

جمع بندی ریاضی ۳

فصل ۳ حد بی نهایت و حد در بی نهایت



پایه دوازدهم تجربی

تهیه کننده: رقیه پيله ور - دبیر ریاضی ناحیه دو اردبیل



برای تماشای ویدیوهای آموزشی ریاضی ۳ تجربی (همین جزوه) می توانید به سایت

math-pilevar.ir یا math-pilevar.com مراجعه کنید.



محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $ax + b$ اگر خواستید باقی‌مانده‌ی تقسیم یک چندجمله‌ای، مثل $f(x)$ را بر $ax + b$ پیدا کنید، این مراحل را اجرا کنید:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

۱) مقسوم‌علیه را مساوی صفر قرار دهید و ریشه‌ای را پیدا کنید.

۲) حالا ریشه‌ی به دست آمده برای x را در عبارت مقسوم جای‌گذاری کرده و ساده کنید، عدد حاصل می‌شود باقی‌مانده ...

سوال ۱: جمله زیر را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید.

در تقسیم چند جمله‌ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر $x + 2$ ، باقی مانده تقسیم برابر منفی است.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \quad f(-2) = 2(-2)^3 + 5(-2)^2 - 3(-2) - 10 = \underbrace{-16}_{-4} + \underbrace{20}_{+4} + \underbrace{6}_{+6} - 10 = 0$$

حد توابع کسری



$$x = -3$$

$$x + 3 = 0$$

سوال ۲: حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\cancel{(x+3)}(x-3)}{x(\cancel{x+3})} = \frac{-3-3}{-3} = 2$$

$$۲ \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x - 12} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-4)} = \frac{-2-3}{-2-4} = \frac{5}{6}$$

$x = -2$

$$(x+2)$$

$$۳ \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 + 4x^2 + x + 4} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(x-1)}{(x+4)(x^2+1)} = \frac{-4-1}{(-4)^2+1} = \frac{-5}{17}$$

$$x = -4 \Rightarrow (x+4)$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x - 4 \\ -x^2 - 4x^2 + x + 4 \\ \hline -3x^2 + x \\ -3x^2 - 12x + 12 \\ \hline 13x - 12 \\ 13x + 52 \\ \hline 40 \end{array}$$

$$(\bullet - \blacktriangle)(\bullet + \blacktriangle) = \bullet^2 - \blacktriangle^2$$

$$۴ \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \sqrt{1}+1=2$$

$x=1 \Rightarrow (x-1)$

$$۵ \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x+1}-2}{x-1} \times \frac{\sqrt[3]{3x+1}+2}{\sqrt[3]{3x+1}+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1-8}{(x-1)(\sqrt[3]{3x+1}+2)} =$$

$x=1 \Rightarrow (x-1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{(x-1)(\sqrt[3]{3x+1}+2)} = \frac{3}{\sqrt[3]{3 \times 1 + 1} + 2} = \frac{3}{4}$$

$$(a \pm b)(a^r \mp ab + b^r) = a^r \pm b^r$$

$$(\sqrt[r]{a} \pm b)(\sqrt[r]{a^r} \mp \sqrt[r]{ab} + b^r) = a \pm b^r$$

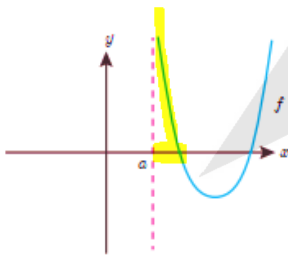
۶ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{x-1} = 1+1+1=3$

$x=1 \Rightarrow (x-1)$

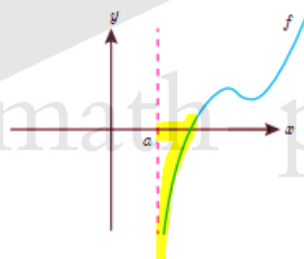
حد نامتناهی



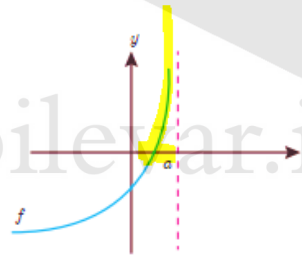
به نمودار مربوط به $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ و همچنین سایر حالت‌های حدود نامتناهی یک طرفه، در شکل‌های زیر دقت کنید.



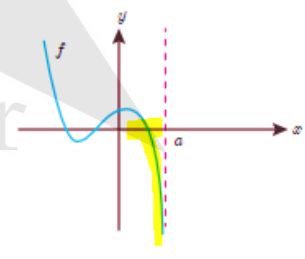
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\frac{\text{عدد حقیقی غیر صفر}}{\text{صفر}} = \infty$$

چه حدهایی نامتناهی می‌شوند؟



تذکر: وقتی می‌گوییم مخرج صفر شود، منظورمان صفر حدی است، یعنی مخرج دقیقاً خود صفر نمی‌شود بلکه حد صفر دارد ...



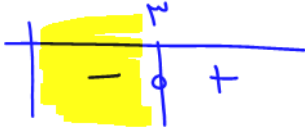
نکته: وقتی با کسری مواجه شده‌اید که صورتش صفر نیست و مخرجش صفر است، جواب حد را ∞ بنویسید، اما یادتان باشد، مرحله‌ی مهم بعدی پیدا کردن علامت ∞ است؛ علامت ∞ بستگی به علامت صورت و مخرج دارد. از آن‌جا که صورت کسر، عددی حقیقی و معلوم است در نتیجه علامتش هم مشخص است؛ اما برای مخرج معمولاً نیاز به تعیین علامت دارید، به خصوص وقتی که x در همسایگی یک طرفه‌ی a قرار گرفته باشد، یعنی

$$x \rightarrow a^+$$

سوال ۳:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 1}{x - 3} = \frac{3^2 - 1}{3 - 3} = \frac{+8}{0^-} = -\infty$$

۲۹



$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

■ وضعیت کلی حدهای نامتناهی

$\frac{+ \text{ عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$	$\frac{+ \text{ عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$	$\frac{\text{عدد غیر صفر}}{\text{صفر}} = \infty$
$\frac{- \text{ عدد منفی}}{0^+} = -\infty$	$\frac{- \text{ عدد منفی}}{0^-} = +\infty$	

سوال ۴: حدود زیر را محاسبه کنید.

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow (-\pi)^+} \frac{1}{\sin x} = \frac{+1}{0^-} = -\infty$$

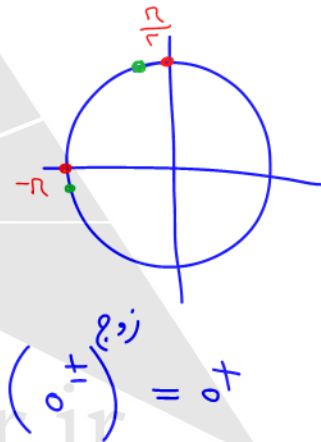
$$2 \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x-0)^4} = \frac{1}{(0-0)^4} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{|2-x|} = \frac{3}{|2-2|} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

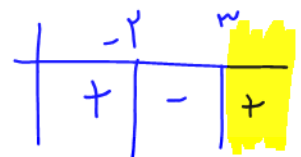
۰- ۰+ ۰+

$$|0^+| = 0^+$$



$$\left(0^+\right)^{\text{زوج}} = 0^+$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 - x - 6} = \frac{2 \times 9 - 4 \times 3 - 6}{9 - 3 - 6} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0$$

$x=3 \quad x=-2$



حدی که قدرمطلق یا جزء صحیح دارد ...



اگر کسر شما شامل قدرمطلق یا جزء صحیح باشد، ابتدا باید آن‌ها را بردارید و بعد رفع ابهام کنید ...

نکته: ۱ باید قدرمطلق را در مجاورت $x = a$ تعیین علامت کنیم.**مثال:** حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|6+x-x^2|}{x^2-9}$ را حساب می‌کنیم.

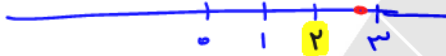
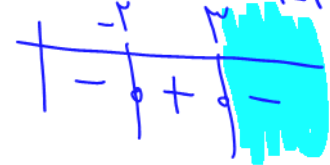
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - x - 4}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = \frac{3+2}{3+3} = \frac{5}{6}$$

$x=3 \rightarrow (x-3)$

$$4+x-x^2=0$$

$$x^2-x-4=0 \Rightarrow (x-3)(x+2)=0$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $x=3 \quad x=-2$

**نکته: ۲** جزء صحیح را در نقطه تعیین مقدار می‌کنیم

مثال: $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[3^-] - 3}{3^- - 3} = \frac{2 - 3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

math-pilevar.ir

حد در بی نهایت

اگر در یک چندجمله‌ای، x^m دارای بیشترین توان باشد، در این صورت x^m را بتوان آن چندجمله‌ای می‌گوییم و در شرایطی که $x \rightarrow \pm\infty$ ، می‌توانیم به جای کل آن، تنها جمله‌ی پرتوان را با ضریب خودش نگر داریم و مابقی را نادیده بگیریم.

برای مثال:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} ax^n \quad (n \in \mathbb{N}, a \neq 0)$$

هم‌ارز است با

مثال: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -2(-\infty)^2 = -2(+\infty) = -\infty$

سوال ۵: حدود زیر را محاسبه کنید.

$$۱ \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

$$۲ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x - 1}{x^2 + 2x - 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

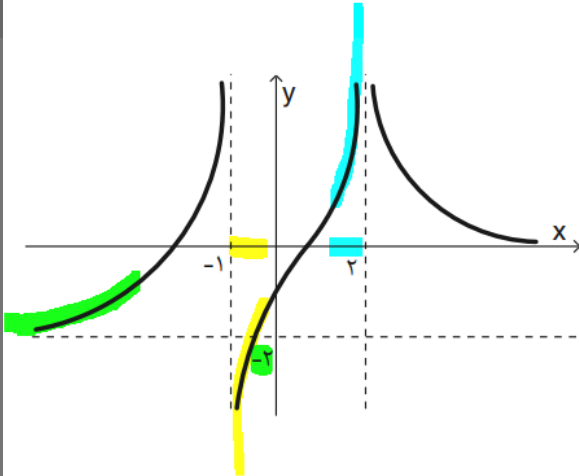
$$۳ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5}{x^2 + 6x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$۴ \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2 - \frac{3}{x^2}} =$$

حاصل حد	شرط	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots}$ $(m, n \in \mathbb{N}, a, a' \neq 0)$
$+\infty$ یا $-\infty$	$n > m$: درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج بیشتر است:	
$\frac{a}{a'}$	$n = m$: درجه‌ی صورت و مخرج مساوی است:	
صفر	$n < m$: درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج کمتر است:	

سوال ۶:

نمودار تابع f به شکل مقابل است حد های زیر را محاسبه کنید.



الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$



math-pilevar.ir