

۴ مشتق

فصل

آشنایی با مفهوم مشتق

درس اول

مشتق پذیری و پیوستگی

درس دوم

آهنگ تغییر

درس سوم

تهیه کننده : رقیه پيله ور - دبیر ریاضی ناحیه دو اردبیل



برای تماشای ویدیوهای آموزشی ریاضی ۳ تجربی (همین جزوه) می توانید به سایت

math-pilevar.com یا math-pilevar.ir مراجعه کنید.



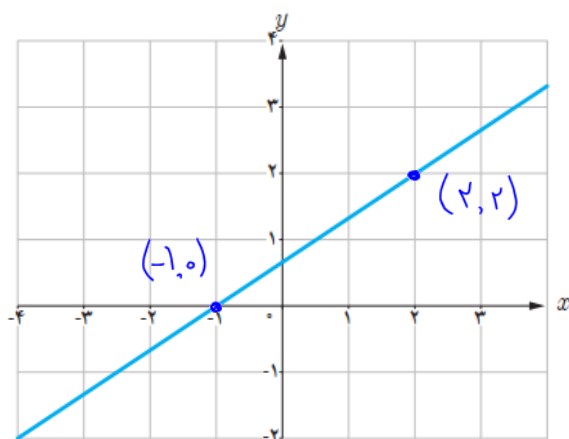
درس اول

آشنایی با مفهوم مشتق

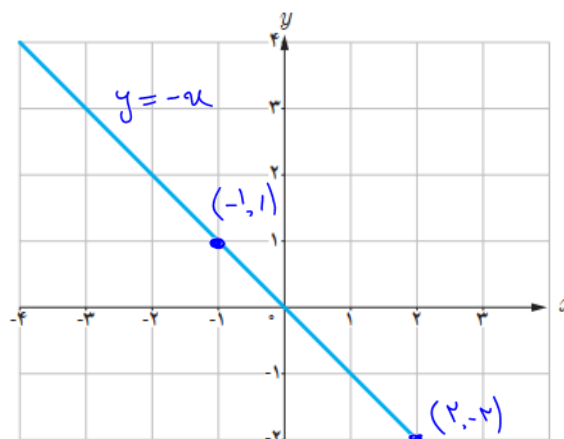
مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربردهای وسیع در ریاضیات و علوم دیگر است. ایده اولیه در مورد مفهوم مشتق، به شیب یک خط مربوط می‌شود. به کمک این ایده به تدریج به صورت دقیق‌تری با مفهوم مشتق آشنا می‌شویم.

فعالیت

۱ شیب هر یک از خط‌های داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟



$$m = \frac{2-0}{2-(-1)} = \frac{2}{3} > 0$$

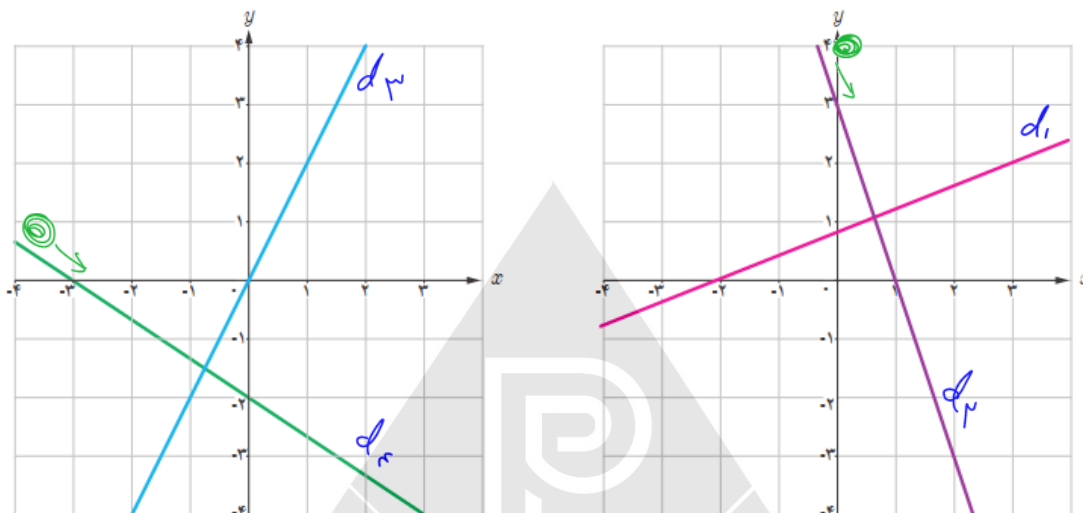


$$m = -1 < 0$$

$$m = \frac{-2-1}{2-(-1)} = \frac{-3}{3} = -1 < 0$$

۲ با توجه به جدول روبه‌رو، نمودار مربوط خط‌های d_1 , d_2 , d_3 و d_4 را روی شکل مشخص کنید.

خط	d_1	d_2	d_3	d_4
شیب	$\frac{2}{5}$	-۳	۲	$-\frac{2}{3}$

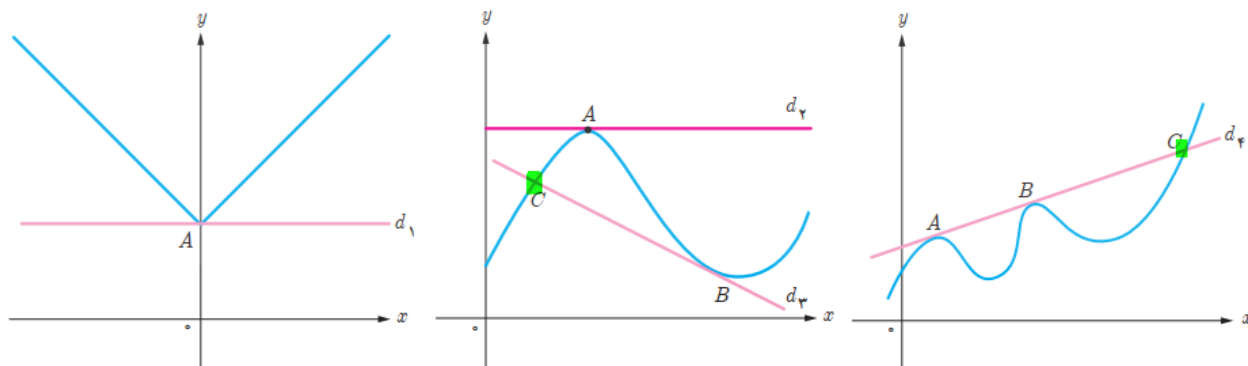


خط مماس بر یک منحنی



یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی مسئله‌ای تاریخی است که زمانی طولانی برای حل آن صرف شده است. مفهوم خط مماس بر یک دایره از زمان‌های گذشته مشخص بوده است. خط مماس بر دایره، خطی است که با دایره یک و فقط یک نقطه مشترک داشته باشد. این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی‌ها صادق نیست.

خط‌های d_1 تا d_4 را در نظر بگیرید. خط d_2 در نقطه A ، خط d_3 در نقطه B و خط d_4 در نقاط A و B بر منحنی مماس هستند. خط d_1 در نقطه A بر منحنی مماس نیست. همچنین خطوط d_2 و d_3 در نقطه C بر منحنی مماس نیستند. در ادامه این درس با دلایل این امر به صورت دقیق‌تری آشنا خواهید شد.



خواندنی

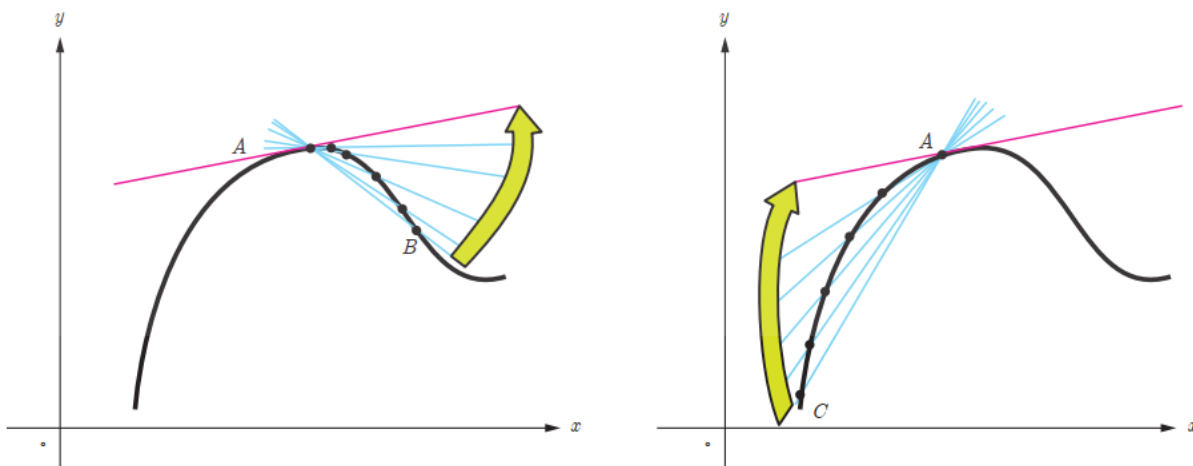
از نظر تاریخی مسئله یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی، برای اولین بار در اوایل قرن هفدهم میلادی زمانی مطرح شد که فرما ریاضی دان فرانسوی اقدام به تعیین ماکزیم ها و مینیم های چند تابع خاص کرد. فرما دریافت که خطوط مماس، در نقاطی که منحنی ماکزیم یا مینیم دارد باید افقی باشد. از این رو به نظرش رسید که مسئله تعیین نقاط ماکزیم یا مینیم به حل مسئله دیگر، یعنی یافتن مماس های افقی مربوط می شود. تلاش برای حل این مسئله کلی تر بود که فرما را به کشف برخی از ایده های مقدماتی مفهوم «مشتق» هدایت کرد. مفهوم مشتق به شکل امروزی آن توسط نیوتن و به فاصله چند سال بعد از او توسط لایپ نیتس، مستقل از یکدیگر پدید آمد. شیوه نیوتن مبتنی بر دیدگاه فیزیکی بود و از مشتق برای به دست آوردن سرعت لحظه ای استفاده کرد، اما لایپ نیتس با دیدگاهی هندسی از مشتق برای به دست آوردن شیب خط مماس در منحنی ها استفاده کرد.



اکنون سعی می کنیم که به کمک نمودار منحنی، خط مماس بر منحنی در یک نقطه را بررسی کنیم. نقطه ثابت A را روی منحنی زیر در نظر می گیریم. خطی که از A و B می گذرد یک خط قاطع نامیده می شود. روی منحنی نقطه های دیگری را نزدیک تر به نقطه A اختیار می کنیم و خط های گذرنده از A و آن نقطه ها را رسم می کنیم. حدس بزنید که وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می شوند، برای خط های قاطع چه اتفاقی می افتد؟ به عبارت دیگر خط های قاطع به چه خطی نزدیک می شوند؟ خط مماس در نقطه A (خط قرمز)

اکنون نقطه C را سمت چپ نقطه A اختیار می کنیم و خط قاطع AC را رسم می کنیم. مانند قبل نقاط دیگری را نزدیک تر به نقطه A اختیار می کنیم. حدس می زنید برای خط های قاطع چه اتفاقی می افتد؟ به طور شهودی می توان گفت:

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A حد شیب خط های قاطع گذرنده از A است به شرطی که نقطه ها به قدر کافی به A نزدیک شوند.



در ادامه این بحث را دقیق تر بررسی خواهیم کرد.

فعالیت

الف) تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ داده شده است، اگر $0 \leq x \leq 10$ نقاط $A(2, f(2))$ ، $B(6, f(6))$ ، $C(5, f(5))$ ، $D(4, f(4))$ و $E(3, f(3))$ را روی منحنی در نظر می گیریم. شیب خطی که از نقاط A و B می گذرد یعنی m_{AB} از دستور زیر به دست می آید:

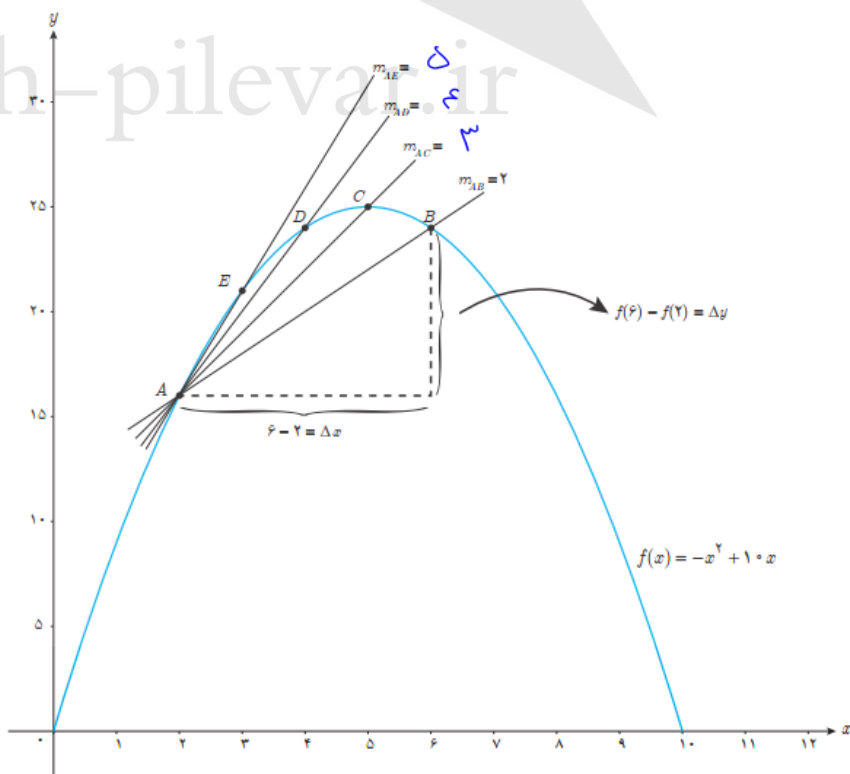
$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{24 - 16}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

به همین روش m_{AC} و m_{AD} و m_{AE} را به دست آورید.

$$m_{AC} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{25 - 16}{3} = 3$$

$$m_{AD} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{24 - 16}{2} = 4$$

$$m_{AE} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{21 - 16}{1} = 5$$



همان طور که می دانید برای محاسبه شیب خط AB نسبت تغییر عمودی را به تغییر افقی به دست می آوریم. اگر این تغییرات را به ترتیب با Δx و Δy نمایش دهیم، داریم:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در هنگام محاسبه شیب های بالا، توضیح دهید که Δx ها چگونه تغییر می کنند؟

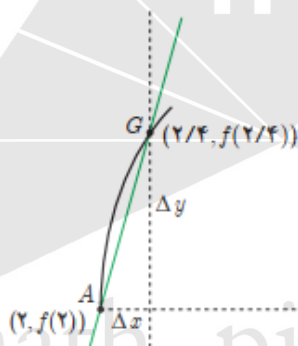
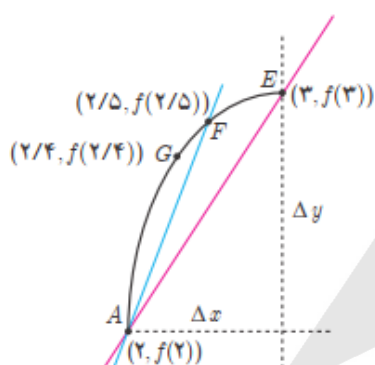
$$[2,6] \quad 2 \quad \underline{\quad\quad\quad} \quad 6 \quad \Delta x = 6 - 2 = 4 \quad \Delta y = 24 - 16 = 8$$

$$[2,5] \quad 2 \quad \underline{\quad\quad\quad} \quad 5 \quad \Delta x = 5 - 2 = 3 \quad \Delta y = 25 - 16 = 9$$

$$[2,4] \quad 2 \quad \underline{\quad\quad\quad} \quad 4 \quad \Delta x = 4 - 2 = 2 \quad \Delta y = 24 - 16 = 8$$

$$[2,3] \quad 2 \quad \underline{\quad\quad\quad} \quad 3 \quad \Delta x = 3 - 2 = 1 \quad \Delta y = 21 - 16 = 5$$

==



(ب) حال فرض کنید که با ادامه روندی که در قسمت (الف) اختیار کردیم، نقاط بیشتری را نزدیک به A انتخاب کنیم. شیب خطوط به دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می شود. برای درک بهتر این موضوع، منحنی $f(x) = -x^2 + 10x$ در فاصله $[2,3]$ رسم شده است. در ادامه نمودار تابع در بازه $[2, 2/4]$ رسم شده است.

$$f(2/4) = -2/4^2 + 10 \times 2/4 = 18/4$$

$$\begin{aligned} m_{AF} &= \frac{f(2/5) - f(2)}{2/5 - 2} \\ &= \frac{18/25 - 16}{-9/5} \\ &= \frac{2/25}{-9/5} = 5/5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{AG} &= \frac{f(2/4) - f(2)}{2/4 - 2} \\ &= \frac{18/4 - 16}{-3/2} = 5/2 \\ &= 5/2 \end{aligned}$$

اگر به همین ترتیب بازه های کوچک تری در نظر بگیریم، شیب خطوط به دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می شود. برای درک بهتر این موضوع، با تکمیل جدول و مقایسه شیب خط های قاطع، شیب خط مماس را حدس بزنید.

بازه $[a, b]$	شیب خطی که از نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ می‌گذرد. $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
$[2, 2/4]$	$\frac{f(2/4) - f(2)}{2/4 - 2} = \frac{11.24 - 16}{.14} = \frac{21.24}{.14} = 5/6$
$[2, 2/3]$	$\frac{f(2/3) - f(2)}{2/3 - 2} = \frac{17.71 - 16}{.13} = \frac{1.71}{.13} = 5/7$
$[2, 2/2]$	$\frac{f(2/2) - f(2)}{2/2 - 2} = \frac{17/16 - 16}{.02} = \frac{1/16}{.02} = 5/8$
$[2, 2/1]$	$\frac{f(2/1) - f(2)}{2/1 - 2} = \frac{16/59 - 16}{.01} = \frac{.059}{.01} = 5/9$
$[2, 2/0.1]$	$\frac{f(2/0.1) - f(2)}{2/0.1 - 2} = \frac{16/0.599 - 16}{.001} = \frac{.0599}{.001} = 5/99$
$[2, 2/0.01]$	$\frac{f(2/0.01) - f(2)}{2/0.01 - 2} = \frac{16/0.05999 - 16}{.0001} = \frac{.005999}{.0001} = 5/999$
$\vdots$	$\vdots$
$[2, 2+h]$ h یک عدد خیلی کوچک و مثبت است.	$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} \longrightarrow ?$

اگر بخواهیم دقیق‌تر صحبت کنیم، باید در مورد مقادیر عبارت $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ وقتی h به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) است،

بررسی کنیم. روند بالا این حدس را تقویت می‌کند که هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم این مقادیر را به عدد ۶ نزدیک کنیم مشروط بر

آنکه h را به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) اختیار کنیم. به عبارت دیگر حدس می‌زنیم که: $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 6$ کافی است با محاسبه مقدار حد، صحت حدس خود را بررسی کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(2+h)^2 + 1 \cdot (2+h) - 16}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(h^2 + 4h + 4) + 2 + 1 \cdot h - 16}{h}$$

$$f(2) = -2^2 + 1 \cdot 2 = -4 + 2 = -2$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 - 4h - 2 + 2 + 1 \cdot h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 - 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h(-h - 3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (-h - 3) = -3$$

به طریق مشابه می‌توان دید که اگر نقاط روی منحنی را در سمت چپ A اختیار کنیم، به عبارت دیگر اگر بازه‌هایی مانند، $[-1/5, 2]$ ، $[-1/6, 2]$ ، $[-1/7, 2]$ ، $[-1/8, 2]$ و ... را در نظر بگیریم شیب خط‌های قاطع برابر با $6/5$ ، $6/4$ ، $6/3$ ، $6/2$... خواهد شد. به عبارت دیگر در این حالت هم شیب خط‌های قاطع به هر اندازه که بخواهیم به عدد ۶ نزدیک می‌شوند، مشروط بر آنکه h به قدر کافی از سمت چپ به

صفر نزدیک شود، یعنی داریم: $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 6$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 6$$

بنابراین به طور کلی می‌توان نوشت:

شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $A(a, f(a))$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود و متناهی باشد.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، یعنی:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

حد مذکور را شیب منحنی در a نیز می‌نامند.

بنابراین در مثال قبل داریم $f'(2) = 6$. در ادامه $f'(3)$ برای $f(x) = -x^2 + 1 \cdot x$ محاسبه شده است:

$$-3^2 + 1 \cdot (3) = -6$$

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(3+h)^2 + 1 \cdot (3+h) - (-9 + 3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-9 - 6h - h^2 + 3 + 1 - (-6)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 6h + 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h + 4) = 4 \end{aligned}$$

مثال: معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -x^2 + 1 \cdot x$ را در نقطه $A(2, f(2))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

حل: با توجه به آنچه که در فعالیت قبل مشاهده شد: $f'(2) = 6$ = شیب خط مماس در نقطه A

$$A(2, f(2)) = (2, 1)$$

$$y - 1 = 6(x - 2) \Rightarrow y = 6x - 11$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

شیب خط
بد نقطه

کار در کلاس

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 3$ را در نقطه‌ای به طول ۲- بنویسید.

$$x = -2 \Rightarrow (-2)^2 + 3 = 7 \rightarrow (-2, 7)$$

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 + 3 - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 4h + h^2 + 3 - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-4 + h) = -4$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-4 + h)}{h} = -4 + 0 = -4 \rightarrow m = -4$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 7 = -4(x - (-2))$$

$$y - 7 = -4x - 8$$

$$y = -4x - 1$$

تذکر: با نمادهای معرفی شده در فعالیت در مورد شیب خطهای قاطع می‌توان دستورهایی معادل دیگری برای محاسبه مشتق در یک نقطه به دست آورد، به‌طور مثال شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

و از آنجا:

مثال: اگر $f(x) = -x^2 + 1$ ، $f'(2)$ را از دستور بالا به دست آورید:

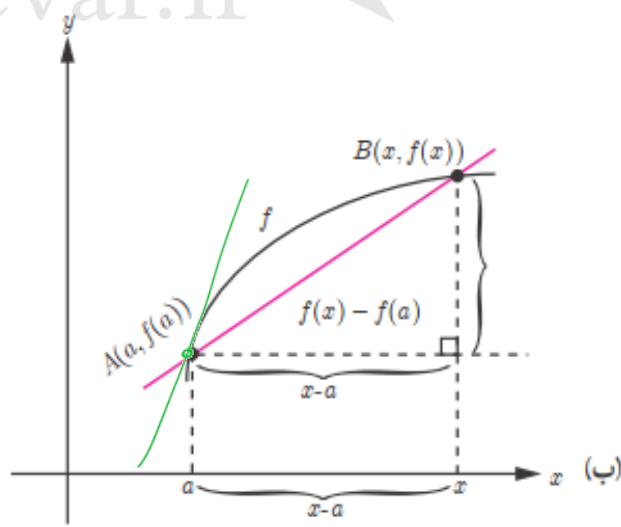
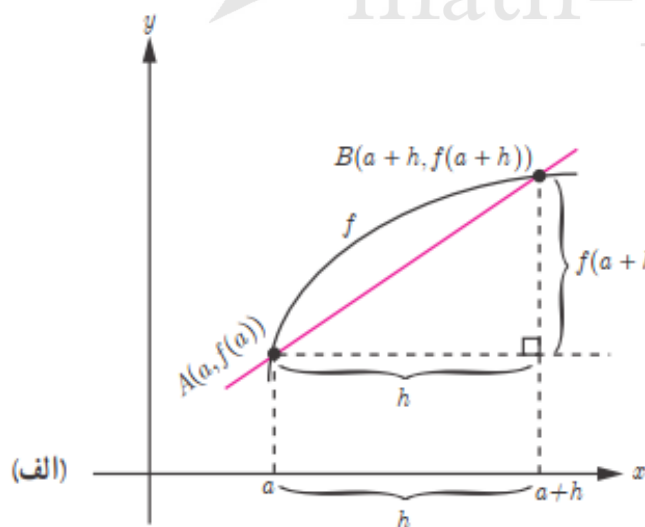
$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(2 + \Delta x)^2 + 1 - (-2^2 + 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\cancel{4} - \Delta x^2 - \cancel{4}\Delta x + \cancel{4} + 1 \cdot \Delta x - \cancel{4}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x^2 + \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}(-\Delta x + 1)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-\Delta x + 1) = 1$$

محاسبه $f'(a)$ به روش دیگر

مشتق تابع f در نقطه $x = a$ به صورت: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ تعریف شد. اکنون دستور دیگری برای مشتق تابع f در نقطه $x = a$ می‌یابیم که در برخی محاسبات کار را ساده‌تر می‌کند.

math-pilevar.ir



با استفاده از نموداری مشابه نمودار (الف) برای محاسبه مشتق f در a داریم:

$$AB \text{ شیب خط} = m_{AB} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$A \text{ در منحنی} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

با استفاده از نمودار (ب) راه دیگر محاسبه شیب خط مماس این است که نقطه دلخواه B را به مختصات $(x, f(x))$ در نظر بگیریم در این صورت داریم:

$$AB \text{ شیب خط} = m_{AB} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

برای محاسبه شیب خط مماس کافی است که x را مرتباً به a نزدیک کنیم. در این صورت شیب خط مماس برابر با $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ است مشروط بر اینکه این حد موجود باشد (واضح است که مانند قبل x باید از راست و چپ به قدر کافی به a نزدیک شود). به عبارت

$$\text{دیگر: } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مثال: اگر $f(x) = x^2$ ، $f'(3)$ را به دو روش به دست آورید.
حل:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+3)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h + 9 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+6) = 6 \end{aligned} \quad \text{روش اول:}$$

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6 \quad \text{روش دوم:}$$

در موقعیت‌های مختلف، ممکن است یکی از این دو روش بر دیگری به دلیل ساده‌تر بودن محاسبات برتری داشته باشد.

الف) برای تابع $f(x) = -x^2 + 1 \cdot x$ ، $f'(5)$ و $f'(1)$ را حساب کنید.

$$f(5) = -5^2 + 1 \cdot (5) = -25$$

$$f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x^2 + 1 \cdot x - (-25)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x^2 - 1 \cdot x + 25)}{x - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)^2}{\cancel{x-5}} = -(5-5) = 0$$

$$f(x) = -x^2 + 1 \cdot x$$

$$f(1) = -1^2 + 1 \cdot (1) = 0$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 1 \cdot x - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x^2 - 1 \cdot x)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(\cancel{x-1})}{\cancel{x-1}} = -(1-1) = 0$$

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد.

B, D , F, E

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی مشتق منفی است.

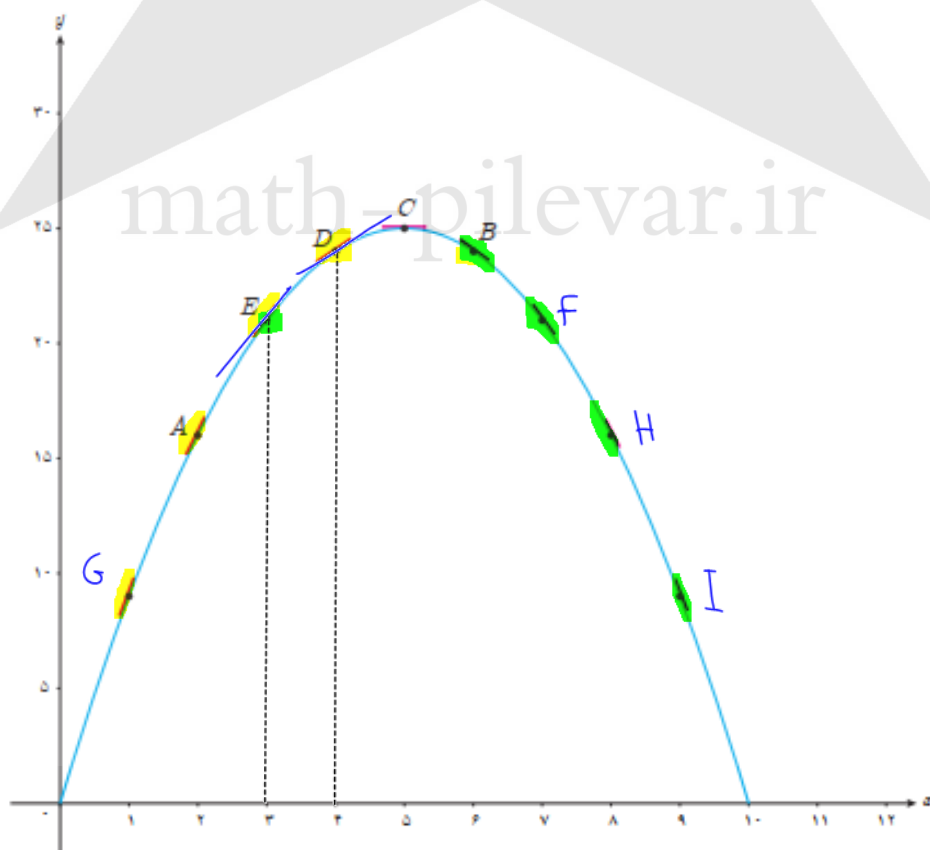
صنق مثبت G, A, E, D

صنق منس B, F, H, I

ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خطهای مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید.

$$f'(3) > f'(4)$$

ث) با محاسبه $f'(3)$ و $f'(4)$ صحت حدس خود را بررسی نمایید.



$$f(x) = -x^2 + 1 \circ x$$

$$f(3) = -9 + 1 \cdot (3) = 21$$

$$f'(3) = \lim_{u \rightarrow 3} \frac{f(u) - f(3)}{u - 3} = \lim_{u \rightarrow 3} \frac{-u^2 + 1 \cdot u - 21}{u - 3} = \lim_{u \rightarrow 3} \frac{-(u^2 - 1 \cdot u + 21)}{u - 3}$$

$$\lim_{u \rightarrow 3} \frac{-(\cancel{u-3})(u-7)}{\cancel{u-3}} = -(3-7) = 4 \rightarrow f'(3) = 4$$

$$f(x) = -x^2 + 1 \circ x$$

$$f(4) = -4^2 + 1 \cdot (4) = -16 + 4 = -12$$

$$f'(4) = \lim_{u \rightarrow 4} \frac{f(u) - f(4)}{u - 4} = \lim_{u \rightarrow 4} \frac{-u^2 + 1 \cdot u - (-12)}{u - 4} = \lim_{u \rightarrow 4} \frac{-(u^2 - 1 \cdot u + 12)}{u - 4}$$

$$\lim_{u \rightarrow 4} \frac{-(u-4)(\cancel{u-3})}{\cancel{u-4}} = -(4-3) = -1 \rightarrow f'(4) = -1$$

$$f'(3) > f'(4)$$

تمرین

۱ اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

$$x=2 \Rightarrow f(2) = 3 \times 4 - 4 + 1 = 9$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x + 1 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+4)}{x-2} = 10 \Rightarrow f'(2) = 10$$

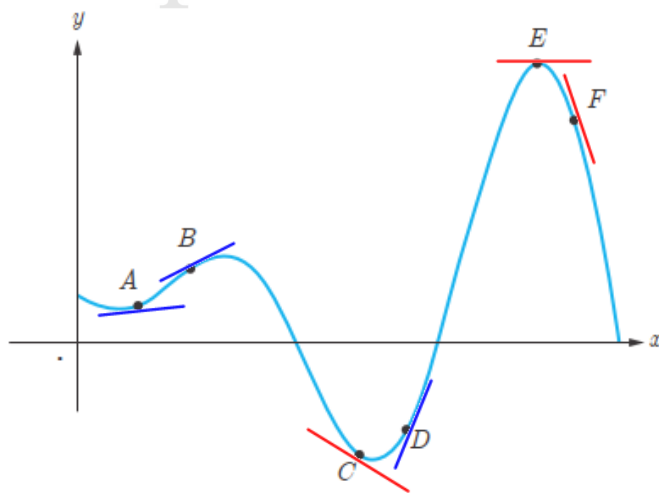
$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 9 = 10(x - 2)$$

$$y = 10x - 11$$

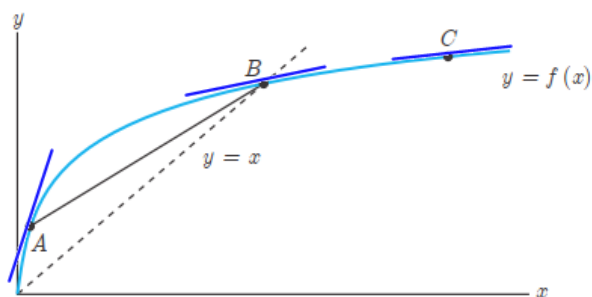
$$\begin{array}{r} 3x^2 - 2x - 8 \quad | \quad x-2 \\ -3x^2 + 6x \\ \hline 4x - 8 \\ -4x + 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	نقطه
-۳	F
-۱	C
۰	E
$\frac{1}{2}$	A
۱	B
۲	D



۳ برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطه A m_1

ب) شیب نمودار در نقطه B m_2

پ) شیب نمودار در نقطه C m_3

ت) شیب خط AB m_4

ث) شیب خط $y=2$ $m_5=0$

ج) شیب خط $y=x$ $m_6=1$

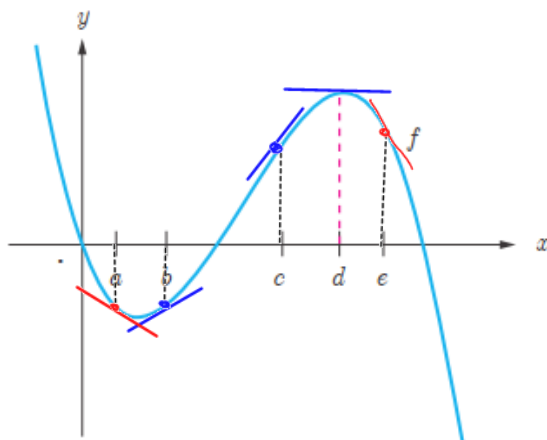
شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب $m_1, m_2, \dots, m_6$

در نظر بگیرید.

$$m_5 < m_3 < m_2 < m_4 < m_6 < m_1$$

۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
d	0
b	0.5
c	2
a	-0.5
f	-2



۵) نقاطی مانند A, B, C, D, E, F و G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری که:

الف) A ، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی

نمودار زیر محور x ها

است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار

مشتق در آن مثبت است.

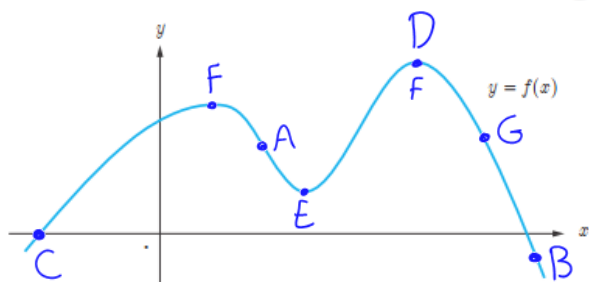
ردي محور x ها

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

نمودار بالای محور x ها تابع نزول



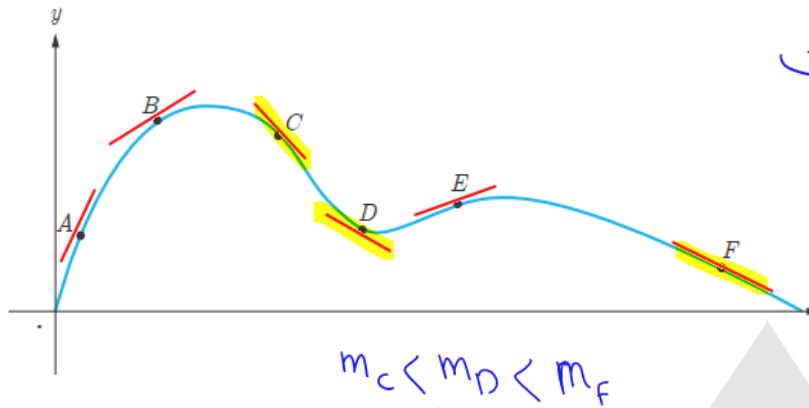
۶) اگر $f(x) = x^3 - 2$ ، $f'(-1)$ را به دست آورید.

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 2 = -3$$

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2 + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x+1} = 1 - (-1) + 1 = 3 \rightarrow f'(-1) = 3$$

۷ نقاط F, E, D, C, B, A را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام یک نادرست است؟



الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است. نادرست

ب) $m_A < m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را

با m_A نمایش داده‌ایم) نادرست

پ) $m_E < m_B < m_A$ درست

ت) شیب منحنی در نقاط C و D, F منفی است. درست

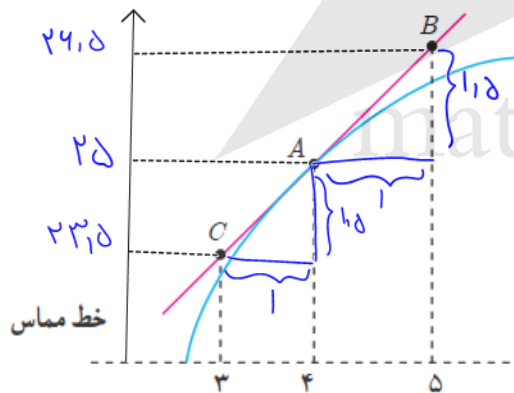
ث) $m_F < m_D < m_C$ نادرست

ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$ درست

$$m = \frac{3}{7} = \frac{1.5}{1}$$

۸ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$ با توجه به شکل

مختصات نقاط A, B, C را بیابید.



$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{y_B - 25}{5 - 4} = \frac{3}{7} \Rightarrow$$

$$2y_B - 50 = 3 \Rightarrow 2y_B = 53 \Rightarrow y_B = 26.5$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{y_C - 25}{3 - 4} = \frac{3}{7} \Rightarrow 7y_C - 50 = 3 \Rightarrow y_C = 22.5$$

$$y - 25 = 1.5(x - 4) \xrightarrow{x=5} B(5, 26.5)$$

$$\xrightarrow{x=3} C(3, 22.5)$$

روشن نمود:

$B(5, 26.5)$

$C(3, 22.5)$

نمونه سوالات نهایی



$$f'(2) = 3$$

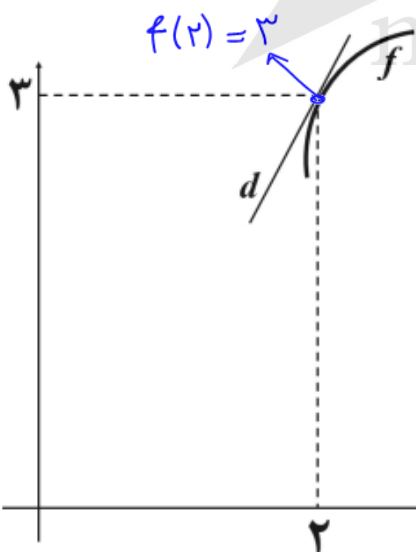
۱- اگر نمودار تابع f از نقطه $A(2, 4)$ بگذرد و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3$ باشد، معادله خط مماس بر نمودار f را در نقطه A بدست آورید.

(خرداد ۱۴۰۳ - ۱ نمره)

$$y - 4 = 3(x - 2)$$

$$y = 3x - 2$$

۲- با توجه به شکل، اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\Delta f(x) - 15}{x - 2} = 10$ باشد معادله خط d را به دست آورید. (شهریور ۱۴۰۳ - ۱/۲۵ نمره)



$$\lim_{x \rightarrow 2} \Delta \left(\frac{f(x) - 3}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \Delta \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right) = \Delta f'(2)$$

$$\Delta f'(2) = 10 \Rightarrow f'(2) = 2$$

$$y - 3 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 1$$

درس دوم

مشتق پذیری و پیوستگی

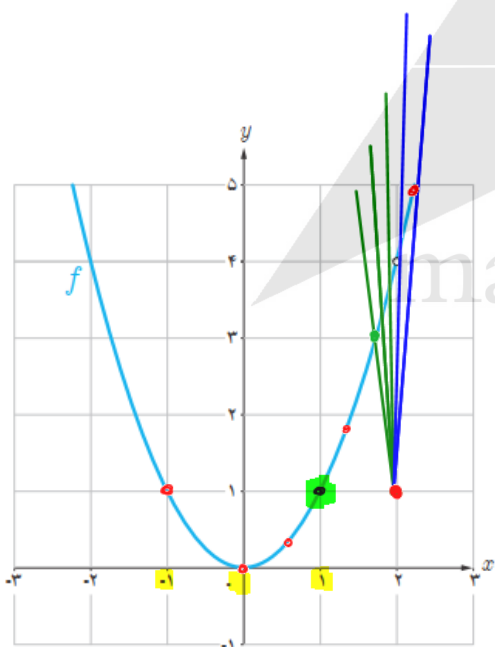
در درس گذشته مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 به یکی از دو صورت زیر تعریف شد:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{یا} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

در صورت وجود حد (متناهی) فوق گفته می‌شود که f در x_0 مشتق پذیر است. در مطالعه رفتار یک تابع، مشخص کردن نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق پذیر نیست دارای اهمیت است. در فعالیت زیر با یکی از حالت‌هایی که یک تابع در آن مشتق پذیر نیست آشنا می‌شوید.

فعالیت

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ (شکل مقابل) را در نظر می‌گیریم:



الف) چگونه به کمک نمودار تابع و تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس می‌توانید استدلال کنید که $f'(2)$ وجود ندارد؟ اگر برای بررسی مشتق پذیری این تابع در $x = 2$ تعریف مشتق f در $x = 2$ را به کار گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

حد صورت کسر برابر ۳ است و حد مخرج کسر برابر صفر است. وقتی $x \rightarrow 2$ ، داریم:

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = +\infty$$

$$\frac{2-1}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = -\infty$$

$$\frac{2-1}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ موجود (و متناهی) نیست، پس $f'(2)$ وجود ندارد.

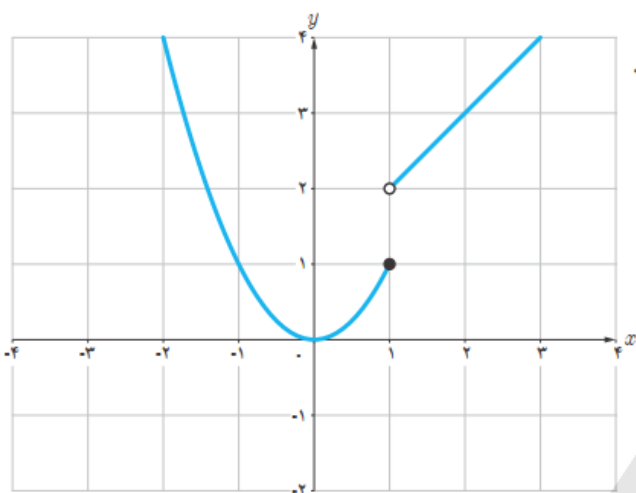
ب) نقطه دیگری (به جز $x = 2$) در نظر بگیرید. آیا تابع در این نقطه مشتق پذیر است؟ پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

مشتق برابر است $f'_+(1) = f'_-(1)$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$



تابع g (شکل روبه‌رو) را به صورت $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ در نظر می‌گیریم.

چرا $g'(1)$ موجود نیست؟

در $x=1$ تابع ناپیوسته است پس مشتق ناپذیر است.

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

در $x=1$
مشتق ناپذیر نیست $\Rightarrow$

math-pilevar.ir

نکته: ارتباط بین پیوستگی و مشتق پذیری



● ۱- اگر تابع f در نقطه $x = a$ ناپیوسته باشد، حتماً در این نقطه مشتق پذیر نخواهد بود.

مشتق ناپذیری $\Rightarrow$ ناپیوستگی

● ۲- اگر تابع f در نقطه $x = a$ مشتق پذیر باشد، حتماً در این نقطه پیوسته بوده است.

پیوستگی $\Rightarrow$ مشتق پذیری

توابع f و g فعالیت و کار در کلاس قبل به ترتیب در $x=2$ و $x=1$ ناپیوسته بودند و همان گونه که مشاهده کردید، $f'(2)$ و $g'(1)$ موجود نبودند. بنابراین به نظر می‌رسد که اگر تابعی در یک نقطه مشتق پذیر باشد، الزاماً در آن نقطه باید پیوسته باشد. این مطلب را به عنوان یک قضیه ثابت می‌کنیم.

قضیه: اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد آن گاه f در a پیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = 0$$

اثبات: کافی است نشان دهیم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} ((x-a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a})$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (x-a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) = 0 \cdot f'(a) = 0$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$ و از آنجا $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (چرا؟)

با توجه به این قضیه به طور منطقی می‌توان نتیجه گرفت که:

اگر تابع f در a پیوسته نباشد، آن گاه f در a مشتق پذیر هم نیست.

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه درست نیست، یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی‌توان مشتق پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

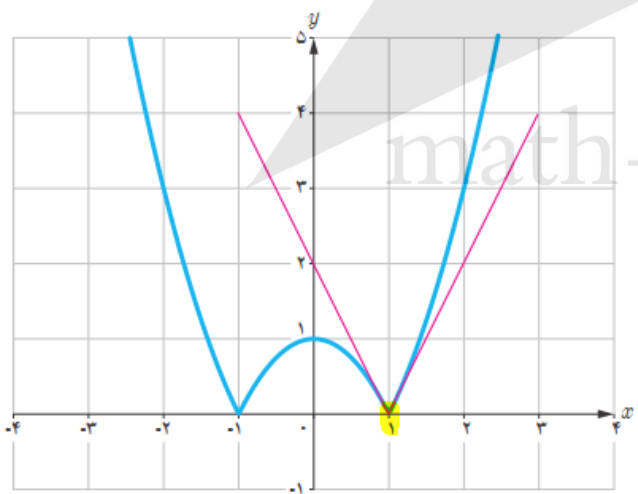
مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1}$$

برای محاسبه $f'(1)$ ناچاریم حدهای راست و چپ را به دست آوریم.

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = -2$$



بنابراین $f'(1)$ موجود نیست. به عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x=1$ وجود ندارد. اما حدهای یک طرفه فوق را می توان با وجود نیم خط های مماس بر منحنی در نقطه $x=1$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x=1$ نزدیک شویم، شیب نیم خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲ و اگر از سمت چپ به $x=1$ نزدیک شویم، شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر -۲ است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق های راست و چپ f در $x=1$ می نامیم و با $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ نمایش می دهیم.

در مثال قبل f در $x=1$ پیوسته است ولی f در آن مشتق پذیر نیست.

نیم خط های مماس راست و چپ را به اختصار، نیم مماس راست و چپ می نامیم.

در حقیقت:

شیب نیم مماس چپ $f'_-(1) =$

شیب نیم مماس راست $f'_+(1) =$

معادله این نیم مماس ها نیز به ترتیب عبارت اند از:

نیم مماس راست $y - 0 = 2(x - 1)$ یا $y = 2x - 2$ ، $x \geq 1$

نیم مماس چپ $y - 0 = -2(x - 1)$ یا $y = -2x + 2$ ، $x \leq 1$

$$f(x) = |x^2 - 1| \quad f'_+(1) = 2 \quad A(1, 0)$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2$$

$$f'_-(1) = -2 \quad A(1, 0) \Rightarrow y - 0 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 2$$

تذکره:



۱- اگر تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته باشد، نمی توان لزوما نتیجه گرفت که f در این نقطه مشتق پذیر است!

f در $x = a$ پیوسته است

ممکن است f مشتق پذیر باشد.

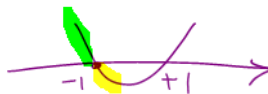
ممکن است f مشتق پذیر نباشد.

۲- اگر تابع f در نقطه $x = a$ مشتق پذیر نباشد، ممکن است f در آن نقطه پیوسته باشد یا نباشد!

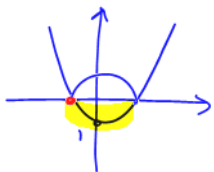
f در $x = a$ مشتق پذیر نباشد

ممکن است f پیوسته باشد.

ممکن است f پیوسته نباشد.



$$f(x) = |x^2 - 1|$$



نشان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل در $x = -1$ نیز موجود نیست.
در صورت امکان معادله نیم مماس های راست و چپ در $x = -1$ را بنویسید.



$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-(x-1)}{1} = +2$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-1)}{1} = -2$$

$$f'_+(-1) = f'_-(-1) \Rightarrow \text{تابع در } x = -1 \text{ مشتق پذیر نیست}$$

math-pilevar.ir

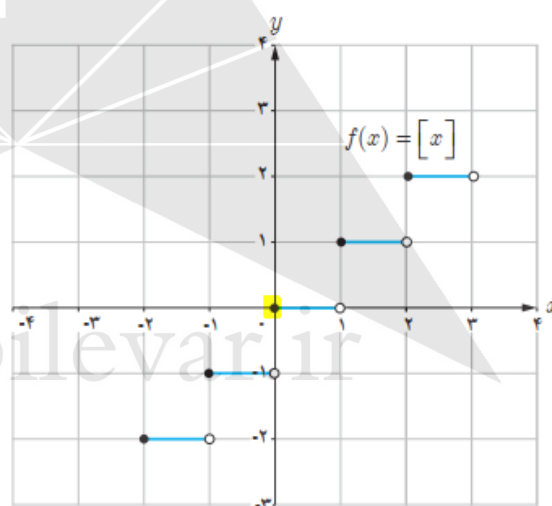
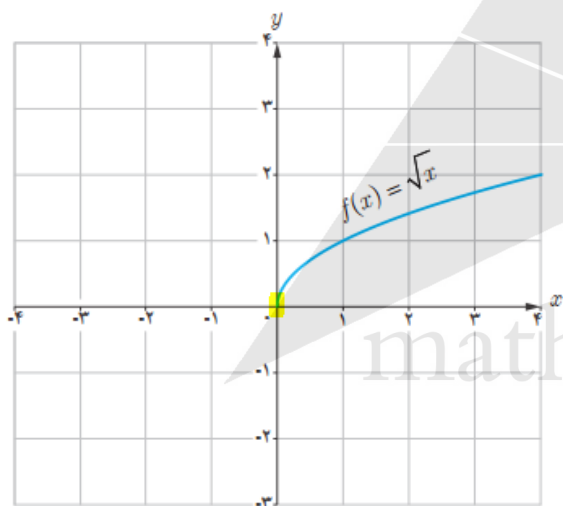
تعریف: مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x = a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

یا به طور معادل:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال: توابع $f(x) = [x]$ و $g(x) = \sqrt{x}$ در صفر پیوسته نیستند. بنابراین $f'(0)$ و $g'(0)$ موجود نیستند.



اکنون به بررسی حالت دیگری می‌پردازیم که در آن تابع مشتق پذیر نیست.

مثال: تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نظر می‌گیریم. مشتق‌پذیری این تابع را در $x = 0$ بررسی کنید.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

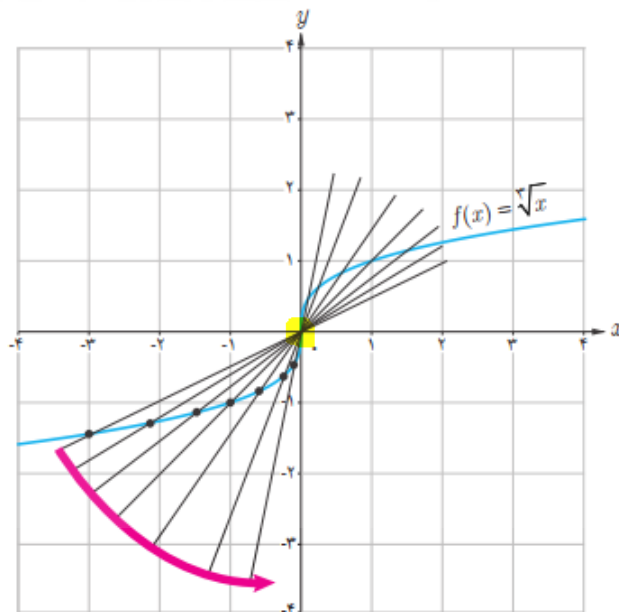
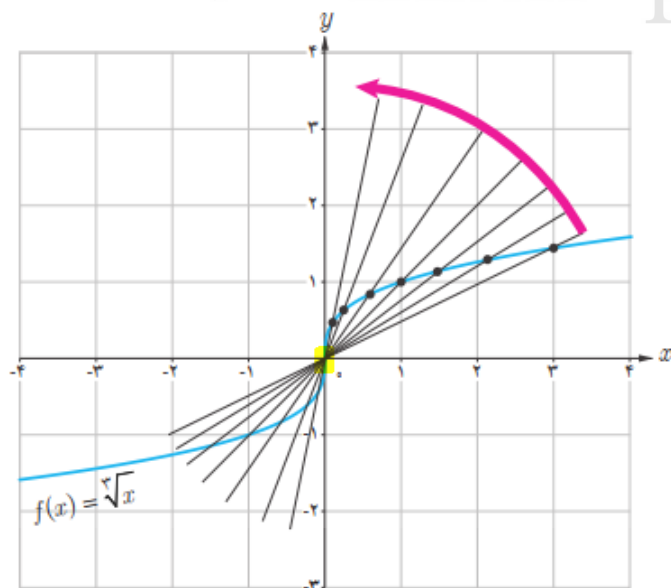
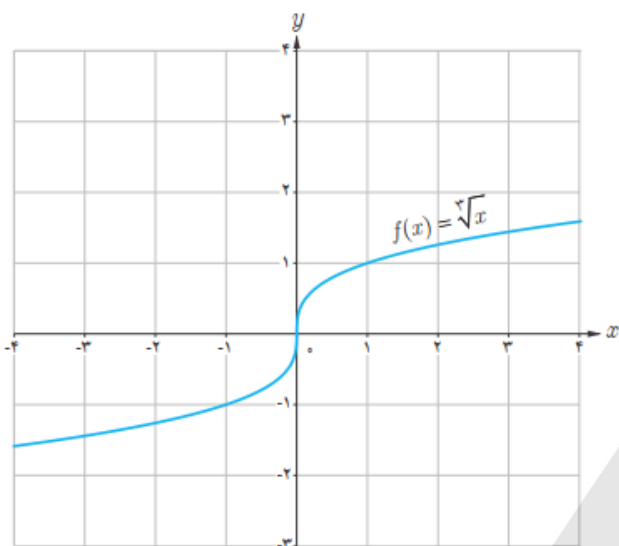
بنابراین تابع f در صفر مشتق پذیر نیست. شکل‌ها نشان می‌دهند که وقتی

از سمت راست یا چپ به نقطه صفر نزدیک می‌شویم خط‌های قاطع به

خط $x = 0$ نزدیک می‌شوند.

تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ مشتق پذیر نیست. خط $x = 0$ را «مماس

قائم» منحنی می‌نامیم.



اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتق چپ و راست نامتناهی داشته باشد، در این صورت خط $x=a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a, f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

به طور خلاصه می‌توان گفت:

اگر تابع f در $x=a$ هر یک از شرایط زیر را داشته باشد، در این صورت f در این نقطه مشتق پذیر نیست.

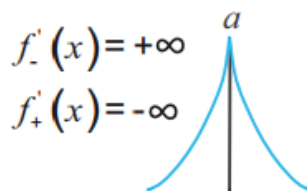
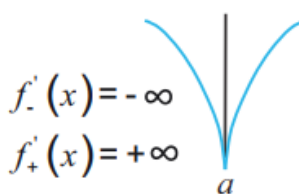
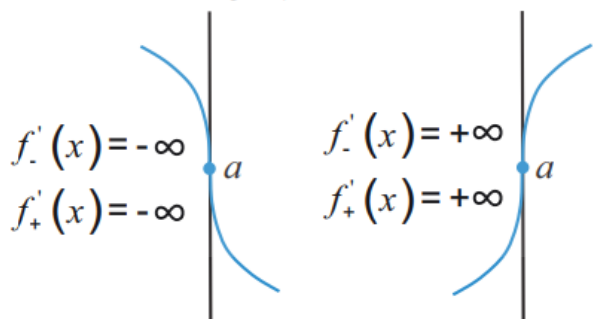
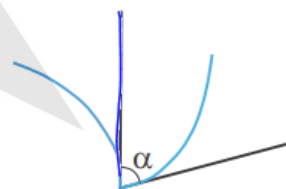
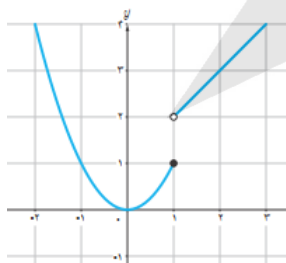
۱- f در a پیوسته نباشد.

۲- f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

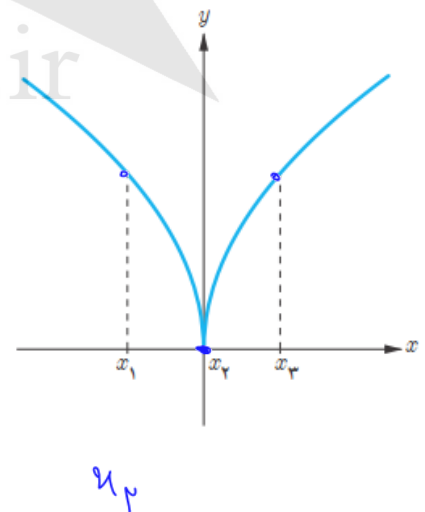
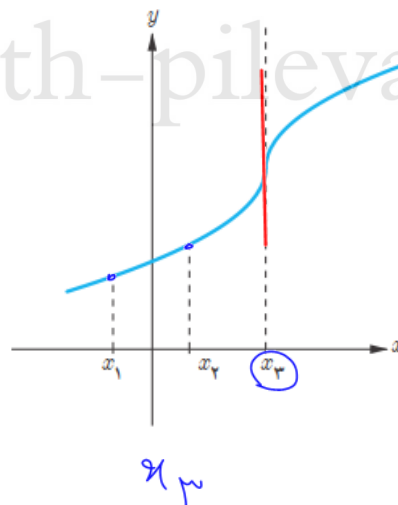
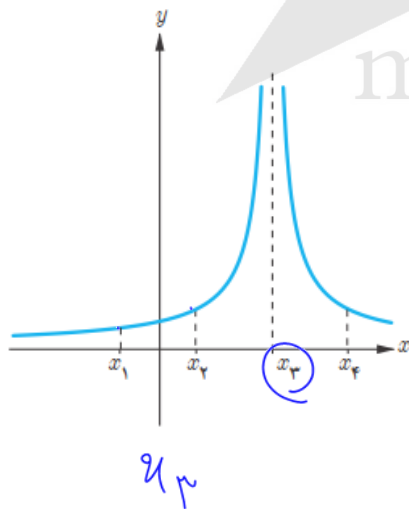
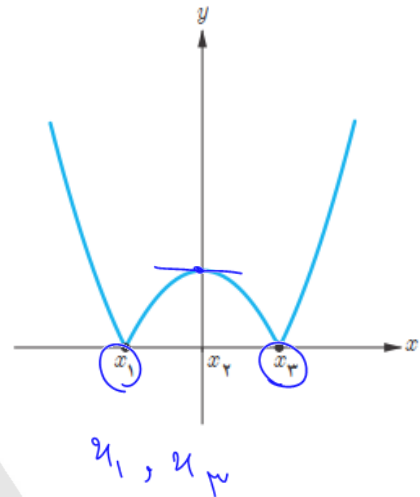
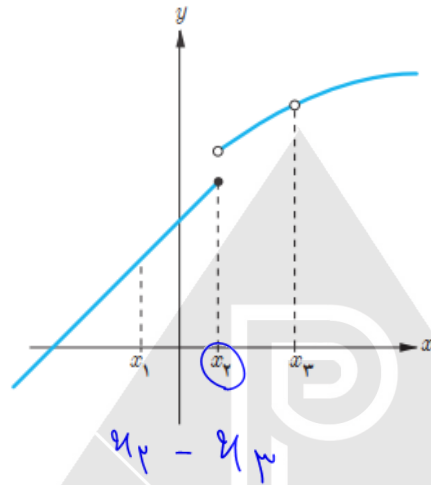
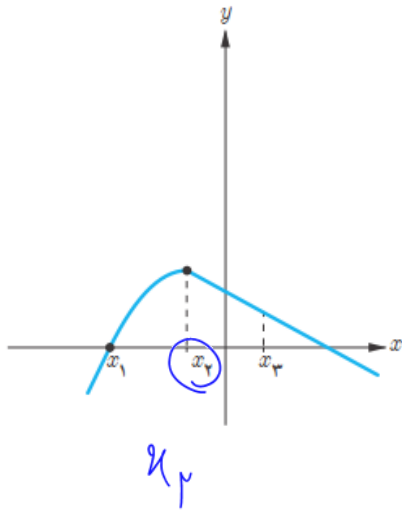
الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).

پ) هر دو نامتناهی باشند.



در شکل های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق پذیر نیست.

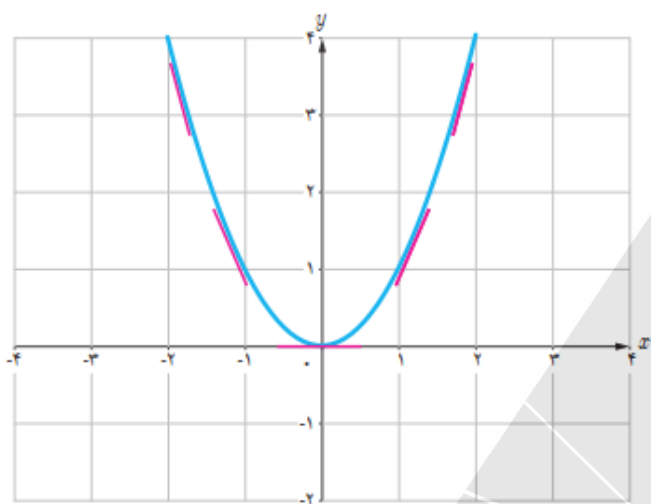


تابع مشتق

تاکنون با مفهوم مشتق تابع در یک نقطه (معین) آشنا شده‌اید. حال به دنبال یافتن رابطه‌ای بین مجموعه نقاط متعلق به دامنه یک تابع و مشتق تابع در آن نقاط هستیم.

فعالیت

تابع $f(x) = x^2$ را در نظر می‌گیریم.



جدول زیر را کامل کنید (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده‌اند).

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	۲
$f'(x)$	-۶	-۴	-۲	۰	۱	$2\sqrt{3}$	۴

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -4$$

$$f'(\sqrt{3}) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

می‌دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکتاست، بنابراین $f'(x)$ تابعی از x است. حدس می‌زنید در چه نقاطی مشتق تابع $f(x) = x^2$ وجود دارد؟

در همه اعداد حقیقی

اگر x عضوی از دامنه تابع f باشد، تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مشروط بر آنکه حد فوق موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه f' می‌نامیم.

به طور مثال برای تابع $f(x) = x^2$ ، دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. روش محاسبه ضابطه تابع f' نیز، در ادامه ارائه شده است.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2\cancel{h}x + \cancel{h^2} - \cancel{x^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(2x + h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

بنابراین $f'(x) = 2x$. همان گونه که قبلاً ذکر شد دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. به کمک این دستور مقدار مشتق تابع $f(x) = x^2$ در هر نقطه را می‌توان حساب کرد، به طور مثال:

$$f'(-\frac{1}{5}) = -\frac{2}{5}, \quad f'(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \quad \text{و} \quad f'(50) = 100$$

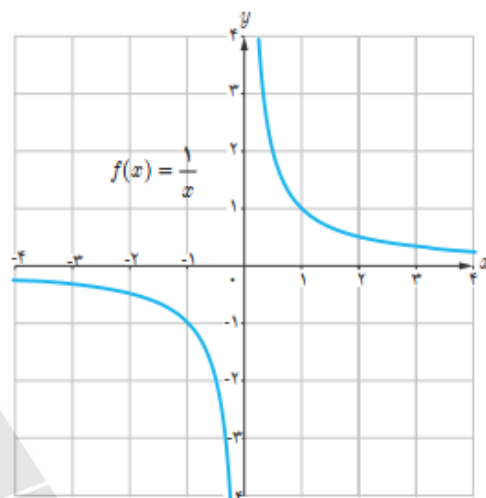
$$2 \times (-\frac{1}{5}) \quad \downarrow \quad 50 \times 2$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید. $f'(3)$ را با استفاده از تابع مشتق و سپس با استفاده از تعریف مشتق در $x=3$ به دست آورید.

$$\frac{u - u - h}{u(u+h)}$$

حل: $f'(0)$ وجود ندارد. دامنه f' برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است. اگر $x \neq 0$ داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f'(3) &= -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9} & f'(-2) &= -\frac{1}{(-2)^2} = -\frac{1}{4} \\ f'(\sqrt{5}) &= -\frac{1}{(\sqrt{5})^2} = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

با استفاده از دستور فوق داریم: $f'(3) = -\frac{1}{9}$ البته مشتق f در هر نقطه دیگر ($x \neq 0$) را نیز به کمک این دستور می توان محاسبه کرد،

به طور مثال: $f'(\sqrt{5}) = -\frac{1}{5}$ و $f'(-2) = -\frac{1}{4}$ ، $f'(3)$ را به طور مستقیم نیز می توان حساب کرد:

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{3 - x}{3x}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{3x(x-3)} = -\frac{1}{9}$$

در عمل هنگام حل مسائل با توجه به شرایط هر یک از دو روش فوق ممکن است مورد استفاده قرار گیرد.

$f(x) = \begin{cases} 5x & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ اگر دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \Delta u = \Delta x = \Delta \quad \left. \begin{array}{l} f(u) \text{ در } u=1 \text{ پیوسته نیست} \\ \text{پس در } u=1 \text{ مشتق ناپذیر است} \end{array} \right\}$$

$$f(1) = 2$$

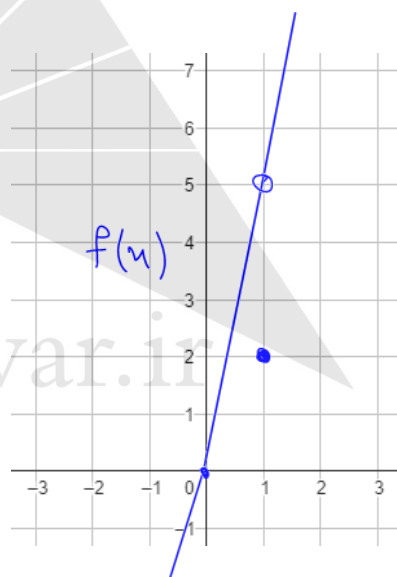
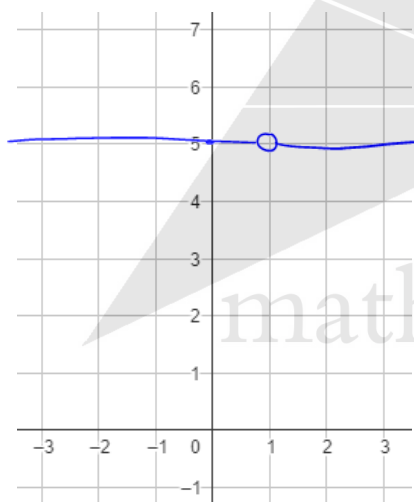
$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_{f'} = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$f'(u) = \begin{cases} 5 & u \neq 1 \\ \text{تعریف نشده} & u = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 5x & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{5}{1}$$

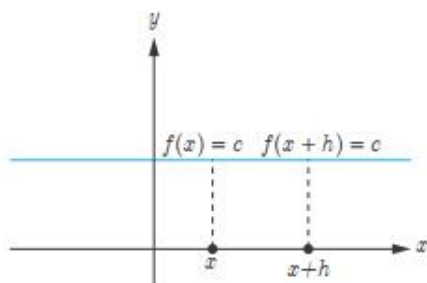


اکنون آماده هستیم که برای برخی از توابع، تابع مشتق را محاسبه کنیم.

محاسبه تابع مشتق برخی توابع

۱- اگر $f(x) = c$ آن گاه $f'(x) = 0$. به عبارت دیگر مشتق تابع ثابت در هر نقطه برابر صفر است.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$



به طور مثال اگر $f(x) = 7$ و $g(x) = -\frac{2}{5}$ آن گاه $f'(x) = 0$ و $g'(x) = 0$.

۲- اگر $n \in \mathbb{N}$ و $f(x) = x^n$ آن گاه $f'(x) = nx^{n-1}$.

این دستور کاربرد زیادی دارد. قبلاً ثابت کردیم که اگر $f(x) = x^1$ ، آن گاه $f'(x) = 1x$. همچنین اگر $f(x) = x^2$ ، به کمک این دستور نشان

$$3x^{3-1} = 3x^2$$

$$2x^{2-1} = 2x$$

می دهیم که: $f'(x) = 3x^2$

ابتدا این رابطه آخر را ثابت می کنیم و از روش ارائه شده برای اثبات دستور مشتق $f(x) = x^n$ استفاده می کنیم. اگر $f(x) = x^3$ داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cancel{x}+h-\cancel{x})[(x+h)^2 + \cancel{x}(x+h) + \cancel{x}^2]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{\cancel{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} [(x+\cancel{h})^2 + x(x+\cancel{h}) + x^2] = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2 \end{aligned}$$

سومین تساوی در اثبات فوق بر اساس اتحاد $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ به دست آمده است.

در حالت کلی می توان نشان داد که: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$ (از این اتحاد در ادامه برای محاسبه مشتق $f(x) = x^n$ استفاده شده است).

اکنون اگر $f(x) = x^n$ ، محاسبات کمی دشوارتر می‌شود، اما در عوض دستور مهم‌تری را ثابت کرده‌ایم:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cancel{x+h} - \cancel{x})[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}\cancel{x} + \dots + (x+h)\cancel{x}^{n-2} + \cancel{x}^{n-1}]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} [(x+\cancel{h})^{n-1} + (x+\cancel{h})^{n-2}\cancel{x} + \dots + (x+\cancel{h})\cancel{x}^{n-2} + \cancel{x}^{n-1}] \\
 &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{\text{بار } n} = nx^{n-1}
 \end{aligned}$$

۳- به طور کلی اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x) = x^n$ آن‌گاه: $f'(x) = nx^{n-1}$

مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $x \neq 0$ قبلاً دیدید که $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

همچنین با استفاده از دستور اخیر داریم: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

مثال:

$$\begin{aligned}
 y &= x^5 \Rightarrow y' = 5x^4 \\
 y &= x^{-3} \Rightarrow y' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}
 \end{aligned}$$

۴* - اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $x > 0$ آن‌گاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x+h} - \cancel{x}}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

۵- اگر $f(x) = \sqrt{ax+b}$ و $ax+b > 0$ آن گاه $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b})(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{ax} + ah + \cancel{b} - \cancel{ax} - \cancel{b}}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b}} = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}
 \end{aligned}$$

۶- اگر $f(x) = \sqrt[3]{x}$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} + \cancel{h} - \cancel{x}}{\cancel{h} \cdot A} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}
 \end{aligned}$$

$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2}$

۷- اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق پذیر باشند، آن گاه توابع kf ($k \in \mathbb{R}$)، $f \pm g$ و fg

($g(a) \neq 0$) نیز در $x = a$ مشتق پذیرند و داریم:

الف) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

ب) $(kf)'(a) = kf'(a)$

پ) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

ت) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

به کمک تعریف مشتق هر یک از روابط بالا را می‌توان ثابت نمود، اما در این کتاب به اثبات آنها نمی‌پردازیم.
مثال: مشتق چند تابع محاسبه شده است.

الف) $f(x) = -\frac{2}{3}x^4 \Rightarrow f'(x) = -\frac{8}{3}x^3$

ب) $g(x) = x^5 + 4x^3 - \sqrt{2}x + 1 \Rightarrow g'(x) = 5x^4 + 12x^2 - \sqrt{2}$

پ) $h(x) = (2x^3+1)(-x^2+7x-2) \Rightarrow h'(x) = 6x^2(-x^2+7x-2) + (2x^3+1)(-2x+7)$

ت) $t(x) = \frac{x^2-4}{3x+1} \Rightarrow t'(x) = \frac{2x(3x+1) - 3(x^2-4)}{(3x+1)^2}$

کار در کلاس

۱ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید:

الف) $f(x) = \frac{1}{x-4} \Rightarrow f'(x) = \frac{0(x-4) - 1 \times 1}{(x-4)^2} = \frac{-1}{(x-4)^2}$

$u = x-4$

از مشتق $(\frac{1}{u})' \rightarrow -\frac{1}{u^2} \cdot u' \Rightarrow -\frac{1}{(x-4)^2} \times 1$

ب) $g(x) = \sqrt{x}(3x^2+5) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^2+5) + \sqrt{x}(6x)$

$g'(x) = (\sqrt{x})'(3x^2+5) + \sqrt{x}((3x^2+5)')$

پ) $h(x) = \frac{1}{2x^2+x-1} \Rightarrow h'(x) = \frac{1(2x^2+x-1) - (4x+1) \times 1}{(2x^2+x-1)^2}$

۲ اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 5$ ، $g(2) = 8$ و $g'(2) = -6$ مقدار $(fg)'(2)$ و $(\frac{f}{g})'(2)$ را به دست آورید.

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(2) &= f'(2)g(2) + g'(2) \cdot f(2) \\ &= 5 \times 8 + (-6) \times 3 = 40 - 18 = 22\end{aligned}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2) \cdot g(2) - g'(2) \cdot f(2)}{(g(2))^2} = \frac{5 \times 8 - (-6) \times 3}{8^2} = \frac{64}{64}$$

مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری

اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب $f \circ g$ مشتق پذیر است و داریم:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) f'(g(x))$$

مثال: اگر $h(x) = (x^2 + 3x + 1)^6$ ، مطلوب است $h'(x)$.

حل: اگر $f(x) = x^6$ و $g(x) = x^2 + 3x + 1$ آن گاه: $h(x) = f(g(x))$

$$h'(x) = g'(x) f'(g(x)) = (2x + 3) f'(g(x))$$

اگر $g(x) = u$ آن گاه لازم است که $f'(u)$ را پیدا کنیم.

$$f(u) = u^6 \Rightarrow f'(u) = 6u^5 = 6(g(x))^5 = 6(x^2 + 3x + 1)^5$$

بنابراین:

$$h'(x) = (2x + 3) (6) (x^2 + 3x + 1)^5$$

دستور فوق را به صورت زیر نیز می توان ارائه کرد،

اگر f تابعی بر حسب u و u تابعی از x باشد:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' f'(u)$$

مثال: مشتق تابع $y = \left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^5$ را به دست آورید.

حل: با فرض $\frac{x^2}{3x-1} = u$ داریم: $y = u^5$ و از آنجا:

$$y' = u' \cdot 5u^4 = \frac{2x(3x-1) - 3x^2}{(3x-1)^2} \cdot 5 \left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^4 = 5 \left(\frac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2}\right) \left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^4$$

کار در کلاس

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = (x^2+1)^3(5x-1) \Rightarrow f'(x) = 3(x^2+1)^2 \cdot 2x \cdot (5x-1) + (x^2+1)^3 \cdot 5$

$$f'(x) = (3(x^2+1)^2)(5x-1) + (x^2+1)^3(5)$$

$$u^3 \rightarrow 3u^2 \cdot u'$$

$$3(x^2+1)^2 \cdot 2x$$

ب) $g(x) = \left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^4 \Rightarrow g'(x) = 4 \times \left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^3 \times \frac{-3x(x^2+5) - (x^2+5)(-3x-1)}{(x^2+5)^2}$

$$u^4 \Rightarrow 4u^3 \cdot u'$$

مشتق پذیری روی یک بازه

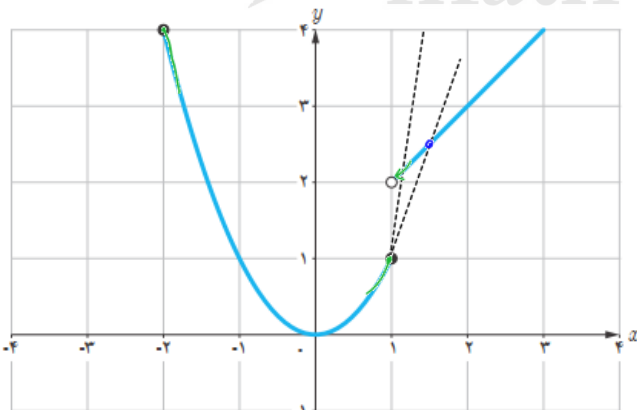
تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.
تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه f در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

کار در کلاس

مشتق پذیری روی بازه‌های $[a, b]$ و (a, b) را به طور مشابه تعریف کنید.
تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است هرگاه f در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد، در نقطه a مشتق راست داشته باشد

تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه f در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد، در نقطه b مشتق چپ داشته باشد.

math-pilevar.ir



اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق پذیر باشد، گوییم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ مشتق پذیر است.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

f روی بازه‌های $[-2, 1]$ و $(1, \infty)$ مشتق پذیر است. ولی f روی بازه $[1, 2]$ مشتق پذیر نیست (چرا؟)

$$[-2, 1] \Rightarrow \begin{cases} -2 < x < 1 & \checkmark \\ f'_-(1) & \checkmark \\ f'_+(-2) & \checkmark \end{cases}$$

مشتق پذیر

$$[1, 2] = \begin{cases} 1 < x < 2 & \checkmark \\ f'_+(1) = +\infty & \times \\ f'_-(2) & \checkmark \end{cases}$$

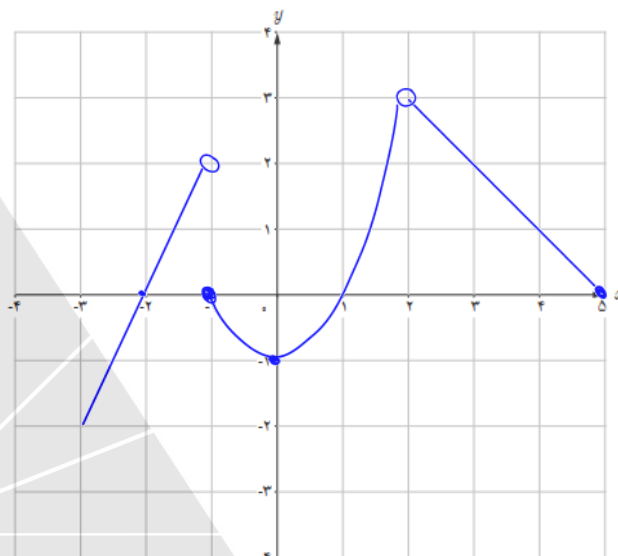
مشتق ناپذیر

$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 \leq x < 5 \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق پذیری f را روی بازه‌های $[-1, 1]$ ، $(2, 5)$ و $[-2, 0]$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 \leq x < 5 \end{cases}$$

کرفال

$$\begin{array}{r|rr} & -1 & -2 \\ \hline & 2 & 0 \\ \hline & -1 & 2 \\ \hline & 0 & 3 \\ \hline & 2 & 5 \\ \hline & 3 & 0 \end{array}$$



$$[-1, 1] \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 & \checkmark \\ f'_+(-1) & \checkmark \\ f_-(-1) & \checkmark \end{cases}$$

مشتق پذیر

$(2, 5)$

مشتق پذیر

$$[-2, 0] \Rightarrow \begin{cases} -2 < x < 0 & \times \\ f'_+(-2) & \checkmark \\ f'_-(0) & \checkmark \end{cases}$$

مشتق ناپذیر

math-pilevar.ir

مشتق مرتبه دوم

مشتق تابع $y=f(x)$ با نماد $y'=f'(x)$ نمایش داده شد. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y=f(x)$ را به $y''=f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y'=f'(x)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

مثال: اگر $y=3x^2+2x-1$ آن گاه:

$$y'=12x^2+4x, \quad y''=36x^2+4$$

$$12x^2+4x$$

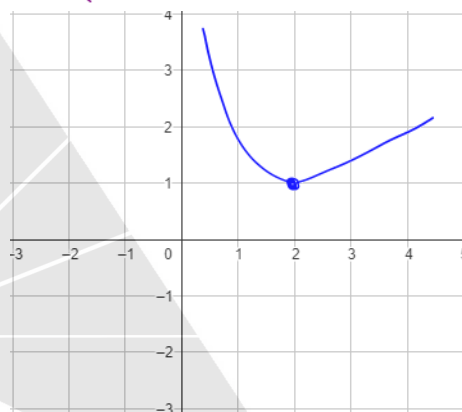
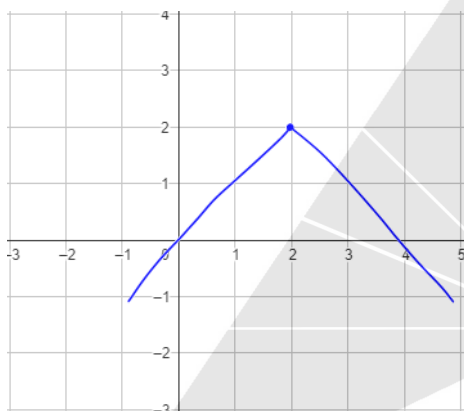
تمرین

۱ دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق پذیر نباشند.

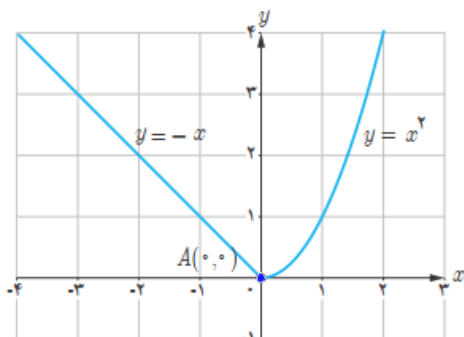
$$f(x) = |x-2|$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 2 \\ -x+4 & x < 2 \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 2x & x > 2 \\ -1 & x < 2 \end{cases}$$



۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A ، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق پذیر نیستند.



(الف)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

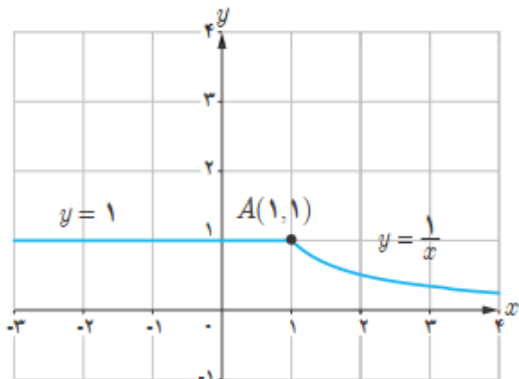
$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$f'_+(0) = 2 \times 0 = 0$$

$$\Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

$$f'_-(0) = -1$$

مشتق پذیر نیست

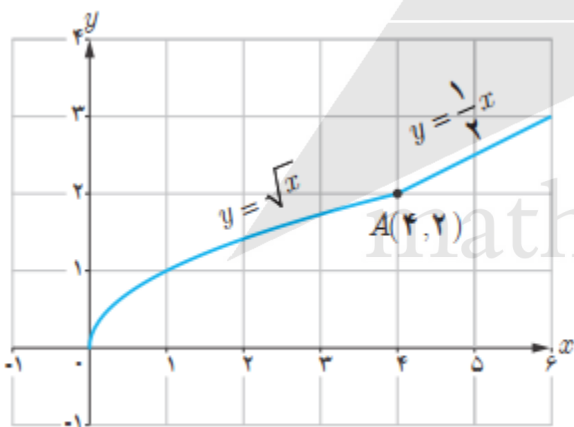


(ب)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & x > 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = -1 \Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1) \quad \text{مستقیم نیست}$$

$$f'_-(1) = 0$$



(ب)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & x \geq 4 \\ \sqrt{x} & x < 4 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x > 4 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & x < 4 \end{cases}$$

$$f'_+(4) = \frac{1}{4} \Rightarrow f'_+(4) \neq f'_-(4) \quad \text{مستقیم نیست}$$

$$f'_-(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۳ تابع $f(x) = \begin{cases} 5x-4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x+6 & x > 3 \end{cases}$ داده شده است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.
ب) با توجه به نمودار تابع f بگویید که چرا $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند؟
ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

تفاضل

$$f(x) = \begin{cases} 5x-4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x+6 & x > 3 \end{cases}$$

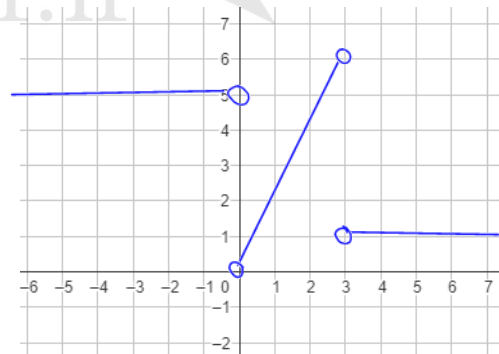
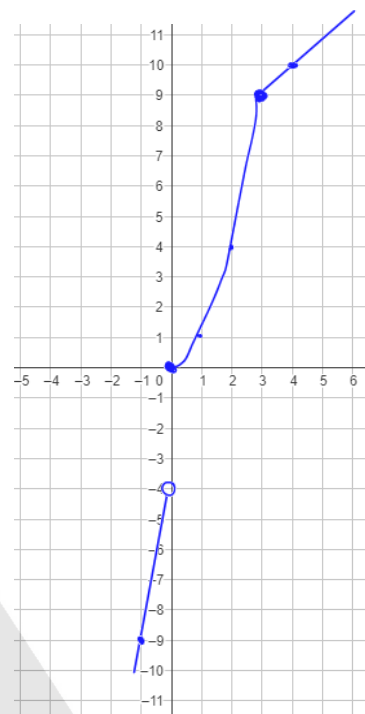
تفاضل

ب: در $x=0$ تابع نابریسته است و در $x=3$ نقطه گوشه‌ای است پس مشتق نابگیرند.

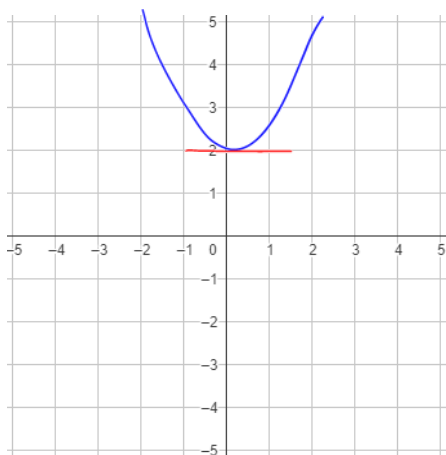
تفاضل

$$f'(x) = \begin{cases} 5 & x < 0 \\ 2x & 0 < x < 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

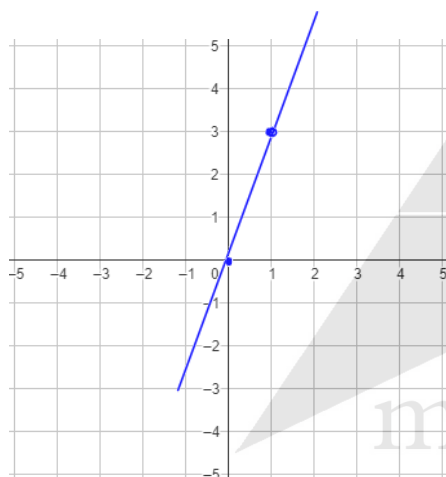
تفاضل



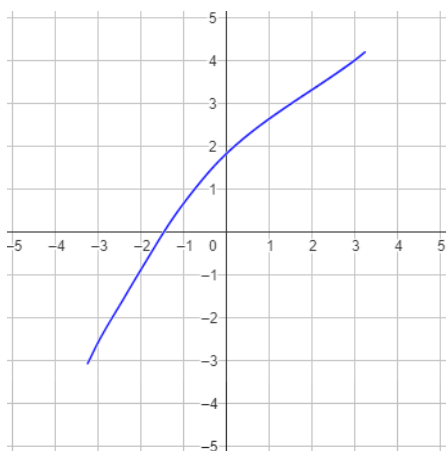
۴ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن
الف) در یک نقطه برابر صفر شود.



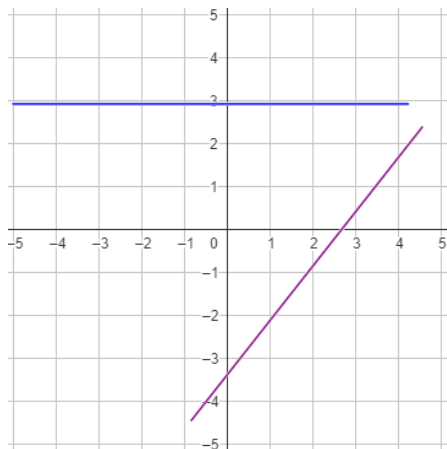
ب) در $x = 2$ برابر ۳ شود.



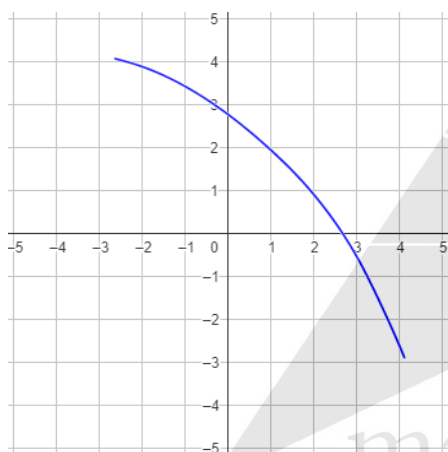
پ) در تمام نقاط مثبت باشد.



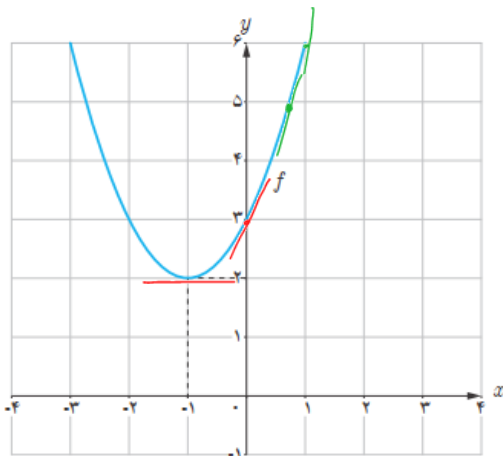
ت) در تمام نقاط یکسان باشد.



ث) در تمام نقاط منفی باشد.



math-pilevar.ir



۵

الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

$$f'(-1) < f'(0) < f'(2) < f'(3)$$

$$f'(2) \text{ و } f'(-1) \text{ و } f'(0) \text{ و } f'(3)$$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ بررسی کنید.

پ) تابع مشتق را رسم کنید.

$$f'(x) = 2x + 2$$

$$f'(2) = 2 \times 2 + 2 = 6$$

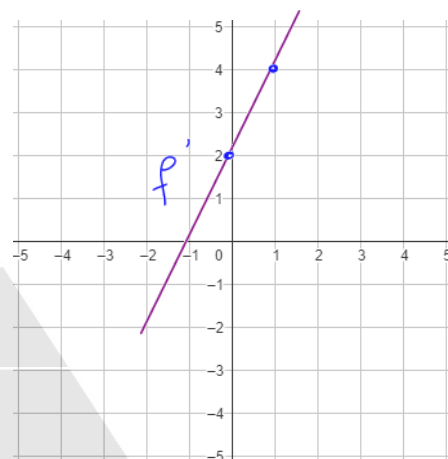
$$f'(0) = 2(0) + 2 = 2$$

$$f'(-1) = 2(-1) + 2 = 0$$

$$f'(3) = 2 \times 3 + 2 = 8$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 2 & 2 \end{array}$$

$$f'(-1) < f'(0) < f'(2) < f'(3)$$



math-pilevar.ir

۶ مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 3 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2$$

$$f(1) = 4$$

تابع در $x=1$ پیوسته نیست پس مشتق پذیر نیست

۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

$$y = -2x + 3$$

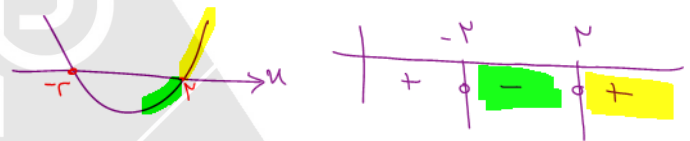
$$y = -2x + 1$$

$$y = -2x$$

۸ اگر $f(x) = |x^2 - 4|$ به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری f را در نقاط به طول های ۲ و -۲ بررسی کنید.

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} =$$

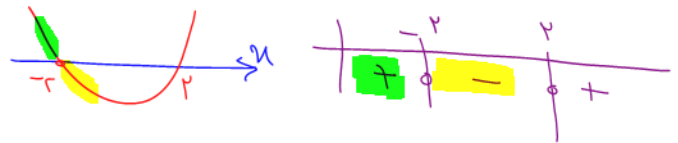
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$



$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = -4$$

$$f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x^2 - 4|}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-(x-2)(x+2)}{x+2} = -(-2-2) = -(-4) = 4$$



$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x^2 - 4|}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = -4$$

۹ مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ را به دست آورده و مشخص کنید در چه نقطه‌ای مماس قائم دارد؟

$$f(u) = \sqrt[3]{u^2} = \sqrt[3]{u} \rightarrow f'(u) = \frac{1}{\sqrt[3]{u^2}} \cdot u'$$

$$u^2 = u$$

$$f'(u) = \frac{1}{\sqrt[3]{(u^2)^2}} \times u^2 = \frac{1 \times u^2}{\sqrt[3]{u^4}} = \frac{u^2}{\sqrt[3]{u^4}} = \frac{u^2}{u^{\frac{4}{3}}} = u^{\frac{2}{3}} \Rightarrow u=0 \text{ مماس قائم}$$

$$f'(0) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u) - f(0)}{u - 0} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{u^2}}{u} \times \frac{\sqrt[3]{u}}{\sqrt[3]{u}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^{\frac{2}{3}}}{u^{\frac{4}{3}}} = \begin{cases} u \rightarrow 0^+ : +\infty \\ u \rightarrow 0^- : -\infty \end{cases}$$

ارتباط نمودارهای f و f' با یکدیگر

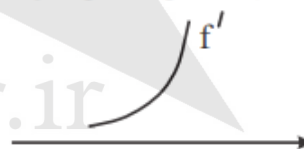


ارتباط نمودارهای f و f' با یکدیگر

نمودار f در بازه I اکیداً صعودی



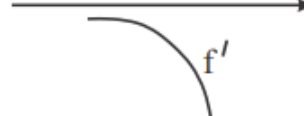
نمودار f' در بازه I بالای محور x ها



نمودار f در بازه I اکیداً نزولی



نمودار f' در بازه I زیر محور x ها



جهت تعقر f در بازه I رو به بالا



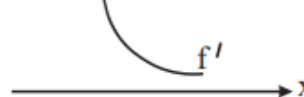
نمودار f' در بازه I اکیداً صعودی



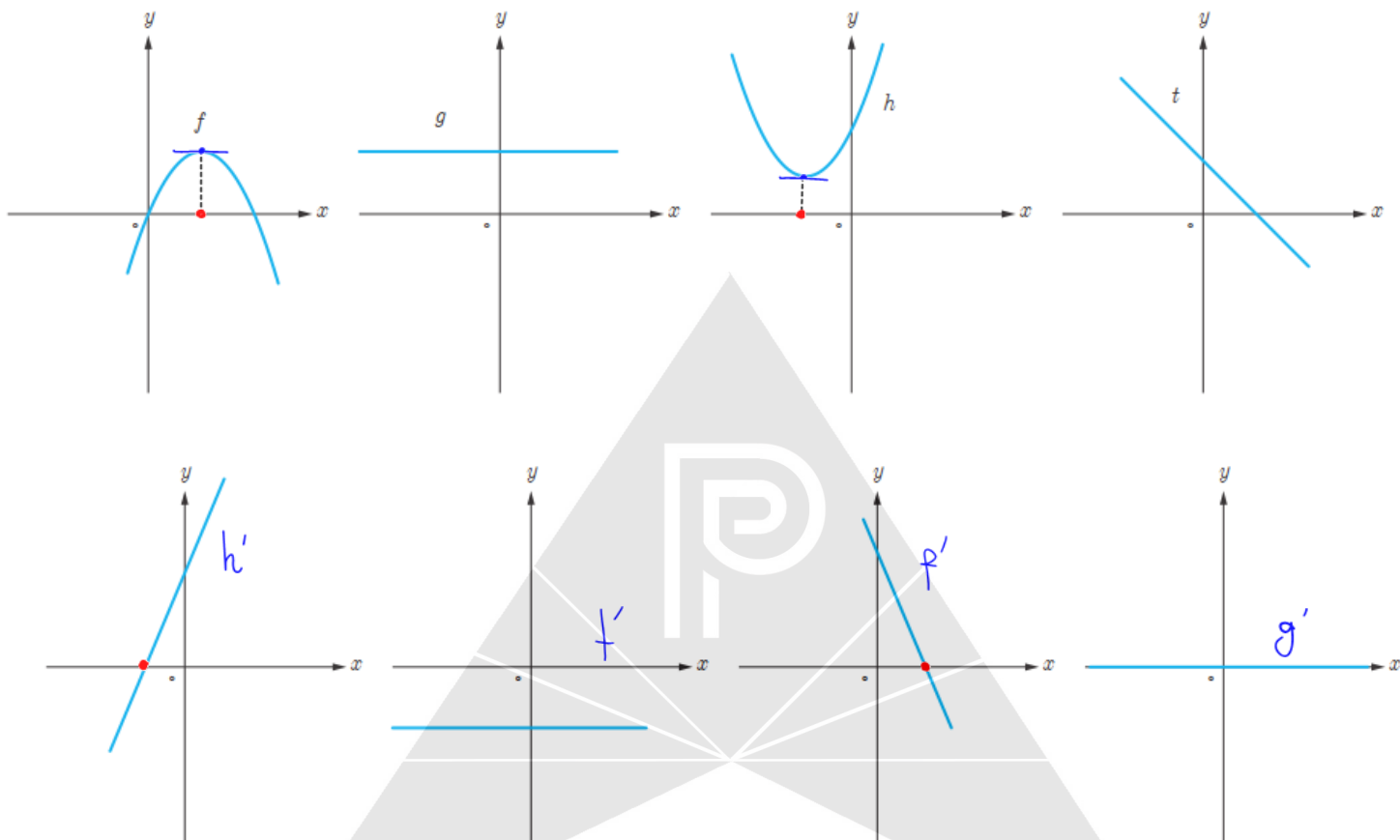
جهت تعقر f در بازه I رو به پایین



نمودار f' در بازه I اکیداً نزولی



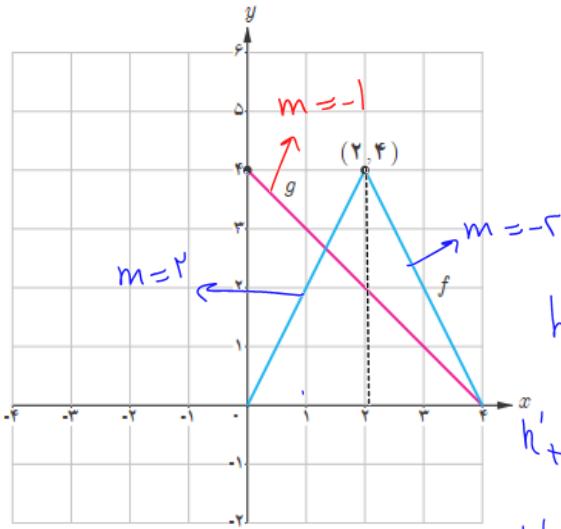
۱۰ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.



۱۱ نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

الف) اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $h'(1)$ ، $h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است $k'(1)$ ، $k'(2)$ و $k'(3)$



$$h'(1) = f'(1) \cdot g(1) + g'(1) \cdot f(1) = 2 \times 3 + (-1) \times 2 = 4$$

$$h'_+(2) = f'_+(2) \cdot g(2) + g'(2) \cdot f(2) = -2 \times 2 + (-1) \times 4 = -8$$

$$h'_-(2) = f'_-(2) \cdot g(2) + g'(2) \cdot f(2) = 2 \times 2 + (-1) \times 4 = 0$$

$$h(3) = f(3) \cdot g(3)$$

$$h'_+(2) \neq h'_-(2) \quad \text{متن پذیر نیست}$$

$$h'(3) = f'(3) \cdot g(3) + g'(3) \cdot f(3) = -2 \times 1 + (-1) \times 2 = -4$$

$$i) \quad k(1) = \frac{f(1)}{g(1)} \Rightarrow k'(1) = \frac{f'(1) \cdot g(1) - g'(1) \cdot f(1)}{(g(1))^2} = \frac{2 \times 3 - (-1) \times 2}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$k(2) = \frac{f(2)}{g(2)} \Rightarrow \begin{cases} k'_+(2) = \frac{f'_+(2) \cdot g(2) - g'(2) \cdot f(2)}{(g(2))^2} = \frac{-2 \times 2 - (-1) \times 4}{2^2} = 0 \\ k'_-(2) = \frac{f'_-(2) \cdot g(2) - g'(2) \cdot f(2)}{(g(2))^2} = \frac{2 \times 2 - (-1) \times 4}{4} = \frac{1}{1} = 1 \end{cases}$$

$$k(3) = \frac{f(3)}{g(3)} \Rightarrow k'(3) = \frac{f'(3) \cdot g(3) - g'(3) \cdot f(3)}{(g(3))^2} = \frac{-2 \times 1 - (-1) \times 2}{1^2} = \frac{0}{1} = 0$$

۱۲ اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است، $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$

$$(f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 3 + 5 = 8$$

$$(3f+2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1) = 3 \times 3 + 2 \times 5 = 19$$

۱۳ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

تابع f در $x=0$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

$$f'_+(0) = 1$$

$$\Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

$$f'_-(0) = 2 \times 0 = 0$$

متن پذیر نیست

۱۴ مشتق توابع داده شده را به دست آورید.

الف) $f(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3$

$$f'(x) = 4x(2x-5)^3 + (3x^2-4) \times 4(2x-5)^2$$

$$f'(x) = ((3x^2-4))(2x-5)^3 + (3x^2-4)((2x-5)^3)'$$

$$(2x-5)^3 \Rightarrow u^3 \rightarrow 3u^2 \cdot u'$$

$$3(2x-5)^2 \cdot 2$$

ب) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(-3x+2) - (-3)(x^2-3x+1)}{(-3x+2)^2}$$

پ) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3+1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x+2}} \times 3 \times (x^3+1) + \sqrt{3x+2} \times 3x^2$

$$(\sqrt{3x+2})(x^3+1) + (\sqrt{3x+2})(x^3+1)'$$

$\sqrt{u} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

ت) $f(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{9 \times \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (9x-2)}{(\sqrt{x})^2}$

۱۵ اگر $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x$ ، مقدار $f''(-1)$ را به دست آورید.

$$f'(x) = 15x^2 - 8x - 3$$

$$f''(x) = 30x - 8$$

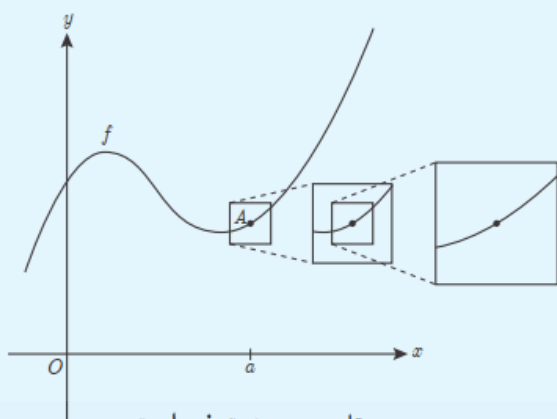
$$f''(-1) = -30 - 8 = -38$$



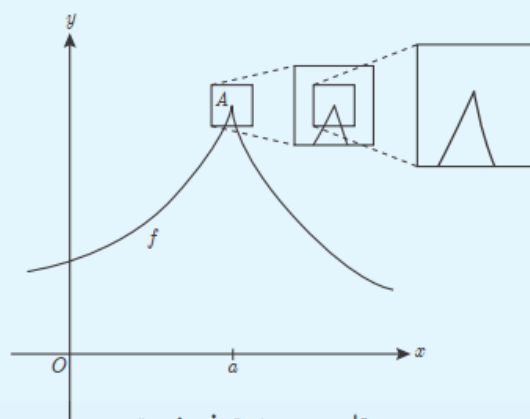
math-pilevar.ir

خواندنی

مشتق پذیری در یک نقطه به صورت شهودی می تواند برحسب رفتار تابع در نزدیکی نقطه $A(a, f(a))$ تعبیر شود. اگر نمودار تابع را در نزدیک نقطه A در نظر بگیریم و مرتباً از نمای نزدیک تری به نمودار نگاه کنیم، هنگامی که f در a مشتق پذیر باشد، نمودار منحنی شبیه یک خط راست می شود.



تابع در a مشتق پذیر است.



تابع در a مشتق پذیر نیست.

نمونه سوالات نهایی



(خرداد ۱۴۰۳ - ۱/۲۵ نمره)

۱- مشتق تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = (x-6)^3 + \frac{5x+3}{\sqrt{3x-1}}$$

$\sqrt{u} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{u}} \times u'$

$$u^3 \rightarrow 3u^2 \cdot u'$$

$$f'(x) = 3(x-6)^2 \times 1 + \frac{5 \times \sqrt{3x-1} - \frac{1 \times 2}{2\sqrt{3x-1}} (5x+3)}{(\sqrt{3x-1})^2}$$

(شهریور ۱۴۰۳ - ۱/۲۵ نمره)

۲- مشتق تابع داده شده را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$h(x) = \left(\frac{\sqrt{1-3x}}{7+x} \right)^4$$

$$u^4 \rightarrow 4u^3 \cdot u'$$

$$h'(x) = 4 \left(\frac{\sqrt{1-3x}}{7+x} \right)^3 \times \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-3x}} \times (-3) \times (7+x) - 1 \times \sqrt{1-3x}}{(7+x)^2}$$

$$\sqrt{1-3x} \rightarrow \sqrt{u} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{u}} \times u'$$

۳- مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & x < 2 \\ 6x - 4 & x = 2 \\ 2\sqrt{x-1} + 6 & x > 2 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x = 2$ بررسی کنید.

(شهریور ۱۴۰۳ - ۱ نمره)

$\sqrt{u} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{u}} \times u'$

f در $x=2$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} 4x & x < 2 \\ \frac{1}{\sqrt{x-1}} & x > 2 \end{cases}$$

$$f'_+(2) = \frac{1}{\sqrt{2-1}} = 1$$

$$f'_-(2) = 6 \times 2 - 4 = 8$$

مشتق پذیر نیست $\Rightarrow f'_+(2) \neq f'_-(2)$

$$(f(g(x)))' = g'(x) f'(g(x))$$



(سراسری تجربی ۹۸)

۱- اگر $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $(f \circ g)'(2) = 6$ باشد. $f'(5)$ کدام است؟

$$3(4)$$

$$2(3)$$

$$-1(2)$$

$$-2(1) \checkmark$$

$$(f(g(2)))' = g'(2) f'(g(2))$$

$$g(2) = \frac{2 \times 2 + 1}{2 - 1} = 5$$

$$4 = g'(2) f'(5)$$

$$4 = -3 \times f'(5)$$

$$f'(5) = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

$$g'(x) = \frac{-2-1}{(x-1)^2}$$

$$g'(2) = \frac{-3}{1} = -3$$

۲- خط d در نقطه $(-1, 5)$ بر نمودار تابع f مماس است. اگر شیب خط d برابر $-\frac{1}{3}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x} f(x)$

(سراسری تجربی دی ۱۴۰۱)

باشد. مقدار $g'(-1)$ کدام است؟

$$\frac{13}{6} \quad (4) \checkmark$$

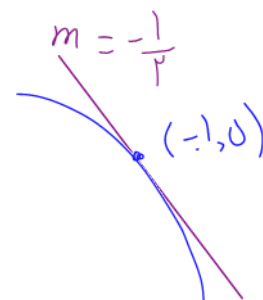
$$\frac{7}{6} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{4}{3} \quad (1)$$

$$g'(u) = \frac{1}{\sqrt[3]{u^2}} \times f(u) + f'(u) \times \sqrt[3]{u}$$

$$g'(-1) = \frac{1}{\sqrt[3]{(-1)^2}} \times f(-1) + f'(-1) \times \sqrt[3]{-1}$$



$$g'(-1) = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} \times 5 + \left(-\frac{1}{3}\right) \times (-1) = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{13}{6}$$

math-pilevar.ir

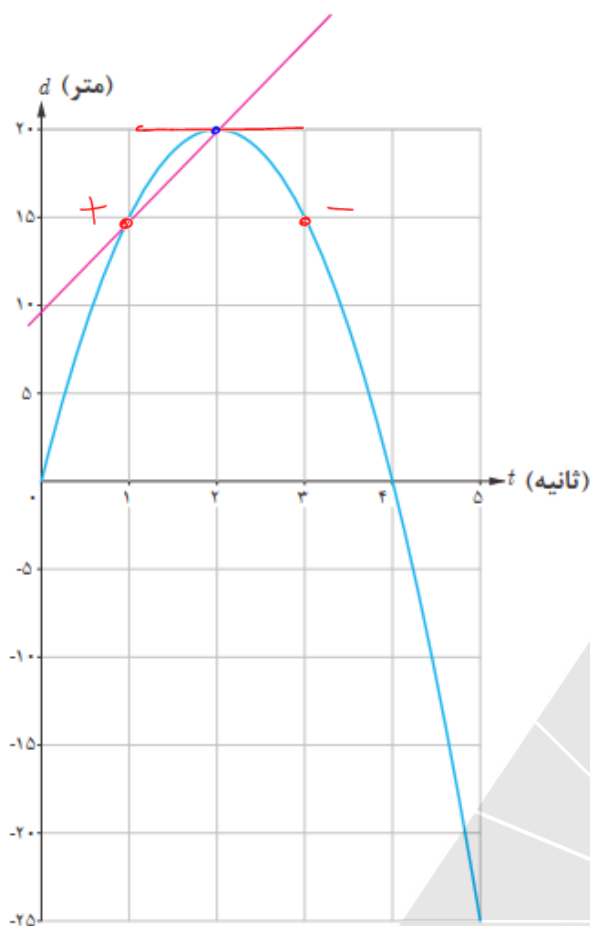
درس سوم

آهنگ تغییر

با مفهوم سرعت متوسط در فیزیک آشنا شده‌اید. اگر اتومبیلی در امتداد خط راست مسافت 280 کیلومتر را در 4 ساعت طی کند سرعت متوسط آن در این زمان $70 = \frac{280}{4}$ کیلومتر بر ساعت است. با این حال ممکن است اتومبیل در لحظات مختلف سرعت‌های متفاوتی داشته باشد. همچنین مطابق آنچه که در درس فیزیک آموخته‌اید، سرعت متوسط روی یک بازه زمانی خیلی کوچک، به سرعت لحظه‌ای نزدیک است. اگر نمودار مکان - زمان در مورد حرکت اتومبیل را داشته باشیم، سرعت متوسط اتومبیل بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که نمودار مکان - زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند.

همچنین در درس فیزیک سرعت لحظه‌ای در هر لحظه دلخواه t ، برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه تعریف شد. با آنچه که در درس‌های گذشته ملاحظه کردید، می‌توان گفت که سرعت در لحظه t همان مقدار مشتق تابع (مکان - زمان) در لحظه t است. مفهوم مشتق را در بسیاری از پدیده‌های دیگر نیز می‌توان مشاهده کرد. ابتدا در مورد سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای به ذکر مثالی خواهیم پرداخت.





مثال: خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله $d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می‌کند، که در آن $0 \leq t \leq 5$ برحسب ثانیه است. با در نظر گرفتن نمودار مکان - زمان (شکل):

الف) سرعت متوسط خودرو را در بازه‌های زمانی $[1, 2]$ ، $[1, 1/5]$ و $[1, 1/4]$ به دست آورید.

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری مانند $[1, 1/3]$ و $[1, 1/2]$ و ... اختیار کنیم، سرعت متوسط در این بازه‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

$$d(t) = -5t^2 + 20t$$

پ) سرعت لحظه‌ای را با استفاده از مشتق تابع d در $t=1$ به دست آورید.

ت) سرعت لحظه‌ای در $t=2$ و $t=3$ چقدر است؟

$$\begin{aligned} d(2) &= -5 \times 4 + 20 \times 2 = 20 \\ d(1) &= -5 \times 1 + 20 \times 1 = 15 \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} d(1/5) &= -5 \times (1/5)^2 + 20 \times 1/5 = 18.75 \\ d(1/4) &= -5 \times (1/4)^2 + 20 \times 1/4 = 18.2 \end{aligned} \right.$$

حل:

الف)

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 2] = \frac{d(2) - d(1)}{2 - 1} = \frac{20 - 15}{1} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 1/5] = \frac{d(1/5) - d(1)}{1/5 - 1} = \frac{18.75 - 15}{-0.8} = \frac{3.75}{-0.8} = -4.6875 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 1/4] = \frac{d(1/4) - d(1)}{1/4 - 1} = \frac{18.2 - 15}{-0.75} = \frac{3.2}{-0.75} = -4.2667 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های زمانی کوچک‌تری اختیار کنیم، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای در $t=1$ نزدیک می‌شود.

پ) $d'(t) = -10t + 20$ ، پس ، $d'(1) = 10$

$$d(t) = -5t^2 + 20t$$

ت) $d'(2) = 0$ ، $d'(3) = -10$

$$d'(t) = -10t + 20 \rightarrow d'(1) = -10 \times 1 + 20 = 10$$

$$d'(2) = -10 \times 2 + 20 = 0 \quad | \quad d'(3) = -10 \times 3 + 20 = -10$$

سرعت در لحظه $t=2$ ، صفر است و مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور x ها است و خودرو ساکن است. مقدار سرعت در لحظه‌های $t=1$ و $t=3$ برابر است و علامت منفی در مورد $d'(3)$ نشان می‌دهد که جهت حرکت در $t=3$ برخلاف جهت حرکت در $t=1$ است.

به جز مفهوم سرعت، در مطالعه پدیده‌های زیاد دیگری که در قالب یک تابع نمایش داده می‌شوند با موضوع نسبت تغییرات متغیر وابسته به تغییرات متغیر مستقل مواجه می‌شویم. نسبت تغییرات دما به تغییرات زمان و همچنین نسبت تغییرات جمعیت نسبت به زمان نمونه‌های دیگری از اینگونه تغییرات هستند.

به طور کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a, a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

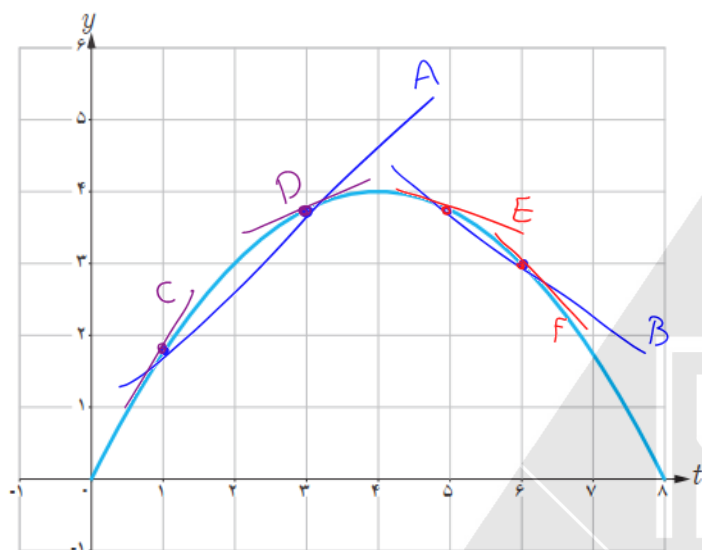
$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در نقطه } x=a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.

۱ نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه t نمایش می‌دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید: (محاسبه عددی لازم نیست.)



A سرعت متوسط بین $t=1$ و $t=3$

B سرعت متوسط بین $t=5$ و $t=6$

C سرعت لحظه‌ای در $t=1$

D سرعت لحظه‌ای در $t=3$

E سرعت لحظه‌ای در $t=5$

F سرعت لحظه‌ای در $t=6$

$$F < B < E < D < A < C$$

math-pilevar.ir

کاربردهایی دیگر از آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

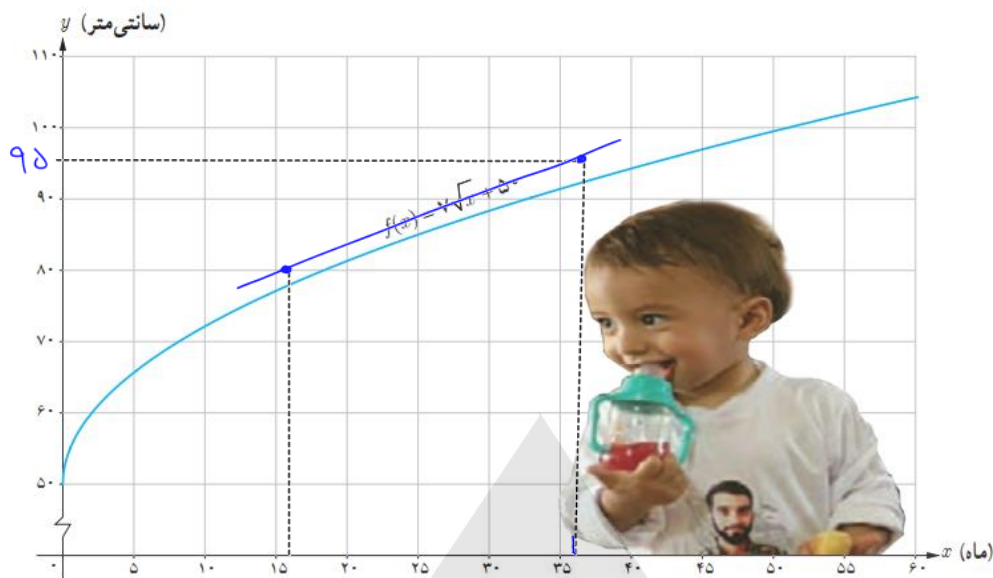
آهنگ رشد: تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را برحسب سانی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان

پس از تولد (برحسب ماه) است. به طور مثال $f(25) = 85$

آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 60]$ چنین است:

$$\frac{f(60) - f(0)}{60 - 0} = \frac{7\sqrt{60} + 50 - 50}{60} \approx 0.9 \frac{\text{سانی متر}}{\text{ماه}}$$

یعنی در طی ۵ سال، رشد متوسط قد حدود ۰/۹ سانی متر در هر ماه است.



کار در کلاس

$$f(x) = 7\sqrt{x} + 50$$

الف) آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟

$$\frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{35}{25} = \frac{7}{5}$$

$$f(25) = 7 \times \sqrt{25} + 50 = 35 + 50 = 85$$

$$f(0) = 7\sqrt{0} + 50 = 50$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام یک بیشتر است؟

$$f(x) = 7\sqrt{x} + 50$$

$$f'(x) = 7 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{و } f'(25) = \frac{7}{2\sqrt{25}} = \frac{7}{10} = 0.7$$

$$\Rightarrow f'(25) > f'(49)$$

$$f'(49) = \frac{7}{2\sqrt{49}} = \frac{7}{14} = 0.5$$

پ) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی، ۸۰ سانتی متر و در ۳۶ ماهگی، ۹۵ سانتی متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله حساب کنید و با نمودار بالا مقایسه کنید.

$$f(14) = 80, \quad f(34) = 95$$

$$\frac{f(34) - f(14)}{34 - 14} = \frac{95 - 80}{20} = \frac{15}{20} = 0.75$$

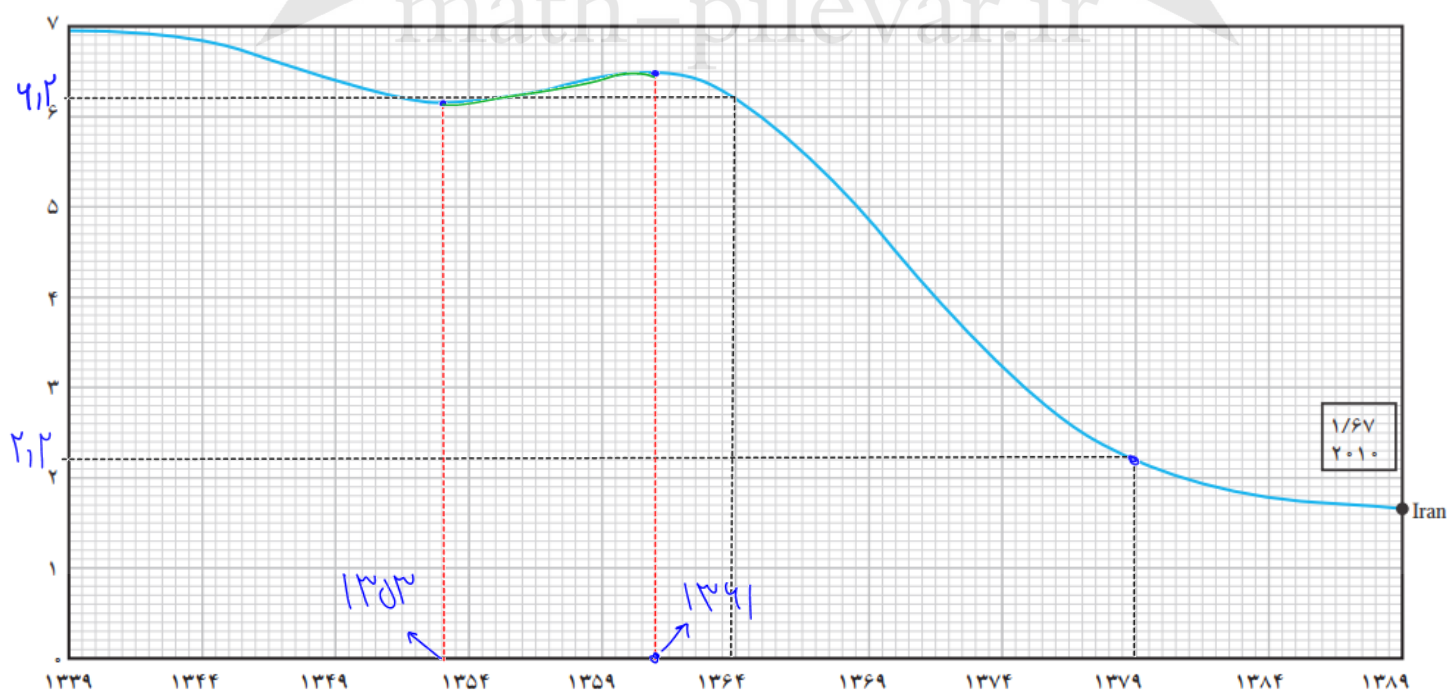
نرخ باروری: نمودار زیر روند رو به کاهش نرخ باروری در کشورمان را در طی نیم قرن نمایش می دهد. آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۳۹، ۱۳۸۹] در مدت ۵۰ سال برابر است با:

$$\frac{1/6 - 7}{1389 - 1339} = \frac{-5/4}{50} = -0.108$$

آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۶۴، ۱۳۷۹] را به دست آورید. (با استفاده از مقادیر تقریبی روی نمودار) بازه زمانی را مشخص کنید که در آن آهنگ متوسط تغییر باروری مثبت باشد.

$$\frac{f(1379) - f(1364)}{1379 - 1364} = \frac{2.2 - 2.1}{15} = \frac{-0.1}{15} = -0.0067$$

[۱۳۵۳، ۱۳۶۱]



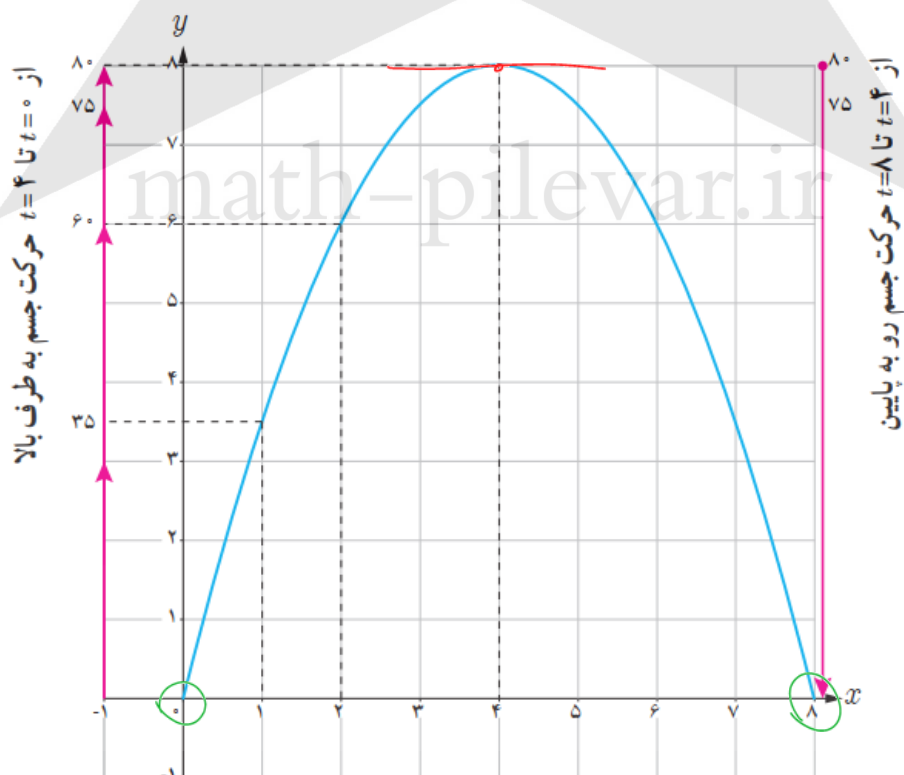
خواندنی

نرخ باروری در ایران در سال‌های ۱۳۶۰ تا ۱۳۶۵ به حدود ۶/۵ فرزند رسید. با توجه به اینکه کشورمان امکانات لازم برای چنین رشد جمعیت بالایی را دارا نبود، سیاست‌های کاهش جمعیت و عوامل دیگر باعث شد که نرخ باروری تا سال ۱۳۸۵ به ۱/۹ کاهش یابد. بررسی‌ها نشان می‌دهند که کاهش باروری در ایران بزرگ‌ترین و سریع‌ترین کاهش باروری ثبت شده بود. کارشناسان معتقدند که باید سیاست‌های کاهش رشد جمعیت پس از کاهش نرخ باروری به حدود ۲/۵ فرزند متوقف می‌شد. کاهش رشد جمعیت مشکلات فراوانی نظیر کاهش نیروی کار و بحران سالمندی را در پی خواهد داشت. با ابلاغ سیاست‌های کلی «جمعیت» توسط رهبر معظم انقلاب اسلامی در سال ۱۳۹۳، و تغییر برنامه‌های وزارت بهداشت، براساس نتایج سرشماری عمومی نفوس و مسکن سال ۱۳۹۵، نرخ باروری به حدود ۲/۱ افزایش یافته است. با این حال نگرانی‌های مربوط به احتمال کاهش بیش از حد رشد جمعیت در سال‌های ۱۴۲۵ تا ۱۴۳۰ تأکید می‌کند که این سیاست‌ها تا دستیابی کامل به اهداف تعیین شده باید دنبال شود.

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

مثال: جسمی را از سطح زمین به‌طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید. به‌طور مثال ۲ ثانیه پس از پرتاب این جسم در ارتفاع ۶۰ متری از سطح زمین است.

به هر حال جسم پس از مدتی به زمین برمی‌گردد. نمودار مکان - زمان حرکت این جسم در شکل نشان داده شده است.



$$h(t) = -5t^2 + 40t$$

اگر سرعت متوسط این جسم در بازه‌های زمانی $[0, 2]$ ، $[1, 2]$ ، $[2, 3]$ و $[3, 4]$ را به ترتیب با v_1 ، v_2 ، v_3 و v_4 نمایش دهیم، داریم:

$$v_1 = \frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{60}{2} = 30 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = 25 \text{ m/s}$$

$$v_3 = \frac{h(3) - h(2)}{3 - 2} = \frac{75 - 60}{1} = 15 \text{ m/s}$$

$$v_4 = \frac{h(4) - h(3)}{4 - 3} = \frac{80 - 75}{1} = 5 \text{ m/s}$$

سرعت لحظه‌ای در زمان‌های $t=1$ ، $t=2$ ، $t=3$ و $t=4$ با استفاده از مشتق تابع h چنین به دست می‌آید:

$$h(t) = -5t^2 + 40t \Rightarrow h'(t) = -10t + 40 \quad h'(2) = -10 \times 2 + 40 = 20$$

$$h'(1) = 30 \text{ m/s} \quad , \quad h'(2) = 20 \text{ m/s} \quad , \quad h'(3) = 10 \text{ m/s} \quad , \quad h'(4) = 0 \text{ m/s}$$

در $t=4$ جسم به بالاترین ارتفاع خود از سطح زمین (80 متر) می‌رسد و در این لحظه سرعت آن برابر صفر (متر بر ثانیه) می‌شود. سپس

جسم شروع به حرکت به طرف زمین می‌کند. سرعت متوسط در بازه $[4, 5]$ برابر $\frac{h(5) - h(4)}{5 - 4} = \frac{75 - 80}{1} = -5 \text{ m/s}$ و سرعت لحظه‌ای در $t=5$ برابر $h'(5) = -10 \text{ m/s}$ است. علامت منفی نشان می‌دهد که حرکت جسم رو به پایین است.

کار در کلاس

math-pilevar.ir

با توجه به مثال قبل:

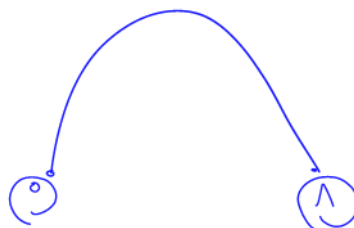
$$h(t) = -5t^2 + 40t$$

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به دست آورید.

$$h'(t) = -10t + 40$$

$$h'(0) = -10(0) + 40 = 40$$

$$h'(8) = -10(8) + 40 = -40$$



$$h(t) = -5t^2 + 40t$$

ب) سرعت متوسط جسم را در بازه زمانی $[5, 8]$ به دست آورید.

$$\frac{f(8) - f(5)}{8 - 5} = \frac{0 - 75}{3} = -25$$

$$f(8) = -5 \times 64 + 40 \times 8 = -320 + 320 = 0$$

$$f(5) = -5 \times 25 + 40 \times 5 = -125 + 200 = 75$$

$$h(t) = -5t^2 + 40t$$

پ) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم 25 m/s و -25 m/s است.

$$h'(t) = -10t + 40 \Rightarrow -10t + 40 = 25 \Rightarrow -10t = -15 \Rightarrow t = 1.5$$

$$-10t + 40 = -25 \Rightarrow -10t = -65 \Rightarrow t = \frac{6.5}{1} = 6.5$$

math-pilevar.ir

تمرین

۱ جدول زیر درجه حرارت T (سانتی گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را :
الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.

$$\frac{19-11}{12-8} = \frac{8}{4} = 2$$

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.

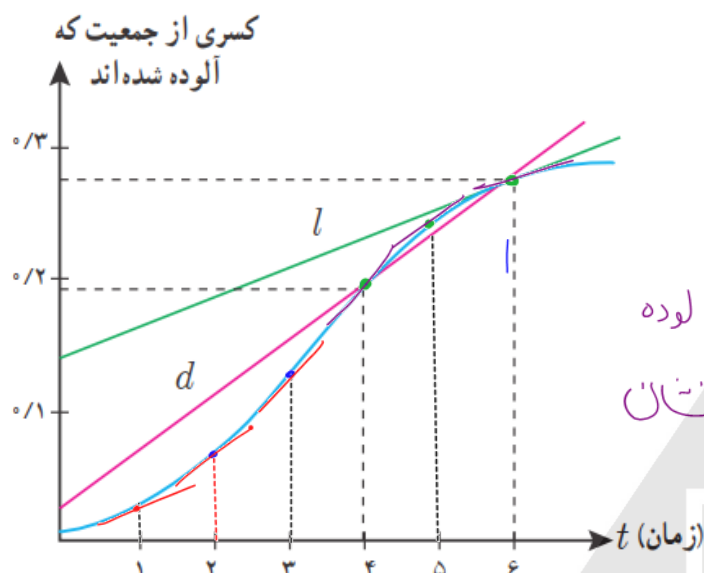
$$\frac{9-19}{18-12} = -\frac{10}{6}$$

math-pilevar.ir

پ) پاسخ ها را تفسیر کنید. از ساعت ۸ تا دوازده آهنگ متوسط مثبت است یعنی هوا گرم تر شده است.

ولی از ساعت ۱۲ تا ۱۸ آهنگ متوسط تغییر منفی است یعنی هوا در این بازه زمانی سردتر شده است.

۲ کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده اند بر حسب زمان (هفته) در نمودار زیر نشان داده شده است.



الف) شیب های خطوط l و d چه چیزهایی را نشان می دهند.

شیب خط l : آهنگ کفای کسری از جمعیت آلوده شده

در $t=4$ (هفته ششم) را نشان می دهد.

شیب خط d : آهنگ تغییر متوسط کسری از جمعیت آلوده

شده در بازه زمانی $t=4$ و $t=6$ (هفته چهارم تا هفته ششم) را نشان

می دهد.

ب) گسترش آلودگی در کدام یک از زمان های $t=1$ ، $t=2$ یا $t=3$

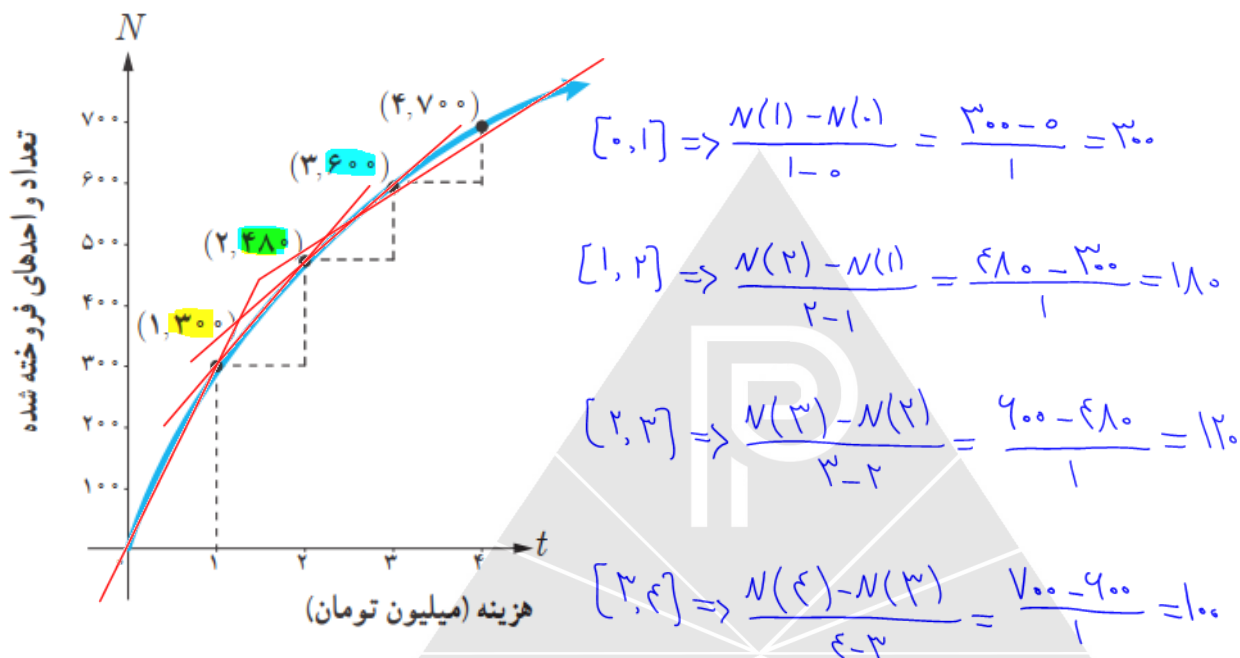
بیشتر است؟ در $t=3$

math-pilevar.ir

پ) قسمت ب را برای $t=4$ ، $t=5$ و $t=6$ بررسی کنید. در کفای $t=4$

۳ نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N بر حسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.



ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟
چون نسبت ضرایب قاطع در حال کاهش است یا به عبارتی با افزایش هزینه تعداد کالاهای فروخته شده کم شده است. تعداد خریداران در حال کاهش است.

۴ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (t بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

$$f(5) = 25 - 5 + 10 = 30$$

$$f(0) = 0 - 0 + 10 = 10$$

$$\text{سرعت متوسط در } [0, 5] = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{30 - 10}{5} = 4$$

$$f'(t) = 2t - 1 = 4 \Rightarrow 2t = 5 \Rightarrow t = \frac{5}{2} = 2.5$$

t ثانیه s	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$f(t)$ متر m	11	12.4	13.8	15.1	16.3	17.4	18.4

۵ توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول روبه‌رو نمایش داده شده است.

بر اساس جدول کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه، است نشان دهد؟

۱۶/۰۳ m/s (ت)

۱۱/۵ m/s (پ) ✓

۱۴/۹۱ m/s (ب)

۱/۲۳ m/s (الف)



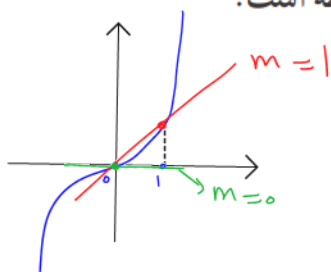
$$\text{سرعت متوسط } [0.3, 0.4] = \frac{16.3 - 15.1}{0.4 - 0.3} = \frac{1.2}{0.1} = 12$$

$$\Rightarrow \frac{12 + 11}{2} = 11.5$$

$$\text{سرعت متوسط } [0.4, 0.5] = \frac{17.4 - 16.3}{0.5 - 0.4} = \frac{1.1}{0.1} = 11$$

۶ کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است:

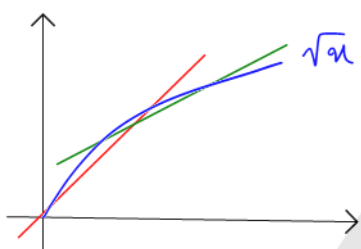
الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[0, 1]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است.



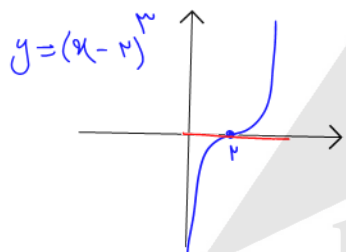
مثال نقض

نادرست.

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است. نادرست.

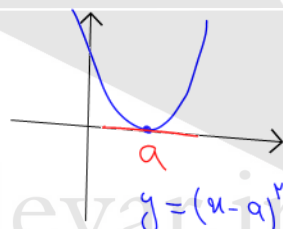


پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a) = 0$ و هم $f(a) = 0$ نادرست.



$$f'(2) = 0$$

$$f(2) = 0$$



$$f(a) = 0$$

$$f'(a) = 0$$

۷ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

$$\frac{m(4) - m(3)}{4 - 3} = \frac{130 - 55.7}{1} = 74.3$$

$$m(4) = 2 + 2 \times 64 = 130$$

$$m(3) = \sqrt{3} + 2 \times 27 = 55.7$$

$$m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$$

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چقدر است؟

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2$$

$$m'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} + 6 \times 9 = 0.288 + 54 = 54.288$$

۸ گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه

از رابطه $V = 40(1 - \frac{t}{100})^2$ به دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0, 1]$ چقدر است؟

$$\frac{V(1) - V(0)}{1 - 0} = \frac{39.204 - 40}{1} = -0.796$$

$$V(1) = 40(1 - \frac{1}{100})^2 = 40 \times (0.99)^2 = 39.204$$

$$V(0) = 40$$

$$= \frac{1}{100} \times t$$

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می شود؟

$$V = 40(1 - \frac{t}{100})^2 \quad u^2 \rightarrow 2u u'$$

$$V(100) = 40(1 - 1)^2 = 0$$

$$\frac{V(100) - V(0)}{100 - 0} = \frac{0 - 40}{100} = -\frac{4}{10}$$

آهنگ تغییر متوسط

$$V(0) = 40(1 - 0)^2 = 40$$

$$V' = 40 \times 2(1 - \frac{t}{100}) \times (-\frac{1}{100}) = -\frac{8}{100}(1 - \frac{t}{100}) = -\frac{8}{100} \Rightarrow 2(1 - \frac{t}{100}) = 1$$

$$1 - \frac{t}{100} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{t}{100} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2t = 100 \Rightarrow t = 50$$

نمونه سوالات نهایی



۱- تابع $f(x) = x^2 - x$ را در نظر بگیرید. (خرداد ۱۴۰۳ - ۱/۲۵ نمره)

الف: آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازه $[0, 2]$ بدست آورید.

ب: حدود x را چنان بیابید که آهنگ تغییر لحظه ای تابع f از آهنگ تغییر متوسط آن، در بازه $[0, 2]$ بزرگتر باشد.

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2} = 1$$

$$f(2) = 2^2 - 2 = 2$$

$$f(0) = 0^2 - 0 = 0$$

$$f'(x) = 2x - 1 > 1 \Rightarrow 2x > 2 \Rightarrow x > 1$$

۲- گنجایش ظرفی ۲۰ لیتر مایع است. در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می شود اگر حجم مایع باقیمانده در ظرف

پس از t ثانیه از رابطه $V = 20 \left(1 - \frac{t}{50}\right)^2$ به دست آید در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه ای حجم برابر آهنگ تغییر

(شهریور ۱۴۰۳ - ۱/۲۵ نمره)

متوسط آن در بازه $[0, 50]$ می شود؟

$$\frac{V(50) - V(0)}{50 - 0} = \frac{0 - 20}{50} = -\frac{2}{5}$$

آهنگ تغییر متوسط

$$V(50) = 20 \left(1 - 1\right)^2 = 0$$

$$V(0) = 20 \left(1 - 0\right)^2 = 20$$

$$V' = 20 \times 2 \left(1 - \frac{t}{50}\right) \times \left(-\frac{1}{50}\right) = -\frac{4}{5} \left(1 - \frac{t}{50}\right) = -\frac{4}{5} \Rightarrow 2 \left(1 - \frac{t}{50}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$1 - \frac{t}{50} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{t}{50} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2t = 50 \Rightarrow t = 25$$

سوالات تکمیلی



۱- بازه $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin x \cos^2 x$ چند برابر آهنگ متوسط تغییر تابع

(سراسری ریاضی خارج ۱۴۰۱)

$y = \sin^4 x - \cos^4 x$ است؟

$$\frac{1}{2} (4)$$

$$-\frac{1}{2} (3)$$

$$1 (2)$$

$$-1 (1) \checkmark$$

$$\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 1 \times (-1) = -1$$

$$\frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1 - 0}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{-1}{\frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi}$$

$$(\sin^2 u + \cos^2 u)(\sin^2 u - \cos^2 u) = -\cos^2 u$$

$$\frac{\pi}{2} \rightarrow -\cos \frac{\pi}{2} = -(-1) = 1$$

$$\frac{\pi}{4} \rightarrow -\cos \frac{\pi}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 - 0}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{4}{\pi}}{\frac{4}{\pi}} = -1$$

۲- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ اختلاف آهنگ تغییر لحظهای در $x = 2$ ، از آهنگ تغییر متوسط

(سراسری تجربی ۹۸)

math-pilevar.ir

در بازه $[1, 4]$ ، کدام است؟

$$0.75 (4)$$

$$0.45 (3)$$

$$0.5 (2) \checkmark$$

$$0.25 (1)$$

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{\frac{31}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)}{3} = \frac{\frac{32}{4}}{3} = \frac{8}{3}$$

آهنگ تغییر متوسط

$$f(4) = \frac{1}{4} \times 16 - \frac{1}{4} =$$

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$f(1) = \frac{1}{1} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$f'(u) = \frac{1}{x^2} \times x^2 \times u' - \left(-\frac{1}{u^2}\right) = u + \frac{1}{u^2}$$

$$f'(2) = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\text{اختلاف: } \frac{8}{3} - \frac{9}{4} = \frac{2}{3} = \frac{1}{1.5}$$