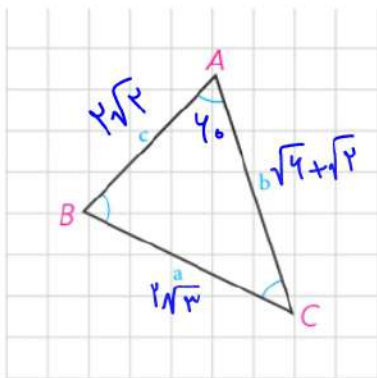




۲- اندازه $\hat{C}$ را به کمک قضیه سینوس ها به دست آورید و از آنجا اندازه $\hat{B}$ را هم بیابید.

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 40^\circ}$$

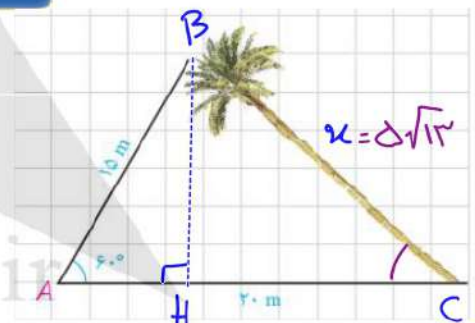
$$\sin C = \frac{2\sqrt{2} \times \sin 40^\circ}{2\sqrt{3}} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2} \times \cancel{2}\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cancel{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ$$

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 180^\circ - (40^\circ + 45^\circ) = 95^\circ$$



تمرین

۱- یک درخت کج از نقطه A روی زمین، که در فاصله ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویه 60° دیده می شود. اگر فاصله A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است:



$$x^2 = 15^2 + 20^2 - 2 \times 15 \times 20 \times \cos 60^\circ$$

(الف) طول درخت

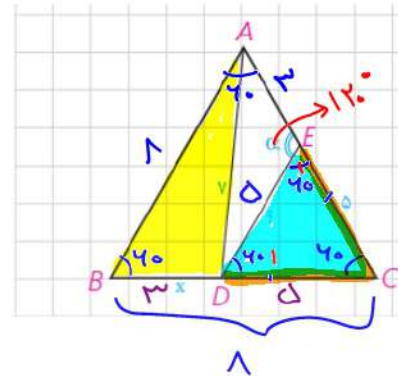
$$x^2 = 225 + 400 - 2 \times 300 \times \frac{1}{2} = 425 - 300 = 125$$

$$x = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

(ب) سینوس زاویه ای که درخت با سطح زمین می سازد.

$$\frac{5\sqrt{5}}{\sin 40^\circ} = \frac{15}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{15 \times \sin 40^\circ}{5\sqrt{5}} = \frac{\cancel{15} \times \frac{\sqrt{5}}{2}}{\cancel{5}\sqrt{5}} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.5 \Rightarrow C = 45^\circ$$

۲- در مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه D، که به فاصله ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ (CD > BD) نقطه E، که به فاصله ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازه زاویه AED چند درجه است؟



$$\triangle ABD: V^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \cdot \cos 40^\circ$$

$$49 = 4 + 1 - 2 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \Rightarrow 1^2 - 1 + 15 = 0$$

$$(1-3)(1-5) = 0 \Rightarrow 1 = 3 \quad \text{و} \quad 1 = 5$$

$$DC = EC \Rightarrow \text{مثلث EDC متساوی الساقین} \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow \frac{180 - 40}{2} = 70^\circ$$

$$\triangle EDC \text{ متساوی الاضلاع} \Rightarrow ED = 5$$

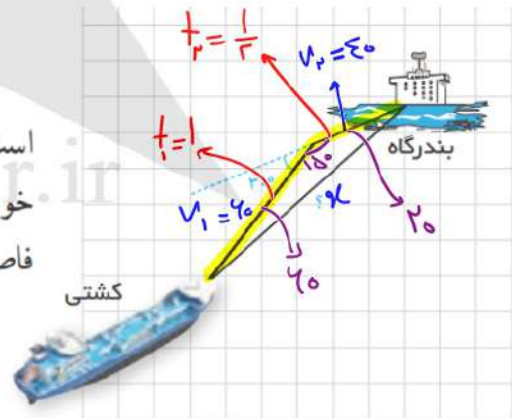
۳- یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با ۳۰° انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد. فاصله بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟

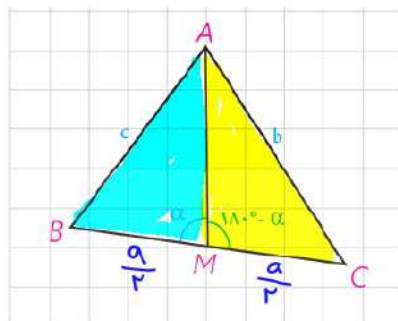
$$v_1 = \frac{d}{t_1} \Rightarrow d = v_1 t_1 = 40 \times 1 = 40$$

$$v_2 = \frac{d}{t_2} \Rightarrow d = v_2 t_2 = 60 \times \frac{1}{2} = 30$$

$$x^2 = 40^2 + 30^2 - 2 \times 40 \times 30 \times \cos 150^\circ =$$

$$x^2 = 1600 + 900 - 2 \times 1200 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2500 + 1200\sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{2500 + 1200\sqrt{3}} \approx 77.99$$





۲- در مثلث ABC، میانه AM را رسم کرده ایم ($MB = MC = \frac{a}{2}$). با نوشتن قضیه کسینوس ها در دو مثلث AMB و AMC، b^2 و c^2 را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2} \quad (\text{قضیه میانه ها})$$

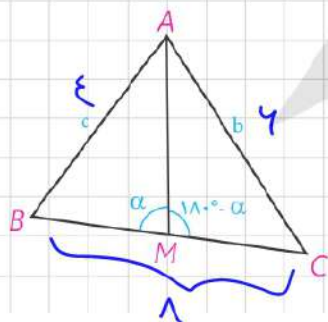
$$\triangle AMC : b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AM^2 - 2 \times \frac{a}{2} \times AM \times \cos(180 - \alpha)$$

$$\triangle AMB : c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AM^2 - 2 \times \frac{a}{2} \times AM \times \cos \alpha$$

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2 - a \times AM (\cos(180 - \alpha) + \cos \alpha)$$

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2$$

در حالت خاص $AB=4$ و $AC=6$ و $BC=8$ ، طول میانه AM را به دست آورید.



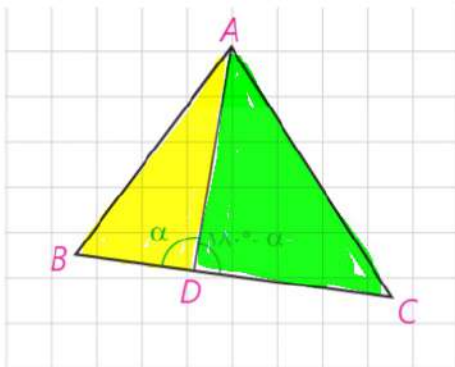
$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2} \quad (\text{قضیه میانه ها})$$

$$4^2 + 6^2 = 2AM^2 + \frac{8^2}{2}$$

$$16 + 36 = 2AM^2 + 32$$

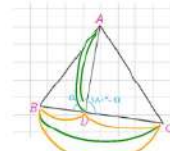
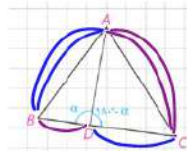
$$52 = 2AM^2 + 32$$

$$2AM^2 = 20 \Rightarrow AM^2 = 10 \Rightarrow AM = \sqrt{10}$$



۵- در مثلث ABC، نقطه دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث ADB و ADC درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC \quad (\text{قضیه استوارت})$$



$$\triangle ABD : AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2 \times BD \times AD \times \cos \alpha$$

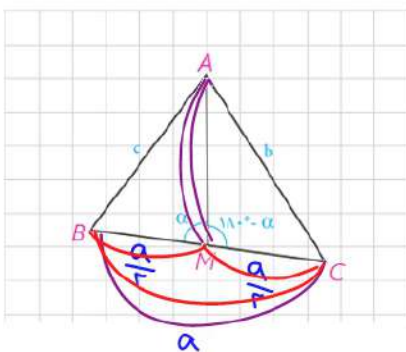
$$\triangle ADC : AC^2 = DC^2 + AD^2 - 2 \times DC \times AD \times \cos (180^\circ - \alpha)$$

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD =$$

$$(BD^2 + AD^2 - 2 \times BD \times AD \times \cos \alpha) \times DC + (DC^2 + AD^2 - 2 \times DC \times AD \times \cos (180^\circ - \alpha)) \times BD$$

$$\cancel{BD^2 \times DC} + \cancel{AD^2 \times DC} - \cancel{2 \times BD \times AD \times DC \times \cos \alpha} + \cancel{DC^2 \times BD} + \cancel{AD^2 \times BD} - \cancel{2 \times DC \times AD \times BD \times \cos (180^\circ - \alpha)}$$

$$\underbrace{AD^2 (DC + BD)}_{BC} + \underbrace{BD \times DC (BD + DC)}_{BC} = AD^2 \times BC + BD \times DC \times BC$$



به کمک قضیه استوارت، درستی قضیه میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

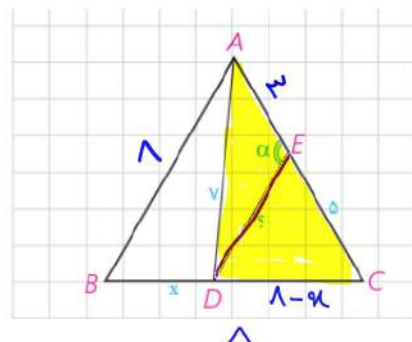
$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2} \quad (\text{قضیه میانه‌ها})$$

$$b^2 \times \frac{a}{r} + c^2 \times \frac{a}{r} = AM^2 \times a + \frac{a}{r} \times \frac{a}{r} \times a$$

$$\cancel{\frac{a}{r}} (b^2 + c^2) = \cancel{\frac{a}{r}} (2AM^2 + \frac{a^$$

۶- مسئله ۲ را بار دیگر، این بار به کمک قضیه استوارت حل کنید.

۲- در مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه D، که به فاصله ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله ای دارد؟ (CD > BD) نقطه E، که به فاصله ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله ای است؟ اندازه زاویه AED چند درجه است؟



$$\triangle ABC : 8^2 \times (1-x) + 8^2 \times x = 7^2 \times 8 + x \times (1-x) \times 8$$

$$8^2 (1-x+x) = 8(7^2 + 1x - x^2)$$

$$48 = 49 + 8x - x^2$$

$$x^2 - 8x + 1 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=5 \end{cases}$$

$$x=3 \rightarrow DC = 8-3=5$$

$$7^2 \times 5 + 5^2 \times 3 = DE^2 \times 8 + 3 \times 5 \times 8$$

$$245 + 75 = DE^2 \times 8 + 120$$

$$325 - 120 = 8DE^2 \Rightarrow 8DE^2 = 205 \Rightarrow DE^2 = 25.625$$

$$DE = 5$$

