

جمع بندی ریاضی ۳

فصل ۲



پایه دوازدهم تجربی

تهیه کننده : رقیه پيله ور - دبیر ریاضی ناحیه دو اردبیل



برای تماشای ویدیوهای آموزشی ریاضی ۳ تجربی (همین جزوه) می توانید به سایت

math-pilevar.ir یا math-pilevar.com مراجعه کنید.



تابع متناوب



در تابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$

مقدار ماکزیمم



$$y_{max} = |a| + c$$

دوره تناوب



$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

مقدار مینیمم



$$y_{min} = -|a| + c$$

سوال ۱: دوره تناوب مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع با ضابطه ی $f(x) = 3 \sin\left(\frac{x}{4}\right) - 1$ را بدست آورید.

$$-1 \leq \sin u \leq 1$$

$$y_{max} = 3 \times 1 - 1 = 2$$

$$y_{min} = 3 \times (-1) - 1 = -4$$

$$y_{max} = |a| + c = 3 - 1 = 2$$

$$y_{min} = -|a| + c = -3 - 1 = -4$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$$

بدست آوردن پارامترهای a, b, c



در تابع $y = a \sin(bx) + c$ و $y = a \cos bx + c$ وقتی نمودار آن داده شود.

$$f(t) = a \sin(b t) + c$$

$$|a| = \frac{\max - \min}{2}$$

$$|b| = \frac{2\pi}{T}$$

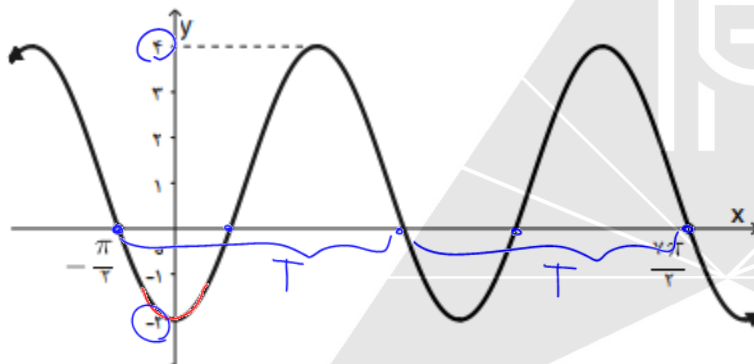
$$\frac{\max + \min}{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

نمودار $y = a \sin(bx + c)$		نمودار $y = a \cos(bx + c) + d$	
$ab > 0$	$ab < 0$	علامت a مثبت	علامت a منفی
در شروع از $x = 0$ به بالا می‌رود. [شبه $y = \sin x$]	در شروع از $x = 0$ به پایین می‌رود. [شبه $y = -\sin x$]	در شروع از $x = 0$ به پایین می‌رود. [شبه $y = \cos x$]	در شروع از $x = 0$ به بالا می‌رود. [شبه $y = -\cos x$]

$$\cos(-x) = \cos x$$

سوال ۲: نمودار تابع با ضابطه $y = a \cos bx + c$ به صورت زیر رسم شده است. مقادیر a و b و c را بدست آورید.



$$2T = \frac{\pi}{1} - \left(-\frac{\pi}{1}\right) = 2\pi$$

$$T = 2\pi$$

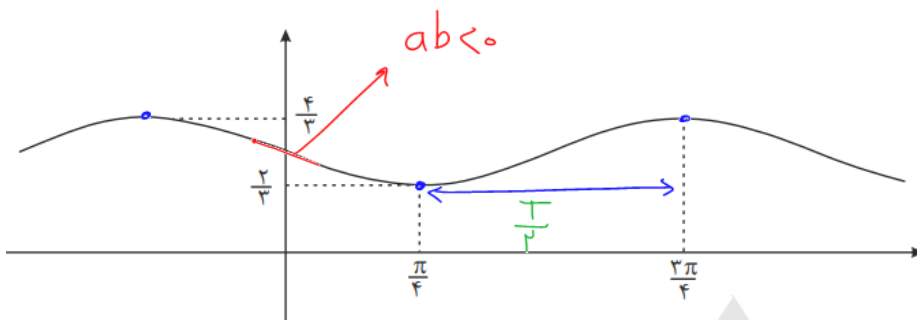
$$|b| = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

$$|a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{4 - (-2)}{2} = 3 \Rightarrow |a| = 3 \rightarrow a = \pm 3 \rightarrow a = -3$$

$$c = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{4 + (-2)}{2} = 1$$

$$y = -3 \cos x + 1$$

سوال ۳: نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ به صورت زیر است. ضابطه‌ی آن را مشخص کنید.



$$\frac{T}{2} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \pi$$

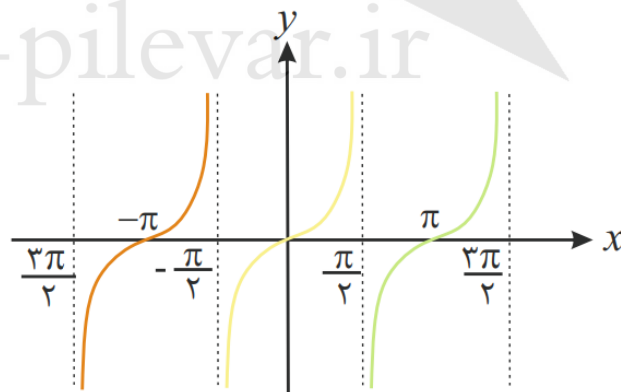
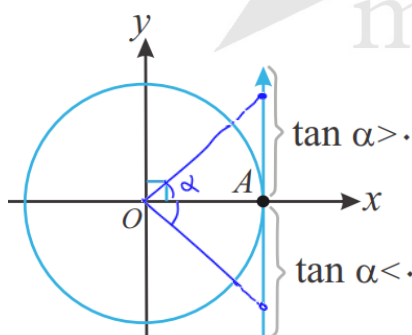
$$|b| = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \rightarrow b = \pm 2 \rightarrow b = +2$$

$$|a| = \frac{\max - \min}{2} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}}{2} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3} \rightarrow a = \pm \frac{1}{3} \rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}}{2} = \frac{\frac{6}{3}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = -\frac{1}{3} \sin 2x + 1$$

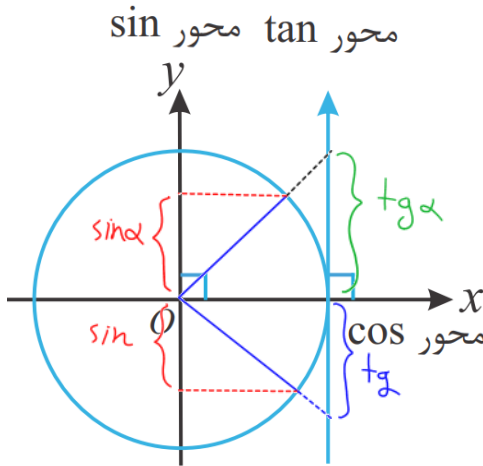
تابع تانژانت



دامنه تابع برابر $R - \left\{ x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ و برد آن برابر $\mathbb{R}$ است.



مقایسه تابع سینوس و تانژانت در ربع اول و چهارم دایره مثلثاتی



$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \alpha > \sin \alpha$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \tan \alpha < \sin \alpha$$

نسبت های مثلثاتی زاویه 2α 

$$1 \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$2 \quad \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$3 \quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$4 \quad \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha \quad \text{فرمول سینوس } 2\alpha$$

فرمول های طلایی



$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

سوال ۴: مقدار سینوس 15° را بدست آورید.

$$\sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

در ربع اول + سینوس

کاربرد	روش کار
پیدا کردن نسبت های مثلثاتی زاویه های غیر معروف ($۷۵^\circ, ۶۷,۵^\circ, ۲۲,۵^\circ, ۱۵^\circ$)	زاویه ای که خودش معروف نیست ولی دو برابرش معروف است را α بگیرید و بعد با نوشتن فرمول کسینوس ۲α و جای گذاری، کسینوس α را پیدا کنید؛ به دست آوردن بقیه ی نسبت ها را هم از قبل بلدید...

سوال ۵: حاصل عبارت $A = ۴ \sin ۷,۵^\circ \cos ۷,۵^\circ \cos ۱۵^\circ$ را بیابید.

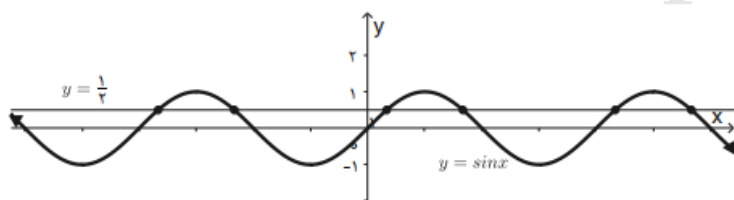
$$\begin{aligned}
 &= ۲ \times ۲ \sin ۷,۵^\circ \cos ۷,۵^\circ \cos ۱۵^\circ \\
 &= ۲ \times \sin ۱۵^\circ \cos ۱۵^\circ \\
 &= \sin ۳۰^\circ = \frac{1}{۲}
 \end{aligned}$$

معادلات مثلثاتی (سینوس)



$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

سوال ۶: نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ و خط به معادله $y = \frac{1}{۲}$ در دستگاه مختصات زیر، رسم شده است. طول نقاط برخورد آنها را بیابید.



$$\sin u = \frac{1}{۲} \Rightarrow \sin u = \sin \frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} u = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ u = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

سوال ۷: جواب معادله مثلثاتی $2 \sin 4x = 1$ را به دست آورید. کدام جوابها در بازه $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ هستند؟

$$\sin 4x = \frac{1}{2}$$

$$\sin 4x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \\ 4x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \checkmark \\ k=1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \times \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} \checkmark \\ k=1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{12} \times \end{cases}$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

سوال ۸: معادله مثلثاتی $2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را حل کنید.

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$

$\cos 2u$ در کنار $\sin u$ ← با اتحاد $\cos 2u = 1 - 2\sin^2 u$ ، تمامی نسبت‌های مثلثاتی موجود می‌شوند $\sin u$.

$$\cos 2x - 3\sin x + 4 = 0$$

سوال ۹: معادله زیر را حل کنید.

$$1 - 2\sin^2 u - 3\sin u + 4 = 0 \Rightarrow -2\sin^2 u - 3\sin u + 5 = 0 \xrightarrow{\sin u = t}$$

$$-2t^2 - 3t + 5 = 0 \Rightarrow t^2 + 3t - 5 = 0 \Rightarrow (t - 1)(t + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -5 \end{cases}$$

$\times (-2)$

$$t = -5 \Rightarrow \sin u = -5 \quad \text{غیر ممکن}$$

$$t = 1 \Rightarrow \sin u = 1 \Rightarrow \sin u = \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} u = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ u = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

تبدیلی

معادلات مثلثاتی (کسینوسی)



$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

math-pilevar.ir

سوال ۱۰: جواب معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را بدست آورید.

$$\cos u = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

سوال ۱۱: جواب‌های معادله $\cos(2x) = \frac{1}{4}$ را در بازه $(0, \pi)$ بدست آورید.

$$\cos 2x = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{8}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{8} \rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} \checkmark \\ k=1 \Rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{8} \times \end{cases}$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{8} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{8} \times \\ k=1 \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{8} = \frac{7\pi}{8} \checkmark \\ k=2 \Rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{8} \times \end{cases}$$

$\cos 2u$ در کنار $\cos u$ با اتحاد $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$ ، تمامی نسبت‌های مثلثاتی موجود می‌شوند $\cos u$.

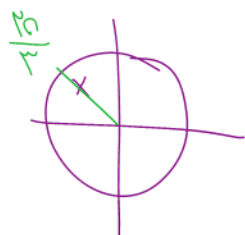
سوال ۱۲: معادله‌ی مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\cos^2 x - 13\cos x - 6 = 0$$

$$2\cos^2 x - 1 - 13\cos x - 6 = 0$$

$$2\cos^2 x - 13\cos x - 7 = 0 \xrightarrow{\cos x = t} 2t^2 - 13t - 7 = 0 \Rightarrow t^2 - 13t - 14 = 0$$

$$(t-14)(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{-14}{2} = -7 \Rightarrow \cos x = -7 \text{ غلط} \\ t = -1 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



$$t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

سوال ۱۳: معادله مثلثاتی $\sin(2x) = \sin x$ را حل کنید.

$$\sin 2x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

سوال ۱۴: جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x = \cos x$ را بدست آورید.

$$\cos 3x = \cos x \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm x$$

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi \rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$