

حد بی نهایت و حد در بی نهایت

فصل

حد بی نهایت

درس اول

حد در بی نهایت

درس دوم

تهیه کننده : رقیه پيله ور - دبیر ریاضی ناحیه دو اردبیل



برای تماشای ویدیوهای آموزشی ریاضی ۳ تجربی (همین جزوه) می توانید به سایت

math-pilevar.ir یا math-pilevar.com مراجعه کنید.



درس اول

حد بی نهایت

یادآوری و تکمیل

در کلاس یازدهم با مفهوم حد تابع در یک نقطه آشنا شدیم. در فصل حاضر به حد بی نهایت و حد در بی نهایت خواهیم پرداخت. پیش از آن لازم است مطالبی را از پایه قبل یادآوری و تکمیل کنیم. همچنین، برخی پیش نیازها باید ارائه گردد.

بخش پذیری چندجمله ای ها بر $(x - a)$:

فعالیت

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 5x + 1 \quad | \quad x - 3 \\
 -(2x^2 - 6x) \quad \quad 2x + 1 \\
 \hline
 x + 1 \\
 -(x - 3) \\
 \hline
 4
 \end{array}$$

۱ الف) چندجمله ای $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ را بر دو جمله ای درجه اول $(x - 3)$ تقسیم

کرده ایم. جاهای خالی را پر کنید :

ب) اگر در تقسیم بالا، باقیمانده را با R نشان دهیم، داریم $R = 4$.

$$f(3) = 2 \times 9 - 5 \times 3 + 1 = 4$$

پ) مقدار $f(3)$ را محاسبه کنید.

ت) $f(3)$ و R چه رابطه ای با هم دارند؟ *برابرند*

ث) رابطه تقسیم را کامل کنید : $2x^2 - 5x + 1 = (x - 3)(2x + 1) + 4$

۲ الف) اکنون می خواهیم در حالت کلی چندجمله ای دلخواه $f(x)$ را بر دو جمله ای درجه اول $(x - a)$ تقسیم کنیم. فرض کنیم

خارج قسمت این تقسیم، چندجمله ای $Q(x)$ و باقیمانده آن عدد ثابت R باشد :

$$\begin{array}{r}
 f(x) \quad | \quad x - a \\
 \quad \quad Q(x) \\
 \hline
 R
 \end{array}$$

رابطه تقسیم به صورت زیر است :

$$f(x) = (x - a) Q(x) + R$$

این رابطه، به ازای تمام مقادیر x درست است؛ از جمله به ازای $x = a$. با قرار دادن a به جای x در دو طرف رابطه فوق خواهیم داشت :

$$f(a) = (a - a) Q(a) + R = R$$

ب) از رابطه اخیر مقدار R را به دست آورید.

$$f(a) = R$$

از فعالیت قبل دیده می شود که :

قضیه : در تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر دوجمله ای درجه اول $(x-a)$ ، باقی مانده تقسیم برابر $f(a)$ است.
نتیجه : اگر $f(a)$ برابر صفر باشد آنگاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش پذیر است.

نتیجه حاضر را می توان برای تجزیه چندجمله ای ها به کار برد.

کار در کلاس

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x - 2 \quad | \quad x - 2 \\ -(3x^2 - 6x) \quad \quad \quad 3x + 10 \\ \hline x - 2 \\ -(x - 2) \\ \hline R = 0 \end{array}$$

۱ در چندجمله ای $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$ مقدار $f(2)$ برابر صفر است. بنابراین $f(x)$ بر $(x-2)$ بخش پذیر است. با تکمیل مراحل تقسیم، درستی این مطلب را بررسی کنید.

بنابر رابطه تقسیم داریم : $f(x) = 3x^2 - 5x - 2 = (x-2)(3x+10)$
همانگونه که دیده می شود، $f(x)$ به صورت حاصل ضرب عامل های آن نوشته شده است.

۲ چندجمله ای $g(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا $g(x)$ بر $(x+1)$ بخش پذیر است؟ چرا؟ بله

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید :

پ) $g(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل ها بنویسید.

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$g(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 + 1 = 0$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + x^2 + 1 \quad | \quad x + 1 \\ -(2x^3 + 2x^2) \quad \quad \quad 2x^2 - x + 1 \\ \hline -x^2 + 1 \\ -(-x^2 - x) \quad \quad \quad x + 1 \\ \hline x + 1 \\ -(x + 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$g(x) = (x+1)(2x^2 - x + 1)$$

۳ نشان دهید چندجمله ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر دوجمله ای $x+2$ بخش پذیر است.

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

$$f(-2) = \underbrace{2(-2)^3}_{-16} + \underbrace{5(-2)^2}_{20} - \underbrace{3(-2)}_{6} - 10 = \underbrace{-16+20}_{4} + \underbrace{6-10}_{-4} = 0$$

حد توابع کسری

با قضیه زیر از پایه قبل آشنا هستیم :

قضیه : اگر دو تابع f و g در نقطه ای به طول a حد داشته باشند و حد آنها در این نقطه به ترتیب l و m باشد به طوری که $m \neq 0$ آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و این حد برابر $\frac{l}{m}$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = \frac{12}{6} = 2$$

$$\frac{5^2 - 3(5) + 2}{5 + 1}$$

مثال ۱:

در سال گذشته دیدیم که در یک تابع گویا مثل $\frac{f}{g}$ ، اگر $f(a) = g(a) = 0$ ، در این صورت دیگر قضیه بالا برای محاسبه حد تابع $\frac{f}{g}$ در a قابلیت استفاده ندارد. در این حالت با توجه به روابط $f(a) = 0$ و $g(a) = 0$ ، نتیجه می گیریم که چند جمله ای های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x - a)$ بخش پذیرند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج کسر $\frac{f}{g}$ بر $(x - a)$ ، تابع گویای دیگری حاصل می شود که حد آن در نقطه a ، در صورت وجود با حد $\frac{f}{g}$ در a برابر است.

$$\frac{1^2 - 1}{1^2 + 1 - 2} = \frac{0}{0}$$

صمیم

مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$ را محاسبه کنید.

حل: صورت و مخرج کسر به ازای $x = 1$ برابر صفرند. بنابراین هم صورت و هم مخرج بر $(x - 1)$ بخش پذیرند. این عامل را به کمک تجزیه، در صورت و مخرج ظاهر و سپس حذف می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

(x-1)

مثال: حد تابع $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + 8}$ را در نقطه $x = -2$ در صورت وجود به دست آورید.

حل: در این مثال نیز صورت و مخرج به ازای $x = -2$ برابر صفرند. باید عامل $(x + 2)$ را در صورت و مخرج ظاهر کنیم. مخرج را می توانیم به کمک اتحاد مجموع مکعب های دو جمله به حاصل ضرب عامل های اول تجزیه کنیم. اما برای تجزیه صورت، آن را بر $(x + 2)$ تقسیم می کنیم:

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 3x^2 + 4 \quad | \quad x+2 \\ -(2x^3 + 4x^2) \quad \quad 2x^2 - x + 2 \\ \hline -x^2 + 4 \\ -(-x^2 - 2x) \quad \quad \quad 2x + 4 \\ \hline 2x + 4 \\ -(2x + 4) \\ \hline 0 \end{array}$$

بنابر رابطه تقسیم می توان نوشت $2x^3 + 3x^2 + 4 = (x+2)(2x^2 - x + 2)$. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x^2 - x + 2)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{8 + 2 + 2}{4 + 4 + 4} = 1$$

تذکر: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. در این حالت برای محاسبه حد $\frac{f}{g}$ در نقطه a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x - a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به دست آوریم.

$$\frac{2 - \sqrt{5-1}}{5-5} = \frac{0}{0} \quad \text{صمیم}$$

(۵-۶)

مثال: حد تابع $g(x) = \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$ را در نقطه به طول $x=5$ در صورت وجود به دست آورید.
 حل: هم حد صورت و هم حد مخرج در نقطه ۵ برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $2 + \sqrt{x-1}$ ضرب می‌کنیم تا صورت کسر عبارتی گویا شود.

$$4 - x + 1 = 5 - x$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5} \times \frac{2 + \sqrt{x-1}}{2 + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4 - (x-1)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1(x-5)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{2+2} = \frac{-1}{4}$$

$$\frac{8^2 - 8 \times 8}{\sqrt[3]{8} - 2} = \frac{0}{0}$$

مثال: حد تابع $h(x) = \frac{x^2 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2}$ را در $x=8$ در صورت وجود به دست آورید.

حل: هم حد صورت و هم حد مخرج در $x=8$ برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4$ ضرب می‌کنیم تا مخرج کسر گویا شود.

$$\lim_{x \rightarrow 8} h(x) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x^2 - 8x)}{\sqrt[3]{x} - 2} \times \frac{(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x(x-8)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{x-8} = 8(4+4+4) = 96$$

کار در کلاس

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x+3)} = \frac{-3-3}{-3} = 2$

(۳+۶)

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x - 1} = \frac{4 \times \frac{1}{4} - 4 \times \frac{1}{2} + 1}{2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)^2}{(2x-1)(x+1)} = \frac{2 \times \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{0}{\frac{3}{2}} = 0$$

$$x - \frac{1}{x} = 0 \xrightarrow{x^2} 2x - 1$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + x - 1 \\ \underline{-(2x^2 + x)} \\ -1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x - 1 \\ \underline{-(2x + 1)} \\ -2 \end{array}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9} = \frac{4 \times \frac{1}{4} - 1}{2 \times \frac{1}{8} - 13 \times \frac{1}{4} + 24 \times \frac{1}{2} - 9} = \frac{0}{0}$$

$(x - \frac{1}{2})$

$$\lim_{u \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2u-1)(2u+1)}{(2u-1)(u^2-4u+9)} =$$

$$= \frac{2 \times (\frac{1}{2}) + 1}{\frac{1}{4} - 4 \times \frac{1}{2} + 9} = \frac{2}{\frac{1}{4} - 2 + 9} = \frac{2}{\frac{13}{4}} = \frac{8}{13}$$

$$\begin{array}{r} 2u^2 - 13u^2 + 24u - 9 \quad | \quad 2u - 1 \\ -2u^2 + u^2 \\ \hline -12u^2 + 24u \\ +12u^2 - 4u \\ \hline 11u - 9 \\ -11u + 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x+3}} \times \frac{x - \sqrt{2x+3}}{x - \sqrt{2x+3}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2-1)(x - \sqrt{2x+3})}{x^2 - (2x+3)} =$$

$(x+1)$ $x^2 - 2x - 3$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)(x - \sqrt{2x+3})}{(x+1)(x-3)} = \frac{(-1-1)(-1 - \sqrt{-2+3})}{-1-3} \times \frac{(-2) \times (-2)}{-4} = -1$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2} \times \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x^2 + x - 2)(x + \sqrt{x})} =$$

$(x-1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})} = \frac{1}{(1+2)(1+\sqrt{1})} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x^2 + 3x + 2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{x+1}}{(\cancel{x+1})(x+2)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{1}{(-1+2)(\sqrt[3]{(-1)^2} - \sqrt[3]{-1} + 1)} = \frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{3}$$

$1 - (-1) + 1$

حد نامتناهی

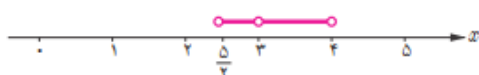
تابعی مثل f را در نظر بگیرید که در نزدیکی یک نقطه مثل a ، مقدارش از هر عدد دلخواه مثبتی بتواند بزرگ تر شود؛ به عبارت دیگر، در نقطه a حد آن $+\infty$ شود. در اینجا، حدهایی از این نوع را بررسی می کنیم. ابتدا به چند تعریف نیاز داریم.

همسایگی: هر بازه باز شامل عدد حقیقی x را یک همسایگی x می نامیم. به عبارت دیگر اگر $x \in (a, b)$ آنگاه بازه (a, b) یک همسایگی x می باشد.

مثال: بازه $(2, 5)$ یک همسایگی ۳ است. آیا بازه $(0, 4)$ هم یک همسایگی برای ۳ محسوب می شود؟ شما دو همسایگی دیگر برای ۳ بنویسید و جواب خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



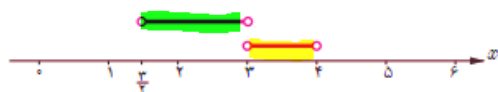
همسایگی محذوف: اگر بازه (a, b) یک همسایگی عدد حقیقی x باشد، آنگاه مجموعه $(a, b) - \{x\}$ یک همسایگی محذوف x نامیده می شود.



مثال: مجموعه $(\frac{5}{4}, 4) - \{3\}$ یک همسایگی محذوف ۳ می باشد.

همسایگی چپ و راست : اگر r عددی مثبت باشد آنگاه $(x_0, x_0 + r)$ یک همسایگی راست x_0 نامیده می شود. همچنین، $(x_0 - r, x_0)$ را یک همسایگی چپ x_0 می نامیم.

مثال : بازه $(3, 4)$ یک همسایگی راست ۳ و بازه $(\frac{3}{4}, 3)$ یک همسایگی چپ ۳ است. شما یک همسایگی راست دیگر برای ۳ و یک همسایگی چپ برای آن بنویسید.

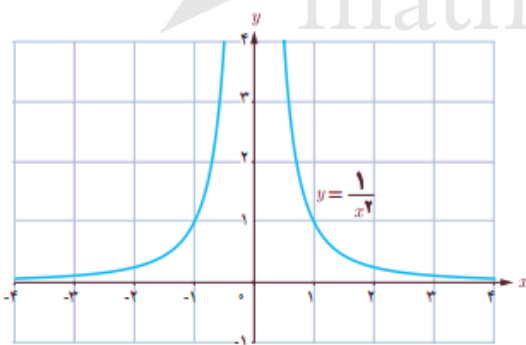


فعالیت

می خواهیم مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ را در صورت وجود به دست آوریم. می دانیم تابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ در هر نقطه غیر صفر تعریف شده است؛ یعنی $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. با تکمیل جدول زیر، به رفتار تابع f در یک همسایگی محذوف صفر توجه کنید.

x	-0.2	-0.1	-0.01	-0.0001	$\rightarrow 0 \leftarrow$	0.0001	0.001	0.01	0.1	0.2
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	25	100	10000	100000000	$\rightarrow ? \leftarrow$	100000000	1000000	10000	100	25

در جدول دیده می شود که وقتی x از سمت راست یا چپ به صفر نزدیک می شود، مقدار x^2 نیز به صفر نزدیک می شود. بنابراین مقادیر $\frac{1}{x^2}$ ، به هر اندازه دلخواه بزرگ می شوند. در واقع با دقت در نمودار تابع $y = \frac{1}{x^2}$ می توان نتیجه گرفت که هرگاه به اندازه کافی x را به صفر نزدیک کنیم، خواهیم توانست مقادیر $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه بزرگ نماییم. بنابراین دیده می شود که مقدارهای بزرگ شونده $f(x)$ به هیچ عددی میل نمی کنند؛ در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ موجود نیست. با این حال، در چنین مواقعی برای توصیف بهتر رفتار تابع در همسایگی محذوف صفر، می نویسیم $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$



تذکر : همچنان که از سال های قبل می دانیم، $+\infty$ یک عدد حقیقی نیست و رابطه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ صرفاً به حالت خاصی از عدم وجود حد اشاره دارد. به این معنا که $\frac{1}{x^2}$ را به هر اندازه که بخواهیم می توانیم بزرگ کنیم، مشروط بر آنکه x را به قدر کافی به صفر نزدیک کرده باشیم. این گونه حدها را حد نامتناهی یا حد بی نهایت می نامیم.

تعریف ۱: فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

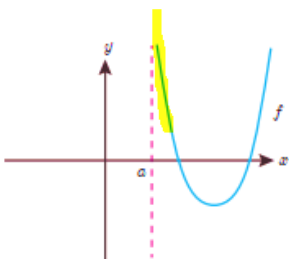
رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شود:

تعریف ۲: فرض کنیم f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

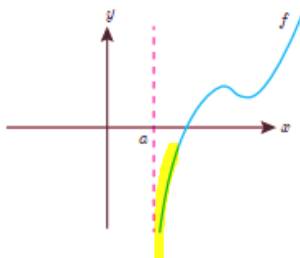
حدهای یک طرفه نامتناهی نیز به روش مشابهی تعریف می‌شوند. به عنوان نمونه تعریف $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ در زیر آمده است.

تعریف ۳: فرض کنیم f در یک همسایگی راست از a تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x با مقادیر بزرگ‌تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

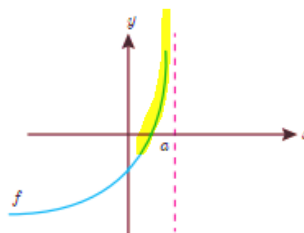
به نمودار مربوط به $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ و همچنین سایر حالت‌های حدود نامتناهی یک طرفه، در شکل‌های زیر دقت کنید.



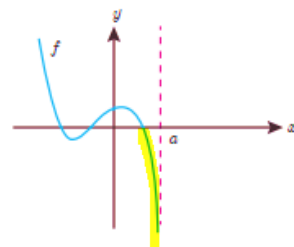
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

مثال: حد چپ و راست تابع $f(x) = \frac{1}{x-2}$ را در $x=2$ به دست آورید.

حل: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x-2}$ رسم شده است. به مقادیر تابع در سمت راست و چپ $x=2$ دقت نمایید. وقتی $x \rightarrow 2^+$ در این حالت مخرج کسر یعنی $(x-2)$ عددی مثبت و کوچک نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه $\frac{1}{x-2}$ مثبت و بسیار بزرگ می شود که مقدار آن می تواند از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر شود.

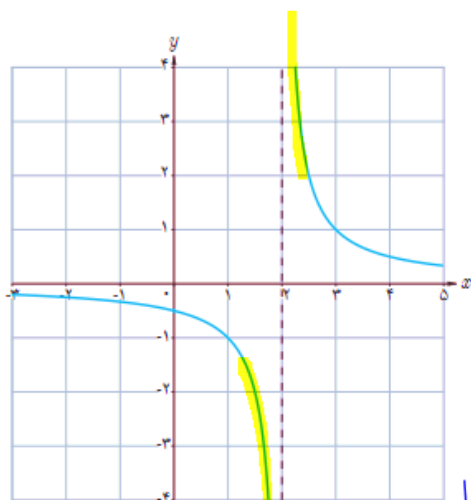
بنابراین همان طور که از نمودار هم دیده می شود، $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$.

به همین ترتیب وقتی $x \rightarrow 2^-$ ، مخرج کسر یعنی $(x-2)$ عددی منفی و بسیار نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه مقدار $\frac{1}{x-2}$ می تواند از هر عدد منفی دلخواه،

کوچک تر شود، بنابراین $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$. درستی این مطلب، از روی نمودار

هم قابل مشاهده است.

در مورد حدهای نامتناهی قضیه زیر بدون اثبات ارائه می شود.



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2^+ - 2} = \frac{1}{\delta^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2^- - 2} = \frac{1}{\delta^-} = -\infty$$

قضیه: فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ در این صورت:

(الف) اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

(ب) اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

(پ) اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

(ت) اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

تذکر: قضیه قبل، برای حالتی که $x \rightarrow a^+$ و یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{[x]-3}{|2x-1|}$ را محاسبه کنید.

حل: مخرج در نزدیکی $\frac{1}{3}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می کند و حد صورت هم در $\frac{1}{3}$ برابر -3 است. پس بنابر قسمت (پ) قضیه قبل داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{[x]-3}{|2x-1|} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{[\frac{1}{3}]-3}{|2 \times \frac{1}{3} - 1|} = \frac{0-3}{\delta^+} = \frac{-3}{\delta^+} = -\infty$$

کار در کلاس

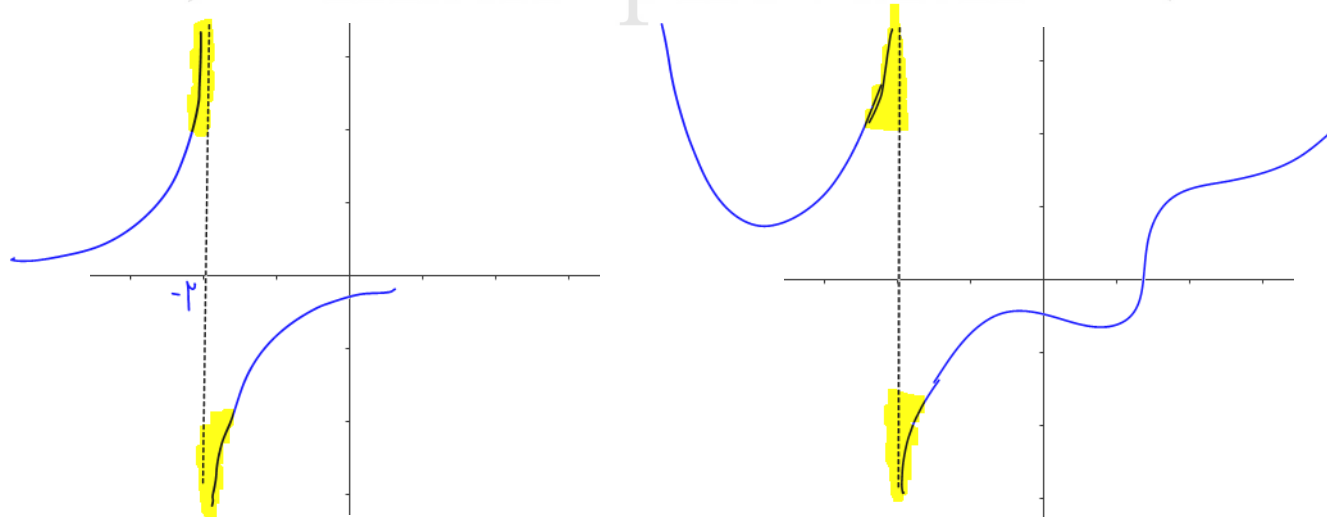
۱. حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x-5} = \frac{2 \times 5}{5^- - 5} = \frac{10}{0^-} = -\infty \quad \text{ب) } \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x}{x-5} = \frac{2 \times 5}{5^+ - 5} = \frac{10}{0^+} = +\infty$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad \text{ت) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|} = \frac{\left[-\frac{1}{3}\right]}{\left|3\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad \text{ج) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin^2 x} = \frac{0+1}{\sin^2 0} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

۲. نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف ۲- تعریف شده باشد به طوری که $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانان مقایسه کنید.



تمرین

۱ الف) نشان دهید چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ بر دوجمله‌ای $x+1$ بخش پذیر است.

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$f(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 + 1 = -2 + 2 = 0 \Rightarrow R=0$$

ب) به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنویسید.

$$\begin{array}{r} 2x^3 + x^2 + 1 \quad | \quad x+1 \\ \underline{-2x^3 - 2x^2} \\ -x^2 + 1 \\ \underline{+x^2 + x} \\ x+1 \\ \underline{-x-1} \\ 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x+1)(2x^2 - x + 1)$$

۲ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x}{2x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x - 5}{x^2 - 20} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-5)(x^2 + x + 1)}{(x-5)(x+5)} = \frac{25 + 5 + 1}{5 + 5} = \frac{31}{10}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 - 4x - 5 \quad | \quad x-5 \\ \underline{-x^3 + 5x^2} \\ 9x^2 - 4x - 5 \\ \underline{-9x^2 + 45x} \\ x - 5 \\ \underline{-x + 5} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x^2 + x + 4} = \lim_{u \rightarrow -4} \frac{(u+4)(u-1)}{(u+4)(u^2+1)} = \frac{-4-1}{16+1} = -\frac{5}{17}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{u^3} + 4\cancel{u^2} + u + 4 \quad | \quad \cancel{u} + 4 \\ -\cancel{u^3} - 4\cancel{u^2} \quad \quad \quad u^2 + 1 \\ \hline \quad \quad \quad u + 4 \\ \quad \quad -u - 4 \\ \hline \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

۲) حدود زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

$$u^2 - 2u + 1$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^2 - x} \times \frac{u + \sqrt{2u-1}}{u + \sqrt{2u-1}} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^2 - (2u-1)}{(u^2 - u)(u + \sqrt{2u-1})} =$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u-1)(u-1)}{u(u-1)(u + \sqrt{2u-1})} = \frac{1-1}{1 \times (1 + \sqrt{2-1})} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}} \times \frac{(2 + \sqrt{x+1})}{(2 + \sqrt{x+1})} = \lim_{u \rightarrow 3} \frac{(u^2 - 9)(2 + \sqrt{u+1})}{4 - (u+1)} =$$

$$\lim_{u \rightarrow 3} \frac{(u-3)(u+3)(2 + \sqrt{u+1})}{-(u-1)} = \frac{(3-3)(3+3)(2 + \sqrt{3+1})}{-1} = \frac{4 \times 4}{-1} = -16$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x + 16}{\sqrt[3]{x} + 2} \times \frac{\sqrt[3]{u^2} - \sqrt[3]{u} + 4}{\sqrt[3]{u^2} - \sqrt[3]{u} + 4} = \lim_{u \rightarrow -8} \frac{(2u + 16)(\sqrt[3]{u^2} - \sqrt[3]{u} + 4)}{u + 8}$$

$$\lim_{u \rightarrow -8} \frac{2(u+8)(\sqrt[3]{u^2} - \sqrt[3]{u} + 4)}{u+8} = 2(\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{-8} + 4) = 2(4 - (-2) + 4) = 24$$

۴) حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{|x|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1^- - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

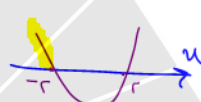
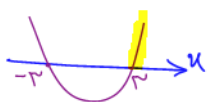
ت) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{9}{(x+6)^2} = \frac{9}{0^+} = +\infty$

ث) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^4} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x+1}{(2x+1)^2} = \frac{4(-\frac{1}{2})+1}{(2(-\frac{1}{2})+1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

چ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-5x}{x^2-9} = \frac{1-5(3)}{0^+} = \frac{-14}{0^+} = -\infty$

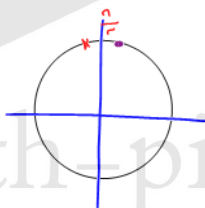
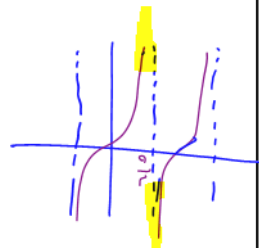
ح) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2-4} = \frac{-3 \times (-2)}{0^+} = \frac{6}{0^+} = +\infty$



خ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

د) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$

$\lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{1}{0^+} = +\infty$



ذ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$

ر) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-3}{x-3} = \frac{[3^-]-3}{3^- - 3} = \frac{2-3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

$\lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

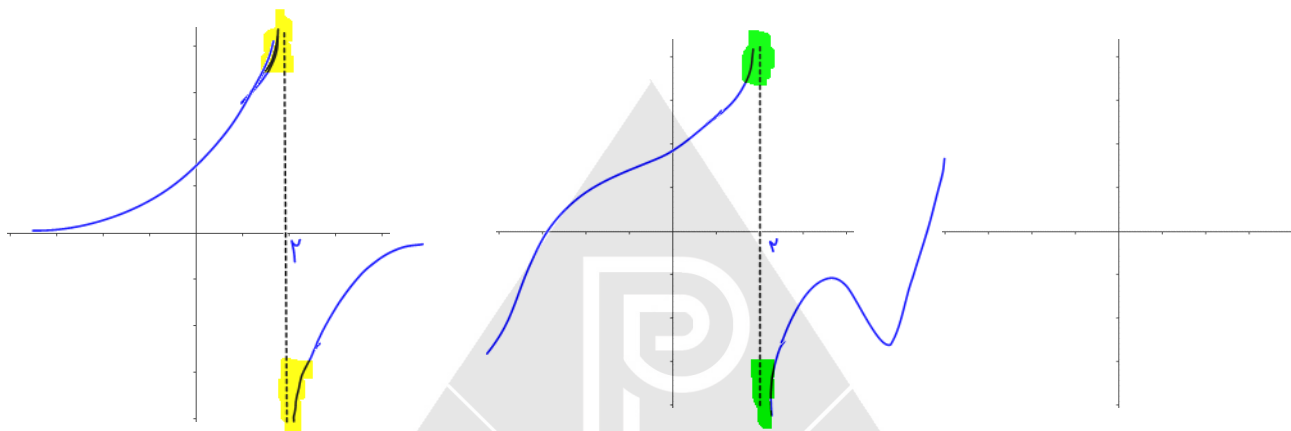
۵) الف) عبارت $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

اگر به اندازه کافی x ها را با اعداد کوچکتر از ۳ به ۳ نزدیک کنیم صفایه $f(x)$ را می توان از هر عدد مثبت M بزرگتر کرد.

ب) عبارت $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید. اگر x ها را به اندازه کافی با اعداد بزرگتر از ۲ بنزدیک کنیم

مقادیر $f(x)$ را می توان از هر عدد هفتی دگرگو می کو جلته کرد.

پ) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در هر دو شرط بالا صدق کند. مسئله چند جواب دارد؟ **بیمار**



نمونه سوالات نهایی



(خرداد ۱۴۰۳ - ۱/۵ نمره)

۱- حدود زیر را محاسبه کنید. (نماد [] علامت جزء صحیح است.)

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = 2$ ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)^4} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

ج) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-[x]}{x-3} = \frac{3-[3^-]}{3-3} = \frac{3-2}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

(دی ۱۴۰۲ - ۰/۲۵ نمره)

۲- درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. $x-1=0 \Rightarrow x=1$

باقیمانده تقسیم چندجمله ای $P(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ بر $x-1$ برابر ۲ است. **درست**

$$P(1) = 2 - 1 + 1 = 2 \rightarrow R = 2$$

(دی ۱۴۰۲ - ۰/۲۵ نمره)

۳- جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

بازه $(-2, 5)$ یک همسایگی چپ برای عدد **صفر** است.

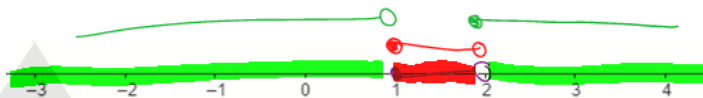
(خرداد ۱۴۰۲ - ۵/۵ نمره)

۴- آیا مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{[x] - 1}$ وجود دارد؟ چرا؟ خیر

چون همایک راست اتعریف نشده است

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{[x] - 1} = \frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{0} \leftarrow \text{منزغون}$$

$$[x] - 1 = 0 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2$$



(خرداد ۹۹ - ۱/۲۵ نمره)

۵- حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - \sqrt{x+6}} \times \frac{x + \sqrt{x+6}}{x + \sqrt{x+6}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 2x - 3)(x + \sqrt{x+6})}{x^2 - (x+6)}$$

$$x^2 - x - 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)(x+\sqrt{x+6})}{(x-3)(x+2)} = \frac{(3+1)(3+\sqrt{3+6})}{3+2} = \frac{4 \times 6}{5} = \frac{24}{5}$$

math-pilevar.ir

سوالات تکمیلی



(سراسری ریاضی ۹۸)

۱- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-5}{x^2+ax+b} = -\infty$ باشد، کدام $a+b$ است؟
 (۱) -۱ (۲) ✓ صفر (۳) ۱ (۴) ۲

$$x^2 - \frac{5}{a}x + \frac{b}{a}$$

$$\frac{2x^2-5}{(x-2)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

(سراسری تجربی ۱۴۰۱)

۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-4}{x^3-[x^3]}$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ✓ $\frac{1}{3}$ (۳) ۱ (۴) $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-4}{x^3-8} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{4}{4+4+4} = \frac{1}{3}$$

$x > 2 \rightarrow x^3 > 8$

درس دوم

حد در بی نهایت

حد در بی نهایت

در درس قبل که حدهای نامتناهی را بررسی کردیم، دیدیم که وقتی x به سمت عددی مثل a نزدیک می‌شود، مقادیر y به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کرد. در اینجا x را به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌دهیم و حد تابع را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

فعالیت

فرض کنید بخواهیم سطح مربعی به ضلع ۱ متر را طی فرایندی مطابق شکل‌های زیر رنگ کنیم. در مرحله اول، نصف سطح مربع را رنگ می‌کنیم. در مرحله دوم نصف قسمت‌های رنگ نشده را رنگ می‌زنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

مرحله	۱	۲	۳	۴	...
شکل					...
سطح رنگ شده (متر مربع)	$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^1}$	$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2}$	$\frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{2^3}$	$1 - \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16}$	...

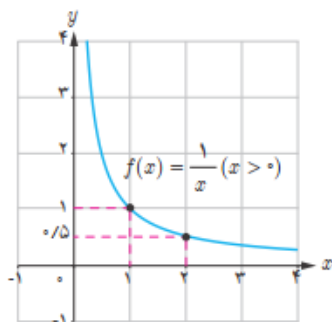
$$1 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{1.023}{1.024}$$

الف) در مرحله دهم، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

ب) در مرحله n ام، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

پ) اگر n به قدر کافی بزرگ اختیار شود، در مورد مساحت سطح رنگ شده در مرحله n ام چه می‌توان گفت؟

تقریباً کل مربع رنگ می‌شود.



مثال: تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه $(0, +\infty)$ در نظر می‌گیریم. رفتار این تابع را به ازای

برخی مقادیر مثبت x در جدول زیر مشاهده می‌کنید.

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

x	۱	۲	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	...	$\rightarrow +\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	۱	۰/۵	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	...	$\rightarrow ? \circ$

از جدول دیده می شود که با افزایش مقدار x ، مقدار $\frac{1}{x}$ به صفر نزدیک و نزدیک تر می شود. به عنوان مثال، برای آنکه فاصله $\frac{1}{x}$ تا صفر، کمتر از 0.0001 باشد، لازم است x بزرگ تر از 10000 انتخاب شود. به نظر شما، آیا به هر میزان که بخواهیم، می توانیم مقدار $\frac{1}{x}$ را به صفر نزدیک کنیم؟ آیا مقداری از x وجود دارد که به ازای آن، فاصله $\frac{1}{x}$ تا صفر کمتر از 0.000001 باشد؟ $\dots > x > 1000000 \Rightarrow \frac{1}{1000000} < \frac{1}{x}$

با این شرایط می گویند حد تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در $+\infty$ برابر صفر است و می نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. به طور کلی می توان گفت:

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

اگر تابع f در بازه ای مثل $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد، رابطه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می توان به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

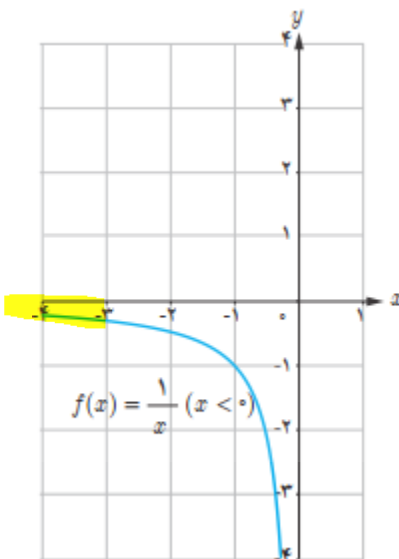
رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ نیز به روش مشابه تعریف می شود:

فرض کنیم تابع f در بازه ای مثل $(-\infty, b)$ تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ به این معناست که به هر مقدار ϵ ، می توان $f(x)$ را به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر $\dots$ کوچک و منفی اختیار شود.

مثال: با توجه به جدول زیر و با ملاحظه نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ که در بازه $(-\infty, 0)$ رسم شده است، دیده می شود که $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

x	$-\infty \leftarrow$	$\dots$	-1000000	-100000	-10000	-100
$f(x) = \frac{1}{x}$	$0 \leftarrow$	$\dots$	-0.000001	-0.00001	-0.0001	-0.01

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$



در مورد حدهای نامتناهی، دو قضیه زیر مفیدند.

قضیه ۱: فرض کنیم n عددی طبیعی باشد. در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (\text{الف}) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (\text{ب})$$

قضیه ۲: فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m$. در این صورت:

$$\text{الف)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l \pm m$$

$$\text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l \cdot m$$

$$\text{پ)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{l}{m} \quad (m \neq 0)$$

تذکر: قضیه ۲ برای وقتی که $x \rightarrow -\infty$ نیز برقرار است.

مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}{3x^2 + 5x - 6}$ را به دست آورید.

حل: برای محاسبه این حد، ابتدا باید صورت و مخرج را بر بزرگ‌ترین توانی از x که در مخرج وجود دارد، یعنی x^2 تقسیم کنیم (چون $x \rightarrow +\infty$ ، پس می‌توان نتیجه گرفت که $x^2 \neq 0$).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}{3x^2 + 5x - 6} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} - \frac{6}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}}{3 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2}} = \frac{\sqrt{1 - 0 + 0}}{3 + 0 - 0} = \frac{\sqrt{1}}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

کار در کلاس

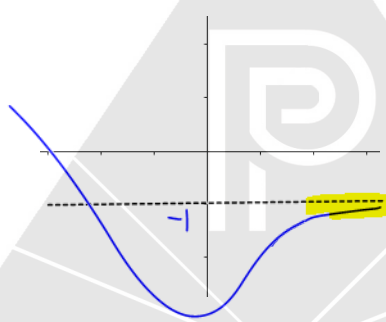
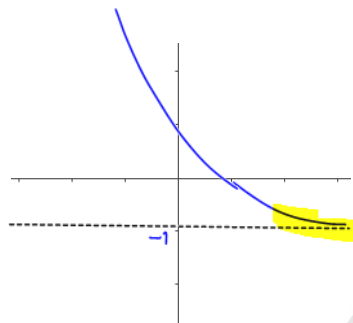
۱ مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x+2}}{x-1} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3u+2}}{\frac{u-1}{u}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3 + \frac{2}{u}}}{1 - \frac{1}{u}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\text{ب) } \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1-5t^2}{t^3+3t} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1-5t^2}{t^3+3t} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{1}^{\circ}-5}{1+\cancel{3}^{\circ}} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-3x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2-3n}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{1}^{\circ}}{\cancel{2}^{\circ}-3} = \frac{0}{-3} = 0$$

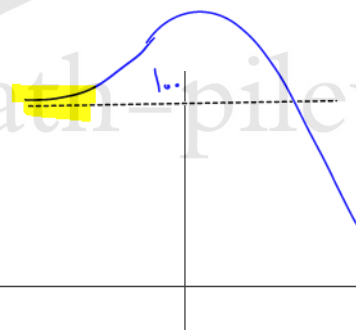
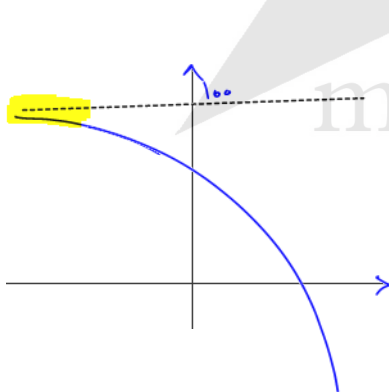
۲ الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-1) باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{x+1} = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10-2x^2}{x^2+2} = -1$$

ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر 100 باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.



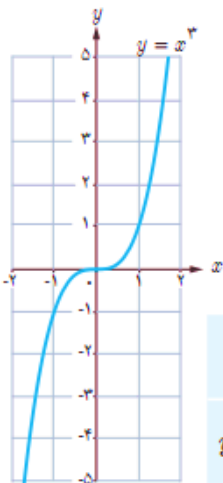
$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{100x^2+x}{x^2+1} = 100$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{100x-1}{x+1} = 100$$

حد نامتناهی در بی نهایت

برخی توابع مانند f هستند که وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ مقدار آنها یعنی $f(x)$ می تواند به هر اندازه دلخواه بزرگ (یا کوچک منفی) شود. در این بخش رفتار این گونه تابع ها را در $+\infty$ یا $-\infty$ مورد مطالعه قرار می دهیم.

مثال: تابع $f(x) = x^3$ را در نظر بگیرید.



$$(+\infty)^3 = +\infty \quad (-\infty)^3 = -\infty$$

x	$-\infty \leftarrow$	-1000	-100	-10	10	100	1000	$\rightarrow +\infty$
$y = x^3$	$-\infty \leftarrow$	-1000000000	-1000000	-1000	1000	1000000	1000000000	$\rightarrow +\infty$

جدول بالا و همچنین نمودار تابع نشان می دهند که با افزایش مقدار x ، مقدار x^3 هم افزایش می یابد به طوری که با بزرگ کردن x به قدر کافی، می توان مقدار x^3 را از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر کرد. در این حالت می نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$. در حالت کلی داریم:

تعریف: فرض کنیم تابع f در بازه ای مثل $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد. رابطه

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

به روش مشابه از جدول و نمودار بالا دیده می شود که با منفی و کوچک گرفتن x به قدر کافی، می توان مقدار x^3 را از هر عدد منفی دلخواهی کوچک تر کرد. در این حالت می نویسیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$. در حالت کلی می توان گفت:

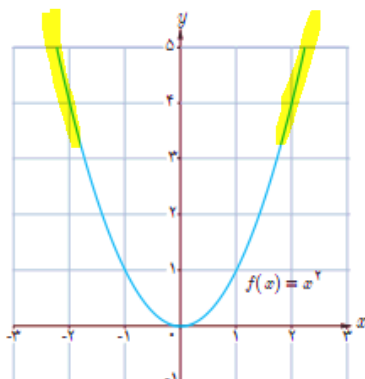
تعریف: فرض کنیم تابع f در بازه ای مثل $(-\infty, b)$ تعریف شده باشد. رابطه

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچک تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

تذکر ۱: رابطه های $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می شوند.

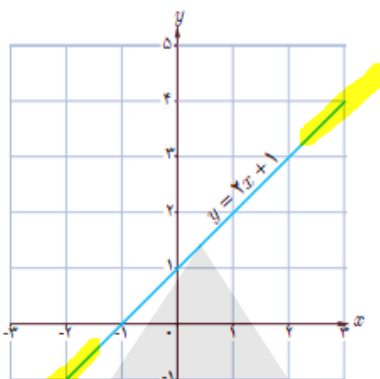
تذکر ۲: رابطه هایی مانند $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ را حد نامتناهی در بی نهایت می نامیم. همچنان که قبلاً بیان شد، این دو مورد، صورت هایی از عدم وجود حد تابع f در $+\infty$ هستند؛ چرا که $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند که بیانگر حد تابع f در $+\infty$ باشند.

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.



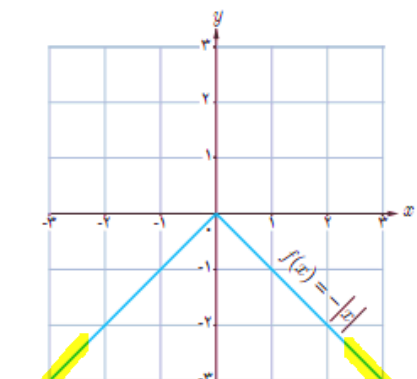
الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$



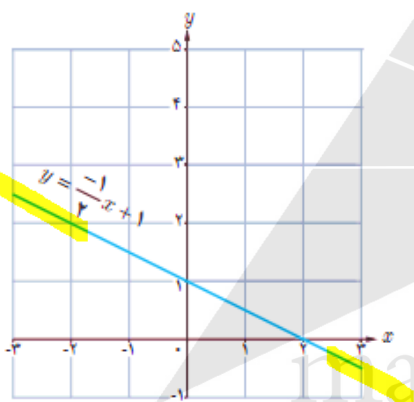
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+1) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1) = +\infty$



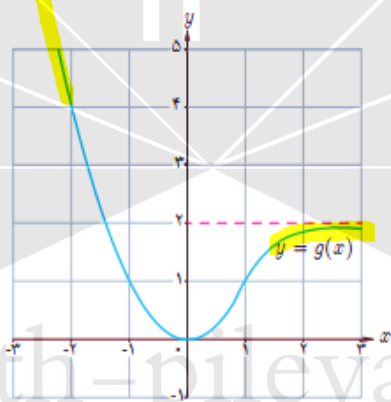
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$



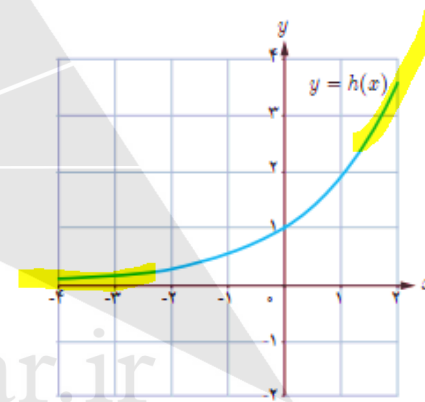
ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = -\infty$



ث) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$



ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

از قضیه زیر برای محاسبه حد تابع یک جمله‌ای $f(x) = ax^n$ در $+\infty$ و $-\infty$ استفاده می‌کنیم.

قضیه: فرض کنیم n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر باشد.

$(+\infty)^n = -\infty$ (منفی)

$(+\infty)^n = +\infty$ (مثبت)

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (a \text{ مثبت}) \\ -\infty & (a \text{ منفی}) \end{cases}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ مثبت}) \\ -\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ منفی}) \\ -\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ مثبت}) \\ +\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ منفی}) \end{cases}$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 + 5x^2)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 4x^2 - 5x - 9)$

حل:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 + 5x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + 5 \right)$

بنابر قضیه‌ای از درس قبل، حد $\frac{2}{x}$ و $\frac{3}{x^2}$ در $+\infty$ برابر صفرند؛ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + 5 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (0 - 0 + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 = 5 \times (+\infty)^2 = 5 \times (+\infty) = +\infty$$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 4x^2 - 5x - 9) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{9}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 (-2 + 0)$

$$(-2)(-\infty)^3 = -2 \times (-\infty) = +\infty \quad = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty$$

در هر دو قسمت مثال قبل دیده می‌شود که حد یک تابع چندجمله‌ای مثل f در $+\infty$ یا $-\infty$ برابر است با حد جمله با بزرگ‌ترین توان f در $+\infty$ یا $-\infty$. این مطلب در حالت کلی درست است و می‌توان به روش مثال بالا آن را اثبات کرد یعنی:

فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجه n به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n$$

از این مطلب می‌توان برای محاسبه حد توابع گویا، زمانی که $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ نیز استفاده کرد. به مثال زیر دقت کنید.

مثال: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^5 + 7x^3 - 2x - 9}{3x^3 - 8x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^5}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^2) = +\infty$

$$-4(-\infty)^2 = -4(-\infty) = +\infty$$

نتیجه بسیار مهم براساس هم ارزی پرتوان



براساس هم ارزی پرتوان، یک نتیجهی بسیار مهم دربارهی کسرهایی که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای است. برای $x \rightarrow \pm\infty$ به دست می‌آید:

مثال	حاصل حد	شرط	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x + 5} = -\infty$	$+\infty$ یا $-\infty$	درجهی صورت از درجهی مخرج بیشتر است: $n > m$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots}$ $(m, n \in \mathbb{N}, a, a' \neq 0)$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x - 1}{x^2 + 2x - 7} = \frac{3}{1} = 3$	$\frac{a}{a'}$	درجهی صورت و مخرج مساوی است: $n = m$	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5}{x^2 + 6x - 1} = 0$	صفر	درجهی صورت از درجهی مخرج کمتر است: $n < m$	

$$\frac{2x}{2x^2} = \frac{1}{x}$$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x^2 - 1}x^2 - 6x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^2}x^2} = \frac{2}{1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 4}{x^2 + x - 8} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} = \frac{5}{(-\infty)} = 0$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^4 + 5x^2}{2x^2 + 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^4}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -2 \times (-\infty)^2 = -2 \times (+\infty) = -\infty$

تمرین

۱ نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{1}{x}$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

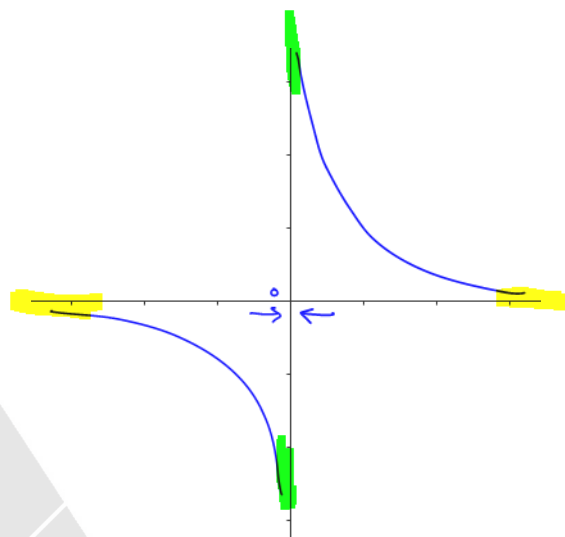
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} f(u) = +\infty$$

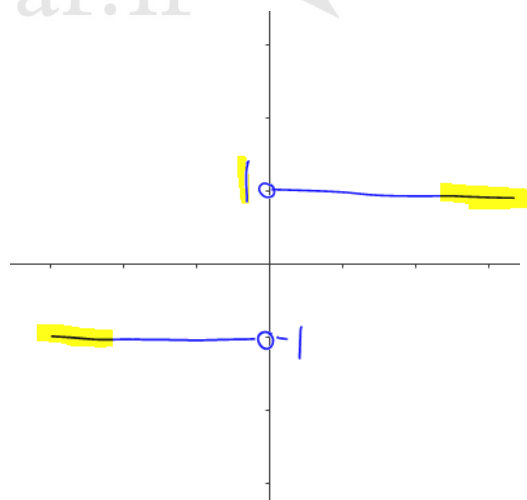
$$\lim_{u \rightarrow 0^-} f(u) = -\infty$$



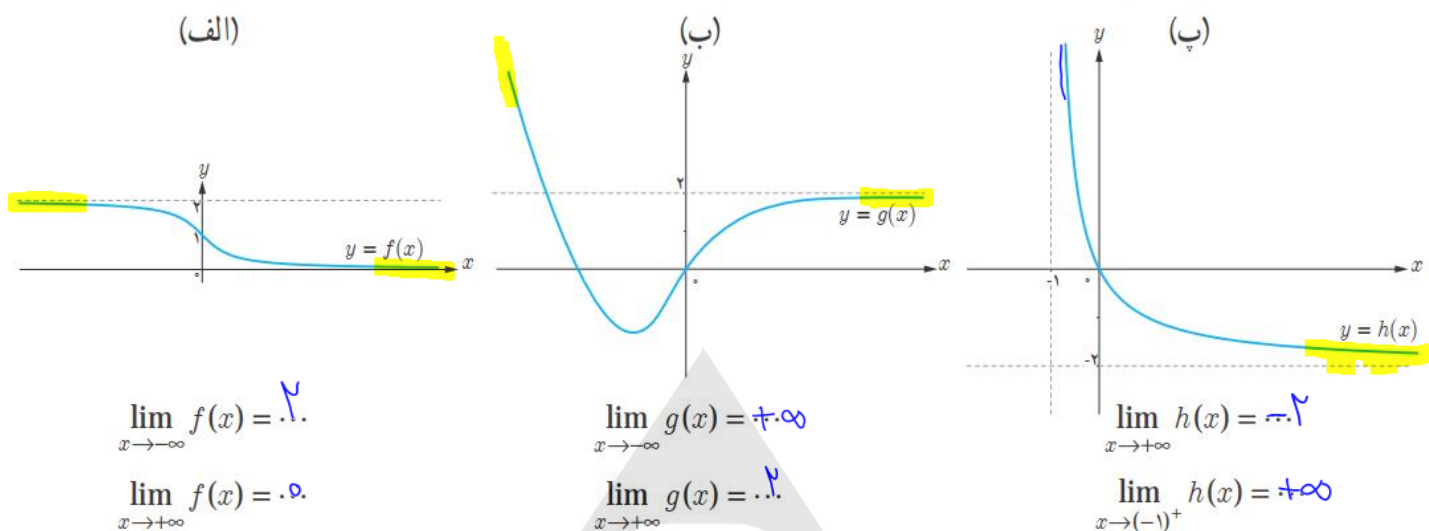
ب) $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$$

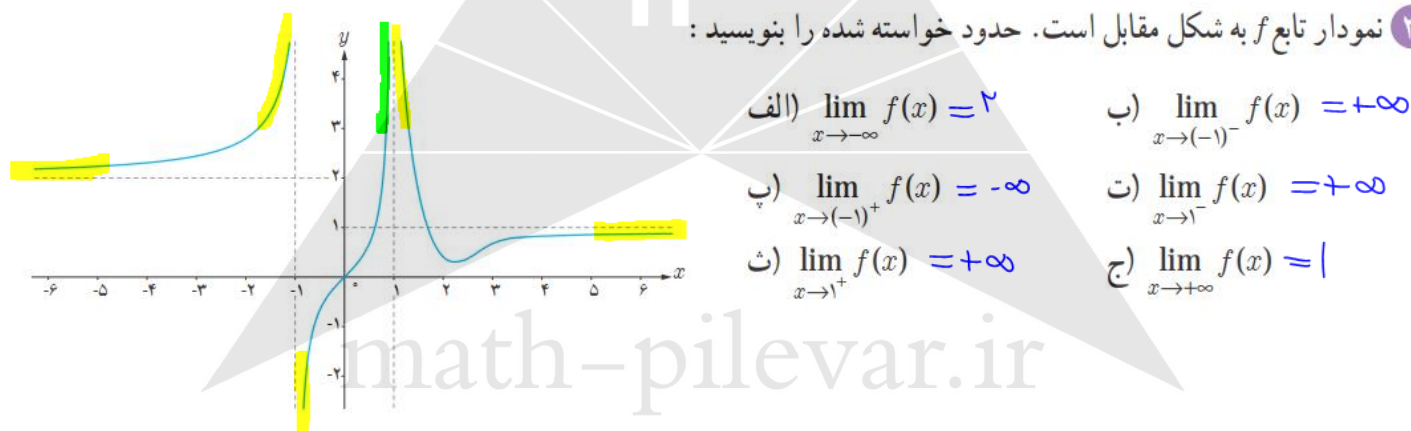
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +1$$



۲ با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.



۳ نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید:



۴ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(9 + \frac{7}{x^3} \right) = 9 + \frac{7}{(-\infty)^3} = 9 + 0 = 9$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x^3 + 7x^2 - 6 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}x^3 = -\frac{1}{2}(-\infty)^3 = -\frac{1}{2}(-\infty) = +\infty$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2(-\infty)} = 0$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5} = -\frac{2}{5}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$\text{ح) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 6x^3 - x}{x^2 - 5x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = 2(-\infty)^3 = -\infty$$

$$\text{ز) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -(+\infty) = -\infty$$

$$\text{خ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{-6n^3}{2n^3} = -3$$

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{4}n + \frac{1}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}n = \frac{1}{2} \times (+\infty) = +\infty$$

۵ الف) هر يك از رابطه‌های $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ به چه معنا هستند؟ توضیح دهید.

اگر n ها به اندازه کافی مثبت و بزرگ کنیم مقادیر $f(n)$ را می‌توان به اندازه دلخواه به عدد ۱- نزدیک کرد.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = -1$$

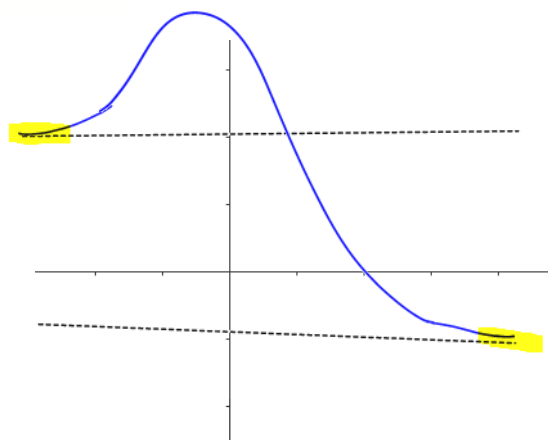
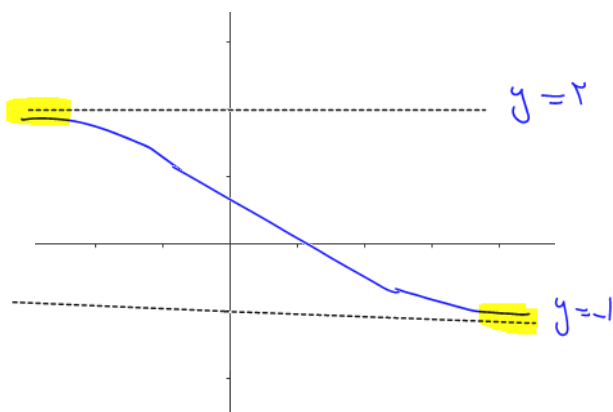
اگر n ها را به اندازه کافی منفی و کوچک کنیم مقادیر $f(n)$ را می‌توان به اندازه دلخواه به عدد ۲ نزدیک کرد:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = 2$$

math-pilevar.ir

ب) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که هر دو ویژگی الف را داشته باشد. مسئله چند جواب دارد؟

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$



نمونه سوالات نهایی

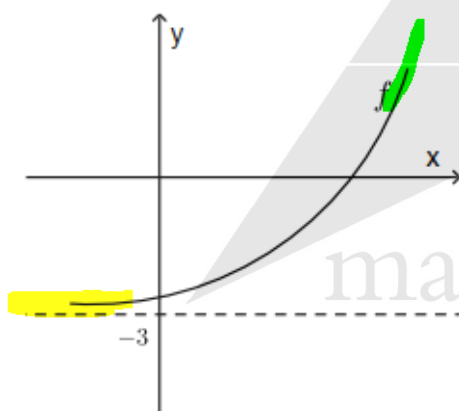


۱- حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2 - \frac{3}{x^3}} = \frac{-1}{2}$$

(شهریور ۱۴۰۳ - ۵/۵ نمره)

۲- با توجه به نمودار تابع f ، حاصل حدهای زیر را به دست آورید.



الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

سوالات تکمیلی



۳- اگر $f(x) = x - \sqrt{4x^2 + x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۸ خارج از کشور)

۳ (۴) ✓ ۲ (۳) -۱ (۲) -۲ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - |2x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

math-pilevar.ir