\frac{\operatorname{Sin}B}{1} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{\operatorname{Sin}B} = a$

$\frac{\operatorname{Sin}C}{1} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{\operatorname{Sin}C} = a$

$\operatorname{Sin}A = \operatorname{Sin}90^\circ = \frac{a}{a} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{Sin}A} = a$

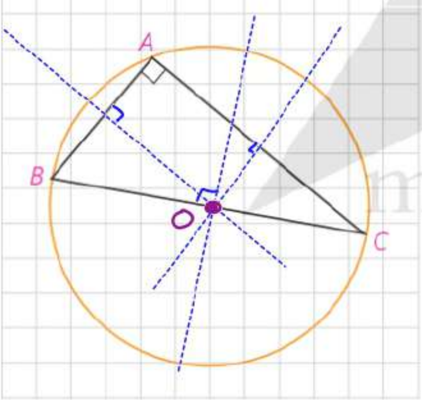



بنابراین داریم :

در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازهٔ هر ضلع به سینوس زاویه مقابل به آن برابر است با اندازهٔ وتر مثلث

**فعالیت ۲**

در کتاب هندسهٔ ۱ دیدیم که عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند و در این کتاب دیدیم که این نقطه، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است. دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را رسم می‌کنیم. مرکز این دایره، کجاست و چرا قطر آن با وتر مثلث برابر است؟




محل برخورد عمودمنصف های اضلاع مثلث قائم الزاویه وسط وتر است پس این نقطه مرکز دایره محیطی مثلث است

زاویه محاطی $\hat{A} = 90^\circ = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 180^\circ$

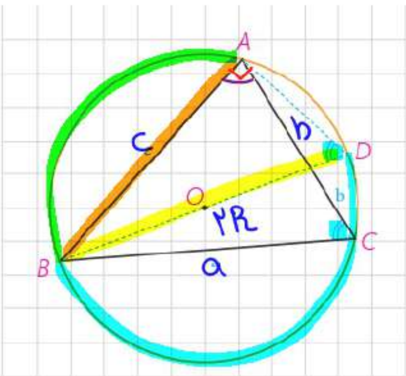
وتر BC دایره را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند پس قطر دایره محیطی مثلث می باشد

با توجه به نتیجهٔ فعالیت (۱) می توانیم بگوییم :

در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازهٔ هر ضلع به سینوس زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع برابر است با اندازهٔ .قطر...... دایرهٔ محیطی مثلث.

اکنون نشان می‌دهیم این نتیجه‌گیری برای هر مثلث دلخواه نیز درست است.

**حالت اول :** درمثلث دلخواه $ABC$ $(\hat{A} < 90^\circ)$ ثابت کنید: نسبت اندازهٔ ضلع $BC$ به سینوس زاویه $\hat{A}$ برابر است با اندازه قطر دایره محیطی مثلث.




قطر BD را رسم، D را به A وصل می کنیم.

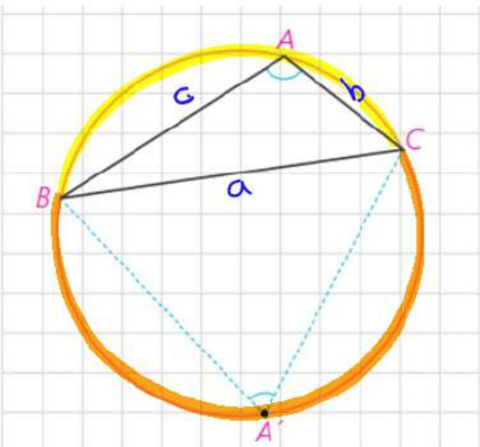
$\hat{D}=\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{BA}}{2}$

$B\hat{A}D=\frac{\overset{\frown}{BCD}}{2}=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$

$\sin C=\sin D=\frac{AB}{BD}=\frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{\sin C}{1}=\frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\sin C}=2R$

$\frac{b}{\sin B}=2R$ , $\frac{a}{\sin A}=2R$

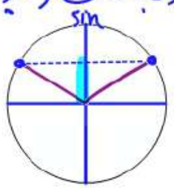
**حالت دوم :** درمثلث دلخواه $ABC$ $(\hat{A} > 90^\circ)$ ثابت کنید: نسبت اندازهٔ ضلع $BC$ به سینوس زاویه $\hat{A}$ برابر است با اندازه قطر دایره محیطی مثلث.




$A+A'=\frac{\overset{\frown}{BA'C}}{2}+\frac{\overset{\frown}{BAC}}{2}=\frac{360}{2}=180^\circ \Rightarrow A'=180-A$

۱- زاویه $A'$ کوچکتر از ۹۰ درجه است (چون $A>90$)

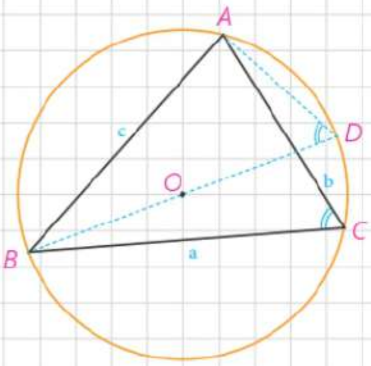
$\sin A'=\sin(180-A)$




۲- $\sin A=\sin A'$

$\sin A=\sin A'=\frac{a}{2R} \Rightarrow \sin A=\frac{a}{2R}$

**فعالیت ۳**




مثلث دلخواه ABC $(\hat{A} < 90^\circ)$ و دایرهٔ محیطی آن به مرکز O را در نظر می‌گیریم. قطر BD را رسم، و D را به A وصل می‌کنیم.

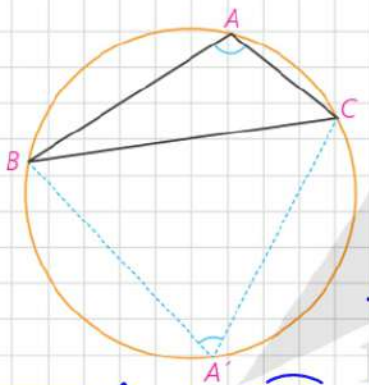
۱ــ زوایای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ چرا با هم برابرند؟ روبه‌رو یک کمان برابر هستند

اندازهٔ آنها برابر است با نصف $\frac{\overset{\frown}{BA}}{2}$.

۲ــ چرا مثلث ABD در رأس A قائم‌الزاویه است؟ $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

۳ــ با توجه به دو قسمت قبل، داریم:

$$\text{SinC} = \text{SinD} \text{ و } \text{SinD} = \frac{c}{BD} \Rightarrow \text{SinC} = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\text{SinC}} = 2R$$




۴ــ به‌طور مشابه خواهیم داشت:

$$\frac{a}{\text{SinA}} = 2R \quad , \quad \frac{b}{\text{SinB}} = 2R$$

۵ــ حال مثلث ABC $(\hat{A} > 90^\circ)$ را در نظر بگیرید. نقطهٔ دلخواه $A'$ روی کمان BC را به B و C وصل می‌کنیم. زوایای $\hat{A}$ و $\hat{A}'$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ مکمل هستند.

$\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$ بنابراین $\hat{A}'$ زاویه‌ای حاده است.

$$\hat{A} + \hat{A}' = \frac{\overset{\frown}{BA'C}}{2} + \frac{\overset{\frown}{BAC}}{2} = \frac{360}{2} = 180^\circ$$

با توجه به آنچه از مثلثات می‌دانید، جاهای خالی را پر کنید:

$$\sin A = \sin(180 - A') = \sin A'$$

در مثلث $A'BC$، طبق نتیجهٔ قسمت (۳) می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{a}{\sin A'} = 2R \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

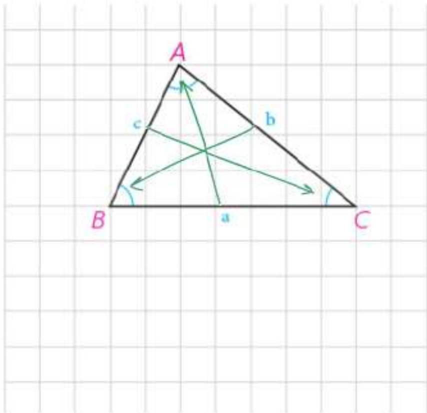
**نتیجه**

در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازهٔ هر ضلع... به سینوس زاویهٔ روبه‌رو به آن برابر است با قطر دایره محیطی مثلث

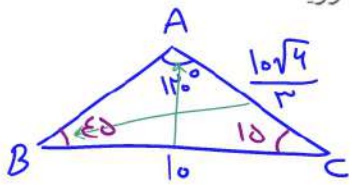
**قضیهٔ سینوس‌ها:** در مثلث ABC با اضلاع $BC=a$ ، $AC=b$ و $AB=c$ داریم:

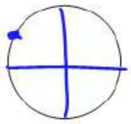
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.




**مثال ۱ :** در مثلث ABC، $BC=10\,cm$ و $\hat{A}=120^\circ$ و $AC=\frac{10\sqrt{6}}{3}$ مقدار شعاع دایرهٔ محیطی مثلث و اندازه زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را به‌دست آورید.



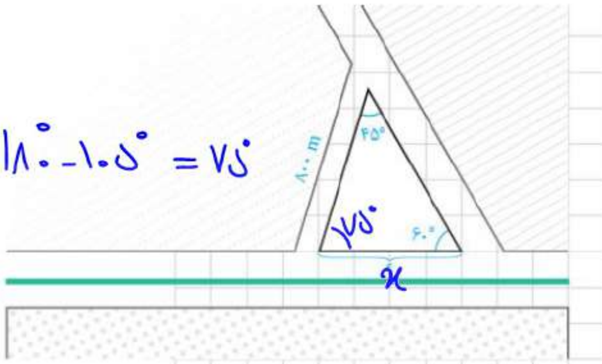
$$\frac{10}{\sin 120^\circ}=\frac{\frac{10\sqrt{6}}{3}}{\sin B} \Rightarrow \sin B=\frac{\overset{(180-60)}{\sin 120}\times\frac{10\sqrt{6}}{3}}{10}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{10\sqrt{6}}{3}}{10}=\frac{\frac{10\sqrt{18}}{6}}{\frac{10}{1}}=$$

$$=\frac{\cancel{10}\sqrt{\overset{9\times 2}{18}}}{6\times\cancel{10}}=\frac{\cancel{3}\sqrt{2}}{\cancel{6}\,2}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin B=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{B}=45^\circ$$

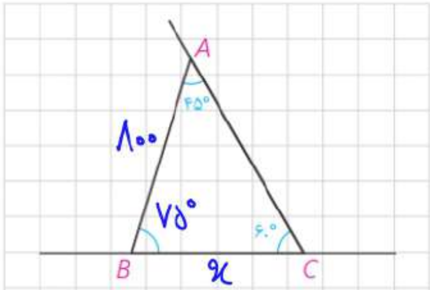
$$\hat{C}=180^\circ-(120^\circ+45^\circ)=180^\circ-165^\circ=15^\circ$$

$$\frac{10}{\underset{180-60}{\sin 120^\circ}}=2R \Rightarrow \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R \Rightarrow \frac{\overset{10}{\cancel{20}}}{\sqrt{3}}=\cancel{2}R \Rightarrow R=\frac{10}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$$

**مثال ۲ :** از یک بلوار افقی، یک خیابان فرعی باریک با زاویهٔ $60°$ جدا شده است. اکنون شهرداری منطقه می‌خواهد یک خیابان فرعی دیگر به طول ۸۰۰ متر بنا کند تا با زاویهٔ $45°$ از خیابان فرعی اول جدا، و به بلوار منتهی شود. این خیابان از چه فاصله‌ای از رأس زاویهٔ $60°$ باید شروع شود و با بلوار چه زاویه‌ای می‌سازد؟




$$180° - 105° = 75°$$

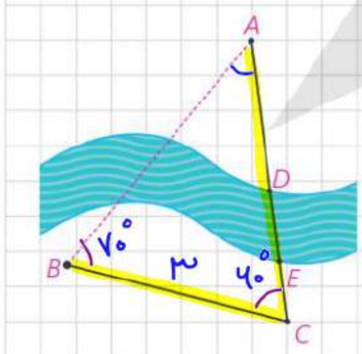



$$\frac{x}{\sin 45°} = \frac{800}{\sin 60°} \Rightarrow x = \frac{800 \times \sin 45°}{\sin 60°} =$$

$$x = \frac{800 \times \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = \frac{800\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{800\sqrt{6}}{3} \simeq 653.2$$

**کار در کلاس**

می‌خواهیم روی یک رودخانهٔ عمیق بین دو نقطهٔ A و B در دو طرف رودخانه، پلی بنا کنیم. برای محاسبات مربوط به احداث پل، باید فاصله ابتدا و انتهای آن (یعنی طول AB) را به‌دست بیاوریم؛ امّا امکان اندازه‌گیری مستقیم (به‌دلیل وجود رودخانه) وجود ندارد. برای این کار از نقطهٔ A در جهتی حرکت می‌کنیم تا با عبور از قسمت کم‌عمق رودخانه (DE) به نقطه C برسیم و طول BC را اندازه‌گیری می‌کنیم؛ سپس با زاویه‌یاب (تئودولیت) زاویهٔ دید AC از نقطهٔ B ($\hat{B}$) و زاویهٔ دید AB از C ($\hat{C}$) را اندازه می‌گیریم. به‌صورت زیر نشان دهید با داشتن طول BC و زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ می‌توان فاصلهٔ AB را به‌دست آورد :




$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

$$\hat{A} = 180 - (\hat{B} + \hat{C})$$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{BC}{\sin(180° - (B + C))} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB = \frac{BC \times \sin C}{\sin(B+C)}$$

اگر $BC = 3km$ و $\hat{B} = 70°$ و $\hat{C} = 60°$ به کمک ماشین حساب طول AB را به‌دست آورید.

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.86$$

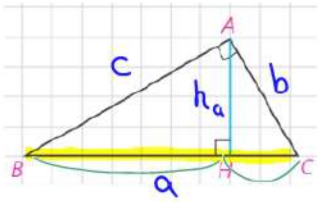
$$\sin 130° = 0.76$$

$$AB = \frac{BC \times \sin C}{\sin(B+C)} = \frac{3 \times \sin 60°}{\sin(70° + 60°)} = \frac{3 \times 0.86}{0.76} \simeq 3.41$$

## تمرین

۱ــ ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$) با ارتفاع $AH=h_a$ داریم :

$$\frac{1}{h_a^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$



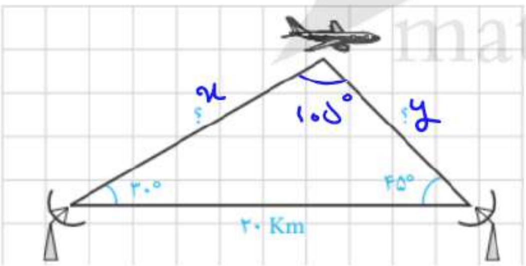

$$c^2=BH\cdot a$$

$$b^2=CH\cdot a$$

$$h_a^2=BH\cdot CH$$

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1\times BH}{CH\cdot a\times BH}+\frac{1\times CH}{BH\cdot a\times CH}=\frac{\overbrace{BH+CH}^{a}}{CH\cdot BH\cdot a}=\frac{\cancel{a}}{CH\cdot BH\cdot \cancel{a}}=\frac{1}{CH\cdot BH}=\frac{1}{h_a^2}$$

۲ــ دو ایستگاه رادار، که در فاصلهٔ ۲۰ کیلومتری از هم واقع‌اند، هواپیمایی را با زاویه‌های ۳۰ و ۴۵ درجه رصد کرده‌اند. فاصلهٔ هواپیما را از دو ایستگاه به‌دست آورید.




$$180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$$

$\sin 105^\circ=0.96$

$\sin 30^\circ=0.5$

$\sin 45^\circ=0.707$

$$\frac{y}{\sin 30^\circ}=\boxed{\frac{20}{\sin 105^\circ}}=\frac{x}{\sin 45^\circ}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{y}{\sin 30^\circ}=\dfrac{20}{\sin 105^\circ}\Rightarrow \dfrac{y}{0.5}=\dfrac{20}{0.96}\Rightarrow y=\dfrac{20\times 0.5}{0.96}\simeq 14.72\\[2ex] \dfrac{20}{\sin 105^\circ}=\dfrac{x}{\sin 45^\circ}\Rightarrow \dfrac{20}{0.96}=\dfrac{x}{0.707}\Rightarrow x=\dfrac{20\times 0.707}{0.96}\simeq 10.41\end{cases}$$