

درس سوم

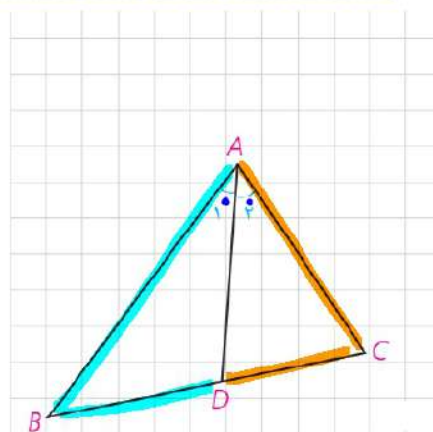
قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها

۱- قضیه نیمسازهای زوایای داخلی

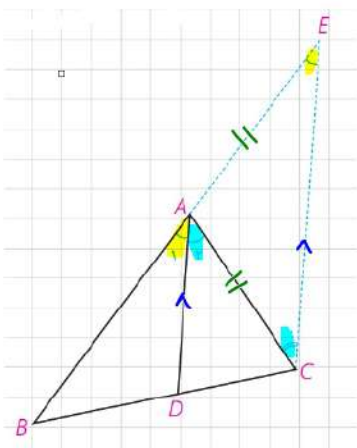
قضیه ۱: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} : \text{فرض}$$

$$\text{حکم} : \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$



اثبات: از نقطه C خطی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطه E قطع کند.



$$AD \parallel BC \xrightarrow{\text{موازی AE}} \widehat{A_1} = \widehat{E}$$

$$AD \parallel BC \xrightarrow{\text{موازی AC}} \widehat{A_2} = \widehat{C}$$

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{C} \Rightarrow AE = AC$$

↓
متساوی الساقین $\triangle AEC$

$$\triangle BEC \xrightarrow[\text{AD} \parallel \text{EC}]{\text{تالس}} \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC} \xrightarrow{AE=AC} \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

اثبات: مطابق شکل از نقطه C خطی موازی نیمساز AD رسم می کنیم تا امتداد AB را در نقطه E قطع کند.

$$EC \parallel AD \xrightarrow{\text{مربع } AE} \hat{A}_1 = \hat{E}$$

$$EC \parallel AD \xrightarrow{\text{مربع } AC} \hat{C} = \hat{A}_2 \quad \text{چرا } \hat{A}_1 = \hat{E} \text{ و چرا } \hat{A}_2 = \hat{C}?$$

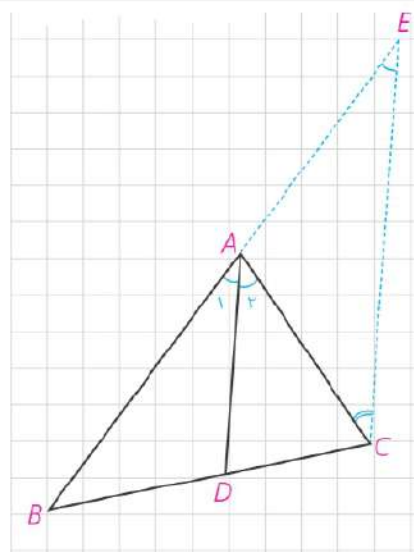
(ب) با توجه به فرض، چه نتیجه ای درباره زوایای E و C می توان گرفت؟ $\hat{E} = \hat{C}$

مثلث AEC چه نوع مثلثی است؟ **متساوی الساقین**

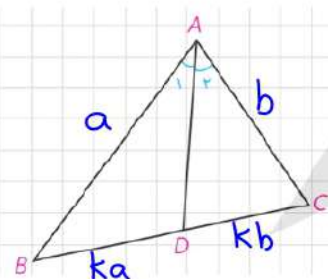
(پ) با توجه به قضیه تالس در مثلث EBC ($AD \parallel EC$) نسبت $\frac{BD}{CD}$ با کدام نسبت برابر است؟ با توجه به نتیجه قسمت (ب) اثبات را کامل کنید:

$$AD \parallel EC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

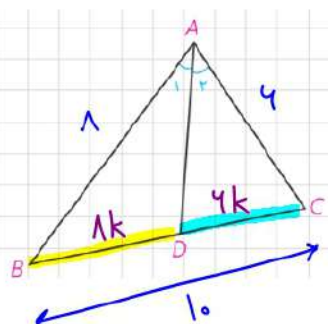
یکی از نتایج فوری این قضیه این است که در هر مثلث به سادگی می توان طول های قطعاتی را که هر نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می کند با داشتن طول های اضلاع مثلث، محاسبه کرد:



قضیه نیمسازها به زبان ساده



$$\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$$



برای مثال:

$$1k + 4k = 10 \Rightarrow 14k = 10 \Rightarrow k = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$BD = 1k = 1 \times \frac{5}{7} = \frac{5}{7}$$

$$DC = 4k = 4 \times \frac{5}{7} = \frac{20}{7}$$

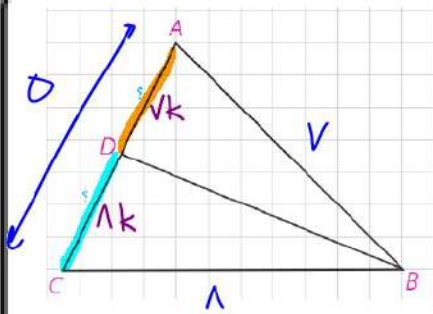
مثال: در مثلث ABC ، $AB=7$ ، $AC=5$ و $BC=8$ است. طول‌های دو قطعه‌ای را به دست آورید که نیمساز زاویه B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

روش اول:

$$7k + 8k = 5 \Rightarrow 15k = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$AD = 7k = 7 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$DC = 8k = 8 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$



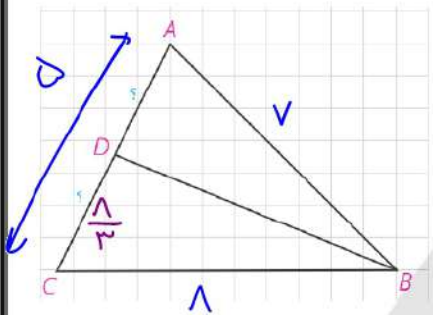
یادآوری: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

روش دوم:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \rightarrow \frac{AB+BC}{BC} = \frac{AD+DC}{DC}$$

$$\frac{7+8}{8} = \frac{5}{DC} \Rightarrow DC = \frac{8 \times 5}{15} = \frac{8}{3}$$

$$AD = \frac{5 \times 8}{15} = \frac{7}{3}$$



کاردرکلاس

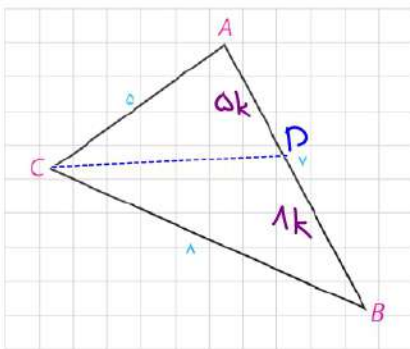
در شکل روبه‌رو نیمساز زاویه C را رسم کنید و طول‌های دو قطعه‌ای را به دست آورید که این نیمساز روی AB جدا می‌کند.

روش اول:

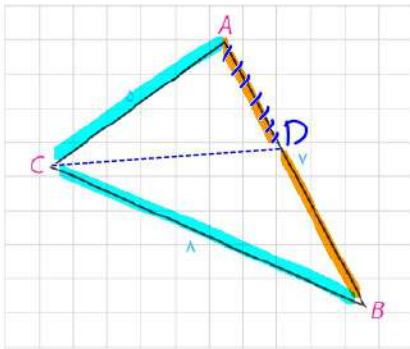
$$5k + 8k = 7 \Rightarrow 13k = 7 \Rightarrow k = \frac{7}{13}$$

$$AD = 5k = 5 \times \frac{7}{13} = \frac{35}{13}$$

$$BD = 8k = 8 \times \frac{7}{13} = \frac{56}{13}$$



روش دوم:

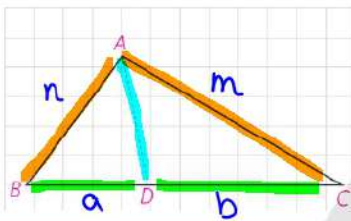


$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DB} \rightarrow \frac{AC+BC}{BC} = \frac{AD+BD}{BD}$$

$$\frac{1+13}{1} = \frac{V}{BD} \Rightarrow BD = \frac{1 \times V}{13} = \frac{54}{13}$$

$$AD = V - \frac{54}{13} = \frac{91-54}{13} = \frac{37}{13}$$

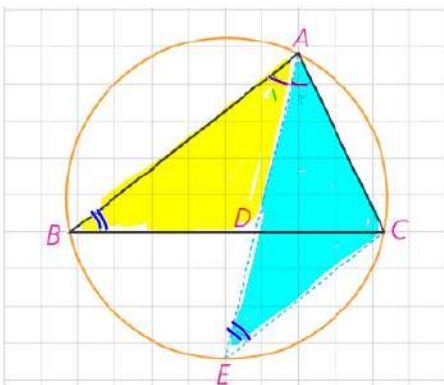
۲- محاسبه طول نیمسازهای زوایای داخلی مثلث



$$AD^2 = nm - ab$$

قضیه ۲: در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

اثبات: AD را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در نقطه E قطع کند، نقطه E را به C و B وصل می‌کنیم.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{E} = \widehat{AC} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AEC \rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{EC}$$

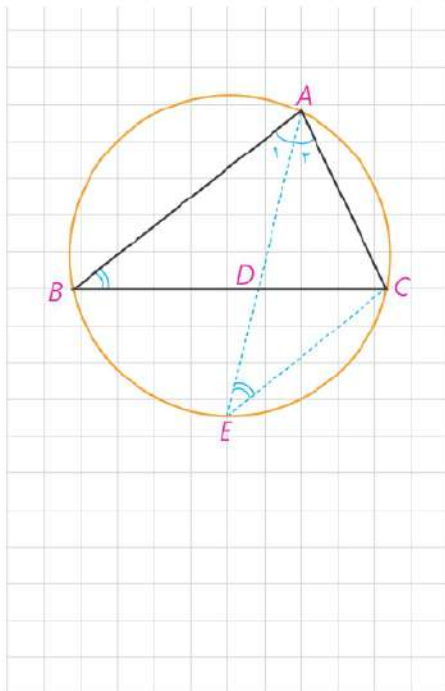
$$\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AB \times AC = AE \times AD \quad \xrightarrow{AE = AD + DE}$$

$$AB \times AC = (AD + DE) \times AD \Rightarrow AB \times AC = AD^2 + AD \times DE \quad \xrightarrow{AD \times DE = BD \times DC}$$

طبق رابطه‌های طولی در دایره

$$AB \times AC = AD^2 + BD \times DC \Rightarrow AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$$

در مثلث ABC برای محاسبه طول نیمساز داخلی زاویه $\hat{A}$ ($\hat{A}_1 = \hat{A}_2$)، یعنی AD، امتداد می دهیم تا دایره محیطی مثلث را در E قطع کند و E را به C وصل می کنیم.



الف) چرا $\hat{E} = \hat{B}$ ؟ $\hat{B} = \hat{E} = \frac{\widehat{AC}}{2}$

ب) چرا مثلث های ABD و AEC متشابه اند؟ $\left. \begin{matrix} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{E} = \hat{B} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AEC$

پ) نسبت های اضلاع متناظر آنها را بنویسید.

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{EC}{BD}$$

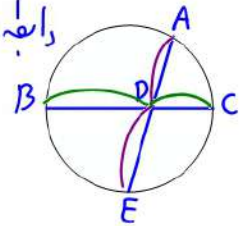
ت) از تناسب اول نتیجه می گیریم:

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE = AD(AD + DE) = AD^2 + AD \cdot DE$$

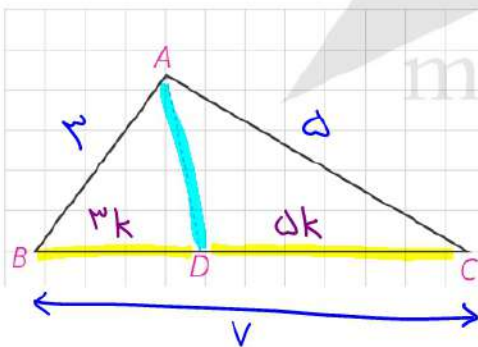
و چون $AD \cdot DE = BD \cdot DC$ (چرا؟) بنابراین:

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

رابطه های طول در دایره



مثال: در مثلث ABC، $AB=3$ ، $AC=5$ و $BC=7$ است. طول نیمساز زاویه A را بیابید.



$$3k + 5k = 7 \Rightarrow 8k = 7 \Rightarrow k = \frac{7}{8}$$

$$BD = 3k = 3 \times \frac{7}{8} = \frac{21}{8}$$

$$DC = 5k = 5 \times \frac{7}{8} = \frac{35}{8}$$

$$AD^2 = 3 \times 5 - \frac{21}{8} \times \frac{35}{8} = \frac{15 \times 4}{1 \times 4} - \frac{735}{64} = \frac{960 - 735}{64} = \frac{225}{64}$$

$$AD = \sqrt{\frac{225}{64}} = \frac{15}{8}$$

حل: به کمک قضیه (۱) طول های BD و CD را به دست می آوریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BD+CD}{CD} = \frac{8}{5}$$

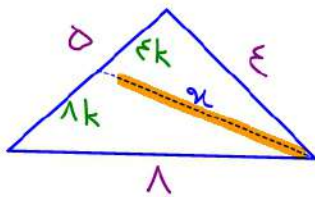
$$\Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{7}{CD} = \frac{8}{5} \Rightarrow CD = \frac{35}{8}, BD = 7 - \frac{35}{8} = \frac{21}{8}$$

حال با توجه به قضیه (۲) داریم:

$$AD^2 = AB.AC - BD.CD = 3 \times 5 - \frac{35}{8} \times \frac{21}{8} =$$

$$15 - \frac{735}{64} = \frac{225}{64} \Rightarrow AD = \frac{15}{8}$$

مثال: در مثلثی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۸ طول نیمساز داخلی زاویه متوسط مثلث را بیابید.



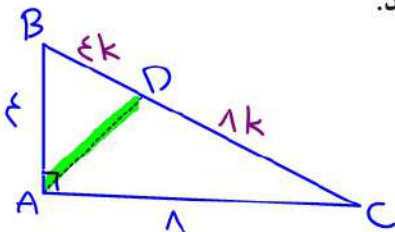
$$4k + 1k = 12k = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{12}$$

$$4k = 4 \times \frac{5}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

$$1k = 1 \times \frac{5}{12} = \frac{5}{12}$$

$$u^2 = 4 \times 8 - \frac{5}{3} \times \frac{5}{12} = 32 - \frac{25}{36} = \frac{221}{9} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{221}{9}} = \frac{\sqrt{221}}{3} \approx \frac{14.8}{3} \approx 4.9$$

مثال: در مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائمه ۴ و ۸ طول نیمساز زاویه قائمه را بیابید.



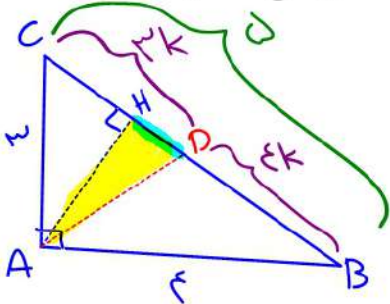
$$BC^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80 \Rightarrow BC = 4\sqrt{5}$$

$$4k + 1k = 4\sqrt{5} \Rightarrow 12k = 4\sqrt{5} \Rightarrow k = \frac{4\sqrt{5}}{12} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$BD = 4k = 4 \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{3}, DC = 1k = 1 \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$AD^2 = 4 \times 8 - \frac{4\sqrt{5}}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{32 \times 9}{1 \times 9} - \frac{20}{9} = \frac{218}{9} \Rightarrow AD = \sqrt{\frac{218}{9}} = \frac{\sqrt{218}}{3} \approx \frac{14.7}{3} \approx 4.9$$

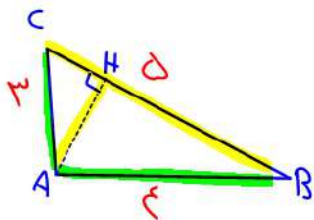
مثال: در مثلث قائم الزاویه ABC زاویه $\hat{A} = 90^\circ$ و اضلاع قائم به طول ۳ و ۴ است. ارتفاع AH و نیمساز AD رسم شده است. اندازه DH را بدست آورید.



$$3k + 4k = 5 \Rightarrow 7k = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{7}$$

$$CD = 3k = \frac{15}{7}, \quad DB = 4k = 4 \times \frac{5}{7} = \frac{20}{7}$$

$$AD^2 = 3 \times 4 - \frac{15}{7} \times \frac{20}{7} = \frac{12 \times 49}{7 \times 49} - \frac{300}{49} = \frac{588 - 300}{49} = \frac{288}{49}$$



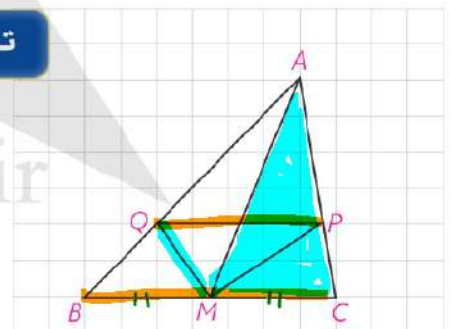
$$AH \times BC = AC \times AB \Rightarrow AH = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\triangle AHD \Rightarrow HD^2 = AD^2 - AH^2 = \frac{288}{49} - \frac{144}{25} = \frac{144(2 \times 25 - 49)}{49 \times 25} = \frac{144}{49 \times 25} \Rightarrow DH = \frac{12}{5 \times 7} = \frac{12}{35}$$



تمرین

۱- در مثلث ABC ، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند؛ ثابت کنید: $PQ \parallel BC$



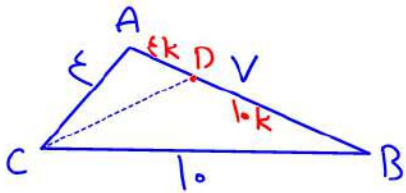
$$BM = MC$$

$$\hat{AMB} \text{ نیمساز } MQ \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QB}$$

$$\hat{AMC} \text{ نیمساز } MP \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{AP}{PC}$$

$$\xrightarrow{BM=MC} \frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QB} \xrightarrow{\text{مکس قضیه نالس}} PQ \parallel BC$$

۲- در مثلث ABC ، $AB=7$ و $AC=4$ و $BC=10$ است. طول نیمساز زاویه داخلی C را به دست آورید.



$$4k + 10k = 7 \Rightarrow 14k = 7 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$AD = 4k = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \quad , \quad DB = 10k = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

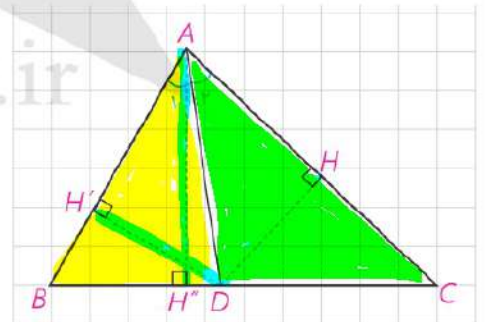
$$CD^2 = 4 \times 10 - 2 \times 5 = 40 - 10 = 30 \Rightarrow CD = \sqrt{30}$$

۳- با پر کردن جاهای خالی با فرض اینکه در شکل مقابل AD نیمساز زاویه $\hat{A}$ است، روش دیگری برای اثبات قضیه نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید:

الف) چرا $DH = DH'$ ؟

هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه یکپایه فاصله است.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AD \text{ مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADH' \cong \triangle ADH \Rightarrow DH = DH'$$



(ب)

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} DH' \times \cancel{AB}}{\cancel{\frac{1}{2}} DH \times \cancel{AC}} = \frac{AB}{AC} \quad (1)$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} BD \times \cancel{AH'}}{\cancel{\frac{1}{2}} CD \times \cancel{AH}} = \frac{BD}{CD} \quad (2)$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} \quad \text{از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می شود:}$$