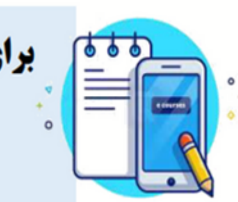
فصل ۲ مثلثات

درس اوّل — تناوب و تانژانت

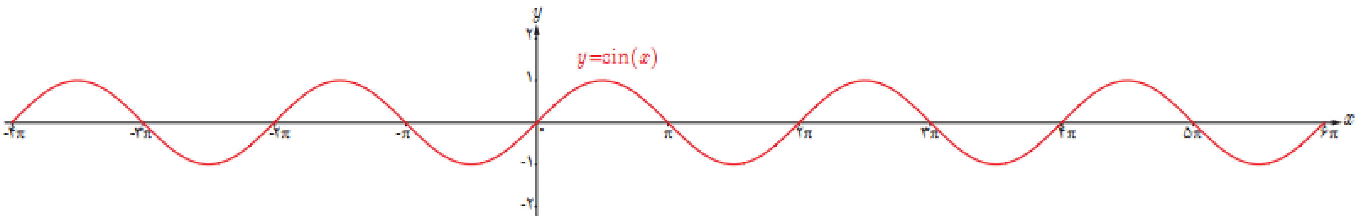
درس دوم — معادلات مثلثاتی

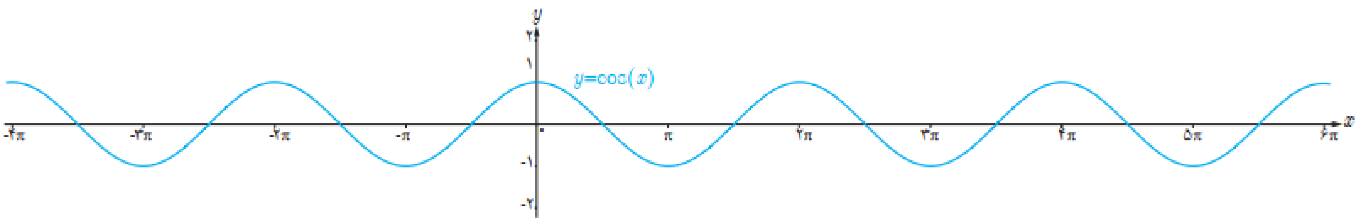
تهیه کننده : رقیه پیله ور – دبیر ریاضی ناحیه دو اردبیل



برای تماشای ویدیوهای آموزشی ریاضی ۳ تجربی (همین جزوه) می توانید به سایت math-pilevar.ir یا math-pilevar.com مراجعه کنید.

با توابع مثلثاتی $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصلهٔ ۲π روی محور xها یکسان است $(\sin(x \pm ۲k\pi) = \sin x$ و $\cos(x \pm ۲k\pi) = \cos x)$ به عبارتی اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در بازه‌ای به طول ۲π داشته باشیم، با تکرار این تکه می‌توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می‌توانید در شکل‌های زیر مشاهده نمایید.



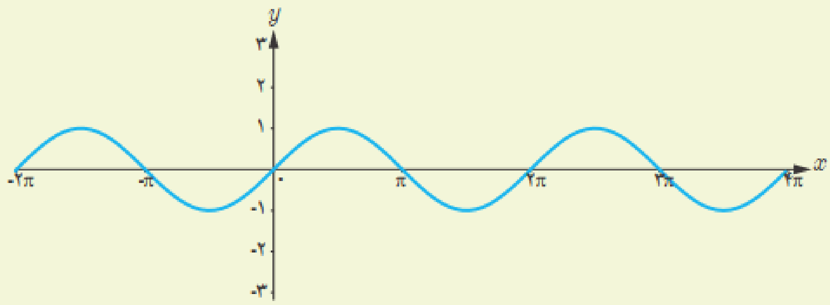
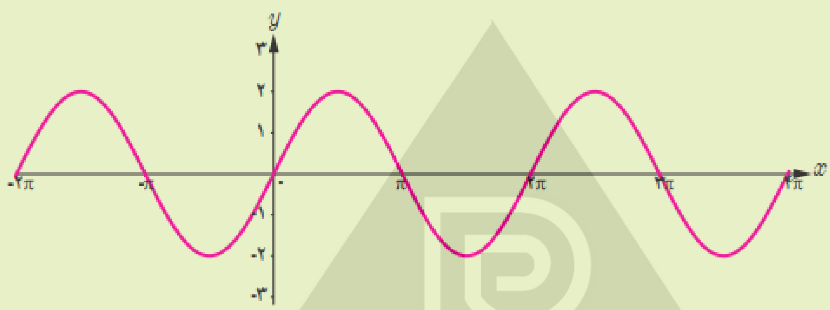
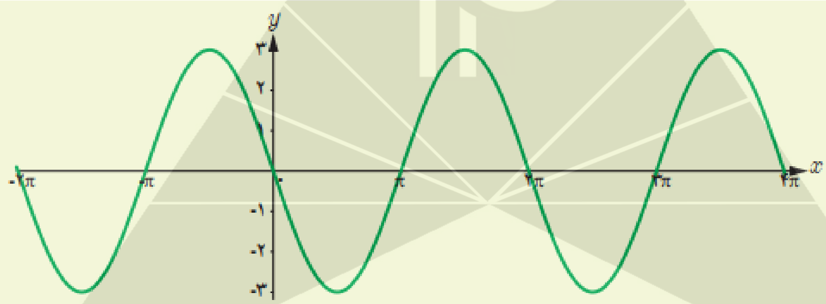
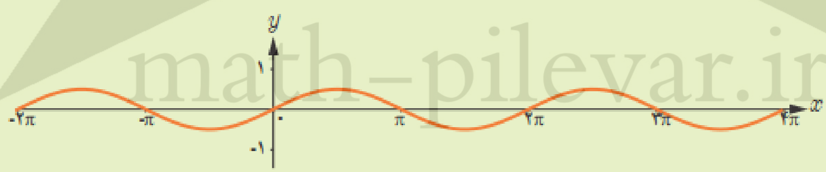
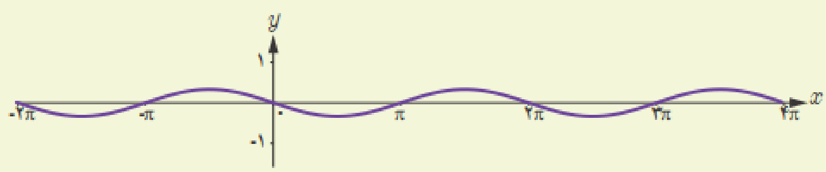


با دقت به نمودار توابع فوق می‌توان مشاهده کرد که نمودار در بازه‌هایی به طول ۲π، ۴π، ۶π و ... تکرار می‌شود. اما کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار این توابع در آن تکرار شده است، همان ۲π است. چنین توابعی را توابع متناوب و ۲π را دورهٔ تناوب آنها می‌نامیم.

تعریف : تابع f را **متناوب** می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی **مثبت** مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$.
کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را **دورهٔ تناوب** f می‌نامیم.

فعالیت

۱ می‌دانیم دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \sin x$ $(f(x) = \cos x)$ برابر ۲π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع به ترتیب ۱ و ۱− است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب a را در تابع $f(x) = a \sin x$ بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی نماییم.

تابع	نمودار تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره تناوب
$y=\sin x$		۱	-۱	۲π
$y=۲\sin x$		۲	-۲	۲π
$y=-۳\sin x$		۳	-۳	۲π
$y=\frac{۱}{۲}\sin x$		$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۲π
$y=-\frac{۱}{۳}\sin x$		$\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	۲π

۲ با توجه به نمودارهای فوق دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=a\sin x$ را مشخص نمایید.

$y_{max}=|a|$ $\qquad$ $T=۲\pi$

$y_{min}=-|a|$

a در دوره تناوب تأثیری ندارد

ولی در مقدار ماکزیمم و مینیمم تأثیر دارد.

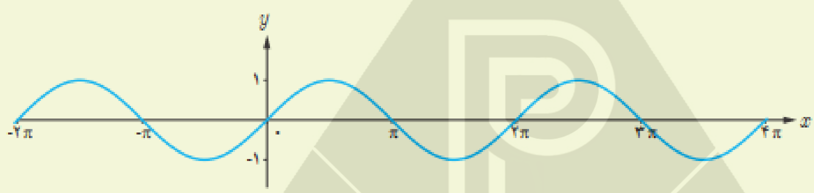
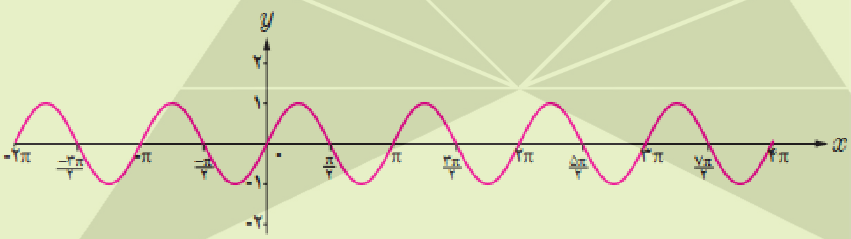
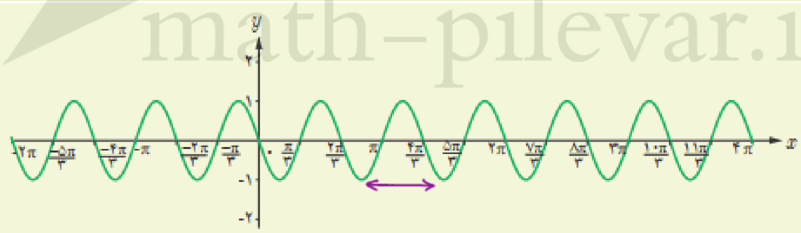
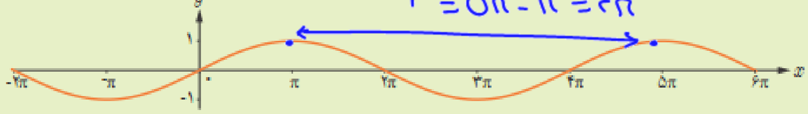
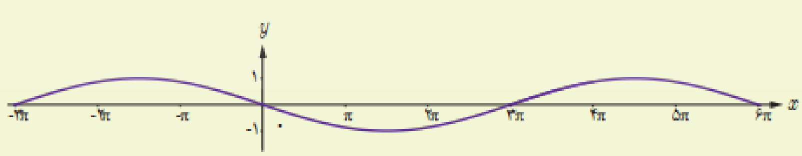
۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانید مشخص نمایید دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=a\sin x+c$ چگونه است.
با انجام مراحلی مشابه مراحل بالا می‌توان نشان داد دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y=a\cos x$ و $y=a\cos x+c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.

$y_{max}=|a|+c \qquad T=2\pi$

$y_{min}=-|a|+c$

فعالیت

۱ با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شدهٔ زیر، دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب b در تابع $y=\sin bx$ را بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

دوره تناوب	مینیمم	ماکزیمم	نمودار تابع	تابع
۲π	-۱	۱		$y=\sin x$
π	-1	1		$y=\sin ۲x$
$\frac{2\pi}{3}$	-1	1		$y=\sin(-۳x)$
4π	-1	1	$T=5\pi-\pi=4\pi$ 	$y=\sin\frac{x}{۲}$
6π	-1	1		$y=\sin(-\frac{x}{۳})$

۲ با توجه به نمودارهای فوق دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\sin bx$ را مشخص نمایید.

$y_{max}=1$ $T=\frac{2\pi}{|b|}$

$y_{min}=-1$

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانیم، مشخص نمایید دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\sin bx+c$ چگونه است.
با انجام مراحلی مشابه مراحل بالا می‌توان نشان داد دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y=\cos bx$ و $y=\cos bx+c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.

$y_{max}=1+c$ $T=\frac{2\pi}{|b|}$

$y_{min}=-1+c$

همان‌طور که در فعالیت‌های قبل دیدیم در توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ ضریب a در دورهٔ تناوب تابع بی‌تأثیر است، اما در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضریب b در دورهٔ تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بی‌تأثیر است. مقدار c نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می‌شود، در دورهٔ تناوب بی‌تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است.

توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

بنابراین با داشتن ضابطهٔ تابعی به صورت فوق می‌توان مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب تابع را به دست آورد و برعکس با داشتن مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دورهٔ تناوب یک تابع مثلثاتی، می‌توان ضابطهٔ تابع مورد نظر را به دست آورد.

مثال : دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y=3\sin(2x)-2$ ب) $y=-\frac{1}{4}\cos(\pi x)$

پ) $y=\pi\sin(-x)+1$ ت) $y=8\cos(\frac{x}{3})$

حل :

$y = ۳\sin(۲x) - ۲$

الف) $\max = |۳| - ۲ = ۱$ $\quad \min = -|۳| - ۲ = -۵$ $\quad T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{\cancel{۲}\pi}{\cancel{۲}} = \pi$

$|a|+c$ $\quad -|a|+c$

$y = -\frac{۱}{۴}\cos(\pi x) + ۰$

ب) $\max = \left|-\frac{۱}{۴}\right| = \frac{۱}{۴}$ $\quad \min = -\left|-\frac{۱}{۴}\right| = -\frac{۱}{۴}$ $\quad T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} = ۲$

$-|a|$

$y = \pi\sin(-x) + ۱$

پ) $\max = |\pi| + ۱ = \pi + ۱$ $\quad \min = -|\pi| + ۱ = ۱ - \pi$ $\quad T = \frac{۲\pi}{|-۱|} = ۲\pi$

$|a|+c$ $\quad -|a|+c$

$y = ۸\cos(\frac{x}{۳}) + ۰$

ت) $\max = |۸| = ۸$ $\quad \min = -|۸| = -۸$ $\quad T = \frac{۲\pi}{\left|\frac{۱}{۳}\right|} = ۶\pi$

بدست آوردن پارامترهای a, b, c وقتی نمودارهای $y = acosbx + c$, $y = asinbx + c$ داده شود.

در موج سینوسی همواره داریم:

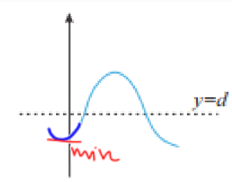
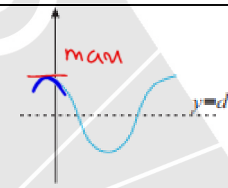
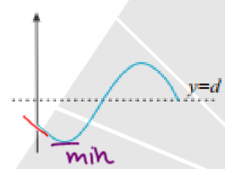
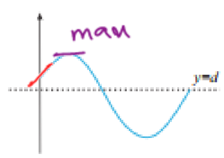
$$f(t) = a\sin(bt) + c$$

$$|a| = \frac{\max - \min}{۲} \qquad |b| = \frac{۲\pi}{T} \qquad c = \frac{\max + \min}{۲}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

جهت حرکت نمودار تابع‌های

$y = a\sin(bx+c)+d$ و $y = a\cos(bx+c)+d$ با شرط $۰ \le c < \frac{\pi}{۲}$ در شروع رسم از $x = ۰$ به صورت زیر است:

نمودار $y = a\cos(bx+c)+d$		نمودار $y = a\sin(bx+c)$	
علامت a منفی	علامت a مثبت	a و b مختلف العلامت $(ab < ۰)$	a و b هم علامت $(ab > ۰)$
			
در شروع از $x = ۰$ به بالا می‌رود. [شبیه $y = -\cos x$]	در شروع از $x = ۰$ به پایین می‌رود. [شبیه $y = \cos x$]	در شروع از $x = ۰$ به پایین می‌رود. [شبیه $y = -\sin x$]	در شروع از $x = ۰$ به بالا می‌رود. [شبیه $y = \sin x$]

$ab > ۰$

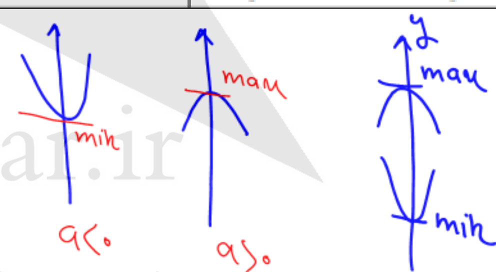
+ +

− −

$ab < ۰$

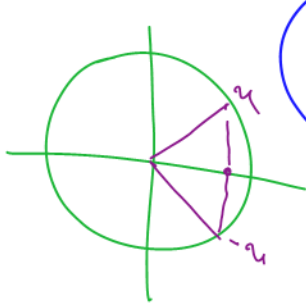
+ −

− +



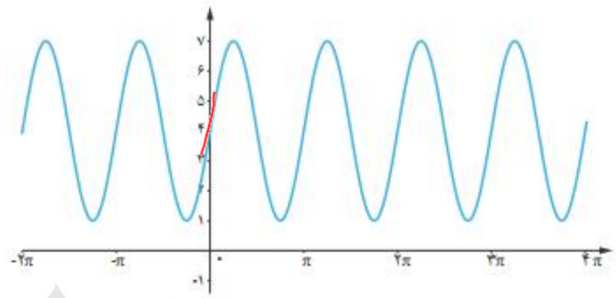
$\cos(-x) = \cos x$

نکته: در نمودار $\cos x$ علامت b می‌تواند مثبت یا منفی باشد



مثال : هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطهٔ $f(x) = a\sin bx + c$ یا $f(x) = a\cos bx + c$ است. با دقت در شکلِ نمودار و تشخیص دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطهٔ آن را مشخص نمایید.

الف)



$y_{max} = 7$

$y_{min} = 1$

$T = \pi$

$ab > 0$

$$|a| = \frac{y_{max} - y_{min}}{2} = \frac{7-1}{2} = 3 \Rightarrow |a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3 \Rightarrow a = 3$$

$$c = \frac{y_{max} + y_{min}}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$$

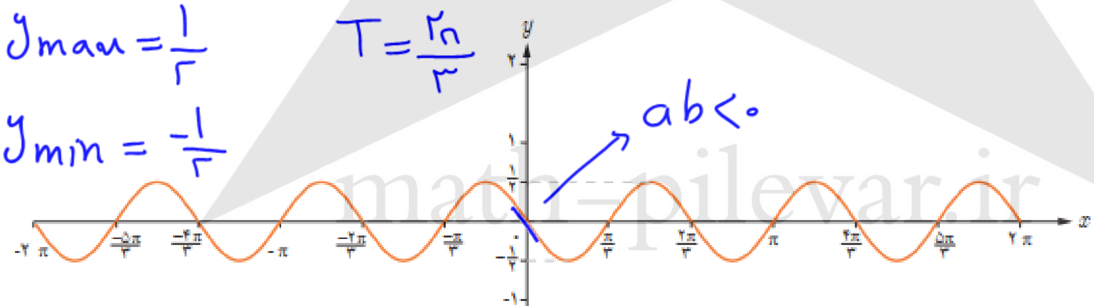
$$|b| = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} = 2 \Rightarrow b = \pm 2 \longrightarrow b = +2$$

$y = 3\sin 2x + 4$

یا

$y = -3\sin(-2x) + 4$

ب)



$y_{max} = \frac{1}{2}$

$y_{min} = -\frac{1}{2}$

$T = \frac{2\pi}{3}$

$ab < 0$

$$|a| = \frac{y_{max} - y_{min}}{2} = \frac{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$c = \frac{y_{max} + y_{min}}{2} = \frac{\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2})}{2} = 0$$

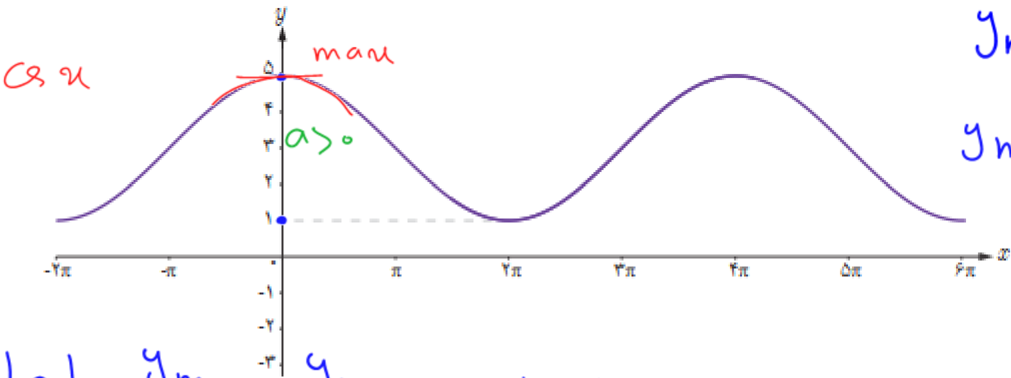
$$|b| = \frac{2\pi}{T} = \frac{\cancel{2\pi}}{\frac{\cancel{2\pi}}{3}} = 3 \longrightarrow b = \pm 3 \longrightarrow b = 3$$

$y = -\frac{1}{2}\sin 3x$

یا

$y = \frac{1}{2}\sin(-3x)$

پ)



$y_{max} = 5$

$y_{min} = 1$

$T = 4\pi$

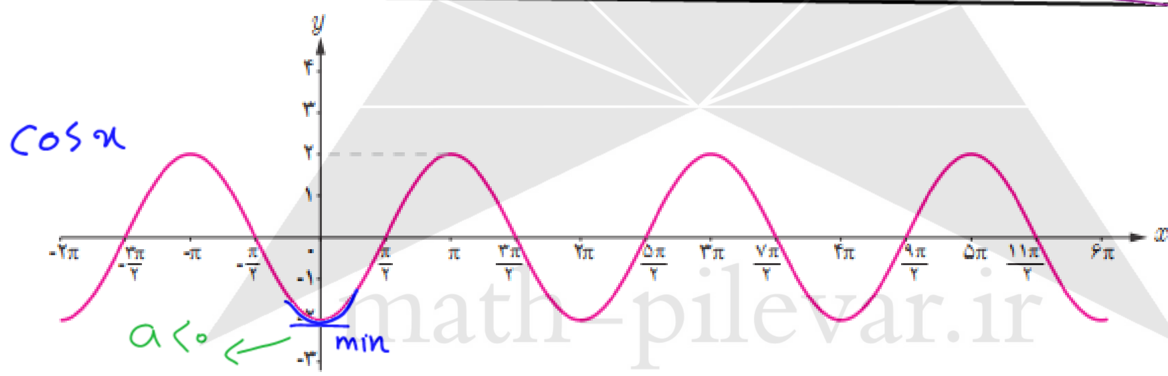
$$|a| = \frac{y_{max} - y_{min}}{2} = \frac{5-1}{2} = 2 \Rightarrow a = \pm 2 \rightarrow a = 2$$

$$|b| = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\cancel{\pi}}{4\cancel{\pi}} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm\frac{1}{2}$$

$$c = \frac{y_{max} + y_{min}}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$\boxed{y = 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 3 \quad \text{یا} \quad y = 2\cos\left(-\frac{1}{2}x\right) + 3}$$

ت)



$$|a| = \frac{y_{max} - y_{min}}{2} = \frac{2-(-2)}{2} = 2 \Rightarrow a = \pm 2 \Rightarrow a = -2$$

$$c = \frac{y_{max} + y_{min}}{2} = \frac{2-2}{2} = 0$$

$$|b| = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \rightarrow b = \pm 1$$

$$\boxed{y = -2\cos x + 0 \quad \text{یا} \quad y = -2\cos(-x)}$$

حل : الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و دورهٔ تناوب برابر π است. لذا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = 2$.

از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $|a| + c$ و $-|a| + c$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c = 4$ و در نتیجه $|a| = 3$.

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای x و y دارد، هر دوی a و b باید مثبت باشند لذا ضابطهٔ تابع مورد نظر به صورت مقابل است : $y=3\sin(2x)+4$

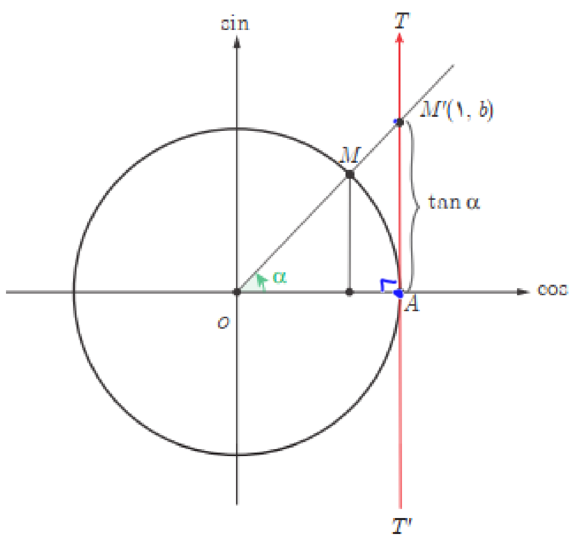
ب) با توجه به نمودار، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب از روی نمودار، $c = 0$ و $|a| = \frac{1}{2}$ و $|b| = 3$ به دست می‌آید که در آن علامت a منفی (مثبت) و b مثبت (منفی) است. بنابراین داریم $y = -\frac{1}{2}\sin 3x$

پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و دورهٔ تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{2}$ و $|a| = 2$. لذا $a = 2$ و $b = \frac{1}{2}$ و بنابراین داریم $y = 2\cos(\frac{x}{2}) + 3$.

ت) ضابطهٔ این نمودار نیز می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و $c = 0$ و $|a| = 2$ و $|b| = 1$ و a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم $y = -2\cos x$

تانژانت

فعالیت



در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطهٔ A بر محور کسینوس‌ها عمود است.

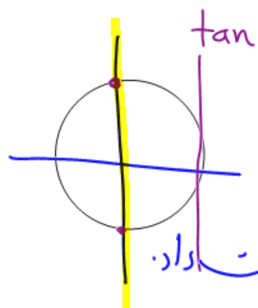
الف) زاویهٔ α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره‌خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطهٔ M' قطع کند. نشان دهید :

$\tan\alpha = AM' = b$

می‌توان دید که تانژانت هر زاویه دلخواه مانند α، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود. بنابراین خط TAT' را محور تانژانت می‌نامیم. نقطهٔ A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد

مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟ چون زوایایی که در ربع اول, سوم هستند در قسمت بالای محور تانژانت (مثبت) قرار می‌گیرد و زوایایی که در ربع دوم و چهارم هستند امتداد آنها در قسمت پایین محور تانژانت می‌افتد.

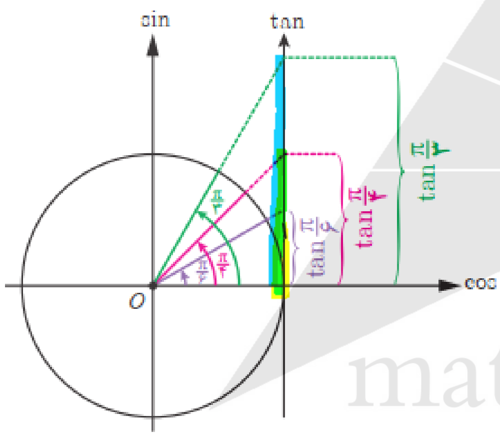


پ) آیا $\tan\frac{\pi}{2}$ عددی حقیقی است؟ خیر $\tan\frac{3\pi}{2}$ چطور؟ خیر به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.

چون امتداد زوایای $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ با محور تانژانت موازی است و در هیچ نقطه‌ای مشخص نمی‌کند برای همین نمی‌توان عدد مشخص از اعداد حقیقی را به تانژانت نسبت داد.

تغییرات تانژانت

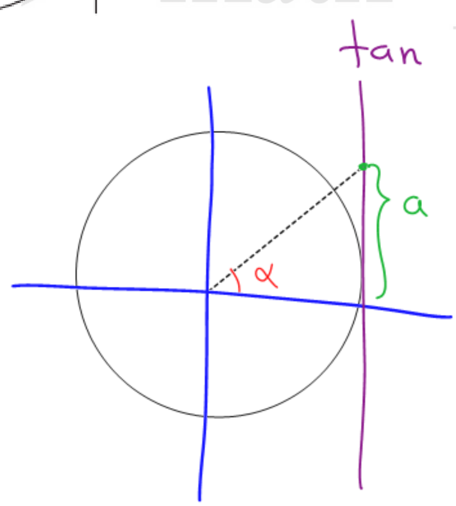
فعالیت



با تغییر زاویهٔ α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی بررسی می‌کنیم. اگر $\alpha = 0$، مقدار $\tan\alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه α، مقدار $\tan\alpha$ نیز افزایش می‌یابد.

الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویهٔ α در ربع اول و نزدیک شدن آن به $\frac{\pi}{2}$، مقادیر تانژانت تا چه حد افزایش می‌یابد؟ $+\infty$

ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت a را داشته باشیم، چگونه می‌توان زاویه‌ای مانند α یافت، به طوری که $\tan\alpha = a$.



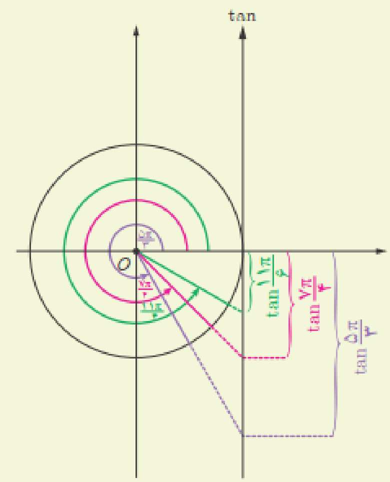
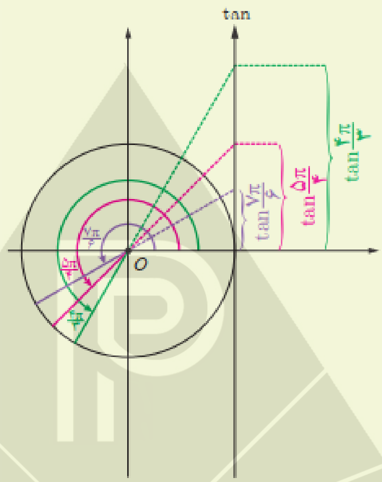
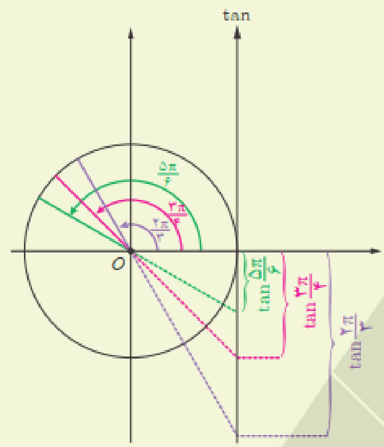
به اندازه a بر روی محور tan جدا می‌کنیم

از a به مبدا مختصات وصل می‌کنیم

کار در کلاس

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع‌های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهشی؟

ب) بازهٔ تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.

ربع	چهارم	سوم	دوم
زوایا			
افزایشی یا کاهشی	افزایش	افزایش	افزایش
بازه تغییرات	$(-\infty, 0]$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0]$

پ) جدول زیر را کامل کنید. (علامت $\nearrow$ به معنی افزایش یافتن و علامت $\swarrow$ به معنی کاهش یافتن است.)

ربع چهارم	ربع سوم	ربع دوم	ربع اول
$\frac{3\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{3}$ $\frac{7\pi}{4}$ $\frac{11\pi}{6}$ 2π	π $\frac{7\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{4}$ $\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$ $\frac{2\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{6}$	0 $\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$
$-\infty$ $-\sqrt{3} \nearrow -1 \nearrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \nearrow 0$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \nearrow 1 \nearrow \sqrt{3} \nearrow +\infty$	$-\sqrt{3} \nearrow -1 \nearrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \nearrow 0$	$0 \nearrow \frac{\sqrt{3}}{3} \nearrow 1 \nearrow \sqrt{3} \nearrow +\infty$

تابع تانژانت

همان‌طور که می‌بینیم به ازای هر زاویهٔ دلخواه در دایرهٔ مثلثاتی (به جز $k\in\mathbb{Z}$ ، $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$)، عددی حقیقی به عنوان $\tan x$ داریم و تابعی با ضابطهٔ $y=\tan x$ مشخص می‌کند. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\,,\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می‌توان دید تابع $y=\tan x$، تابعی متناوب است[۱] و دوره تناوب آن π است، زیرا :

$$\tan(\pi+x)=\tan x$$

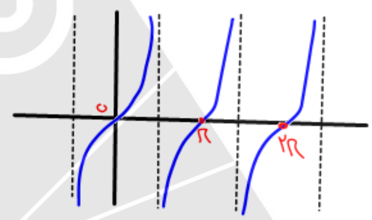
کار در کلاس

صعودی یا نزولی بودن تابع $y=\tan x$ را در مجموعهٔ $[۰\,,\,۲\pi]-\left\{\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\right\}$ بررسی کنید.

$[۰\,,\,\frac{\pi}{۲})$ صعودی

$(\frac{\pi}{۲}\,,\,\frac{۳\pi}{۲})$ صعودی

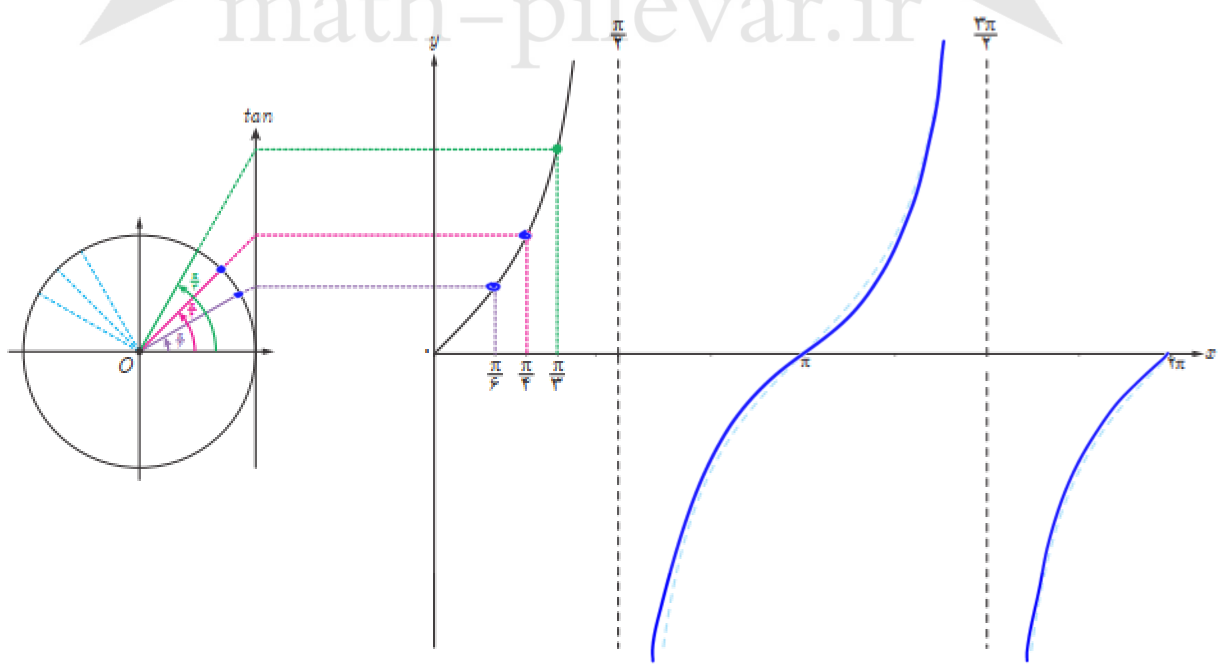
$(\frac{۳\pi}{۲}\,,\,۲\pi]$ صعودی



رسم تابع $y=\tan x$

فعالیت

در شکل زیر نمودار تابع $y=\tan x$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع‌های دیگر رسم کنید.



تمرین

۱ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = ۱ + ۲\sin ۷x$

$$y_{max} = |a| + c = |۲| + ۱ = ۳ \qquad T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{|۷|} = \frac{۲\pi}{۷}$$

$$y_{min} = -|a| + c = -|۲| + ۱ = -۱$$

ب) $y = \sqrt{۳} - \cos\frac{\pi}{۲}x$

$$y_{max} = |-۱| + \sqrt{۳} = ۱ + \sqrt{۳} \qquad T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{\left|\frac{\pi}{۲}\right|} = \frac{۲\cancel{\pi}}{\frac{\cancel{\pi}}{۲}} = ۴$$

$$y_{min} = -|-۱| + \sqrt{۳} = -۱ + \sqrt{۳}$$

پ) $y = -\pi\sin(\frac{x}{۲}) - ۲$

$$y_{max} = |-\pi| + (-۲) = \pi - ۲ \qquad T = \frac{۲\pi}{\left|\frac{۱}{۲}\right|} = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}} = ۴\pi$$

$$y_{min} = -|-\pi| + (-۲) = -\pi - ۲$$

ت) $y = -\frac{۳}{۴}\cos ۳x + ۰$

$$y_{max} = \left|-\frac{۳}{۴}\right| = \frac{۳}{۴} \qquad T = \frac{۲\pi}{|۳|} = \frac{۲\pi}{۳}$$

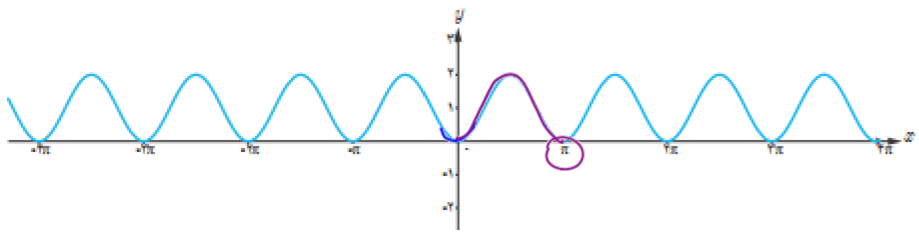
$$y_{min} = -\left|-\frac{۳}{۴}\right| = -\frac{۳}{۴}$$

۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y=\sin \pi x$ ب) $y=۲-\cos \frac{۱}{۲}x$ پ) $y=\sin ۲x$ ت) $y=۱-\cos ۲x$

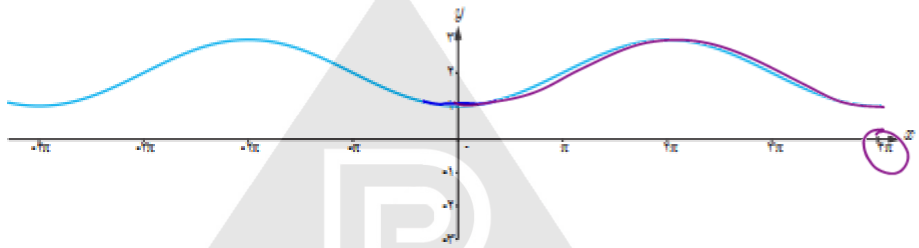
۱) $y=۱-\cos ۲x$

$T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$



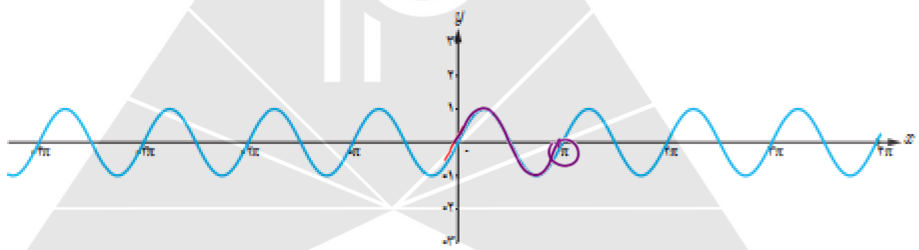
۲) $y=۲-\cos \frac{۱}{۲}x$

$T=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi$



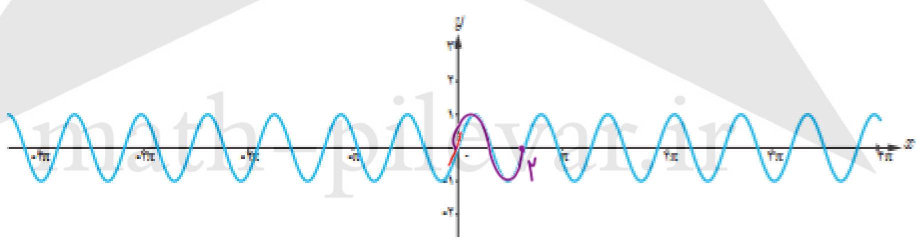
۳) $y=\sin ۲x$

$T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$



۴) $y=\sin \pi x$

$T=\frac{۲\pi}{|\pi|}=۲$



۳ در هر مورد ضابطهٔ تابعی مثلثاتی با دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

الف) $T=\pi$, $\max=۳$, $\min=-۳$

$y=a\sin bx+c$

$|a|=\frac{۳-(-۳)}{۲}=۳ \Rightarrow a=\pm ۳$

$c=\frac{۳+(-۳)}{۲}=۰$

$|b|=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{\pi}=۲ \Rightarrow b=\pm ۲$

$y=۳\sin ۲x$

$y=\pm ۳\cos(\pm ۲x)$

ب) $T=۳$, $\max=۹$, $\min=۳$

$|a|=\frac{۹-۳}{۲}=۳ \rightarrow a=\pm ۳$

$c=\frac{۹+۳}{۲}=۶$

$|b|=\frac{۲\pi}{۳} \rightarrow b=\pm\frac{۲\pi}{۳}$

$y=\pm ۳\sin\left(\pm\frac{۲\pi}{۳}\right)+۶$

$y=\pm ۳\cos\left(\pm\frac{۲\pi}{۳}\right)+۶$

پ) $T=۴\pi$, $\max=-۱$, $\min=-۷$

$|a|=\frac{-۱-(-۷)}{۲}=۳ \Rightarrow a=\pm ۳$

$c=\frac{-۱+(-۷)}{۲}=-۴$

$|b|=\frac{۲\pi}{۴\pi}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow b=\pm\frac{۱}{۲}$

$y=-۳\cos\left(\frac{۱}{۲}x\right)-۴$

ت) $T=\frac{\pi}{۲}$, $\max=۱$, $\min=-۱$

$|a|=\frac{۱-(-۱)}{۲}=۱ \Rightarrow a=\pm ۱$

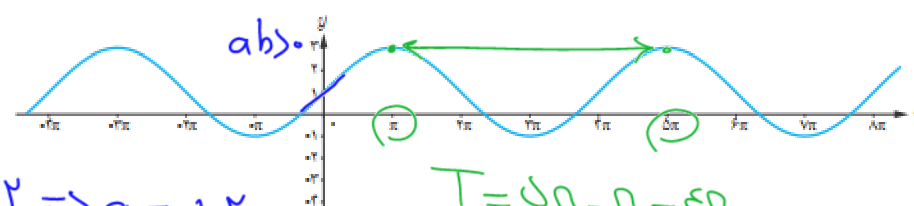
$c=\frac{۱-۱}{۲}=۰$

$|b|=\frac{۲\cancel{\pi}}{\frac{\cancel{\pi}}{۲}}=۴ \Rightarrow b=\pm ۴$

$y=۱\sin ۴x+۰$

۴ ضابطهٔ مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.

الف)



$|a|=\frac{۳-(-۱)}{۲}=۲ \Rightarrow a=\pm ۲$

$|b|=\frac{۲\pi}{۴\pi}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow b=\pm\frac{۱}{۲}$

$c=\frac{۳+(-۱)}{۲}=۱$

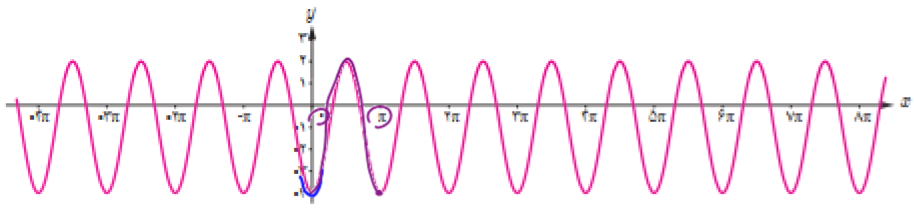
$T=۵\pi-\pi=۴\pi$

$y=۲\sin\left(\frac{۱}{۲}x\right)+۱$

یا

$y=-۲\sin\left(-\frac{۱}{۲}x\right)+۱$

$T=\pi$ ب)



$a<0$

$|a| = \frac{2-(-4)}{2} = 3 \Rightarrow a = \pm 3 \Rightarrow a = -3$

$\boxed{y = -3\cos(2x) - 1}$

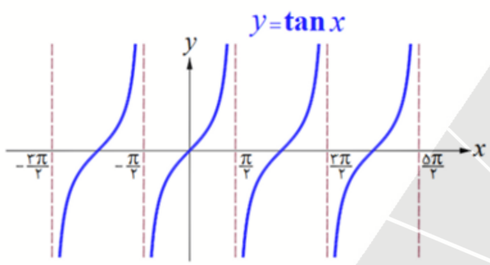
$c = \frac{2+(-4)}{2} = -1$, $|b| = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \Rightarrow b = \pm 2$

۵ کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است. نادرست

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد. نادرست

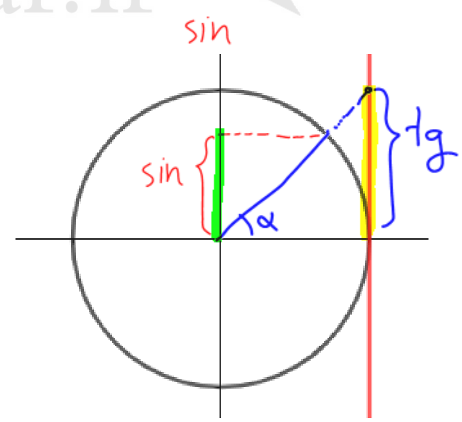
پ) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است. درست



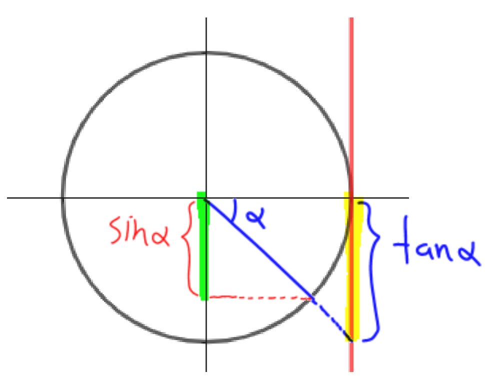
۶ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید:

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ب) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$



$\tan\alpha > \sin\alpha$



$\tan\alpha < \sin\alpha$

نمونه سوالات نهایی

۱- اگر بیشترین و کمترین مقدار تابع $y = a\sin(8x) + c$ به ترتیب ۹ و ۳ باشد. (خرداد ۱۴۰۳ – ۱/۵ نمره)

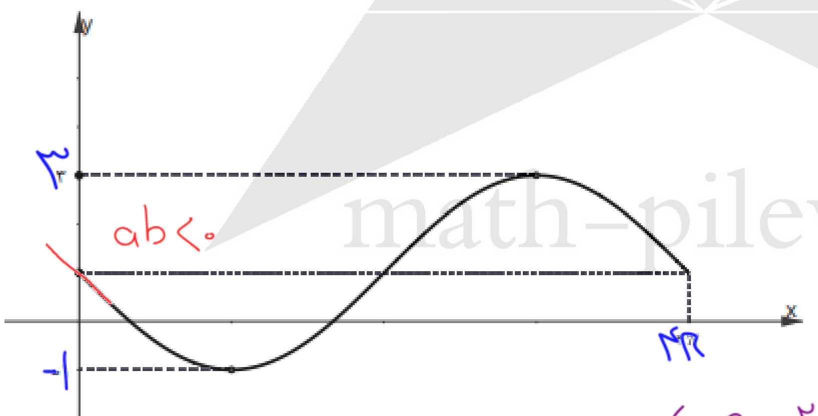
الف : مقادیر $|a|$ و c را بیابید. ب : دوره تناوب تابع را بدست آورید.

$$|a| = \frac{9-3}{2} = 3$$

$$c = \frac{9+3}{2} = 6$$

$$T = \frac{2\pi}{|8|} = \frac{\pi}{4}$$

۲- نمودار زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin bx + 1$ است. حاصل ab را بیابید. (خرداد ۱۴۰۲ – ۱/۲۵ نمره)



$$|a| = \frac{3-(-1)}{2} = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

$$|b| = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} a = 2 ,\ b = -\frac{1}{2} \Rightarrow ab = -1 \\ a = -2 ,\ b = \frac{1}{2} \Rightarrow ab = -1 \end{cases}$$

۳- الف: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = ۲ - ۳\sin ۴x$ را بدست آورید. (دی ۱۳۹۷–۱/۵ نمره)

ب: دامنه تابع $f(x) = \tan(۲x)$ را بدست آورید.

$$T = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$$

$$y_{max} = |-3| + 2 = 5$$

$$y_{min} = -|-3| + 2 = -1$$

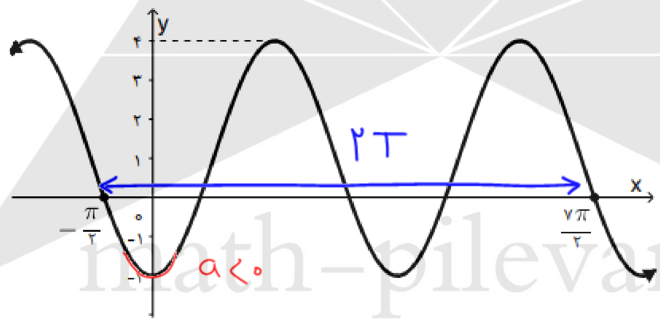
$$y = \tan x \quad , \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\tan(\;) \qquad (\;) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$y = \tan(2x) \Rightarrow 2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}$$

۴- نمودار تابع با ضابطه $y = a\cos bx + c$ به صورت زیر رسم شده است. مقادیر a و b و c را بدست آورید. (دی ۱۴۰۱–۱/۷۵ نمره)



$$2T = \frac{7\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4\pi$$

$$\boxed{T = 2\pi}$$

$$|a| = \frac{4 - (-2)}{2} = 3 \Rightarrow a = \pm 3 \Rightarrow a = -3$$

$$c = \frac{4 + (-2)}{2} = 1$$

$$|b| = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$\boxed{y = -3\cos x + 1}$$

سوالات تکمیلی

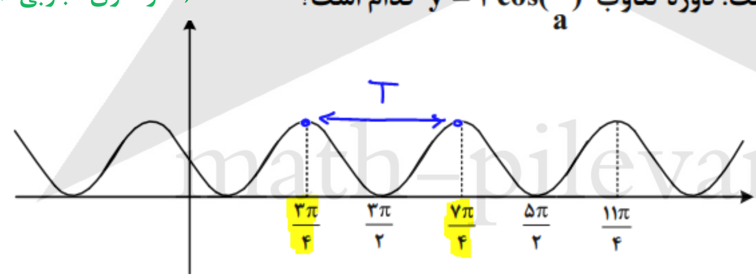
۱- دوره تناوب $f(x)=\frac{۱}{۲}-\sin\frac{۲x}{a}$ برابر $\frac{\pi}{۳}$ است. دوره تناوب $y=\cos ax$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۳ نوبت دوم)

۱) ۳π ۲) ۴π ۳) ۶π ✓ ۴) ۱۲π

$$T=\frac{۲\cancel{\pi}}{\left|\frac{۲}{a}\right|}=\frac{\cancel{\pi}}{۳} \Rightarrow \left|\frac{۲}{a}\right|=۶ \Rightarrow |a|=\frac{۱}{۳}$$

$$y=\cos ax \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|a|}=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۳}}=۶\pi$$

۲- شکل زیر، نمودار تابع $y=۱+\sin ax$ است. دوره تناوب $y=۳\cos(\frac{x}{a})$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۳ نوبت اول)



۱) ۴π
۲) ۶π
۳) ۳π
۴) ۲π

$$T=\frac{۷\pi}{۴}-\frac{۳\pi}{۴}=\frac{۴\pi}{۴}=\pi$$

$$T=\frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{۲\cancel{\pi}}{|a|}=\cancel{\pi} \Rightarrow |a|=۲$$

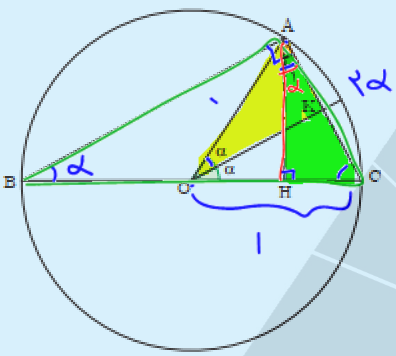
$$y=۳\cos\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{\left|\frac{۱}{a}\right|}=۲\pi\times|a|=۲\pi\times۲=۴\pi$$

درس دوم

معادلات مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان

در محاسبات فنی گاهی نسبت مثلثاتی برخی زوایا مورد نیاز است که مقدار آن را می‌توان به کمک دیگر زوایا به‌دست آورد. اگر مقدار $\cos 15^\circ$ را نیاز داشته باشیم چگونه می‌توان آن را با استفاده از مقدار $\cos 30^\circ$ به دست آورد؟ به وضوح 15° نصف 30° است و نیز می‌دانیم $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. آیا با نصف کردن مقدار $\cos 30^\circ$ می‌توان $\cos 15^\circ$ را به دست آورد؟ در ادامه خواهیم دید که جواب منفی است ولی همچنان می‌شود مقدار $\cos 15^\circ$ را به کمک مقدار معلوم $\cos 30^\circ$ یافت اما نه با نصف کردن.[1]



دایره روبه‌رو به شعاع واحد و مرکز O را در نظر بگیرید. مطابق شکل، زاویه مرکزی O برابر 2α داده شده که روبه‌رو به وتر AC است. از این رو در مثلث $O\hat{A}K$ داریم:

$$AK = \sin\alpha \Rightarrow AC = 2AK = 2\sin\alpha \qquad (1)$$

همچنین $\widehat{AC} = 2\alpha$ و از آنجا که زاویه محاطی B روبه‌رو به $\widehat{AC}$ است، لذا نصف آن است پس: $\hat{B} = \alpha$.

از طرفی $\hat{A}$ یک زاویه محاطی روبه‌رو به قطر BC است و لذا: $\hat{A} = 90^\circ$

همچنین از مجموع زوایای $A\hat{B}C$ به‌دست می‌آید:

$$A\hat{B}C : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \alpha + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \alpha$$

به‌طور مشابه در $A\hat{H}C$ داریم:

$$A\hat{H}C : \hat{H} + \hat{A}_1 + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \cancel{90^\circ} + \hat{A}_1 + \cancel{90^\circ} - \alpha = \cancel{180^\circ} \Rightarrow \hat{A}_1 = \alpha$$

اکنون ضلع AH را در $O\hat{A}C$ و $A\hat{H}C$ به‌دست آورده و برابر قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} O\hat{A}C : AH = \sin 2\alpha \\ A\hat{H}C : \cos\hat{A}_1 = \cos\alpha = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC\cos\alpha \xrightarrow{(1)} AH = 2\sin\alpha\cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

همچنین در $O\hat{A}H$ داریم: $OH = \cos 2\alpha$ و در $A\hat{H}C$ داریم:

$$\sin\hat{A}_1 = \sin\alpha = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = \sin\alpha \times AC = \sin\alpha(2\sin\alpha) = 2\sin^2\alpha$$

از طرفی با توجه به اینکه $OC=1$ شعاع دایره است پس داریم:

$$OC = OH + HC = 1 \Rightarrow OH = 1 - HC \Rightarrow \boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$$

و نیز با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ به دست می‌آوریم $\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$.

۱ــ این روش را ابوالوفا بوزجانی ریاضی‌دان مشهور ایرانی ارائه داده است. طرح اثبات فوق در ارزشیابی‌ها مجاز نیست.

به طور کلی داریم :

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $\qquad$ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \Rightarrow 2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha \Rightarrow \boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$$

$$\boxed{\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \Rightarrow 2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha \Rightarrow \boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{1} - 2\sin^2\alpha = \boxed{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

مثال : مقدار $\cos 15°$ و $\sin 15°$ را بیابید.

$\sin 30° = 2\sin 15° \cos 15°$ $\qquad$ $\cos 30° = 1 - 2\sin^2 15°$

$\frac{1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \cos 15°$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15°$

$\frac{1}{2} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \cos 15°$ $\qquad$ $\sin^2 15° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$\cos 15° = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ (۱۵° در ربع اول است.) $\qquad$ $\sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ (۱۵° در ربع اول است.)

$$\sin^2 15° = \frac{1-\cos 30°}{2} = \frac{\frac{1^{\times 2}}{1\times 2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 15° = \pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

غ ق ق

$$\cos^2 15° = \frac{1+\cos 30°}{2} = \frac{\frac{1^{\times 2}}{1\times 2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos 15° = \frac{\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

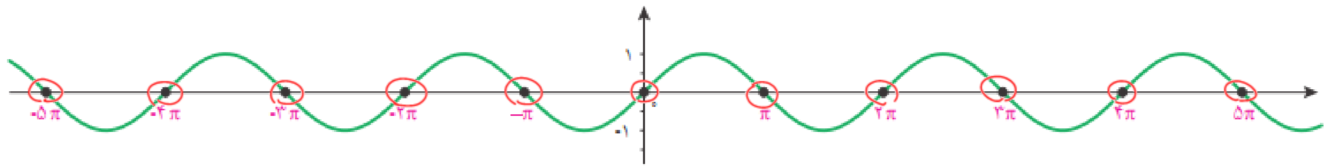
$$\xrightarrow[\cos\ +]{\text{زاویه در ربع اول}} \cos 15° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

معادلات مثلثاتی

معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ مجهول داریم، یک معادلهٔ مثلثاتی نام دارد.

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

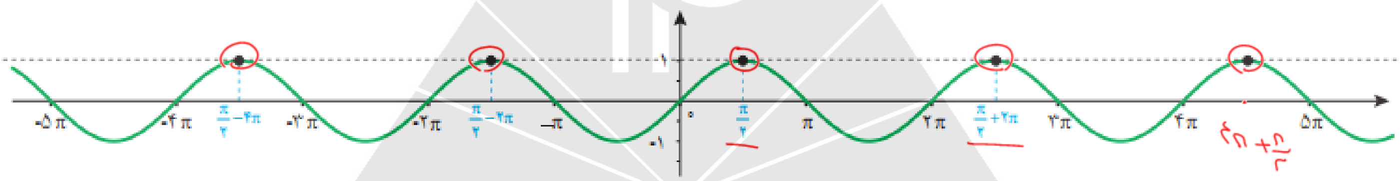
مثال : تابع مثلثاتی $y=\sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید.



همان‌طور که از نمودار پیداست، صفرهای این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x=۰$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به‌صورت $x= \dots, -۳\pi, -۲\pi, -\pi, ۰, \pi, ۲\pi, ۳\pi, \dots$ می‌باشند، محل تقاطع تابع ثابت $y=۰$ (یعنی محور xها) و تابع $y=\sin x$ است.

این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x=k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.

به‌طور مشابه جواب های معادله $\sin x=۱$ مقادیری از x هستند که به ازای آنها مقدار $\sin x$ برابر ۱ می‌شود. این مقادیر محل تقاطع $y=۱$ و $y=\sin x$ است که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادله صفحه قبل به‌صورت

$$x = \cdots, \frac{\pi}{۲}-۴\pi, \frac{\pi}{۲}-۲\pi, \frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}+۲\pi, \cdots$$

می‌باشند که به‌صورت کلی $x=\frac{\pi}{۲}+۲k\pi, k\in\mathbb{Z}$ قابل نمایش است.

اکنون معادله $\sin x=\frac{۱}{۲}$ را در نظر می‌گیریم. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

فعالیت

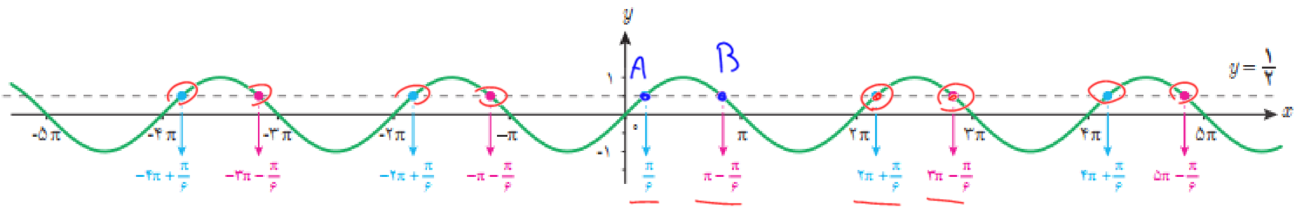
$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

۱ چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{۱}{۲}$ است مثال بزنید.

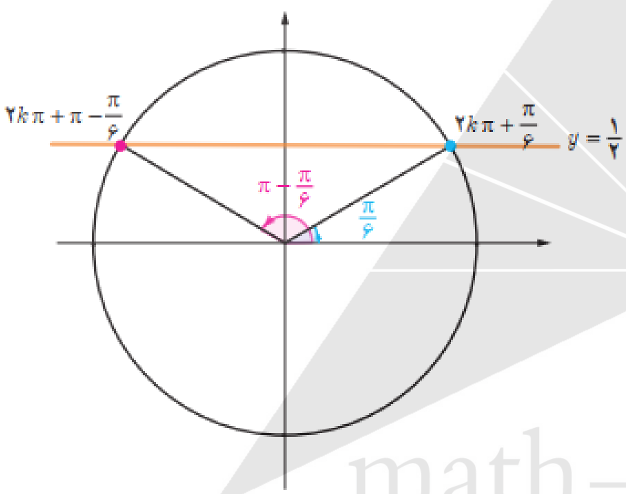
۲ خط $y=\frac{۱}{۲}$ و نمودار $y=\sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری را که مثال زده‌اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده‌اید در بین نقاط نمایش داده شده در زیر هستند؟ بله

A, B



۳ طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y=\frac{1}{2}$ و $y=\sin x$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x=\frac{1}{2}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴ در دایره مثلثاتی زیر خط $y=\frac{1}{2}$ و زوایای $\frac{\pi}{6}$ و $\pi-\frac{\pi}{6}$ که سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{6}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi-\frac{\pi}{6}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟



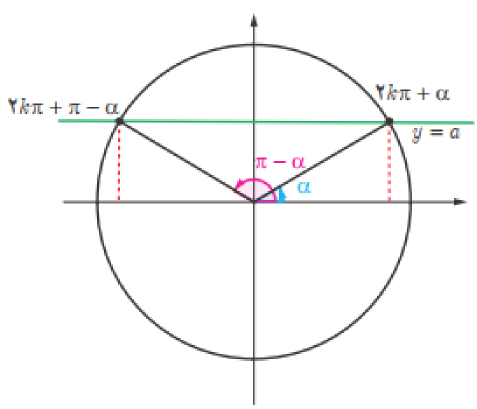
هم انتها با $\frac{\pi}{6}$: $\ldots\ldots, -2\pi+\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, 2\pi+\frac{\pi}{6}, \ldots\ldots$

هم انتها با $\pi-\frac{\pi}{6}$: $\ldots\ldots, -\pi-\frac{\pi}{6}, \pi-\frac{\pi}{6}, 3\pi-\frac{\pi}{6}, \ldots\ldots$

برای عدد حقیقی $-1\leq a\leq 1$ که $\sin x=a$، زاویه‌ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم $\sin\alpha=a$. بنابراین معادله $\sin x=a$ به‌صورت $\sin x=\sin\alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x=\sin\alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را بیابیم.

با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به‌طوری که $\sin x=\sin\alpha$ در دوران‌های مختلف به‌صورت زیر است:

$\sin x=\sin\alpha \Rightarrow x=2k\pi+\alpha$ و $x=(2k+1)\pi-\alpha \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$



جواب‌های کلی معادله $\sin x=\sin\alpha$ به‌صورت $x=2k\pi+\alpha$ و $x=(2k+1)\pi-\alpha$ می‌باشد که $k\in\mathbb{Z}$.

$x=2k\pi+\pi-\alpha$

مثال : معادلهٔ $\sin x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید.

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin x = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} & , k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x = 2k\pi + \underbrace{\pi - (-\frac{\pi}{6})}_{\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}}$$

کار در کلاس

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

$$2\sin x = \sqrt{3}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \underbrace{\pi - \frac{\pi}{3}} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

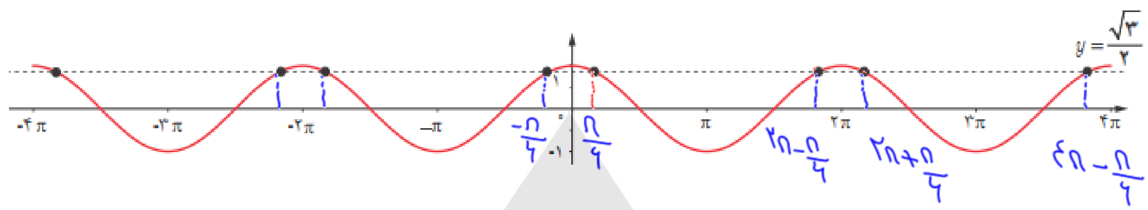
ب) $4\sin x + \sqrt{8} = 0$

$$4\sin x = -\sqrt{8} \Rightarrow \sin x = \frac{-\sqrt{8}}{4} = \frac{-2\sqrt{2}}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{4}) \\ x = 2k\pi + \underbrace{\pi - (-\frac{\pi}{4})}_{\pi + \frac{\pi}{4}} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

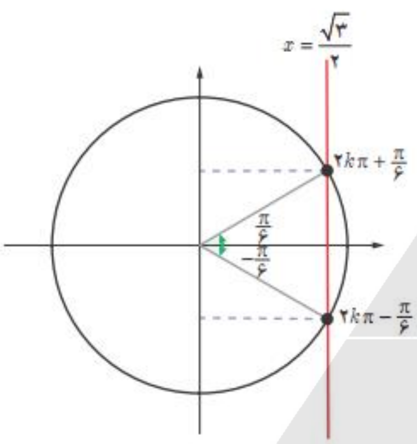
فعالیت

نمودار تابع $y=\cos x$ و خط $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ را بیابید.



الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه‌رو و محل تقاطع خط $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ با دایره مثلثاتی، جواب‌های معادله فوق را به‌دست آورید.

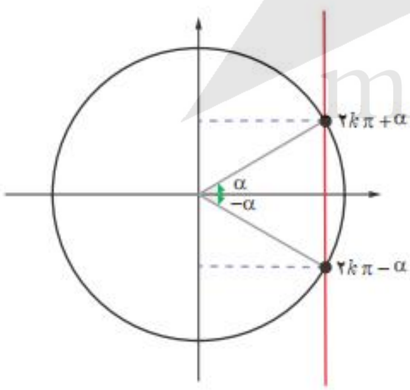


برای هر عدد حقیقی $-1\leq a\leq 1$ در معادله $\cos x=a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که $\cos\alpha=a$.

$\cos x=\frac{3}{2}$ غ ق ق

بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به‌صورت $\cos x=\cos\alpha$ نوشته و سپس رابطه بین زوایای x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو به‌صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x=\cos\alpha \Rightarrow x=2k\pi+\alpha \quad \text{و} \quad x=2k\pi-\alpha \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$



جواب‌های کلی معادله $\cos x=\cos\alpha$ به‌صورت $x=2k\pi\pm\alpha$ می‌باشند که $k\in\mathbb{Z}$.

مثال : جواب‌های معادله $\cos x = \frac{۱}{۲}$ را به‌دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-۳\pi, \pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}$ پس معادله به‌صورت $\cos x = \cos\frac{\pi}{۳}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند :

$$x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق نتیجه می‌شود که جواب‌های $x = -۲\pi - \frac{\pi}{۳}, -۲\pi + \frac{\pi}{۳}, -\frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۳}$ از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

مثال : معادله $\sin ۲x = \sin ۳x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند :

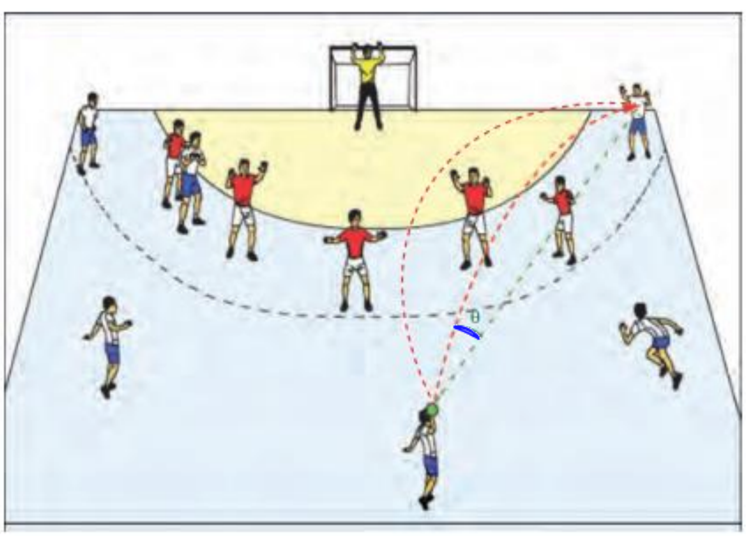
$$\begin{cases} ۲x = ۲k\pi + ۳x \Rightarrow x = ۲k\pi & , k \in \mathbb{Z} \\ ۲x = (۲k+۱)\pi - ۳x \Rightarrow x = \frac{(۲k+۱)\pi}{۵} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال : معادله $۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$ را حل کنید.

$$۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$$

$$۲\sin ۳x = \sqrt{۲}$$

$$\sin ۳x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \sin ۳x = \sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲} & , k \in \mathbb{Z} \\ ۳x = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{(۲k+۱)}{۳}\pi - \frac{\pi}{۱۲} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



مثال : یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت ۱۶ m/s برای هم‌تیمی خود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به‌صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^۲ \sin ۲\theta}{۱۰} \Rightarrow ۱۲٫۸ = \frac{۱۶^۲ \sin ۲\theta}{۱۰}$$

۱۶^۲

۱۲٫۸

از رابطه داده شده به دست می‌آید :

$\sin 2\theta = \sin \frac{\pi}{6}$ ۱۲۸

$$12/8 = \frac{(16)^2 \sin 2\theta}{10} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{12/8 \times 10}{256} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} & , k \in \mathbb{Z} \\ 2\theta = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ \theta = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta = \frac{\pi}{12}$ و $\theta = \frac{5\pi}{12}$ می‌باشد.

مثال : جواب‌های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را به‌دست آورید.

$2\sin x \cos x = \sin 2x$

$$2\sin x \cos x = 2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} & , k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{6} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال : معادله $\cos x\,(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به‌صورت $2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$ می‌نویسیم. با تغییر متغیر $\cos x = t$ می‌توان معادله فوق را به معادله درجه دوم $2t^2 - 9t - 5 = 0$ تبدیل کرد. جواب‌های این معادله $t = -\frac{1}{2}$ و $t = 5$ است. بنابراین جواب‌های معادله مثلثاتی بالا از حل دو معادله ساده $\cos x = 5$ و $\cos x = -\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آیند. از آنجا که $\cos x = 5$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب‌های معادله $\cos x = -\frac{1}{2}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}\ ,\ k = \mathbb{Z}$$

$2t^2 - 9t - 5 = 0 \Rightarrow t^2 - 9t - 10 = 0 \Rightarrow (t - 10)(t + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{10}{2} = 5 \\ t = \frac{-1}{2} \end{cases}$

$\times 2$

$\cos x = 5$ غ ق

$\cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

روش های حل معادلات مثلثاتی

اصلی‌ترین روش‌های موجود برای حل یک معادله‌ی مثلثاتی را به صورت زیر دسته بندی می‌کنیم؛ (u و v عبارت‌هایی برحسب x هستند).

	حالت	فرم معادله	روش حل معادله
۱	دو نسبت مثلثاتی هم‌نام، مساوی شده‌اند...	$\sin u = \sin v$ $\cos u = \cos v$	با این که v خودش مجهول است، اما فرم کلی جواب‌ها را می‌نویسیم، انگار که v معلوم است! بعد با حل معادله‌ای برحسب x، آن را پیدا می‌کنیم.
۲	دو نسبت مثلثاتی غیر هم‌نام، مساوی شده‌اند...	$\sin u = \cos v$	با متمم کردن یکی از کمان‌ها، مثل حالت بالا می‌شود! $\boxed{\sin u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)}$ یا $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos v}$
۳	معادله برحسب یک نسبت مثلثاتی درجه دوم است...	$a\sin^2 u + b\sin u + c = 0$ $a\cos^2 u + b\cos u + c = 0$	با روش Δ یا تجزیه، نسبت مثلثاتی را در می آوریم و بعد هم فرم کلی جواب‌ها و ... انگار در ابتدا داریم: $\boxed{aA^2 + bA + c = 0}$

مثال ۱: جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x = \cos x$ را بدست آورید.

$$3x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow \underline{x = k\pi} \\ 3x = 2k\pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

$\sin u = \sin v$

مثال۲: جواب کلی معادله $\sin 2x = \cos x$ را بدست آورید.

$\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = 2k\pi + 2x \Rightarrow -3x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{-3} + \frac{\pi}{6} \\ \frac{\pi}{2} - x = 2k\pi + \pi - 2x \Rightarrow x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

نکته : حل معادلات مثلثاتی با ظاهر درجه دوم

برای حل معادلات مثلثاتی‌با ظاهر درجه دوم، با دو حالت کلی زیر مواجه می‌شویم:

(۱) اگر نسبت‌های مثلثاتی یکسان باشند، می‌توانیم با استفاده از اتحادهای جبری، معادله را به صورت ضرب چند عامل بنویسیم.

(۲) اگر در معادله، هم سینوس و هم کسینوس وجود داشته باشد، ابتدا عبارت را برحسب نسبت مثلثاتی یکسان می‌نویسیم و سپس آن را تجزیه می‌کنیم.

	چیزی که در معادله‌ی مثلثاتی می‌بینید	کاری که باید انجام بدهید...
۱	$\sin^2 u$ به همراه $\cos u$ $\cos^2 u$ به همراه $\sin u$	با اتحاد مثلثاتی $\sin^2 u+\cos^2 u=1$، نسبت مثلثاتی توان دو را هم‌جنس دیگری کنید.
۲	$\cos 2u$ در کنار $\sin u$ $\cos 2u$ در کنار $\cos u$	با اتحاد $\cos 2u=1-2\sin^2 u$، تمامی نسبت‌های مثلثاتی موجود می‌شوند $\sin u$. با اتحاد $\cos 2u=2\cos^2 u-1$، تمامی نسبت‌های مثلثاتی موجود می‌شوند $\cos u$.
۳	$\sin 2u$ در کنار $\sin u$ یا $\cos u$	$\sin u\cos u=\frac{1}{2}\sin 2u$ یا $2\sin u\cos u=\sin 2u$

مثال۳ : جواب های کلی معادله $\cos(2x)+sinx=-2$ را بدست آورید.

$1-2\sin^2 x+\sin x+2=0$

$-2\sin^2 x+\sin x+3=0 \xrightarrow{\sin x=t} -2t^2+t+3=0 \Rightarrow t^2+t-6=0$ $\times(-2)$

$(t+3)(t-2)=0$

$t=\frac{-3}{-2} \Rightarrow \sin x=\frac{3}{2}$ غ ق ق

$t=\frac{2}{-2}=-1 \Rightarrow \sin x=-1 \Rightarrow \sin x=\sin(-\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi-\frac{\pi}{2} \\ x=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{2} \end{cases}$

مثال۴ : جواب های کلی معادله $\underbrace{\sin(2x)}_{2\sin x\cos x}-2cosx=0$ را بدست آورید.

$2\sin x\cos x-2\cos x=0$

$\cos x(2\sin x-2)=0$

$\cos x=0 \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$

$2\sin x-2=0 \Rightarrow \sin x=1 \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{2} \end{cases}$

تمرین

۱ فرض کنید $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

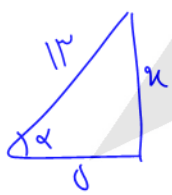
$$= 2\times\left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = 2\times\frac{25}{169} - 1 = \frac{50}{169} - \frac{1\times 169}{1\times 169} = \frac{-119}{169}$$

ب) $\sin 2\alpha$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\times\frac{12}{13}\times\frac{5}{13} = \frac{120}{169}$$

$$\cos\alpha = \frac{5}{13}$$

$$x^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow x = 12$$



$$\sin\alpha = \frac{12}{13}$$

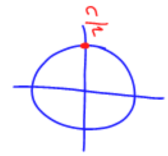
۲ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به‌دست آورید.

$$\sin^2 22.5^\circ = \frac{1-\cos 45^\circ}{2} = \frac{\frac{1\times 2}{1\times 2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos^2 22.5^\circ = \frac{1+\cos 45^\circ}{2} = \frac{\frac{1\times 2}{1\times 2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{2}=\sin 3x$



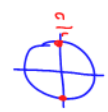
روش اول: $\sin 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

روش دوم:
$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

$$2\cos^2 x \cancel{-1} - \cos x \cancel{+1} = 0$$

$$\cos x\,(2\cos x - 1) = 0 \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \end{cases}$$



$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

پ) $\cos x = \cos 2x$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + 2x \Rightarrow -x = 2k\pi \Rightarrow x = -2k\pi \\ x = 2k\pi - 2x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

ت) $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$

$1 - 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

$-2\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0 \xrightarrow{\sin x = t} \underbrace{-2t^2 - 3t + 2 = 0}_{\times(-2)} \Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0$

$(t-4)(t+1) = 0 \begin{cases} t = \frac{4}{-2} = 2 \Rightarrow \sin x = 2 \quad \text{غ ق ق} \\ t = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \underbrace{\pi - \frac{\pi}{6}}_{\frac{5\pi}{6}} \end{cases} \end{cases}$

ث) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$ $\quad \boxed{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x}$

$1 - \sin^2 x - \sin x - \frac{1}{4} = 0$

$-\sin^2 x - \sin x + \frac{3}{4} = 0 \xrightarrow{\sin x = t} -t^2 - t + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4(-1)\left(\frac{3}{4}\right) = 4$

$t = \frac{1 \pm 2}{2(-1)} = \begin{cases} t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \\ t = -\frac{3}{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{2} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$

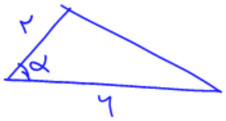
ج) $\sin x - \cos 2x = 0$ $\quad \boxed{\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x}$

$\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 0$

$\sin x - 1 + 2\sin^2 x = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \xrightarrow{\sin x = t} \underbrace{2t^2 + t - 1 = 0}_{\times 2}$

$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow (t+2)(t-1) = 0 \begin{cases} t = \frac{-2}{2} \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$

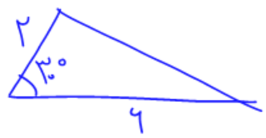
۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟



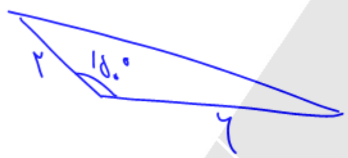
$S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$

$\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\times 6\times\sin\alpha=3 \Rightarrow \sin\alpha=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow \sin\alpha=\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow \begin{cases}\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ \alpha=2k\pi+\underbrace{\pi-\frac{\pi}{6}}_{\frac{5\pi}{6}}\end{cases}$

$\alpha=\frac{\pi}{6}$



$\alpha=\frac{5\pi}{6}$



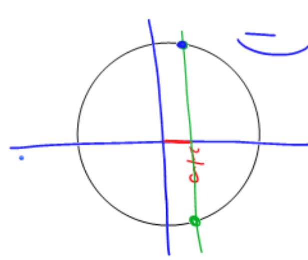
نمونه سوالات نهایی

۱- جوابهای معادله $\cos(2x)=\frac{1}{2}$ را در بازه $(0,\pi)$ بدست آورید. (خرداد ۱۴۰۳ –۱/۲۵ نمره)

$\cos 2x=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow\begin{cases}k=0\Rightarrow\frac{\pi}{6}\ \checkmark\\ k=1\Rightarrow\pi+\frac{\pi}{6}\ \times\end{cases}\\ 2x=2k\pi-\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow\begin{cases}k=0\Rightarrow x=-\frac{\pi}{6}\ \times\\ k=1\Rightarrow x=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}\ \checkmark\end{cases}\end{cases}$

۲- درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (دی ۱۴۰۲ –۰/۲۵ نمره)

فقط دو زاویه وجود دارد که مقدار کسینوس آن $\frac{2}{5}$ باشد. نادرست



۳- جواب معادله مثلثاتی $2\sin 4x = 1$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ هستند؟ (دی ۱۴۰۲ – ۱/۵ نمره)

$$\sin 4x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 4x = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24} \Rightarrow x = \frac{\pi}{24} \checkmark \\ 4x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{24} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{24} \checkmark \end{cases}$$

۴- درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (دی ۱۴۰۱ – ۰/۲۵ نمره)

مقدار عددی عبارت $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$ برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. درست

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۵- حاصل عبارت $4\sin x\cos x\cos 2x$ را به ازای $x = 7/5^\circ$ را محاسبه نمایید. (شهریور ۱۴۰۰ – ۱ نمره)

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$= 2 \times 2\sin x\cos x\cos 2x$$

$$= 2 \times \sin 2x \cos 2x =$$

$$= \sin 4x = \sin(4 \times 7/5^\circ)$$

$$= \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

سوالات تکمیلی

۱- اختلاف جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos 2x = 3\sin x - 1$ که در بازهٔ $[0,\pi]$ قرار دارند، کدام است؟(سراسری تجربی ۱۴۰۳ نوبت دوم)

۱) $\frac{5\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$ ✓

$1-2\sin^2 x-3\sin x+1=0$

$-2\sin^2 x-3\sin x+2=0 \xrightarrow{\sin x=t} -2t^2-3t+2=0 \Rightarrow t^2-3t-4=0$

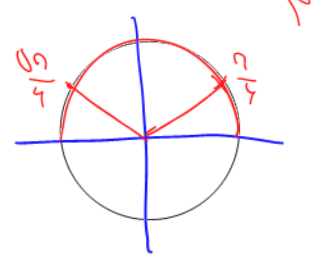
$\times(-2)$

$(t-4)(t+1)=0$

$t=\frac{4}{-2} \Rightarrow t=-2 \Rightarrow \sin x=-2$ غ ق ق

$t=\frac{-1}{-2} \Rightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ x=2k\pi+\frac{5\pi}{6} \end{cases}$

$\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$



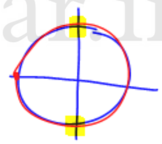
۲- معادله مثلثاتی $\sin 2x - 4\sin^2 x\cos x = 0$ چند جواب در بازه $(-\pi,\pi)$ دارد؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۳ نوبت اول)

۱) ۴ ۲) ۵ ✓ ۳) ۶ ۴) ۷

$2\sin x\cos x-4\sin^2 x\cos x=0$

$\cos x(2\sin x-4\sin^2 x)=0$

$\cos x=0$

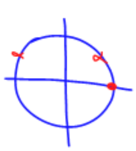


$\Rightarrow$ ۲ جواب

$2\sin x-4\sin^2 x=0$

$\sin x(2-4\sin x)=0$

$\sin x=0$ ۱ جواب



$\sin x=\frac{1}{2}$ ۲ جواب