بررسی سطر به سطر کتاب درسی

ریاضی (۳)

رشتهٔ علوم تجربی

پایهٔ دوازدهم

دورهٔ دوم متوسطه

حل گام به گام کتاب درسی شامل :

- حل تمامی فعالیت های کتاب
- حل تمامی کار درکلاس ها و تمرینات کتاب
- حل مثالهای خارج از کتاب
- حل نمونه سوالات نهایی
- حل سوالات تکمیلی

تهیه کننده : رقیه پیله ور – دبیر ریاضی ناحیه دو اردبیل

برای تماشای ویدیوهای آموزشی ریاضی ۳ تجربی (همین جزوه) می توانید به سایت

math-pilevar.com **یا** math-pilevar.ir **مراجعه کنید.**

فصل ۱
تابع

درس اول

توابع چند جمله‌ای ــ توابع صعودی و نزولی

$f(x) = \boxed{\text{عدد}}$

توابع چند جمله‌ای:

در سال‌های گذشته با تابع خطی آشنا شدیم. هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a=۰$، تابع به‌صورت $f(x)=b$ در می‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامیم. توابع ثابت و توابع خطی، مثال‌هایی از توابع چند جمله‌ای با درجه‌های ۰ و ۱ هستند.

$y=۲x^{۰}$ $\quad$ $y=-۵x^{۱}$ $\quad$ $y=۲x^{۱}-۱$

$y=۲$

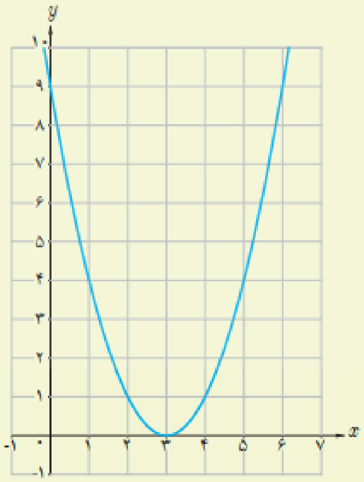
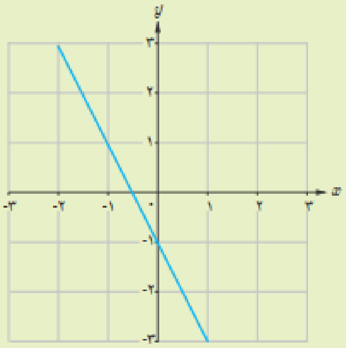
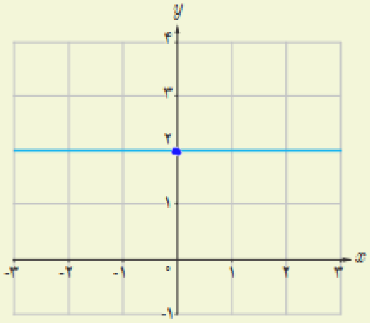
هر تابع به‌صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۲x^۲+a_۱x+a_۰$ را که در آن $a_n ،a_{n-۱} ،\ldots ،a_۲ ،a_۱ ،a_۰$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq ۰$ باشد، یک تابع چند جمله‌ای از درجهٔ n می‌نامیم. دامنهٔ توابع چند جمله‌ای مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

مثال : توابع زیر نمونه‌ای از توابع چند جمله‌ای به‌ترتیب از درجهٔ ۱، ۲، ۳ و ۵ هستند.

$$y=۲x^{۵}-۴x^{۳}+\sqrt{۷}x^{۲} \quad , \quad y=\sqrt{۲}x^{۳}-\frac{۳}{۴}x \quad , \quad y=-۸x^{۲}+۲x-\frac{۱}{۲} \quad , \quad y=۳x^{۱}+۵$$

$\cancel{y=x^{-۱}}$

انواع توابع چند جمله‌ای که تا به حال با آنها آشنا شده‌ایم به‌صورت زیر است :

درجهٔ تابع	۲	۱	۰
نام تابع	درجهٔ دوم	خطی	ثابت
ضابطهٔ کلی	$f(x)=ax^۲+bx+c$ $(a\neq۰)$	$f(x)=ax+b$ $(a\neq۰)$	$f(x)=b$
مثال	$f(x)=x^۲-۶x+۹$ 	$f(x)=-۲x-۱$ 	$f(x)=۲$ 

تابع درجهٔ ۳:

تابع چند جمله‌ای با ضابطهٔ $f(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d\ (a\neq ۰)$ یک تابع درجهٔ ۳ است که در اینجا به‌طور خاص تابع $f(x)=x^۳$ را بررسی می‌کنیم. دامنه و برد این تابع $\mathbb{R}$ است. ابتدا به کمک نقطه‌یابی نمودار این تابع را رسم می‌کنیم :

$f(x)=x^۳$	x
-۸	-۲
-۱	-۱
$-\frac{۱}{۸}$	$-\frac{۱}{۲}$
۰	۰
$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۲}$
۱	۱
۸	۲

$(-۲)^۳=-۸$

$(-۱)^۳=-۱$

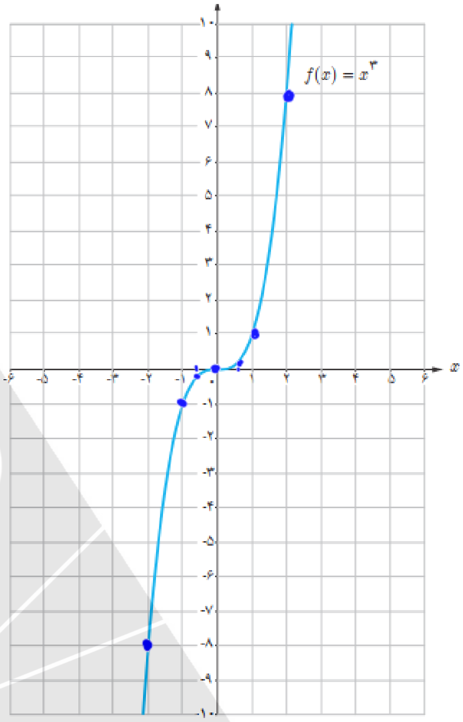
$(-\frac{۱}{۲})^۳=-\frac{۱}{۸}$

$۰^۳=۰$

$(\frac{۱}{۲})^۳=\frac{۱}{۸}$

$۱^۳=۱$

$۲^۳=۸$



فعالیت

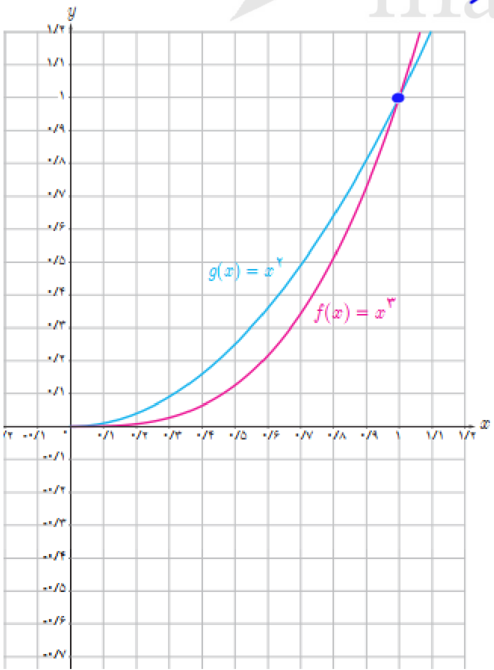
با توجه به نمودار توابع $f(x)=x^۳$ و $g(x)=x^۲$ که برای اعداد نامنفی رسم شده‌اند :

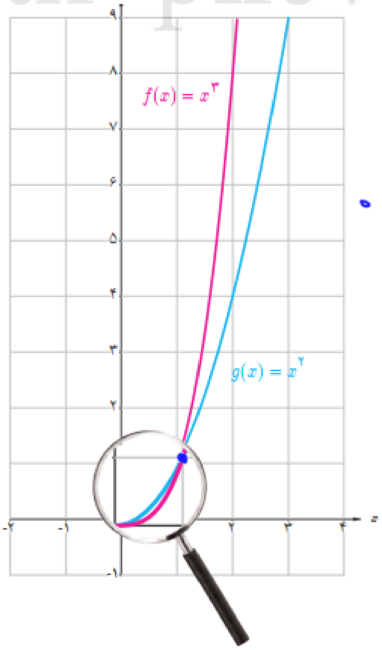
الف) آیا برای تمام xهای نامنفی، نمودار $f(x)=x^۳$ بالای نمودار $g(x)=x^۲$ قرار دارد؟ خیر

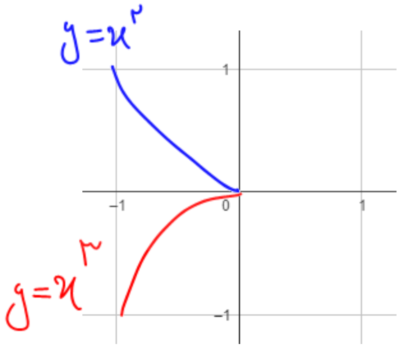
ب) نمودار این دو تابع را در بازه $[-۱,۰]$ رسم کنید.

$x\geq ۱ \Rightarrow x^۳\geq x^۲$

$۰<x<۱ \Rightarrow x^۳<x^۲$







فعالیت

با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^۳$، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

پ) $y = -(x-۲)^۳ + ۰$

$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$

$S(۲,۰)$

ب) $y = (x+۲)^۳ + ۰$

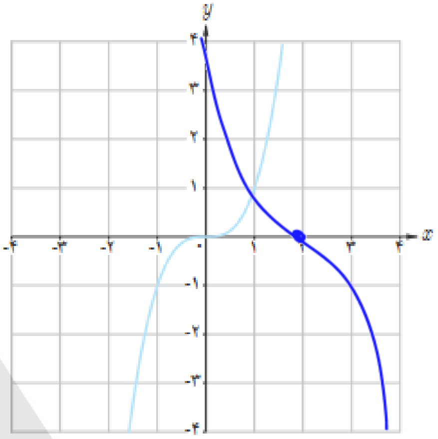
$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲$

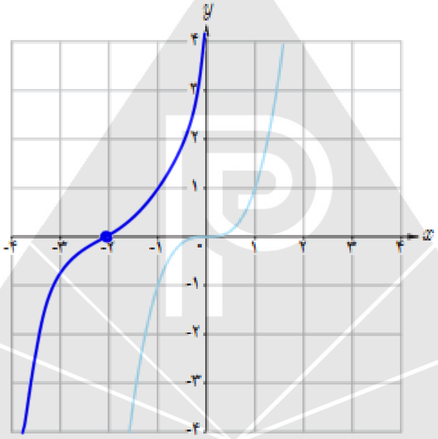
$S(-۲,۰)$

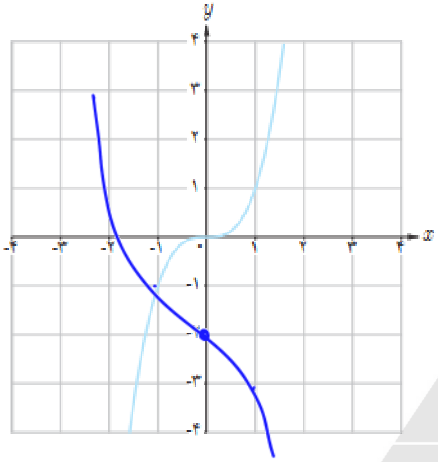
الف) $y = -x^۳ - ۲$

$x=۰$

$S(۰,-۲)$







کار در کلاس

به کمک نمودار تابع $y = x^۳$، ضابطهٔ هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

پ) $y = -x^۳ + ۱$

$x=۰$

$S(۰,۱)$

ب) $y = (x-۲)^۳ + ۰$

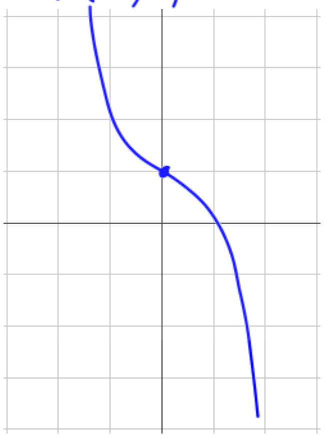
$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$

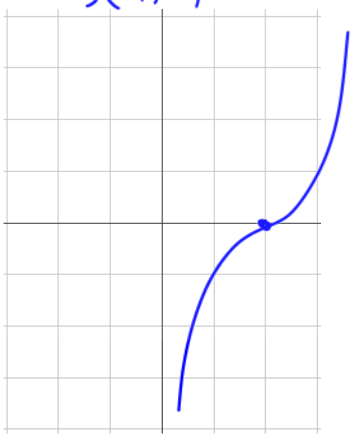
$S(۲,۰)$

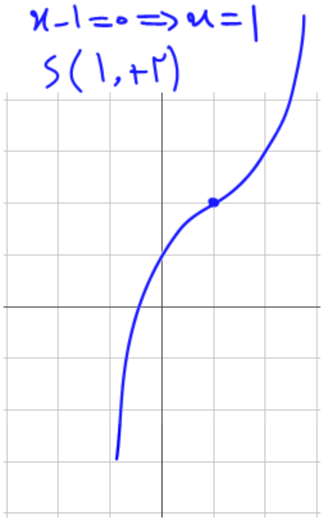
الف) $y = (x-۱)^۳ + ۲$

$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$

$S(۱,+۲)$



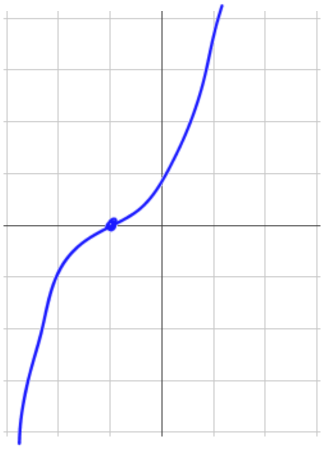




ج) $y=(x+۱)^۳+۰$

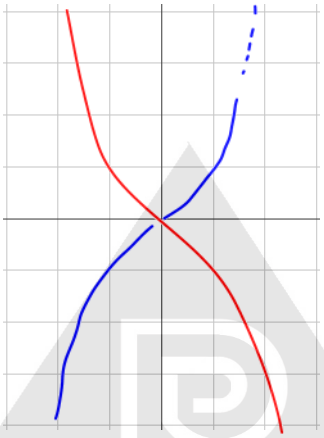
$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$

$S(-۱,۰)$



ث) $y=-x^۳+۰$

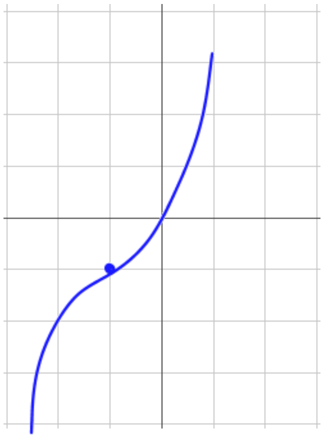
$S(۰,۰)$



ت) $y=(x+۱)^۳-۱$

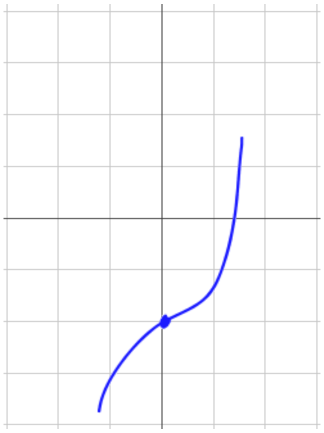
$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$

$S(-۱,-۱)$



خ) $y=x^۳-۲$

$S(۰,-۲)$



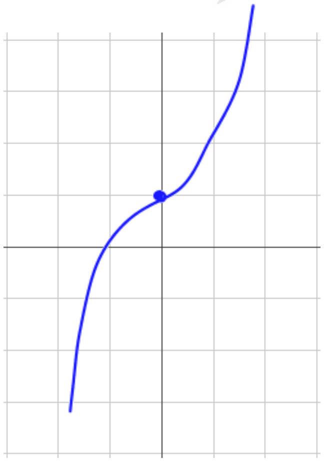
ح) $y=-x^۳-۱$

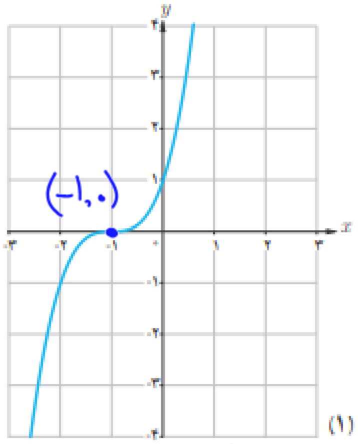
$S(۰,-۱)$

چ) $y=x^۳+۱$

$x=۰$

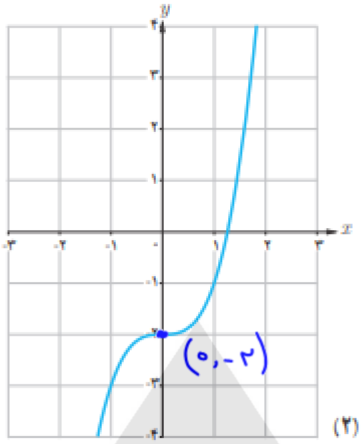
$S(۰,۱)$





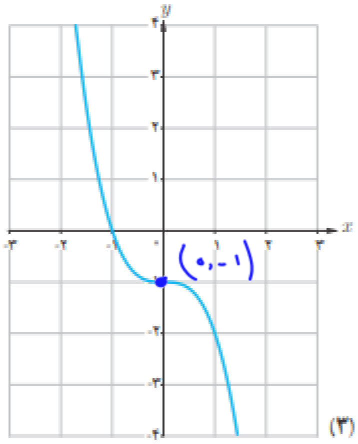
$y=(x-(-۱))^۳+۰$

$y=(x+۱)^۳$



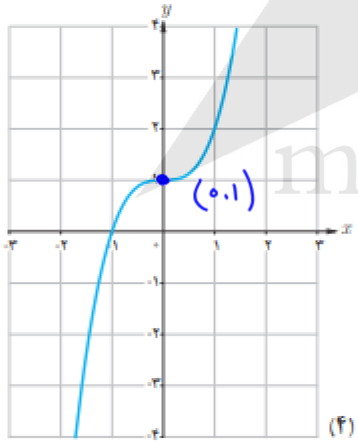
$y=(x-۰)^۳-۲$

$y=x^۳-۲$



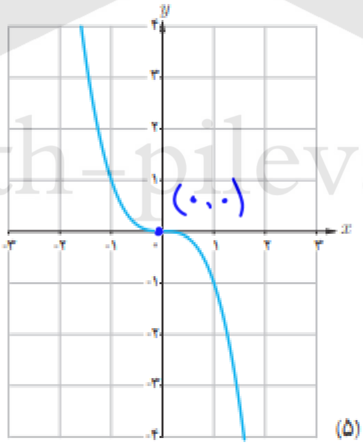
$y=-(x-۰)^۳-۱$

$y=-x^۳-۱$



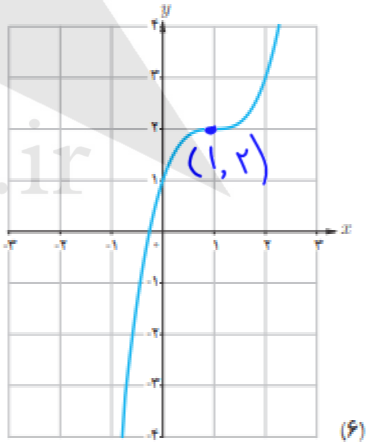
$y=(x-۰)^۳+۱$

$y=x^۳+۱$

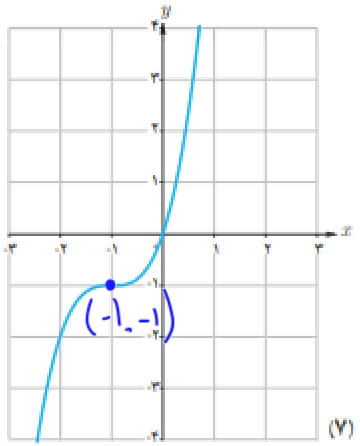


$y=-(x-۰)^۳+۰$

$y=-x^۳$



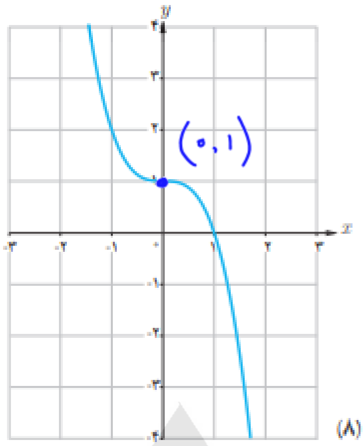
$y=(x-۱)^۳+۲$



(۷)

$y = (x-(-۱))^۳ - ۱$

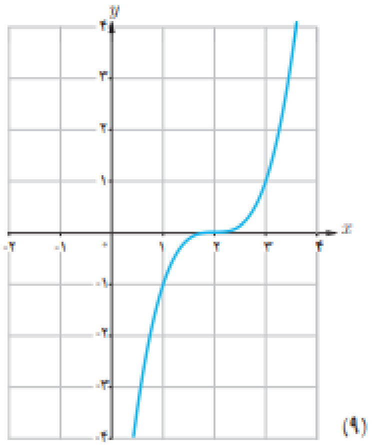
$y = (x+۱)^۳ - ۱$



(۸)

$y = -(x-۰)^۳ + ۱$

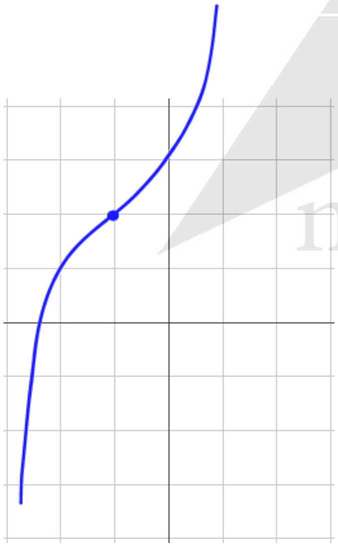
$y = -x^۳ + ۱$



(۹)

نکته : تبدیل به فرم استاندارد $(a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳$

مثال ۱ : نمودار $y = x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۳$ را رسم کنید.



$(x+۱)^۳ = x^۳ + ۳x^۲ \times ۱ + ۳ \times ۱^۲ \times x + ۱^۳$

$y = x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱ + ۲$

$y = (x+۱)^۳ + ۲$

$S(-۱,۲)$

توابع صعودی و توابع نزولی:

فعالیت

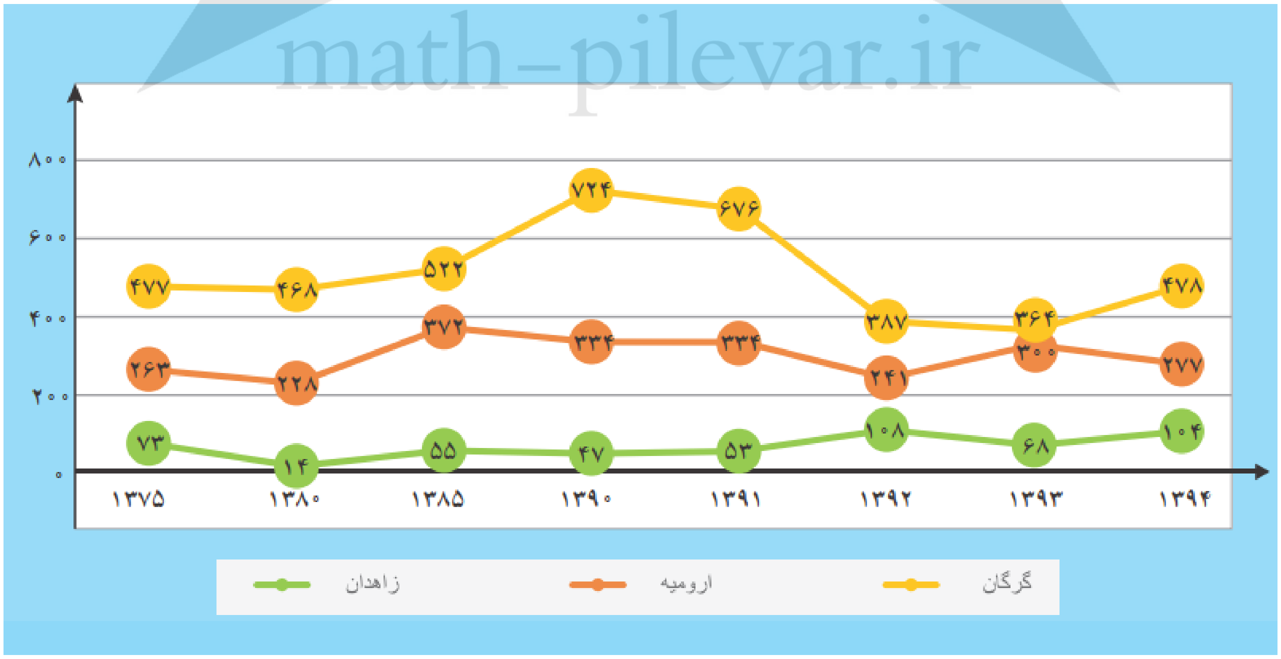
یکی از دغدغه‌های ما ایرانی‌ها در اکثر سال‌ها، بحث کاهش بارندگی در کشورمان است که خسارات بسیاری را به بار می‌آورد. در نمودار زیر میزان بارندگی سالانه سه شهر گرگان، زاهدان و ارومیه از سال ۱۳۷۵ تا سال ۱۳۹۴ (برحسب میلی‌متر) آورده شده است. به‌طور مثال در شهر ارومیه در سال ۸۵، میزان بارندگی ۳۷۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۳۳۴ میلی‌متر بوده است که روند نزولی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. همچنین در شهر گرگان در سال ۸۵، میزان بارندگی ۵۲۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۷۲۴ میلی‌متر بوده است که روند صعودی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار به سؤال‌های زیر پاسخ دهید :

الف) از سال ۷۵ تا ۹۱، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر گرگان روند صعودی داشته است؟

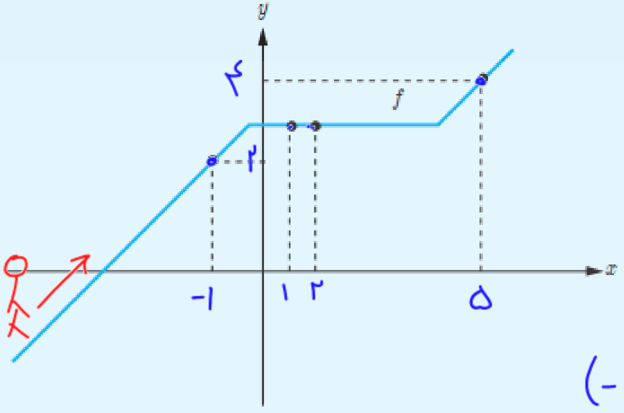
۱۳۸۰ـ۱۳۹۰

ب) از سال ۹۱ تا ۹۴، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر ارومیه روند نزولی داشته است؟

۱۳۹۱ـ۱۳۹۲ و ۱۳۹۳ـ۱۳۹۴



میزان بارندگی سالانه شهرهای گرگان، زاهدان و ارومیه (میلی‌متر)[1]



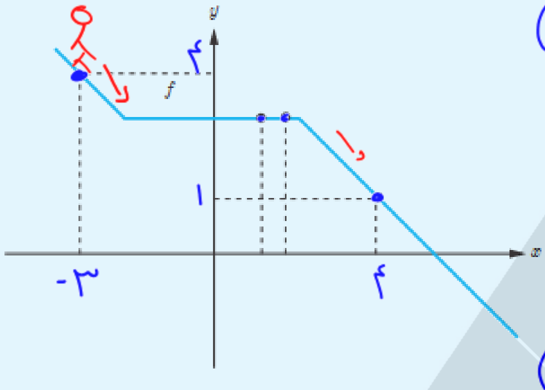
تابع صعودی

اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ که $x_1<x_2$، داشته باشیم $f(x_1)\leq f(x_2)$، آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.

$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\leqslant f(x_2)$

(-۱, ۲)
(۵, ۴)

$-۱<۵ \Rightarrow f(-۱)<f(۵)$



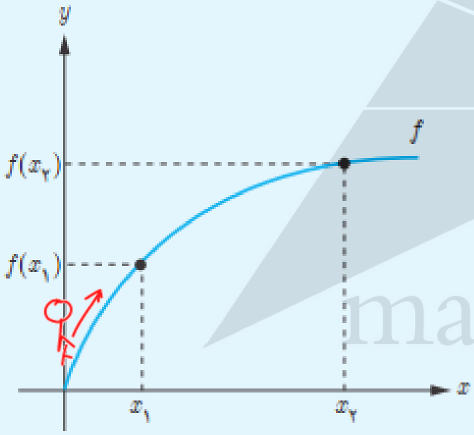
تابع نزولی

اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ که $x_1<x_2$، داشته باشیم $f(x_1)\geq f(x_2)$، آنگاه f را تابعی نزولی می‌نامیم.

$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\geqslant f(x_2)$

(-۳, ۴)
(۴, ۱)

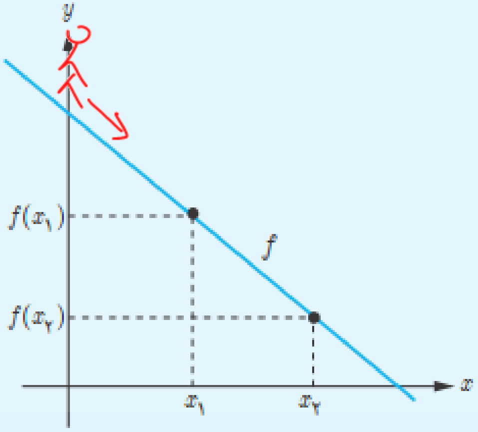
$-۳<۴ \Rightarrow f(-۳)>f(۴)$



تابع اکیداً صعودی

اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ که $x_1<x_2$، داشته باشیم $f(x_1)<f(x_2)$، آنگاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.

$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$



تابع اکیداً نزولی

اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ که $x_1<x_2$، داشته باشیم $f(x_1)>f(x_2)$، آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.

$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

نکته : به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا گوییم. همچنین به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، تابع یکنوا گوییم. توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا هستند. آیا عکس این مطلب صحیح است؟ توضیح دهید. خیر

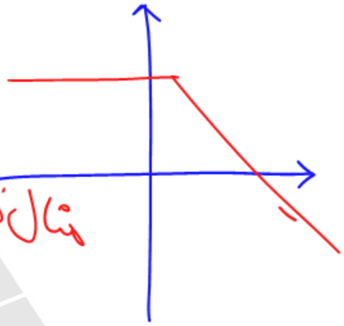
اکیدا صعودی
اکیدا نزولی } ⇒ اکیدا یکنوا

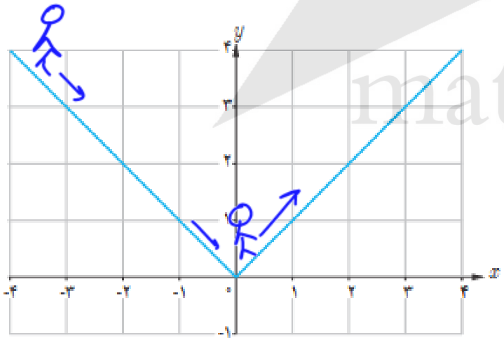
صعودی
نزولی } ⇒ یکنوا

اکیدا یکنوا ⇒ یکنوا

یکنوا ⇏ اکیدا یکنوا

مثال نقض



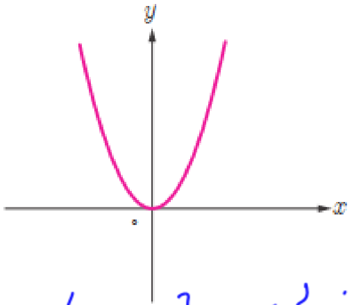


ممکن است تابعی در یک بازه صعودی (اکیداً صعودی) و در بازهٔ دیگر نزولی (اکیداً نزولی) باشد.

مثال : تابع $f(x) = |x|$ در بازهٔ $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است، اما در $\mathbb{R}$ نه صعودی است نه نزولی.

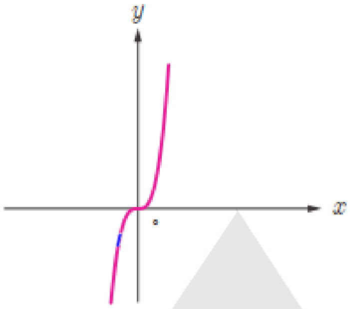
کار در کلاس

هر کدام از توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟

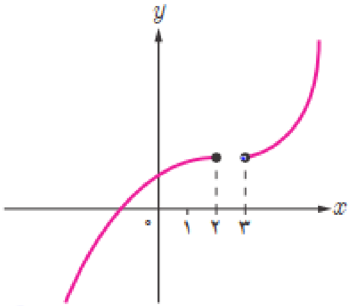


اکیدا نزولی (-∞, ۰]

اکیدا صعودی [۰, +∞)



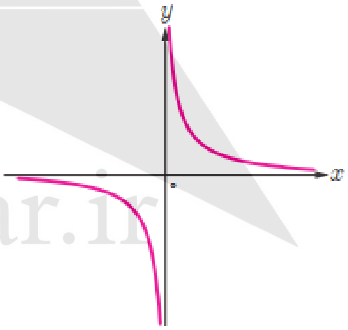
اکیدا صعودی



اکیدا صعودی

(-∞, ۲]

[۳, +∞)

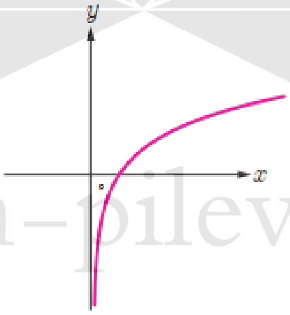


(ج)

اکیدا نزولی

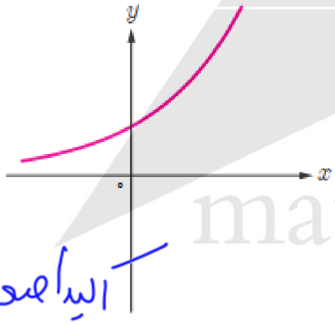
(-∞, ۰)

(۰, +∞)



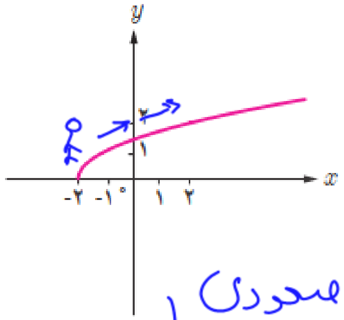
(ث)

اکیدا صعودی

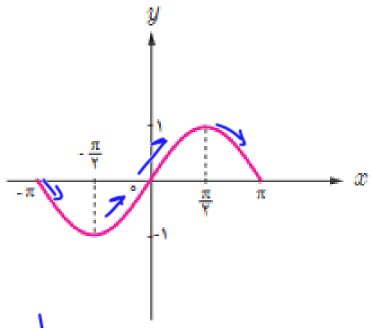


(ت)

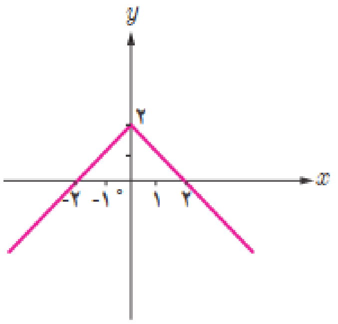
اکیدا صعودی



(خ)



(ح)



(ج)

اکیدا صعودی

اکیدا نزولی $[-\pi,-\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{\pi}{2},\pi]$

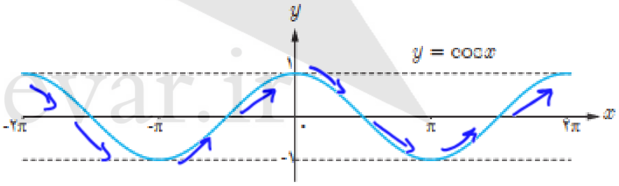
اکیدا صعودی $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

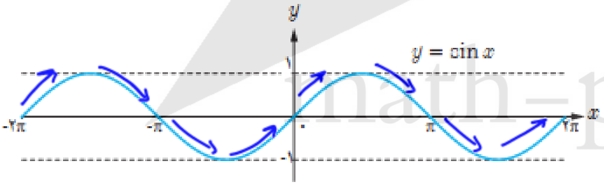
اکیدا صعودی $(-\infty,0]$

اکیدا نزولی $[0,+\infty)$

کار در کلاس

نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در بازهٔ $[-2\pi,2\pi]$ رسم شده است. صعودی یا نزولی بودن آنها را در بازه‌های مشخص شده تعیین نمایید.





x	$[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2},0]$	$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
$y=\sin x$	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی

x	$[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2},0]$	$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
$y=\cos x$	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی

کار در کلاس

نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

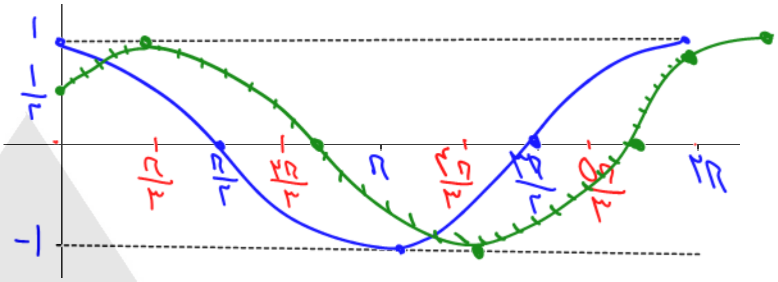
الف) $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{3})$ $D_f=[0,2\pi]$

$x=0 \Rightarrow y=\cos(-\frac{\pi}{3})=+\frac{1}{2}$

$[0,\frac{\pi}{3}]$ صعودی

$[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$ نزولی

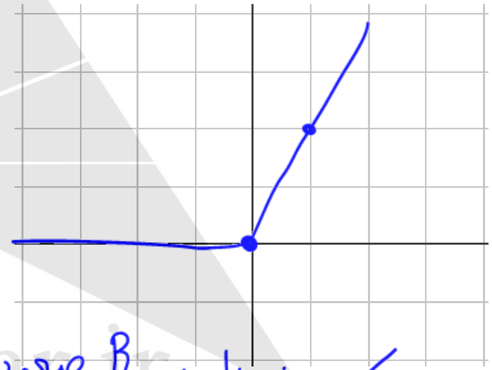
$[\frac{4\pi}{3},2\pi]$ صعودی



ب) $g(x)=x+|x|$

$$g(x)=\begin{cases} x+x=2x & x\geq 0 \\ x-x=0 & x<0 \end{cases}$$

0	1
0	2



$[0,+\infty)$ اکیداً صعودی

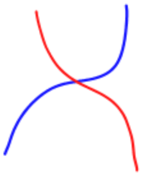
$(-\infty,0)$ هم صعودی هم نزولی

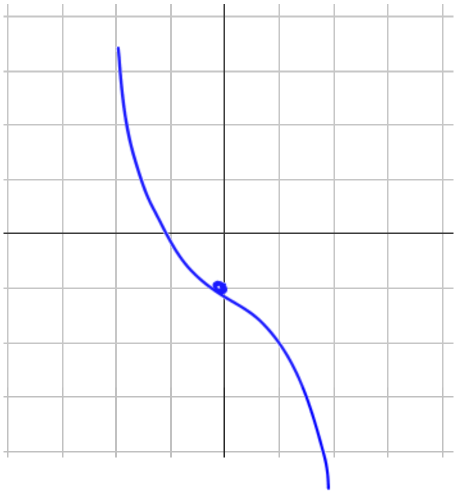
کل نمودار در R صعودی است

پ) $t(x)=-x^3-1$

$x=0$

$S(0,-1)$

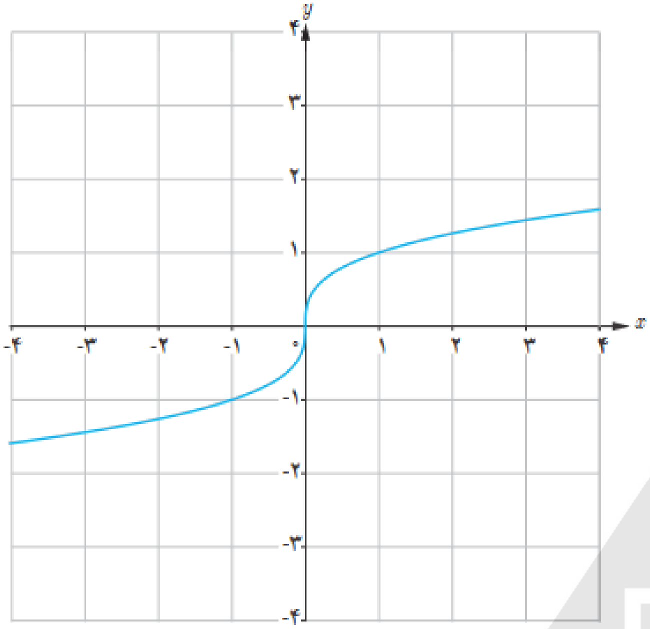




در کل R نزولی است

اکیداً نزولی

فعالیت



به نمودار تابع روبه‌رو دقت کنید.

الف) این تابع اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟ اکیدا صعودی

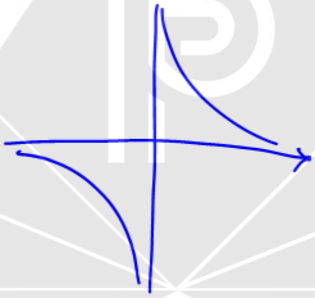
ب) این تابع یک به یک است؟ بله

پ) آیا تابعی وجود دارد که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد ولی یک به یک نباشد؟ خیر

$\left\{\begin{array}{l}\text{اکیدا صعودی}\\ \text{اکیدا نزولی}\end{array}\right. \Rightarrow$ تابع یک به یک است

$\left\{\begin{array}{l}\text{اکیدا صعودی}\\ \text{اکیدا نزولی}\end{array}\right. \not\Rightarrow$ یک به یک

مثال نقض



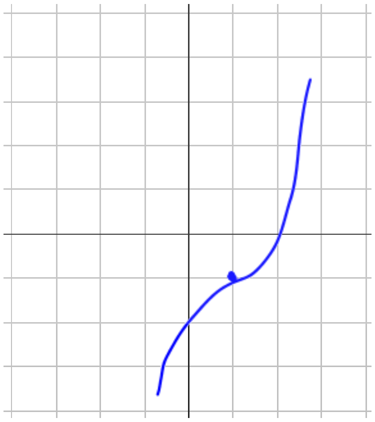
تمرین

① نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نمایید.

الف) $y=(x-۱)^{۳}-۱$

$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$

$S(۱,-۱)$



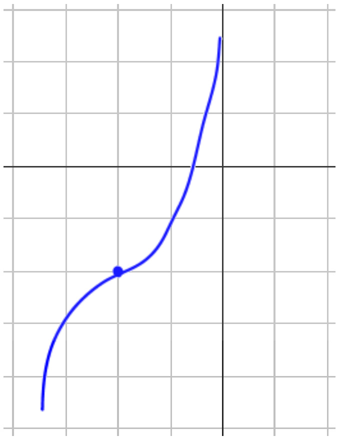
$D_f=\mathbb{R}$

$R_f=\mathbb{R}$

ب) $y=(x+۲)^{۳}-۲$

$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲$

$S(-۲,-۲)$



$D_f=\mathbb{R}$

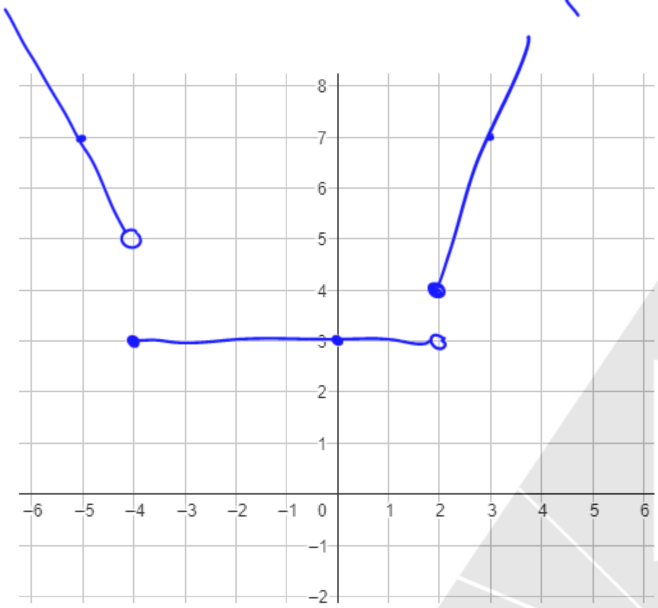
$R_f=\mathbb{R}$

۲ نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-۲x-۳ & x<-۴\\ ۳ & -۴\leq x<۲\\ ۳x-۲ & x\geq ۲\end{cases} \longrightarrow$$

x	-۴	-۵
y	۵	۷

۲	۳
۴	۷

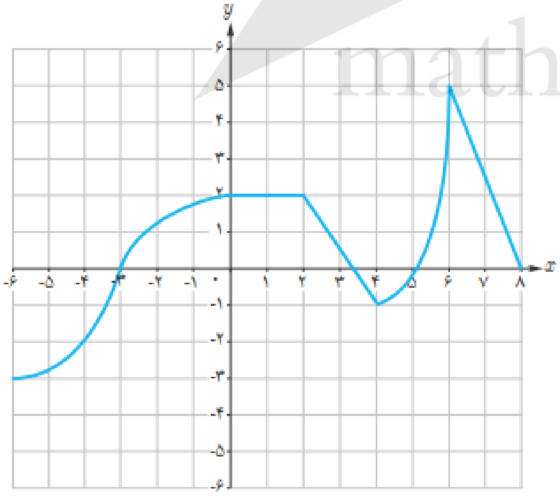


(-∞, -۴) آکیدا نزولی

[-۴, ۲) ثابت

[۲, +∞) آکیدا صعودی

۳ با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟



(-∞, ۰] آکیدا صعودی

[۰, ۲] ثابت

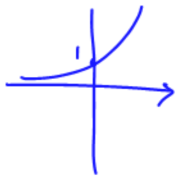
[۲, ۴] آکیدا نزولی

[۴, ۶] آکیدا صعودی

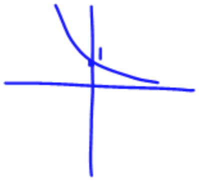
[۶, ۸] آکیدا نزولی

۴ تابع نمایی $y = ۲^{x} - ۲$ و تابع لگاریتمی $y = -\log_{۲}^{x} + ۲$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

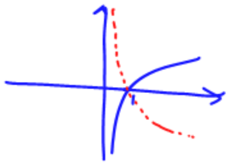
$y = ۲^{x}$



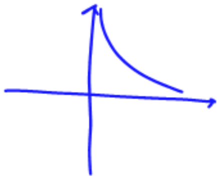
$y = (\frac{۱}{۲})^{x}$



$y = \log_{۲}^{x}$



$y = \log_{\frac{۱}{۲}}^{x}$

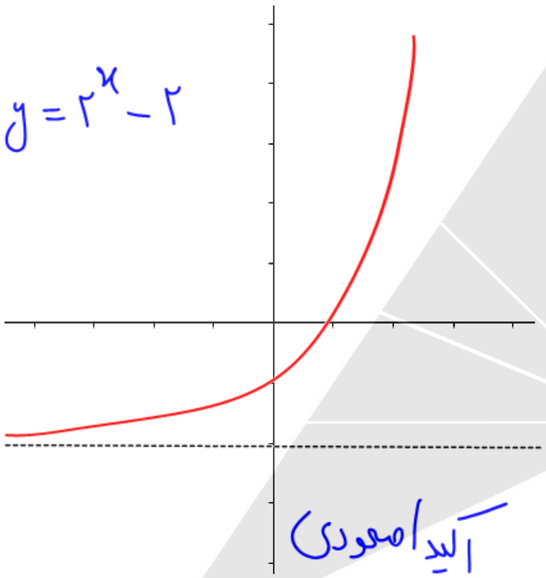


قرینه نسبت به محور x ها

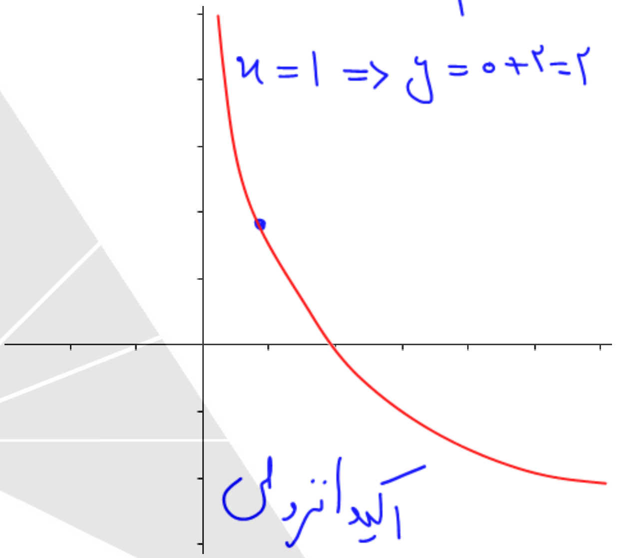
$y = -\log_{۲}^{x} + ۲$

$x = ۱ \Rightarrow y = ۰ + ۲ = ۲$

$y = ۲^{x} - ۲$



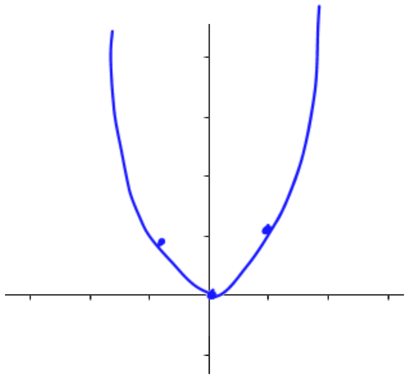
اکیدا صعودی



اکیدا نزولی

۵ تابع $y = x^{۲}|x|$ در بازهٔ $(-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چقدر است؟

$$y = \begin{cases} x^{۲} \times x & x \geq ۰ \\ x^{۲} \times (-x) & x < ۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{۳} & x \geq ۰ \\ -x^{۳} & x < ۰ \end{cases}$$



$(-\infty, ۰]$ نزولی $\Rightarrow a = ۰$

۶ تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً نزولی باشد.

اکید صعودی

$y=۲x$

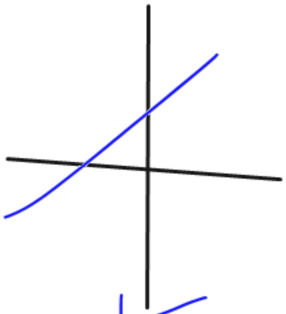
$y=۵x+۱$

$y=۳^x$

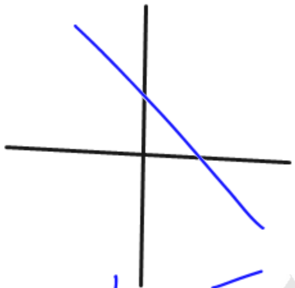
اکیدا نزولی

$y=-۳x$

$y=(\frac{۱}{۵})^x$

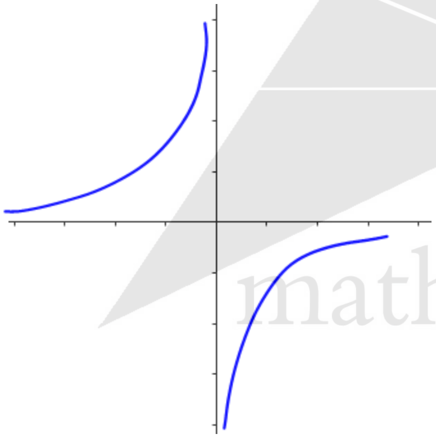


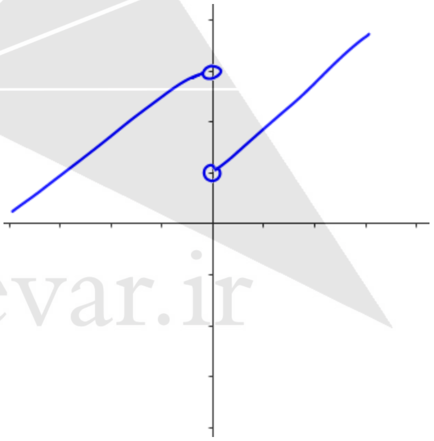
اکیدصعودی



اکیدنزولی

۷ نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد ولی در R اکیداً صعودی نباشد.





درس دوم

ترکیب توابع

در سال گذشته با اعمال جبری روی توابع آشنا شدیم، در این درس می‌خواهیم مفهوم ترکیب توابع را بررسی کنیم.

فعالیت

هنگامی که غذا از یخچال بیرون آورده می‌شود، دمای آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد و مقدار این دما با استفاده از تابع $d(t)$ با ضابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$d(t)=۴t+۲$; $۰\leq t\leq ۳$ (واحد t، ساعت است.)

الف) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به‌دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$۴(۲)+۲=۱۰$

$d(۲)=\underline{۱۰}$

دمای غذایی که دو ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر ۱۰ درجهٔ سانتی‌گراد است.

$d(۱)=۴(۱)+۲=۶$

$d(۳)=۴(۳)+۲=۱۴$

همچنین اگر یک مادهٔ غذایی را با دمای ۲ درجهٔ سانتی‌گراد از یخچال بیرون آوریم، میزان افزایش تعداد باکتری‌ها با بالا رفتن دما با استفاده از تابع $n(d)$ با ضابطهٔ زیر به دست می‌آید :

$n(d)=۲۰d^۲-۸۰d+۵۰۰$; $۲\leq d\leq ۱۴$

دما

که در این تابع، d دمای مادهٔ غذایی پس از خروج از یخچال برحسب درجهٔ سانتی‌گراد است.

ب) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به‌دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$n(۱۰)=۲۰(۱۰)^۲-۸۰(۱۰)+۵۰۰=۱۷۰۰$

یعنی تعداد باکتری‌های موجود در یک مادهٔ غذایی، پس از خروج از یخچال با رسیدن به دمای ۱۰ درجهٔ سانتی‌گراد به ۱۷۰۰ افزایش یافته است.

$n(۲)=۲۰\times ۲^۲-۸۰(۲)+۵۰۰=\overbrace{۸۰-۱۶۰}^{-۸۰}+۵۰۰=۴۲۰$

$n(۳)=۲۰\times ۳^۲-۸۰(۳)+۵۰۰=۱۸۰-۲۴۰+۵۰۰=۴۴۰$

تعداد باکتری‌های موجود در غذا که دمای آن ۲ درجه است

به‌طور کلی می‌توان گفت با استفاده از تابع d، با داشتن زمان، می‌توان دمای غذا و با استفاده از تابع n، با داشتن دمای غذا، می‌توان تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد، به عبارت دیگر :

$$\begin{tikzcd}
\text{زمان} \arrow[r, "d"] \arrow[rr, bend left] & \text{دما} \arrow[r, "n"] & \text{تعداد باکتری‌ها} \\
۲ & ۱۰ & ۱۷۰۰
\end{tikzcd}$$

از الف و ب می‌توان نتیجه گرفت : تعداد باکتری‌های موجود در یک مادهٔ غذایی که به میزان ۲ ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر ۱۷۰۰ تاست.

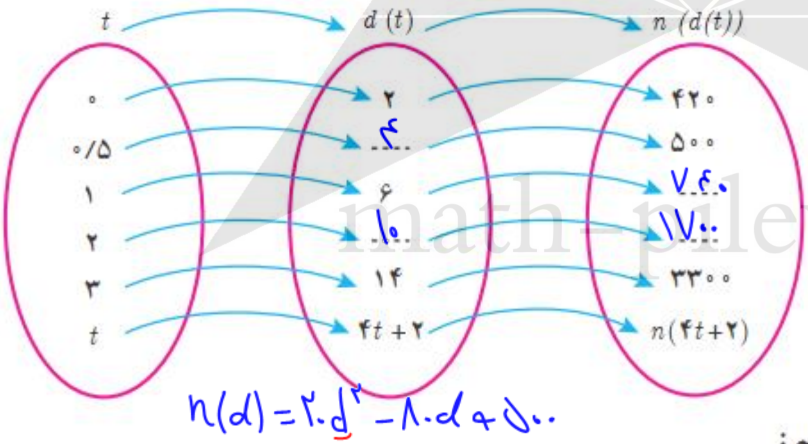
پ) جدول روبه‌رو را کامل کنید و به کمک آن نمودار را تکمیل نمایید.

$n(d) = ۲۰d^۲ - ۸۰d + ۵۰۰$

$n(d(t)) = n(۴t+۲)$	$d(t) = ۴t+۲$	t
$n(d(۰)) = n(۲) = ۴۲۰$ ← $۲۰ \times ۲^۲ - ۸۰(۲) + ۵۰۰$	$d(۰) = \boxed{۲}$	۰
$n(d(۰/۵)) = n(۴) = ۵۰۰$	$d(۰/۵) = ۴(۰/۵)+۲ = ۴$	۰/۵
$n(d(۱)) = n(۶) = ۷۴۰$	$d(۱) = ۶$	۱
$n(d(۲)) = n(۱۰) = ۱۷۰۰$	$d(۲) = ۴ \times ۲ + ۲ = ۱۰$	۲
$n(d(۳)) = n(۱۴) = ۳۳۰۰$	$d(۳) = ۱۴$	۳

$۲۰ \times ۶^۲ - ۸۰ \times ۶ + ۵۰۰ = ۷۲۰ - ۴۸۰ + ۵۰۰$

$۲۴۰ + ۵۰۰ = ۷۴۰$



$n(d) = ۲۰d^۲ - ۸۰d + ۵۰۰$

همان‌طور که دیدیم، می‌توان با داشتن زمان، دمای غذا را به‌دست آورد و با داشتن دما، تعداد باکتری‌ها قابل محاسبه است.

آیا به نظر شما می‌توان با داشتن زمان و بدون داشتن دما، تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد؟

به بیان دیگر آیا می‌توان تابعی ساخت که n را برحسب t مشخص کند؟ بله

برای به‌دست آوردن چنین تابعی به‌صورت زیر عمل می کنیم :

$n(d(t)) = n(۴t+۲) = ۲۰(۴t+۲)^۲ - ۸۰(۴t+۲) + ۵۰۰ = \dots\dots\dots\dots = ۳۲۰t^۲ + ۴۲۰ \qquad ۰ \leq t \leq ۳$

$n(d(t))$ تعداد باکتری‌های موجود در غذای یخچالی را نشان می‌دهد که به میزان t ساعت از یخچال بیرون مانده است.

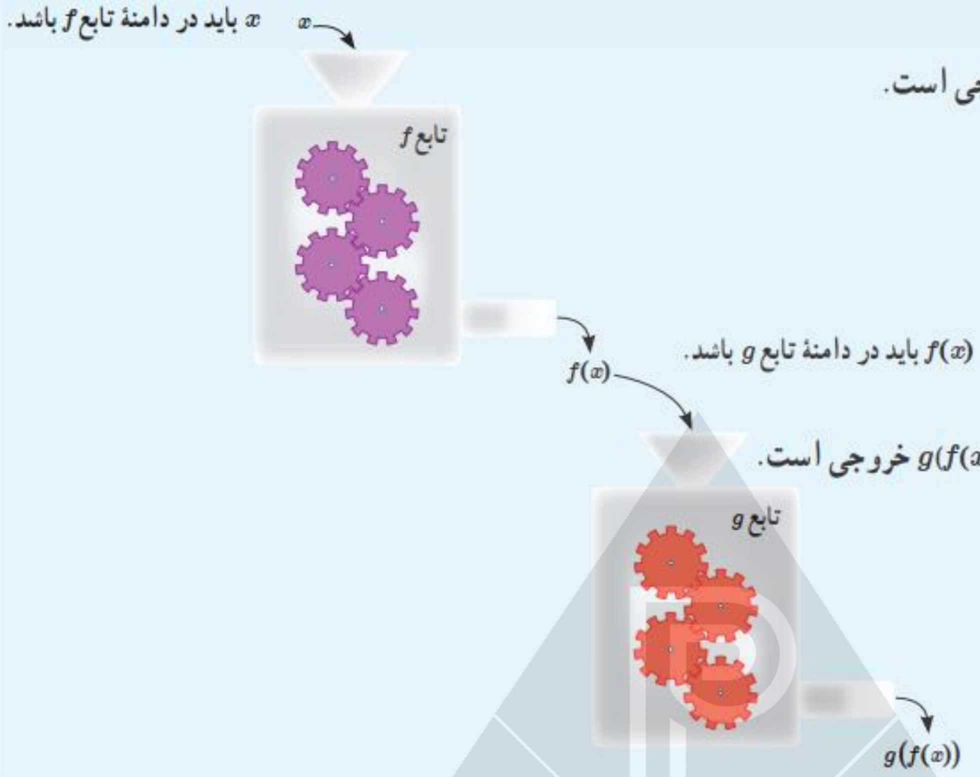
$n(d(t)) = ۲۰(۱۶t^۲ + ۱۶t + ۴) - ۳۲۰t - ۱۶۰ + ۵۰۰$

$= ۳۲۰t^۲ + \cancel{۳۲۰t} + ۸۰ - \cancel{۳۲۰t} + ۳۴۰$

$= ۳۲۰t^۲ + ۴۲۰$

مراحل ساخت تابع $g(f(x))$:

مرحلهٔ اول : x ورودی و $f(x)$ خروجی است.



مرحلهٔ دوم : $f(x)$ ورودی و $g(f(x))$ خروجی است.

اگر f و g دو تابع باشند به‌طوری که برد تابع f و دامنهٔ تابع g اشتراک ناتهی داشته باشند، تابع $g(f(x))$ را با نماد $(gof)(x)$ نمایش می‌دهیم و تابع gof را تابع مرکب می‌نامیم، به عبارت دیگر :

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

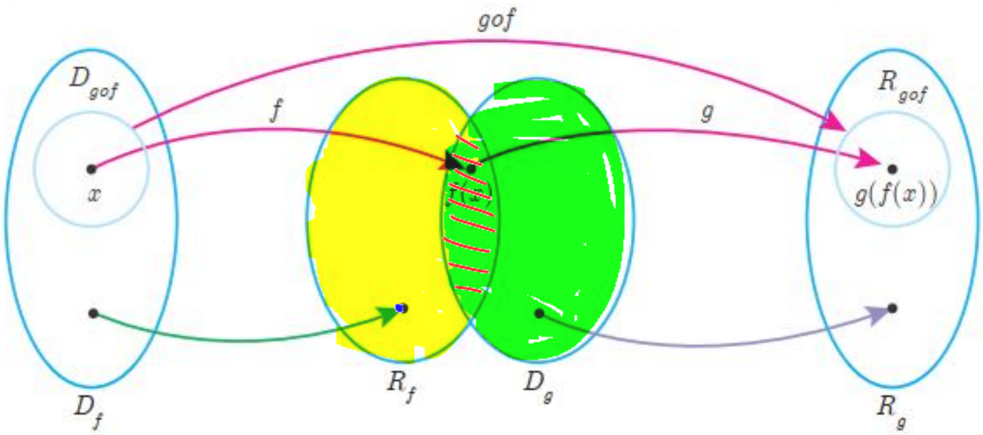
دامنهٔ تابع مرکب :

دامنهٔ تابع مرکب gof مجموعه xهایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند :

۱ــ x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲ــ $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.

$f(g(x))$



بنابراین دامنهٔ تابع gof را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$g(f(x))$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

به‌صورت مشابه دامنهٔ تابع fog به صورت زیر است :

$f(g(x))$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

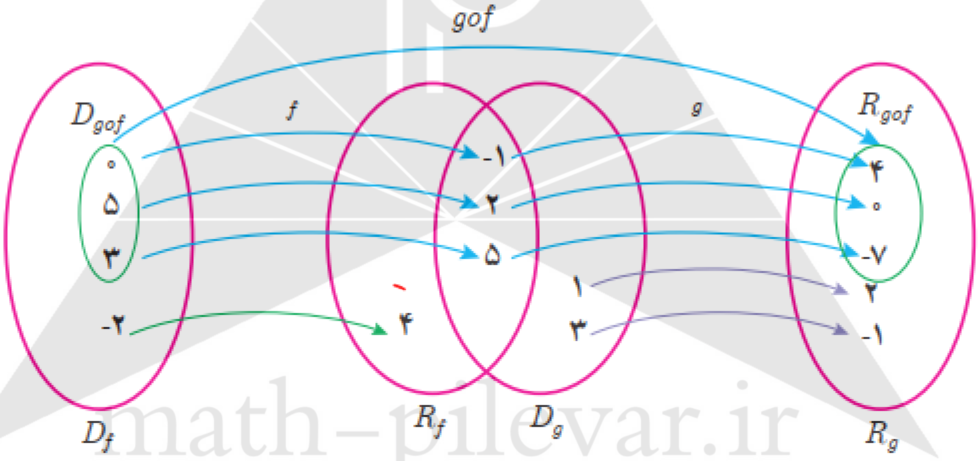
و همچنین :

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

مثال : اگر $g = \{(۱,۲),(۳,-۱),(۲,۰)(-۱,۴),(۵,-۷)\}$ و $f = \{(۰,-۱),(۵,۲),(۳,۵),(-۲,۴)\}$ ، تابع gof را در صورت امکان بنویسید.

$$\left.\begin{array}{l} (gof)(۰) = g(f(۰)) = g(-۱) = ۴ \\ (gof)(۵) = g(f(۵)) = g(۲) = ۰ \\ (gof)(۳) = g(f(۳)) = g(۵) = -۷ \\ (gof)(-۲) = g(f(-۲)) = g(۴) : \text{تعریف نشده} \end{array}\right\} \to gof = \{(۰,۴),(۵,۰),(۳,-۷)\}$$

$g(f(x))$



کار در کلاس

با توجه به جدول‌های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به‌دست آورید.

✓

x	$g(x)$
-۳	۸
-۲	۳
-۱	۰
۰	-۱
۱	۰
۲	۳
۳	۸

x	$f(x)$
-۳	-۷
-۲	-۵
-۱	-۳
۰	-۱
۱	۳
۲	۵
۳	۵

الف) $(fog)(۱) = f(g(1)) = f(0) = -1$

ب) $(fog)(-۱) = f(g(-1)) = f(0) = -1$

پ) $(gof)(۰) = g(f(0)) = g(-1) = 0$

ت) $(gog)(-۲) = g(g(-2)) = g(3) = 8$

ث) $(gof)(۲) = g(f(2)) = g(5)$ ……

تمرین نشده

ج) $(fof)(۱) = f(f(1)) = f(3) = 5$

مثال : اگر $f(x)=x-۲$ و $g(x)=x^۲-۱$ ، دامنه و ضابطهٔ تابع gof را به‌دست آورید.

$$D_f=\mathbb{R}\,,D_g=\mathbb{R}\,,D_{gof}=\left\{x\in D_f \middle| f(x)\in D_g\right\}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,(x-۲)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

$$(gof)(x)=g\big(f(x)\big)=\big(f(x)\big)^۲-۱=(x-۲)^۲-۱$$

$g(f(x))$

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ ، $g(x)=۲x^۲-۱$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید.

$$D_f=[۱\,,+\infty)\,,\ D_g=\mathbb{R}$$

$x-1\geq 0$

$x\geq 1$

$$D_{gof}=\left\{x\in D_f \middle| f(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in[۱\,,+\infty) \middle| \underbrace{\sqrt{x-۱}\in\mathbb{R}}_{\text{همیشه درست}}\right\}=[۱\,,+\infty)$$

عبارت $\sqrt{x-۱}\in\mathbb{R}$ به این معنی است که $\sqrt{x-۱}$ در اعداد حقیقی با معنی باشد یعنی $x-۱\geq ۰$ که بازهٔ $[۱\,,+\infty)$ به‌دست می‌آید.

$$(gof)(x)=g(f(x))=۲\big(f(x)\big)^۲-۱=۲(\sqrt{x-۱})^۲-۱=۲(x-۱)-۱=۲x-۳$$

$$D_{fog}=\left\{x\in D_g \middle| g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} \middle| ۲x^۲-۱\in[۱\,,+\infty)\right\}$$

$f(g(x))$

عبارت $۲x^۲-۱\in[۱\,,+\infty)$ به این معنی است که عبارت $۲x^۲-۱$ متعلق به بازهٔ $[۱\,,+\infty)$ باشد، یعنی $۲x^۲-۱\geq ۱$، بنابراین :

$$D_{fog}=\left\{x\in\mathbb{R} \middle| ۲x^۲-۱\geq ۱\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} \middle| x^۲\geq ۱\right\}=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)-۱}=\sqrt{۲x^۲-۱-۱}=\sqrt{۲x^۲-۲}$$

$2x^2-1\geq 1$

$2x^2\geq 2 \rightarrow x^2\geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x\leq -1 \\ x\geq 1 \end{cases}$

اگر دامنه و ضابطهٔ توابع gof و fog را با هم مقایسه کنید چه نتیجه‌ای می گیرید؟

$gof(x)\neq fog(x)$

تذکر : دامنهٔ توابع مرکب را همیشه با توجه به تعاریف آن به دست می‌آوریم نه از روی ضابطهٔ آن. مثلاً در اینجا می‌بینیم که دامنهٔ تابع gof با توجه به ضابطهٔ آن $\mathbb{R}$ است در صورتی که برابر $[۱\,,+\infty)$ است.

کار در کلاس

اگر $f(x)=\frac{۲}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۳}{x}$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و fof را به‌دست آورید.

$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

$fog(x)=f(g(x))$

$D_g=\mathbb{R}-\{0\}$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}-\{0\} \mid \frac{3}{x}\in\mathbb{R}-\{1\}\}=\mathbb{R}-\{0,3\}$$

$\frac{3}{x}=1 \Rightarrow x=3$

$$f(g(x))=\frac{2}{g(x)-1}=\frac{2}{\frac{3}{x}-1}=\frac{2}{\frac{3-x}{x}}=\frac{2x}{3-x}$$

$f(x)=\frac{2}{x-1} \to D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

$$D_{f(f(x))}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}-\{1\} \mid \frac{2}{x-1}\in\mathbb{R}-\{1\}\}=\mathbb{R}-\{1,3\}$$

$\frac{2}{x-1}\neq 1 \Rightarrow x-1\neq 2$

$x\neq 3$

$$f(f(x))=\frac{2}{f(x)-1}=\frac{2}{\frac{2}{x-1}-\frac{1(x-1)}{1\times(x-1)}}=\frac{2}{\frac{2-x+1}{x-1}}\Rightarrow\frac{2}{\frac{3-x}{x-1}}=\frac{2(x-1)}{3-x}$$

مثال ۲: اگر $f(x) = x^{۲} - ۴$ و $g(x) = \sqrt{x^{۲} - ۴}$ باشد دامنه و ضابطه تابع $fog(x)$ را بدست آورید.

$D_f = \mathbb{R}$

$D_g = (-\infty, -۲] \cup [۲, +\infty)$

$x^{۲} - ۴ \geq ۰ \to x^{۲} \geq ۴ \Rightarrow \begin{cases} x \leq -۲ \\ x \geq ۲ \end{cases}$

$$D_{f(g(x))} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in (-\infty, -۲] \cup [۲, +\infty) \mid \underbrace{\sqrt{x^{۲} - ۴} \in R}_{\text{همیشه درست}}\} =$$

$$= (-\infty, -۲] \cup [۲, +\infty)$$

وقتی fog و یکی از تابع های f و g را داریم

الف : fog و f را داریم و g را می خواهیم.

مثال۳: اگر $f(x) = x^{۳} - ۱$ و $fog(x) = ۲x$ ، تابع $g(x)$ را بدست آورید.

$$\left.\begin{array}{l} f(g(x)) = (g(x))^{۳} - ۱ \\ f(g(x)) = ۲x \end{array}\right\} \Rightarrow (g(x))^{۳} - ۱ = ۲x$$

$$\sqrt[۳]{(g(x))^{۳}} = \sqrt[۳]{۲x + ۱}$$

$$g(x) = \sqrt[۳]{۲x + ۱}$$

مثال ۴ : اگر $f(x)=\frac{x-۱}{x+۲}$ و $fog(x)=x^۲-۱$ ، مقدار $g(\sqrt{۵})$ را بدست آورید.

$$f(g(\sqrt{۵}))=(\sqrt{۵})^۲-۱=۴$$

$$f(g(\sqrt{۵}))=\frac{g(\sqrt{۵})-۱}{g(\sqrt{۵})+۲}$$

$$\Rightarrow \frac{g(\sqrt{۵})-۱}{g(\sqrt{۵})+۲}=۴ \Rightarrow$$

$$g(\sqrt{۵})-۱=۴g(\sqrt{۵})+۸$$

$$-۳g(\sqrt{۵})=۹ \Rightarrow g(\sqrt{۵})=\frac{۹}{-۳}=-۳$$

$$f(g(x))$$

ب : fog و g را داریم و f را می خواهیم.

مثال۵: اگر $fog(x)=x^۲-۱$ و $g(x)=۲x-۱$ ، تابع $f(x)$ را بدست آورید.

$$f(g(x))=x^۲-۱$$

$$f(g(x))=f(۲x-۱)$$

$$۲x-۱=t \Rightarrow ۲x=t+۱ \Rightarrow x=\frac{t+۱}{۲}$$

$$\Rightarrow f(\underbrace{۲x-۱}_{t})=x^۲-۱=\left(\frac{t+۱}{۲}\right)^۲-۱$$

$$=\frac{t^۲+۲t+۱}{۴}-۱$$

$$f(t)=\frac{t^۲}{۴}+\frac{t}{۲}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱\times۴}{۱\times۴}$$

$$f(x)=\frac{x^۲}{۴}+\frac{x}{۲}-\frac{۳}{۴}$$

مثال ۶: اگر $g(x)=\frac{۱}{x}-۱$ و $fog(x)=x^۲+x$ ، ضابطه تابع $f(x)$ را بدست آورید.

$$f(g(x))=f(\underbrace{\frac{۱}{x}-۱}_{t})=x^۲+x=\left(\frac{۱}{t+۱}\right)^۲+\left(\frac{۱}{t+۱}\right)=\frac{۱}{(t+۱)^۲}+\frac{۱(t+۱)}{(t+۱)(t+۱)}$$

$$\frac{۱}{x}-۱=t \Rightarrow \frac{۱}{x}=t+۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{t+۱}$$

$$\frac{۱+t+۱}{(t+۱)^۲}=\frac{t+۲}{(t+۱)^۲}$$

$$f(x)=\frac{x+۲}{(x+۱)^۲}$$

نمونه سوالات نهایی

۱- جای خالی را با عدد مناسب پر کنید. (دی ۱۴۰۲– ۰.۲۵ نمره)

الف) اگر $f(x)=\frac{|x|}{۱+|x|}$ مقدار $fof(۱)$ برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

$f(f(۱)) = f(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۳}$

$f(۱)=\frac{|۱|}{۱+|۱|}=\frac{۱}{۲}$

$f(\frac{۱}{۲}) = \frac{|\frac{۱}{۲}|}{۱+|\frac{۱}{۲}|} = \frac{\frac{۱}{\cancel{۲}}}{\frac{۳}{\cancel{۲}}} = \frac{۱}{۳}$

۲- اگر $f(g(x)) = ۴x^۲+۱$ و $f(x)=\frac{x}{۲}-۱$، آنگاه ضابطه تابع $g(x)$ را بیابید. (شهریور ۱۴۰۲– ۰.۷۵ نمره)

$f(g(x)) = \frac{g(x)}{۲}-۱$

$f(g(x)) = ۴x^۲+۱$

$\Rightarrow \frac{g(x)}{۲}-۱ = ۴x^۲+۱$

$\frac{g(x)}{۲} = ۴x^۲+۲ \Rightarrow g(x)=۸x^۲+۴$

۳- اگر $f=\{(۰,-۱),(۵,۹),(۳,۷),(-۲,۴)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۳,-۱),(۹,۰),(-۱,۴),(۷,۷)\}$

تابع gof را در صورت وجود بنویسید. (شهریور ۱۴۰۱– ۰.۷۵ نمره)

$g(f(x)) = \{(۰,۴)(۵,۰)(۳,۷)\cancel{(-۲,\ )}\}$

$۰ \xrightarrow{f} -۱ \xrightarrow{g} ۴$

$۵ \xrightarrow{f} ۹ \xrightarrow{g} ۰$

$۳ \xrightarrow{f} ۷ \xrightarrow{g} ۷$

$- \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{g}$ [illegible]

۴- اگر $g(x)=\sqrt{x+۳}$ و $f(x)=۷-۴x^{۲}$ باشد: (دی ۱۴۰۱– ۱/۲۵ نمره)

الف: دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب: مقدار $(gof)(۱)$ را محاسبه کنید.

$x+۲\geqslant ۰ \Rightarrow x\geqslant -۲$

$D_g=[-۲,+\infty)$ $\qquad$ $D_f=\mathbb{R}$

$D_{f(g(x))}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in[-۲,+\infty) \mid \underbrace{\sqrt{x+۳}\in\mathbb{R}}_{\text{همیشه درست}}\}=[-۲,+\infty)$

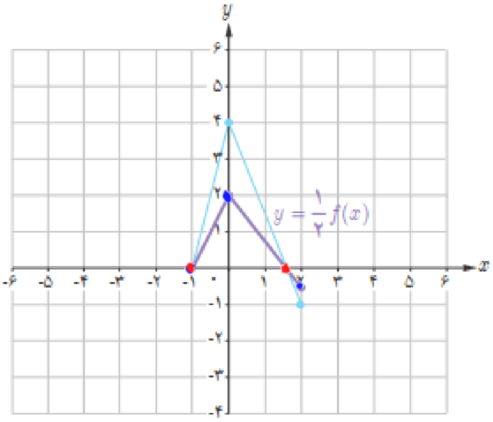
ب: $g(f(۱))=g(۳)=\sqrt{۳+۳}=\sqrt{۶}$

$f(۱)=۷-۴(۱)^{۲}=۳$

«تبدیل نمودار توابع»

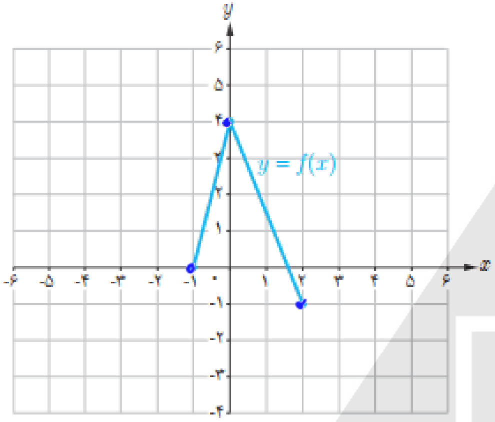
یادآوری : همان‌طور که در پایهٔ یازدهم دیدیم برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ را با حفظ طول آن نقطه، k برابر کنیم.

مثال : در شکل زیر نمودار تابع f و با کمک آن نمودار توابع $y=\frac{۱}{۲}f(x)$ ، $y=-f(x)$ و $y=۲f(x)$ رسم شده است.



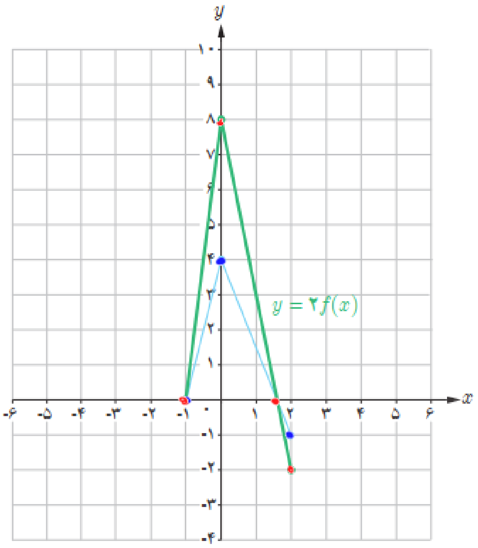
برای رسم نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(x)$ عرض هر نقطهٔ نمودار تابع f را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم.

$\frac{۱}{۲}f(x)$	x
۰	۱-
۲	۰
$-\frac{۱}{۲}$	۲



$f(x)$	x
۰	۱-
۴	۰
۱-	۲

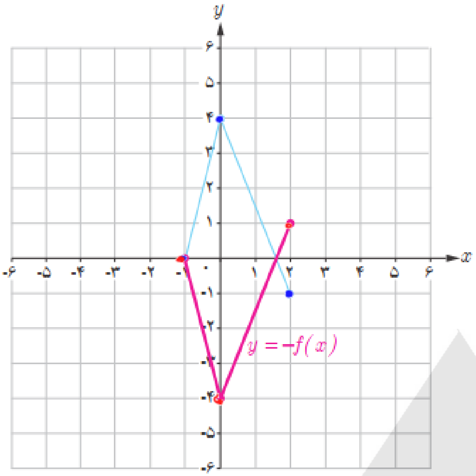
از آنجایی که ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ و $kf(x)=۰$ یکسان است بنابراین محل تلاقی نمودار توابع f و kf با محور xها یکسان است.



$۲f(x)$	x
۰	-۱
۸	۰
-۲	۲

برای رسم نمودار $y=۲f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در ۲ ضرب می‌کنیم.

۲f(x)



$-f(x)$	x
۰	-۱
-۴	۰
۱	۲

برای رسم نمودار $y=-f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در ۱- ضرب می‌کنیم.

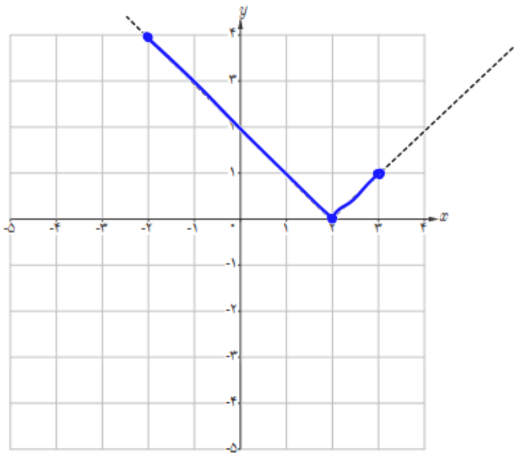
نمودار اصلی

$(-۱,۰) \longrightarrow (-۱,۰)$

$(۰,۴) \longrightarrow (۰,۸)$

$(۲,-۱) \longrightarrow (۲,-۲)$

دامنهٔ تابع با ضابطهٔ تابع $y=kf(x)$ همان دامنهٔ تابع $y=f(x)$ است، اما برد آنها لزوماً یکسان نیست.



$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$

کار در کلاس

نمودار تابع $f(x)=|x-۲|$ را در بازهٔ $[-۲,۳]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x)=-|x-۲|$ و $h(x)=\frac{۱}{۲}|x-۲|$ و $k(x)=-\frac{۱}{۳}|۲-x|$ را رسم کنید.

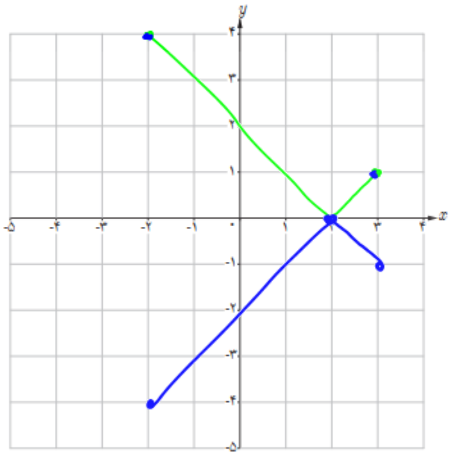
$g(x) = -|x-۲|$

قرینه نسبت به محور x ها

$(-۲, ۴) \longrightarrow (-۲, -۴)$

$(۲, ۰) \longrightarrow (۲, ۰)$

$(۳, ۱) \longrightarrow (۳, -۱)$

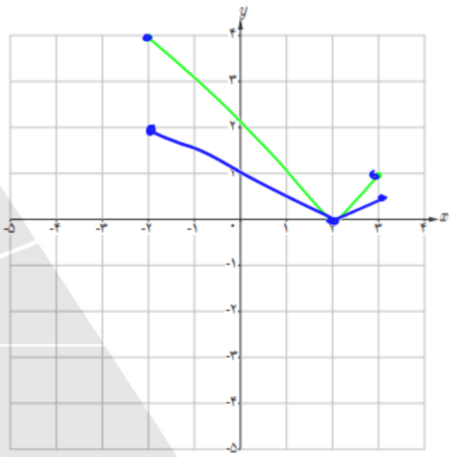


$h(x) = \frac{۱}{۲}|x-۲|$

$(-۲, ۴) \xrightarrow{۴ \times \frac{۱}{۲}} (-۲, ۲)$

$(۲, ۰) \xrightarrow{۰ \times \frac{۱}{۲}} (۲, ۰)$

$(۳, ۱) \xrightarrow{۱ \times \frac{۱}{۲}} (۳, \frac{۱}{۲})$



$|x-۲|$

$k(x) = -\frac{۱}{۳}|۲-x|$

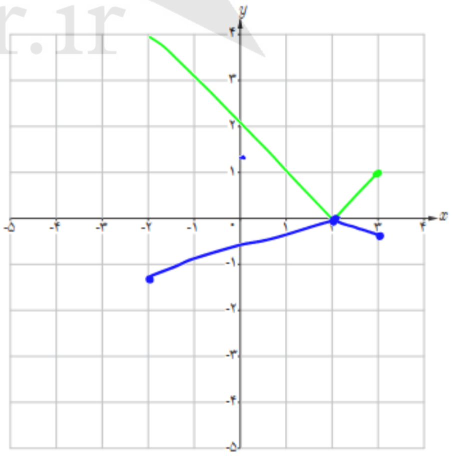
$|-x| = |x|$

$\longrightarrow -\frac{۱}{۳}|-(x-۲)| = -\frac{۱}{۳}|x-۲|$

$(-۲, ۴) \xrightarrow{-\frac{۱}{۳} \times ۴} (-۲, -\frac{۴}{۳})$

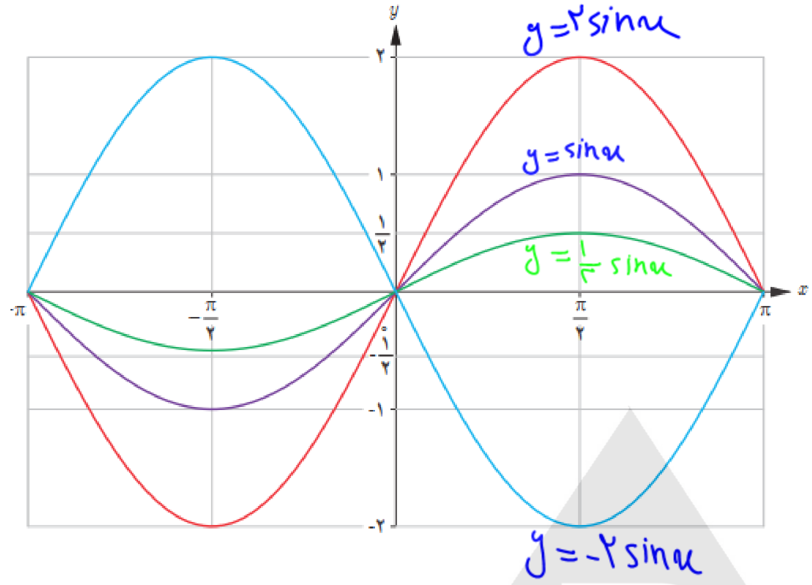
$(۲, ۰) \xrightarrow{۰ \times (-\frac{۱}{۳})} (۲, ۰)$

$(۳, ۱) \xrightarrow{-\frac{۱}{۳} \times ۱} (۳, -\frac{۱}{۳})$



کار در کلاس

در شکل روبه‌رو نمودار توابع با ضابطه‌های $y=\sin x$، $y=۲\sin x$، $y=-۲\sin x$ و $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ رسم شده است. نمودار تابع $y=\sin x$ را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار توابع دیگر چگونه به کمک آن رسم شده است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.



$y=\sin x \Rightarrow D=[-\pi,\pi]$, $R=[-1,1]$

$y=۲\sin x \Rightarrow D=[-\pi,\pi]$, $R=[-۲,۲]$

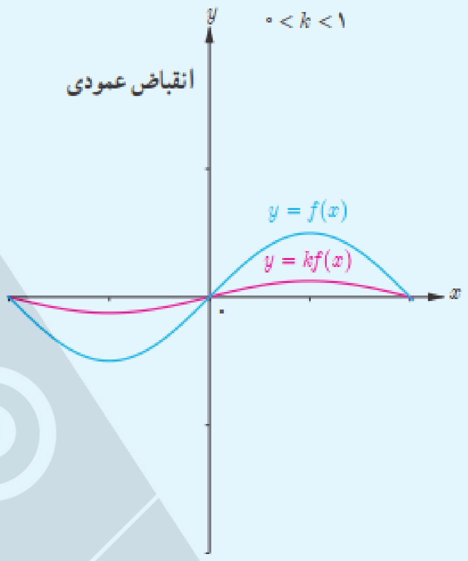
$y=-۲\sin x \Rightarrow D=[-\pi,\pi]$, $R=[-۲,۲]$

$y=\frac{1}{۲}\sin x \Rightarrow D=[-\pi,\pi]$, $R=[-\frac{1}{۲},\frac{1}{۲}]$

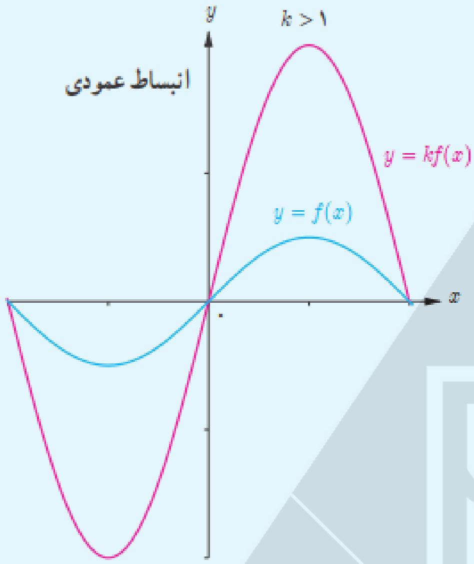
می‌توان گفت نمودار تابع $y=kf(x)$ تغییرات زیر را نسبت به نمودار $y=f(x)$ دارد :

اگر $k>0$، نمودار $y=kf(x)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور yها به دست آورد.

اگر $k<0$ ابتدا نمودار f نسبت به محور xها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.



اگر $0<k<1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض عمودی یافته است.



اگر $k>1$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط عمودی یافته است.

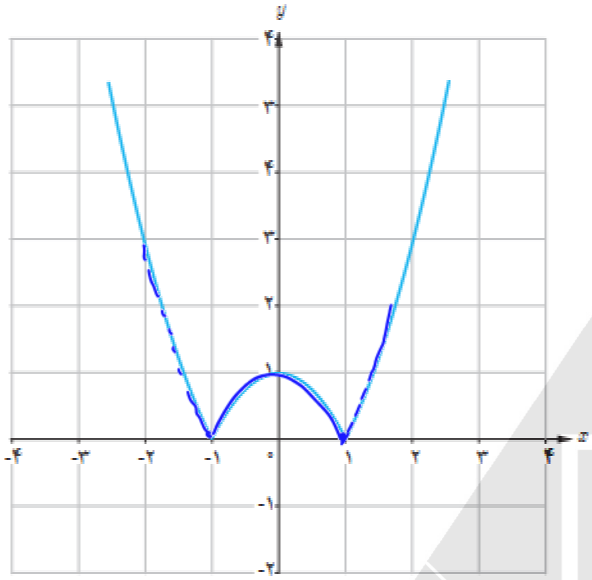
رسم نمودار $|f(x)|$

رسم نمودار $|f|$:

برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار f زیر محور x هاست، قرینهٔ نمودار f را نسبت به محور x ها رسم کنیم.

مثال : در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=|x^2-1|$ رسم شده است.

$y=x^2-1$



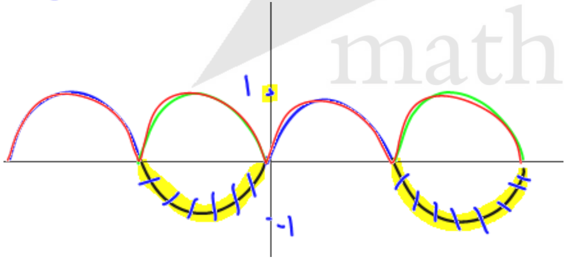
مثال۷ : نمودار توابع زیر را رسم کنید.

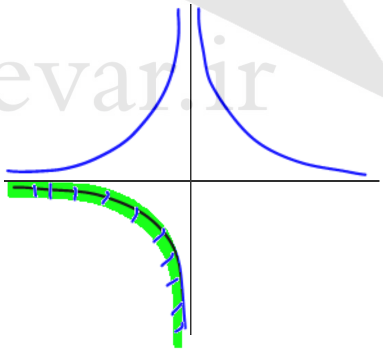
الف : $y = |sinx|$

ب : $y = \left|\frac{1}{x}\right|$

$y=\frac{1}{x}$

$y = \sin x$





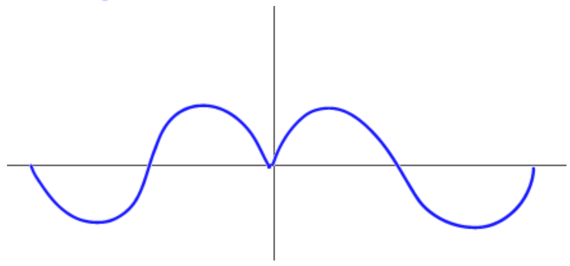
رسم نمودار $f(|x|)$:

برای رسم نمودار $y = f(|x|)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را فقط برای $x \geq ۰$ رسم کرده و تصویر آینه ای آن را نسبت به محور y ها به آن اضافه کنیم.

مثال۸ : نمودار توابع زیر را رسم کنید.

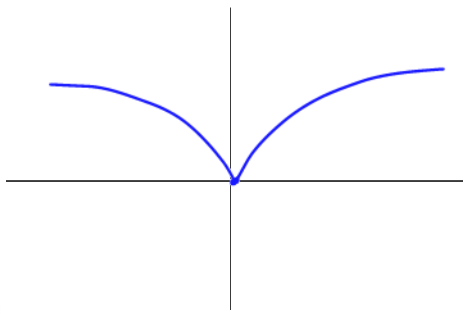
الف : $y = sin|x|$

$y = \sin x$



ب : $y = \sqrt{|x|}$

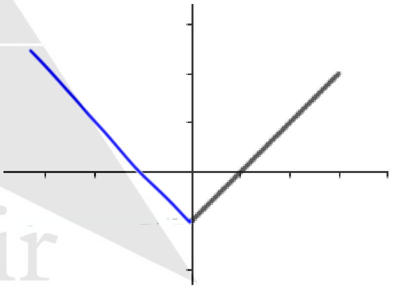
$y = \sqrt{x}$



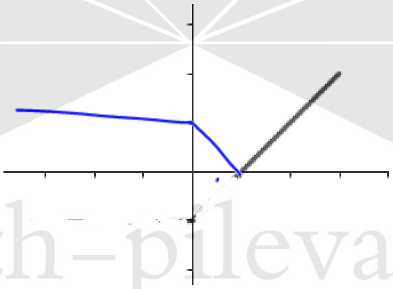
مقایسه دو نمودار $f(|x|)$ و $|f(x)|$ در یک سوال

مثال ۹ : نمودار تابع $y = f(x)$ داده شده است . نمودار تابع های خواسته شده را رسم کنید.

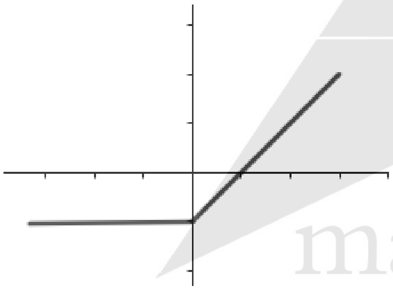
$y = f(|x|)$



$y = |f(x)|$



$y = f(x)$



رسم نمودار $f(kx)$ با استفاده از نمودار $f(x)$:

مثال : تابع $f(x)=x+۳$ را با دامنه $[-۴,۰]$ در نظر می‌گیریم و چگونگی رسم نمودار توابع $y=f(۲x)$ و $y=f(\frac{x}{۲})$ را بررسی می‌کنیم.
ضابطهٔ تابع $y=f(۲x)$ به صورت $f(۲x)=۲x+۳$ است و دامنهٔ آن به شکل زیر مشخص می‌شود :

$\underset{۲}{\underline{-۴}}\le \underset{۲}{\underline{۲x}}\le ۰ \rightarrow -۲\le x\le ۰ \rightarrow$ $f(۲x)$ دامنهٔ : $D=[-۲,۰]$

$f(\boxed{۲x})$ $-۴\leq \boxed{۲x} \leq ۰$

همچنین ضابطهٔ تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ به صورت $f(\frac{x}{۲})=\frac{x}{۲}+۳$ است و دامنهٔ آن به شکل زیر مشخص می‌شود :

$f(\frac{x}{۲})$: $-۴\le\frac{x}{۲}\le۰$

$-۴\le\frac{x}{۲}\le۰\to-۸\le x\le۰ \to$ دامنهٔ $f(\frac{x}{۲})$: $D=[-۸,۰]$

برخی از نقاط نمودار این سه تابع در جدول‌های زیر نوشته شده است :

x	-۴	-۳	-۲	-۱	۰
$f(x)=x+۳$	-۱	۰	۱	۲	۳

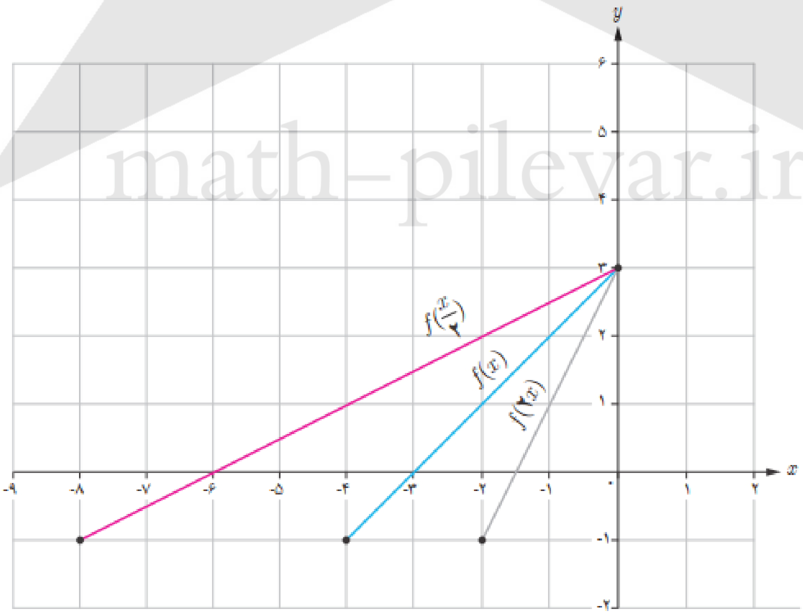
$۲x=-۴\Rightarrow x=-۲$

x	-۲	$-۱/۵$	-۱	$-۰/۵$	۰
$f(۲x)=۲x+۳$	-۱	۰	۱	۲	۳

$\frac{x}{۲}=-۴\Rightarrow x=-۸$

$\frac{x}{۲}=-۳\Rightarrow x=-۶$

x	-۸	-۶	-۴	-۲	۰
$f(\frac{x}{۲})=\frac{x}{۲}+۳$	-۱	۰	۱	۲	۳

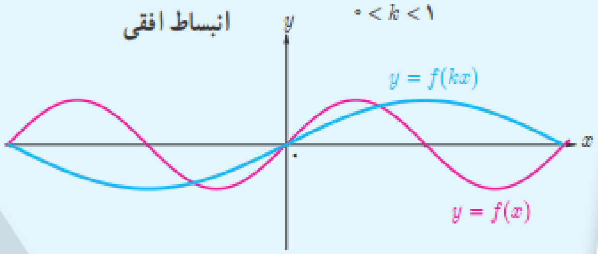


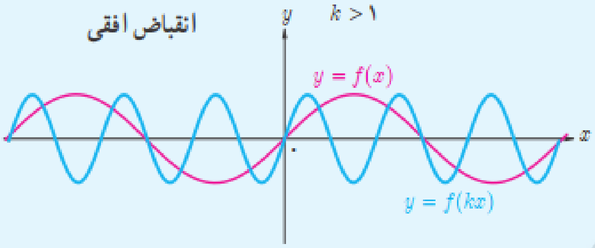
همان‌طور که ملاحظه می‌شود برد توابع $f(۲x)$ و $f(\frac{x}{۲})$ با برد تابع $f(x)$ یکسان است.

برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k>0$، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور xها به دست آورد.

اگر $k<0$، ابتدا نمودار f نسبت به محور yها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $\left|\frac{1}{k}\right|$ به‌طور افقی منبسط یا منقبض می‌شود.

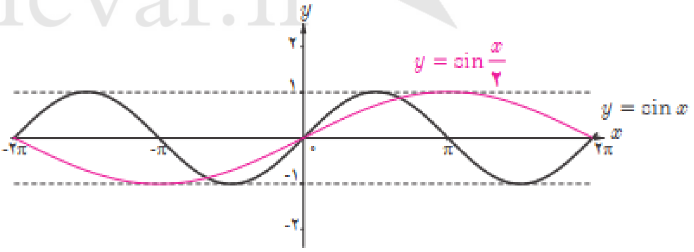


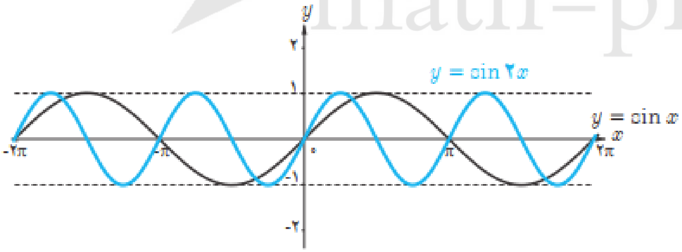


اگر $0<k<1$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط افقی یافته است.

اگر $k>1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض افقی یافته است.

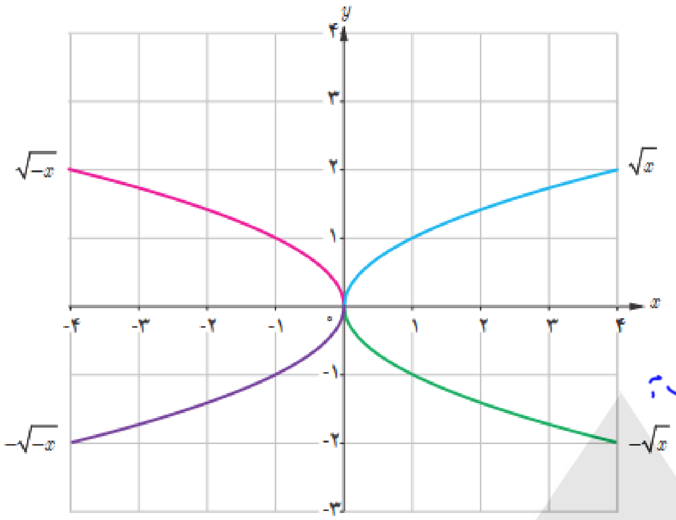
مثال : در شکل‌های زیر نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\sin 2x$ و $y=\sin\frac{x}{2}$ در بازهٔ $[-2\pi,2\pi]$ رسم شده‌اند. همان‌طور که می‌بینیم نمودار تابع $y=\sin 2x$ با انقباض نمودار تابع $y=\sin x$ در امتداد محورxها و نمودار تابع $y=\sin\frac{x}{2}$ با انبساط نمودار تابع $y=\sin x$ در امتداد محورxها به‌دست آمده است.





کار در کلاس

نمودار توابع $y=\sqrt{-x}$ و $y=-\sqrt{x}$ و $y=-\sqrt{-x}$ به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم شده‌است. دامنه و برد توابع فوق را مشخص کنید.



$y=-\sqrt{-x}$

قرینه نسبت به محور y ها

قرینه نسبت به محور x ها

$y=\sqrt{x} \Rightarrow D=[0,+\infty) \quad , \quad R=[0,+\infty)$

$y=-\sqrt{x} \Rightarrow D=[0,+\infty) \quad , \quad R=(-\infty,0]$

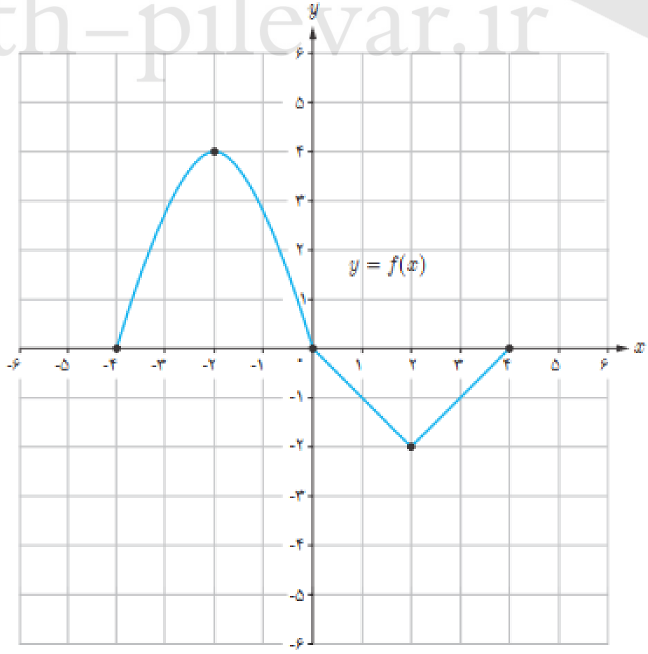
$y=\sqrt{-x} \Rightarrow D=(-\infty,0] \quad , \quad R=[0,+\infty)$

$y=-\sqrt{-x} \Rightarrow D=(-\infty,0] \quad , \quad R=(-\infty,0]$

کار در کلاس

نمودار تابع f با دامنهٔ $[-4,4]$ به صورت زیر داده شده است، می‌خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y=f(2x)$ و $y=f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنیم.

x	$f(x)$
-4	0
-2	4
0	0
2	-2
4	0



الف) برای تعیین دامنهٔ $y=f(۲x)$ به‌صورت زیر عمل می کنیم :

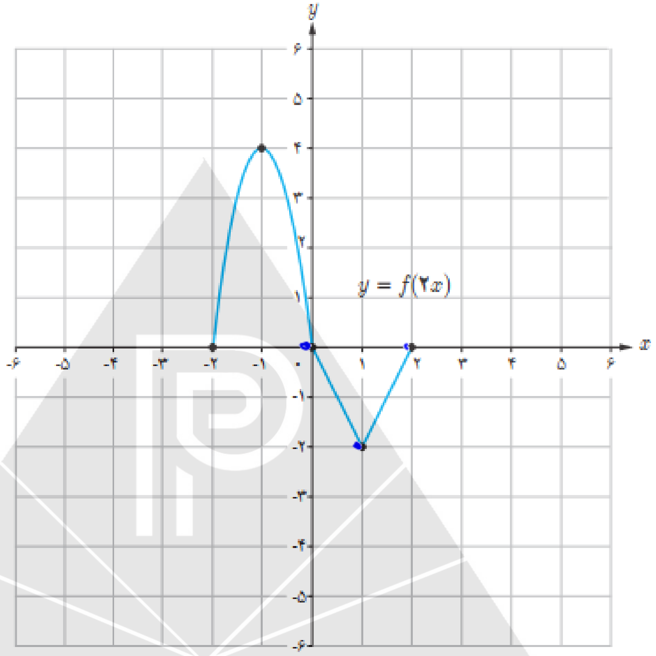
$$-۴ \le ۲x \le ۴ \rightarrow -۲ \le x \le ۲$$

$f(\boxed{۲x}) \quad : \quad -۴ \le \boxed{۲x} \le ۴$

بنابراین دامنهٔ تابع $y=f(۲x)$ بازهٔ $[-۲,۲]$ است. جدول نقاط را کامل کنید.

برای رسم نمودار $f(۲x)$، طول نقاط یا همان xها باید محاسبه شود.

x	$۲x$	$f(۲x)$	$(x, f(۲x))$
-۲	-۴	۰	$(-۲,۰)$
-۱	-۲	۴	$(-۱,۴)$
۰	۰	۰	$(۰,۰)$
۱	۲	-۲	$(۱,-۲)$
۲	۴	۰	$(۲,۰)$



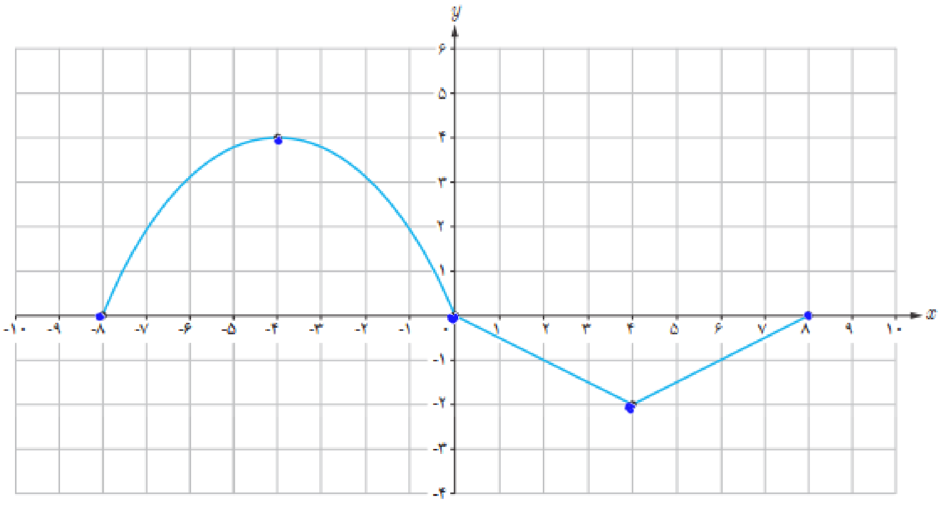
ب) برای تعیین دامنهٔ $y = f(\frac{۱}{۲}x)$ به صورت زیر عمل می کنیم.

$$-۴ \le \frac{۱}{۲}x \le ۴ \rightarrow -۸ \le x \le ۸$$

$f(\boxed{\frac{۱}{۲}x}) \quad -۴ \le \boxed{\frac{۱}{۲}x} \le ۴$

پس دامنهٔ تابع $y = f(\frac{۱}{۲}x)$ بازهٔ $[-۸,۸]$ است و نقاط متناظر به‌صورت زیر است :

x	$f(\frac{۱}{۲}x)$
-۸	۰
-۴	۴
۰	۰
۴	-۲
۸	۰



همان‌طور که ملاحظه شد برای رسم نمودار $y=f(۲x)$ طول هر نقطهٔ نمودار $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{۲}$ و برای رسم نمودار $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ طول هر نقطه را در ۲ ضرب می‌کنیم.

> دامنهٔ تابع $y=f(kx)$ با دامنهٔ تابع $y=f(x)$ الزاماً یکسان نیست ولی برد تابع $y=f(kx)$ همان برد تابع $y=f(x)$ است.

تمرین

① اگر $f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}$ و $g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}$، توابع fog و gof را به‌دست آورید.

$f(g(x))=\{(۵,۸)(۳,۳)(۷,۸)(۹,۴)\}$

$۵\xrightarrow{g}۷\xrightarrow{f}۸$

$۳\xrightarrow{g}۵\xrightarrow{f}۳$

$۷\xrightarrow{g}۹\xrightarrow{f}۸$

$۹\xrightarrow{g}۱۱\xrightarrow{f}۴$

$gof(x)=g(f(x))=\{\cancel{(۷,\ )}(۵,۵)\cancel{(۹,\ )}\cancel{(۱۱,\ )}\}$

$۷\xrightarrow{f}۸\xrightarrow{g}$ ن.ت

$۵\xrightarrow{f}۳\xrightarrow{g}۵$

$۹\xrightarrow{f}۸\xrightarrow{g}$ ن.ت

$۱۱\xrightarrow{f}۴\xrightarrow{g}$ ن.ت

$gof(x)=\{(۵,۵)\}$

۲ در هر قسمت موارد خواسته شده را در صورت امکان به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x^۲-۵ \quad ; \; g(x)=\sqrt{x+۶} \quad : \; D_{fog}\,,(fog)(x)$

$D_f=R \quad , \quad x+۶\geqslant ۰ \Rightarrow x\geqslant -۶ \Rightarrow D_g=[-۶,+\infty)$

$D_{f(g(x))}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in[-۶,+\infty) \mid \sqrt{x+۶}\in R\}=[-۶,+\infty)$

همیشه درست

$fog(x)=f(g(x))=(g(x))^۲-۵=(\sqrt{x+۶})^۲-۵=x+۶-۵=x+۱$

$f(g(x))=\sqrt{۳-۲g(x)}=\sqrt{۳-۲\times\frac{۶}{۳x-۵}}=\sqrt{۳-\frac{۱۲}{۳x-۵}}$

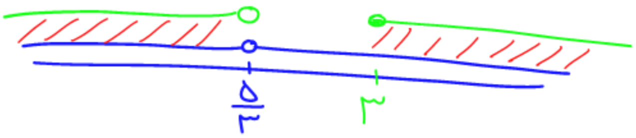
ب) $f(x)=\sqrt{۳-۲x} \quad ; \; g(x)=\frac{۶}{۳x-۵} \quad : \; D_{fog}\,,(fog)(x)$

$۳-۲x\geqslant ۰ \Rightarrow ۳\geqslant ۲x \Rightarrow x\leqslant \frac{۳}{۲} \Rightarrow D_f=(-\infty,\frac{۳}{۲}]$

$۳x-۵=۰ \Rightarrow x=\frac{۵}{۳} \Rightarrow D_g=R-\{\frac{۵}{۳}\}$

$D_{f(g(x))}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in R-\{\frac{۵}{۳}\} \mid \frac{۶}{۳x-۵}\in(-\infty,\frac{۳}{۲}]\}$

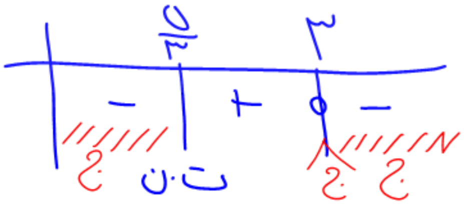
$=(-\infty,\frac{۵}{۳})\cup[۳,+\infty)$



$\frac{\cancel{۶}^{\,۲}}{۳x-۵}\leqslant\frac{\cancel{۳}^{\,۱}}{۲} \Rightarrow \frac{۲\times۲}{(۳x-۵)\times۲}-\frac{۱(۳x-۵)}{۲\times(۳x-۵)}\leqslant ۰ \Rightarrow \frac{۴-۳x+۵}{۶x-۱۰}\leqslant ۰ \Rightarrow \frac{۹-۳x}{۶x-۱۰}\leqslant ۰$

$۹-۳x=۰ \Rightarrow x=۳$

$۶x-۱۰=۰ \Rightarrow x=\frac{۱۰}{۶}=\frac{۵}{۳}$



پ) $f(x)=\sqrt{x+۲}$; $g(x)=\sqrt{x^۲-۱۶}$: $D_{gof}\,,(gof)(x)$

$x+۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۲ \Rightarrow D_f=[-۲,+\infty)$

$x^۲-۱۶\geq ۰ \Rightarrow x^۲\geq +۱۶ \Rightarrow x\leq -۴$ یا $x\geq ۴ \Rightarrow D_g=(-\infty,-۴]\cup[۴,+\infty)$

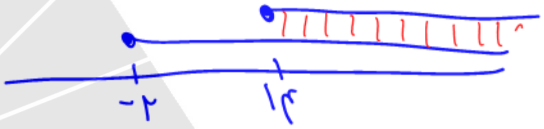
$D_{g(f(x))}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in[-۲,+\infty) \mid \sqrt{x+۲}\in(-\infty,-۴]\cup[۴,+\infty)\}=$

$[۱۴,+\infty)$

$\sqrt{x+۲}\in(-\infty,-۴]$ غیر ممکن

$\sqrt{x+۲}\in[۴,+\infty) \Rightarrow \sqrt{x+۲}\geq ۴ \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+۲\geq ۱۶ \Rightarrow x\geq ۱۴$

$g(f(x))=\sqrt{(f(x))^۲-۱۶}=\sqrt{x+۲-۱۶}=\sqrt{x-۱۴}$



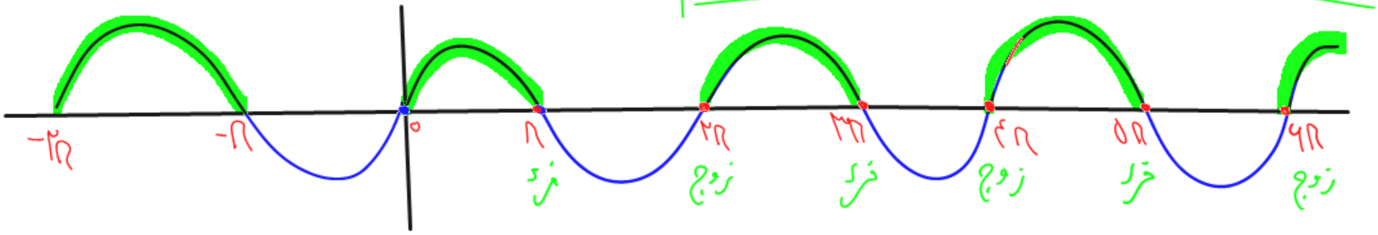
ت) $f(x)=\sin x$; $g(x)=\sqrt{x}$: $D_{gof}\,,(gof)(x)$

$D_f=\mathbb{R}$, $D_g=[۰,+\infty)$

$D_{g(f(x))}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} \mid \sin x\in[۰,+\infty)\}$

$=[۲k\pi\,,\,۲k\pi+\pi]$; $k\in\mathbb{Z}$

$g(f(x))=\sqrt{f(x)}=\sqrt{\sin x}$



۳ اگر $f(g(x)) = ۳x^۲ - ۶x + ۱۴$ و $f(x) = ۳x - ۴$، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به دست آورید.

$$f(g(x)) = ۳g(x) - ۴$$

$$f(g(x)) = ۳x^۲ - ۶x + ۱۴$$

$$\Rightarrow ۳g(x) - ۴ = ۳x^۲ - ۶x + ۱۴$$

$$۳g(x) = ۳x^۲ - ۶x + ۱۸$$

$$g(x) = x^۲ - ۲x + ۶$$

۴ مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x) = x^۲ - ۴$ و $g(x) = \sqrt{x^۲ - ۴}$ ؛ آنگاه $(fog)(۵) = -۲۵$. نادرست

$$g(۵) = \sqrt{۵^۲ - ۴} = \sqrt{۲۱}$$

$$f(g(۵)) = f(\sqrt{۲۱}) = (\sqrt{۲۱})^۲ - ۴ = ۲۱ - ۴ = ۱۷$$

ب) برای دو تابع f و g که $f \neq g$ تساوی $(fog)(x) = (gof)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست. نادرست

$$f(x) = ۵x$$

$$g(x) = ۲x$$

$$f(g(x)) = ۵g(x) = ۵ \times ۲x = ۱۰x$$

$$g(f(x)) = ۲f(x) = ۲ \times ۵x = ۱۰x$$

$$\Rightarrow fog(x) = gof(x)$$

پ) اگر $f(۷) = ۵$ و $g(۴) = ۷$ ، آنگاه $(fog)(۴) = ۵$. درست

$$f(\underbrace{g(۴)}_{۷}) = f(۷) = ۵$$

ت) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۲x-۱$، آنگاه $(fog)(۵)=g(۲)$. درست

$g(۲)=۲\times۲-۱=۳$

$g(۵)=۲\times۵-۱=۹$

$f(g(۵))=f(۹)=\sqrt{۹}=۳$

⑤ الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ‌تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج‌شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام‌یک از حالت‌های الف یا ب به نفع الناز است؟ الف

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}-\frac{۲۰}{۱۰۰}=\frac{۸۰}{۱۰۰}=۰/۸$

$f(x)=۰/۸x$ کارت تخفیف

$g(x)=x-۲۰۰۰۰۰$ تخفیف نقدی

$\underbrace{g}_{\text{تخفیف نقدی}}(\underbrace{f(x)}_{\text{کارت تخفیف}})=۰/۸x-۲۰۰۰۰۰ \Rightarrow g(f(۲۰۰۰۰۰۰))=۰/۸\times۲۰۰۰۰۰۰-۲۰۰۰۰۰=$

$=۱٫۶۰۰٫۰۰۰-۲۰۰٫۰۰۰=۱٫۴۰۰٫۰۰۰$

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

$\overset{\text{کارت تخفیف}}{f}(\overset{\text{تخفیف نقدی}}{g(x)})=۰/۸g(x)=۰/۸(x-۲۰۰۰۰۰)=۰/۸x-۱۶۰۰۰۰$

$f(g(۲۰۰۰۰۰۰))=۰/۸\times۲٫۰۰۰٫۰۰۰-۱۶۰٫۰۰۰=۱٫۶۰۰٫۰۰۰-۱۶۰٫۰۰۰=۱٫۴۴۰٫۰۰۰$

۶ تابع $h(x)=(3x^2-4x+1)^5$ ترکیب کدام دو تابع زیر است؟

الف) $f(x)=\sqrt[5]{x}$; $g(x)=3x^2-4x+1$

$f(g(x))=\sqrt[5]{3x^2-4x+1}$ ✗

$g(f(x))=3(\sqrt[5]{x^2})-4\sqrt[5]{x}+1$ ✗

ب) $k(x)=x^5$; $l(x)=3x^2-4x+1$

$k(l(x))=(3x^2-4x+1)^5$ ✓

$l(k(x))=3(x^5)^2-4x^5+1$ ✗

۷ هریک از توابع زیر را به‌صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟ خیر

الف) $h(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$ $\longrightarrow$ $f(x)=x^2+1$, $g(x)=\sqrt{x}$

$g(f(x))=\sqrt[3]{x^2+1}$

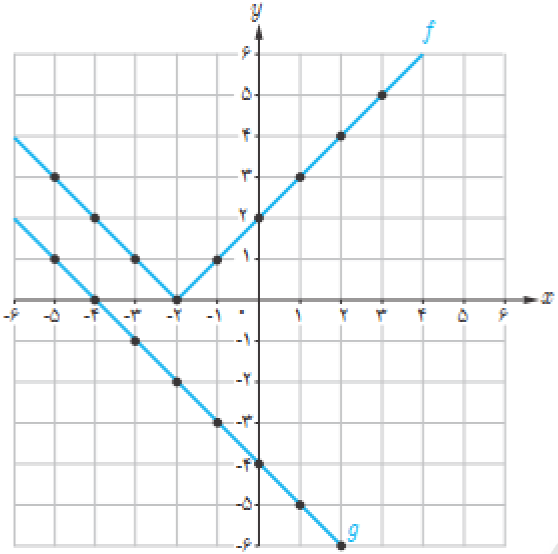
ب) $l(x)=\sqrt{x^2+5}$

$f(x)=x^2+5$

$g(x)=\sqrt{x}$

$\Rightarrow g(f(x))=\sqrt{x^2+5}$

⑧ با توجه به نمودارهای توابع f و g، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.



الف) $(fog)(-۱) = f(g(-۱)) = f(-۳) = +۱$

ب) $(gof)(۰) = g(f(۰)) = g(۲) = -۴$

پ) $(fog)(۱) = f(g(۱)) = -۵$

ت) $(gof)(-۱) = g(f(-۱)) = ۱$

⑨ با توجه به ضابطه‌های توابع f و g، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x) = ۲x-۵$, $g(x) = x^۲-۳x+۸ : (fog)(x) = ۷$

$f(g(x)) = ۲(x^۲-۳x+۸)-۵ = ۲x^۲-۶x+۱۶-۵ = ۲x^۲-۶x+۱۱$

$fog(x)=۷ \Rightarrow ۲x^۲-۶x+۱۱=۷ \Rightarrow ۲x^۲-۶x+۴=۰ \xrightarrow{\div ۲}$

$x^۲ \underbrace{-۳}_{\text{جمع}} x \underbrace{+۲}_{\text{ضرب}} = ۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۱)=۰ \begin{cases} x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \end{cases}$

ب) $f(x) = ۳x^۲+x-۱$, $g(x) = ۱-۲x$: $(gof)(x) = -۵$

$g(f(x)) = ۱-۲(۳x^۲+x-۱) = -۶x^۲-۲x+۳$

$gof(x) = -۵ \Rightarrow -۶x^۲-۲x+۳=-۵ \Rightarrow -۶x^۲-۲x+۸=۰ \xrightarrow{\div ۲}$

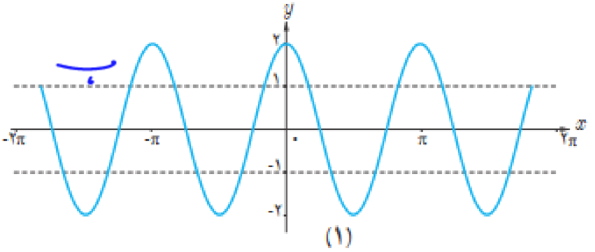
$-۳x^۲-x+۴=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x=۱ \\ x=-\frac{۴}{۳} \end{cases}$

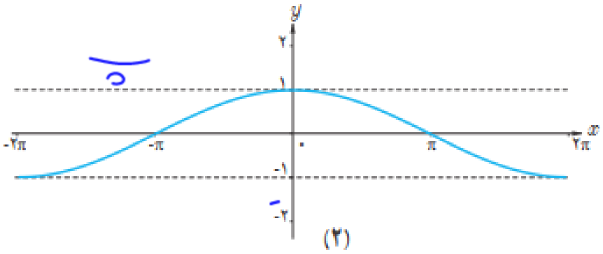
نکته:
$a+b+c=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=\frac{c}{a} \end{cases}$

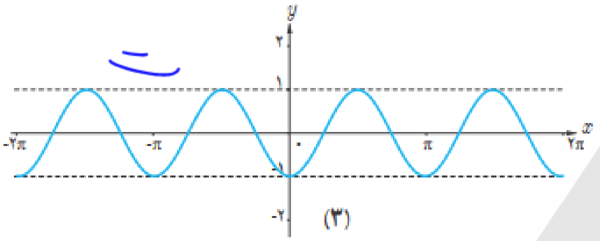
$-1 \leq \cos x \leq 1$

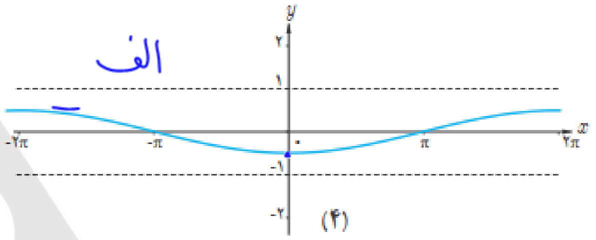
۱۰ با استفاده از نمودار $y=\cos x$، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

الف) $y=-\frac{1}{2}\cos(-\frac{1}{2}x)$ ب) $y=2\cos 2x$ پ) $y=\cos(\frac{1}{2}x)$ ت) $y=-\cos 2x$









۱۱ نمودار توابع $y=-\sin 2x-1$ و $y=2\sin(\frac{-1}{3}x)$ را به کمک نمودار تابع $y=\sin x$ در بازهٔ $[-\pi , \pi]$ رسم کنید.

$y=-\sin 2x-1$

قرینه نسبت به محور xها

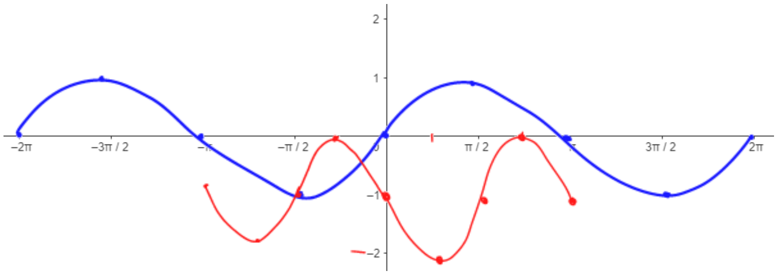
انقباض افقی

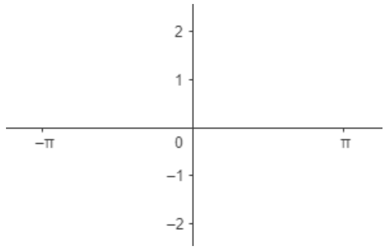
یک واحد پایین

x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	۰	۱	۰	-۱	۰

$\rightarrow$

۰	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
-۱	-۲	-۱	۰	-۱



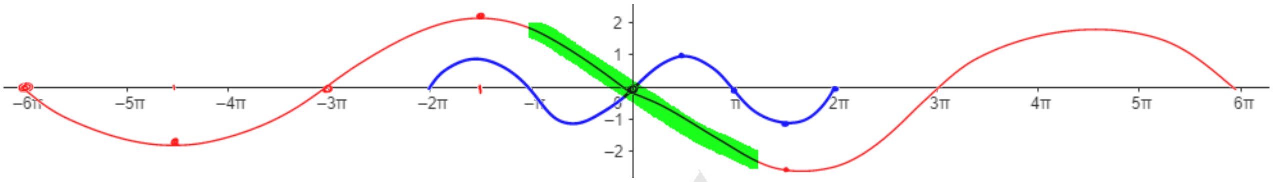


$$y = ۲\sin\left(-\frac{۱}{۳}x\right)$$

مقادیر ۲ برابر

طول ها ۳ برابر

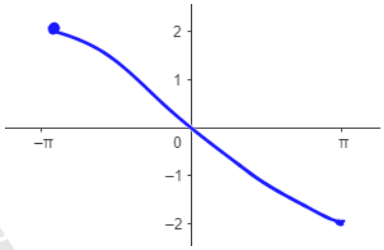
قرینه نسبت به محور y ها



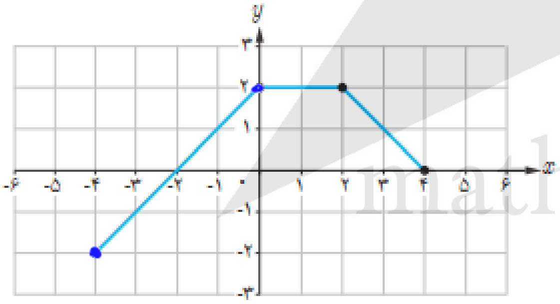
x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
sin	۰	۱	۰	-۱	۰

→

۰	$-\frac{۳\pi}{۲}$	-۳π	$-\frac{۹\pi}{۲}$	-۶π
۰	۲	۰	-۲	۰



⑫ با استفاده از نمودار تابع f، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.



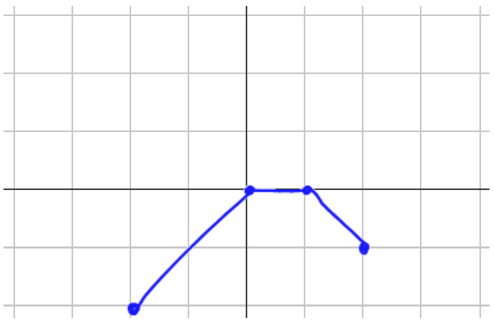
الف) $y = \frac{۱}{۲} f(۲x) - ۱$

$$(-۴, -۲) \xrightarrow[-۲\times(\frac{۱}{۲})-۱]{۲x=-۴ \Rightarrow x=-۲} (-۲ \ , -۲)$$

$$(۰, ۲) \xrightarrow[۲\times\frac{۱}{۲}-۱=۰]{۲x=۰ \Rightarrow x=۰} (۰ \ , ۰)$$

$$(۲, ۲) \xrightarrow[۲\times\frac{۱}{۲}-۱=۰]{۲x=۲ \rightarrow x=۱} (۱ \ , ۰)$$

$$(۴, ۰) \xrightarrow[۰\times\frac{۱}{۲}-۱=-۱]{۲x=۴ \Rightarrow x=۲} (۲ \ , -۱)$$



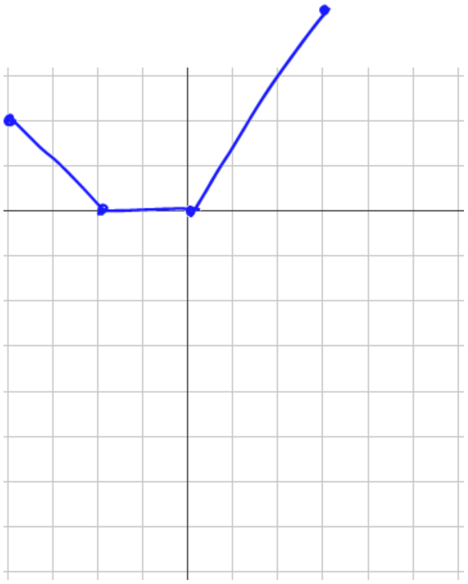
ب) $y=-f(-x)+۲$

$(-۴,-۲) \xrightarrow[-(-۲)+۲=۴]{-x=-۴\to x=۴} (۴,۴)$

$(۰,۲) \xrightarrow[-(۲)+۲=۰]{-x=۰\to x=۰} (۰,۰)$

$(۲,۲) \xrightarrow[-(۲)+۲=۰]{-x=۲\Rightarrow x=-۲} (-۲,۰)$

$(۴,۰) \xrightarrow[۰+۲=۲]{-x=۴\Rightarrow x=-۴} (-۴,۲)$



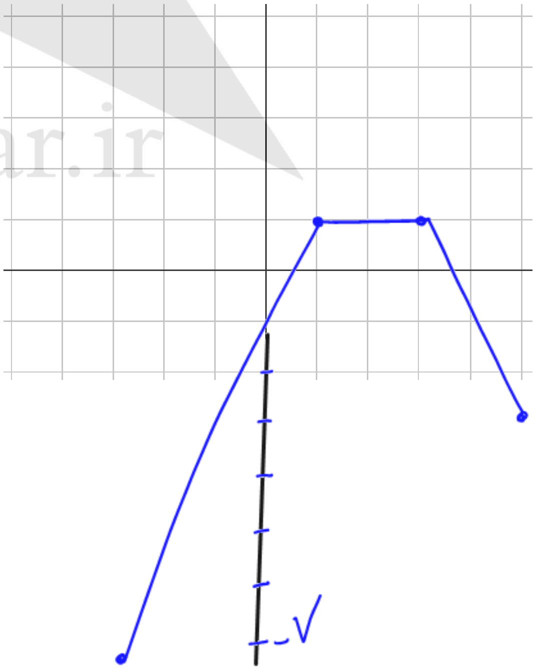
پ) $y=۲f(x-۱)-۳$

$(-۴,-۲) \xrightarrow[-۲\times ۲-۳=-۷]{x-۱=-۴\Rightarrow x=-۳} (-۳,-۷)$

$(۰,۲) \xrightarrow[۲\times ۲-۳=۱]{x-۱=۰\Rightarrow x=۱} (۱,۱)$

$(۲,۲) \xrightarrow[۲\times ۲-۳=۱]{x-۱=۲\Rightarrow x=۳} (۳,۱)$

$(۴,۰) \xrightarrow[۰\times ۲-۳=-۳]{x-۱=۴\Rightarrow x=۵} (۵,-۳)$



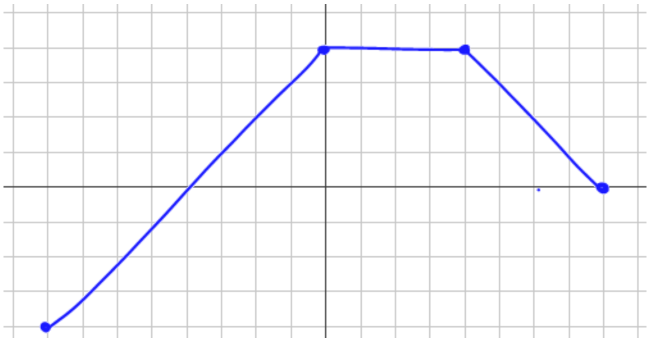
ت) $y = ۲f(\frac{۱}{۲}x)$

$(-۴, -۲) \xrightarrow[-۲\times۲=-۴]{\frac{۱}{۲}x=-۴ \Rightarrow x=-۸} (-۸, -۴)$

$(۰, ۲) \xrightarrow[۲\times۲=۴]{\frac{۱}{۲}x=۰ \Rightarrow x=۰} (۰, ۴)$

$(۲, ۲) \xrightarrow[۲\times۲=۴]{\frac{۱}{۲}x=۲ \rightarrow x=۴} (۴, ۴)$

$(۴, ۰) \xrightarrow[۰\times۲=۰]{\frac{۱}{۲}x=۴ \Rightarrow x=۸} (۸, ۰)$



نمونه سوالات نهایی

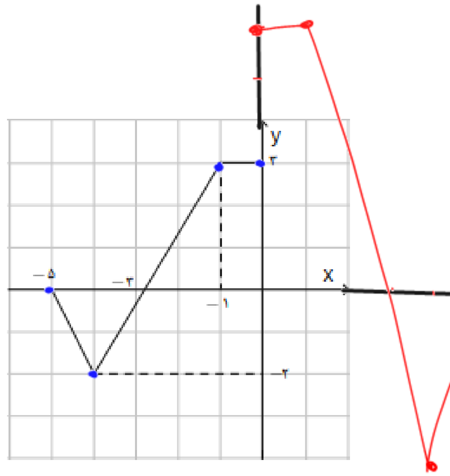
۱- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را ابتدا سه واحد به سمت راست‌انتقال می‌دهیم و سپس عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم، ضابطه تابع جدید را بنویسید. (شهریور ۱۴۰۲– ۱ نمره)

$x \longrightarrow x-۳$

$f(x-۳) = \sqrt{x-۳}$

$f \longrightarrow ۲f \longrightarrow \boxed{۲f(x-۳) = ۲\sqrt{x-۳}}$

۲- نمودار تابع f به صورت مقابل است.
دامنه و برد تابع $g(x) = ۲f(-x)$ را بنویسید. (دی ۱۴۰۲– ۱ نمره)



$(-۵, ۰) \xrightarrow{۰\times۲=۰} (۵, ۰)$

$(-۴, -۲) \xrightarrow{-۲\times۲=-۴} (۴, -۴)$

$(-۱, ۳) \xrightarrow{۳\times۲=۶} (۱, ۶)$

$(۰, ۳) \xrightarrow{۳\times۲=۶} (۰, ۶)$

بی تأثیر در برد

۳- برد تابع f بازهٔ $(-۳,۱]$ است. برد تابع $y=-۲f(\underline{۳x-۱})+۳$ کدامیک از موارد زیر است؟ (خرداد ۱۴۰۱- ۰/۵ نمره)

الف) $[-۸,۰)$ ب) $[-۱۲,۰)$ پ) $[۱,۹)$ ✓ ت) $[-۱۰,۲)$

$$y=-۲f+۳$$

$$-۳<f\leqslant ۱ \longrightarrow ۶>-۲f\geqslant -۲ \xrightarrow{+۳} ۹>-۲f+۳\geqslant ۱$$

$$[۱,۹)$$

سوالات تکمیلی

$x\longrightarrow x+۲$

۱- نمودار تابع با ضابطه $f(x)=۴x-x^۲$ را در امتداد محور xها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. (سراسری تجربی ۱۴۰۱)
فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$ ✓

$x\longrightarrow x+۲$: $f(x+۲)=۴(x+۲)-(x+۲)^۲=\cancel{۴x}+۸-x^۲-\cancel{۴x}-۴=-x^۲+۴$

$۴x-\cancel{x^۲}=-\cancel{x^۲}+۴ \Rightarrow ۴x=۴ \Rightarrow x=۱ \;,\; y=۳$

فاصله از مبدا $=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{۱^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۰}$

۲- نقطه $A(۲,۳)$ روی نمودار تابع $y = ۲f(۳x - ۱) + ۱$ است . نقطه متناظر با A را روی نمودار تابع $y = ۱ - f(۲ - x)$ را بیابید.

$۲f(۳\times۲-۱)+۱=۳$

$۲f(۵)=۲$

$f(۵)=۱$

$۲-x=۵ \Rightarrow x=-۳$

$y=۱-f(۲-(-۳))=$

$=۱-f(۵)=۱-۱=۰$

$A'(-۳,۰)$

۳- اگر دامنه تعریف تابع f بازه $[-۱و۲]$ باشد ، دامنه تعریف تابع $y = ۲f(۲x - ۱)$ را بیابید.

$y=۲f(\underset{\text{ورودی}}{۲x-۱})$

$f(◎)$ $\quad -۱\leq ◎ \leq ۲$

$۲x-۱\in D_f$: $\quad -۱\leq ۲x-۱\leq ۲$

$۰\leq ۲x\leq ۳ \longrightarrow ۰\leq x\leq \frac{۳}{۲}$

۴- اگر دامنه تعریف تابع $y = ۱ + ۳f(۳x + ۴)$ بازه $[۱و۲]$ باشد ، دامنه تعریف تابع f را بیابید.

$y=۱+۳f(۳x+۴)$

$۱\leq x\leq ۲ \longrightarrow ۳\leq ۳x\leq ۶ \longrightarrow ۷\leq ۳x+۴\leq ۱۰$

$f(◎)$ $\quad ۷\leq ◎\leq ۱۰ \longrightarrow D_f=[۷,۱۰]$

۴- اگر دامنه تعریف تابع $y = -f(۳x + ۱)$ بازه $(-۱و۳)$ باشد ، دامنه تعریف تابع $y = ۳f(x + ۱) + ۱$ را بیابید.

$y=-f(۳x+۱)$ $\quad -۱<x<۳ \longrightarrow -۲<۳x+۱<۱۰$

$f(◎)$ $\quad -۲<◎<۱۰ \longrightarrow D_f=(-۲,۱۰)$

$y=۳f(x+۱)+۱ \longrightarrow -۲<x+۱<۱۰ \longrightarrow -۳<x<۹$

۵- اگر برد تابع $y = ۲f(x+۱) - ۳$ بازه $(-۳,۳)$ باشد ، برد تابع $y = ۲ - f(۳x-۱)$ را بیابید.

در برد بی تاثیر

در برد بی تاثیر

$$y = ۲f - ۳ \longrightarrow -۳ < ۲f - ۳ < ۳ \longrightarrow ۰ < ۲f < ۶ \longrightarrow ۰ < f < ۳$$

$$y = ۲ - f \longrightarrow ۰ < f < ۳ \longrightarrow ۰ > -f > -۳ \xrightarrow{+۲} ۲ > ۲ - f > -۱$$

$$(-۱, ۲)$$

۶- اگر $f(x) = \frac{x^۲}{۲x+۷}$ و $g(x) = x + \sqrt{x+۹}$ باشد ، حاصل $fog(-۵)$ را بیابید.

$$f(g(-۵)) = f(-۳) = \frac{(-۳)^۲}{۲(-۳)+۷} = \frac{۹}{۱} = ۹$$

$$g(-۵) = -۵ + \sqrt{-۵+۹} = -۵ + ۲ = -۳$$

۷- اگر $f(x) = x^۳ - x$ و $g(x) = x^۲ - ۲x$ باشد ، صفرهای تابع fog را بیابید.

$$f(g(x)) = (g(x))^۳ - g(x) = (\underbrace{x^۲ - ۲x}_{t})^۳ - (\underbrace{x^۲ - ۲x}_{t}) = ۰$$

$$x^۲ - ۲x = t$$

$$t^۳ - t = ۰ \longrightarrow t(t^۲ - ۱) = ۰$$

$$t = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x = ۰ \longrightarrow x(x-۲) = ۰ \quad x = ۰ \quad x = ۲$$

$$t = +۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x = ۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۱ = ۰$$

$$\Delta = ۴ - ۴(۱)(-۱) = ۸ \longrightarrow x = \frac{۲ \pm \sqrt{۸}}{۲}$$

$$t = -۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x = -۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = ۰$$

$$(x-۱)^۲ = ۰ \longrightarrow x = ۱$$

درس سوم

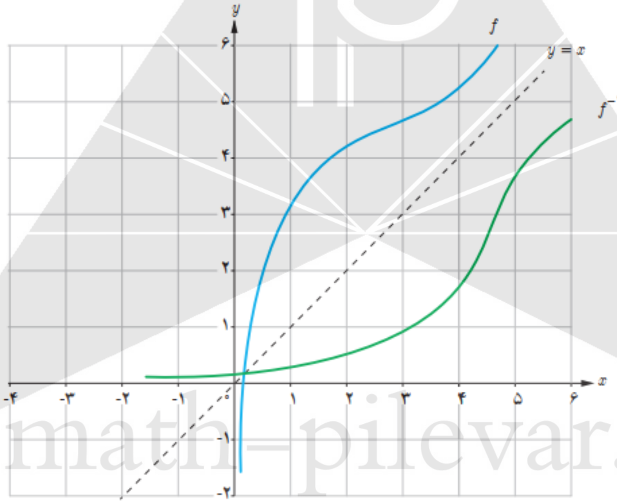
تابع وارون

یادآوری

همان‌طور که در فصل تابع کتاب ریاضی ۲ دیدیم با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج‌های مرتب تابع یک‌به‌یک f، تابعی جدید به‌دست می‌آید که وارون تابع f است و آن را با $f^{-۱}$ نشان می‌دهیم. یعنی اگر نقطهٔ (a,b) روی نمودار تابع f قرار داشته باشد آن‌گاه نقطهٔ (b,a) روی نمودار تابع $f^{-۱}$ قرار دارد و به عکس :

$$(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-۱}$$

همچنین دیدیم نمودار تابع f و تابع وارون آن نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اوّل و سوم) قرینه‌اند.



مثال :

اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}$ آن‌گاه :

$$f^{-۱}=\{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳)\}$$

خواهیم داشت :

$$\begin{cases}(fof^{-۱})(۴)=f(f^{-۱}(۴))=f(۱)=۴\\(fof^{-۱})(۳)=f(f^{-۱}(۳))=f(۲)=۳\\(fof^{-۱})(۵)=f(f^{-۱}(۵))=f(۳)=۵\end{cases}\to fof^{-۱}=\{(۴,۴),(۳,۳),(۵,۵)\}$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ داریم :

$$\boxed{(fof^{-۱})(x)=x}$$

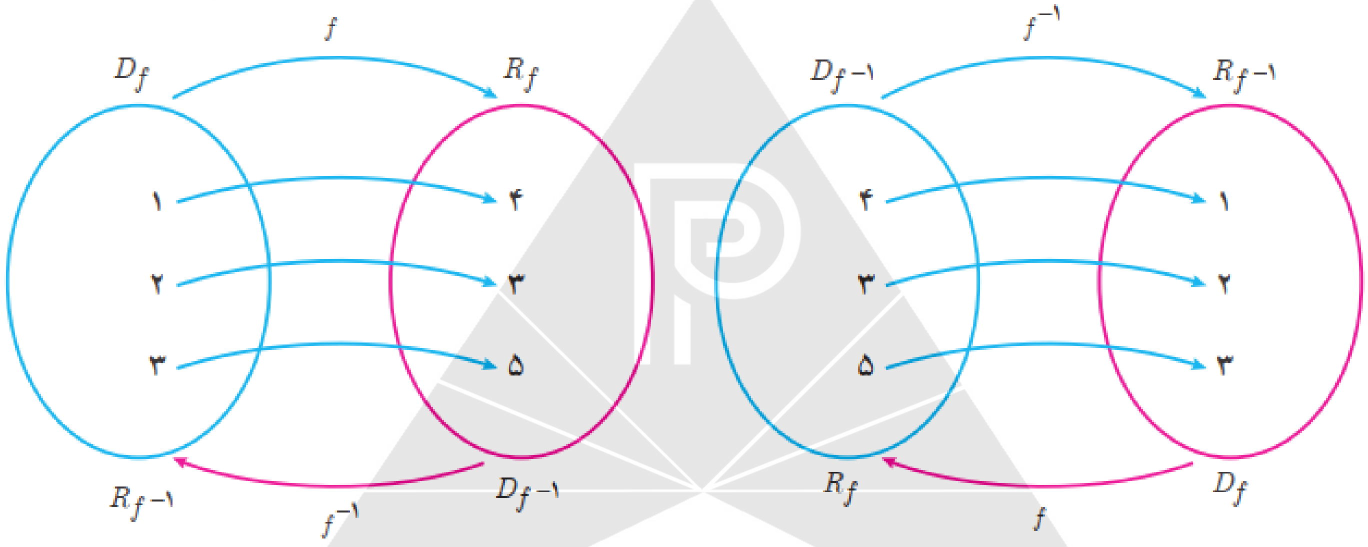
$$f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\} \qquad f^{-۱}=\{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳)\}$$

همچنین :

$$\begin{cases}(f^{-۱}of)(۱)=f^{-۱}(f(۱))=f^{-۱}(۴)=۱\\(f^{-۱}of)(۲)=f^{-۱}(f(۲))=f^{-۱}(۳)=۲\\(f^{-۱}of)(۳)=f^{-۱}(f(۳))=f^{-۱}(۵)=۳\end{cases}\rightarrow f^{-۱}of=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنهٔ تابع f داریم :

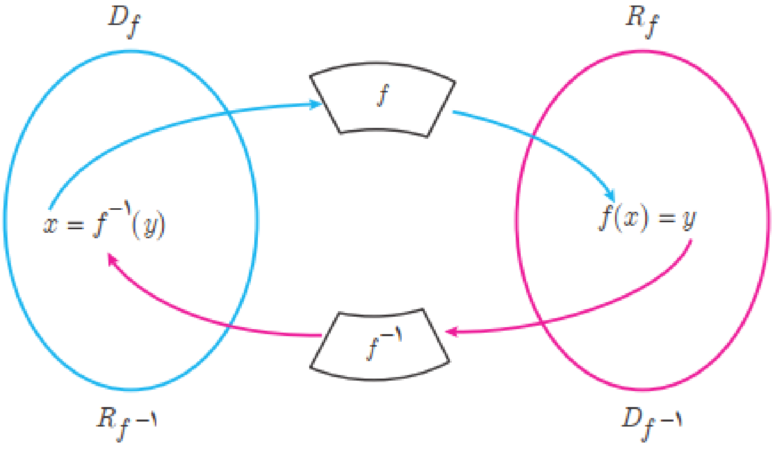
$$\boxed{(f^{-۱}of)(x)=x}$$



به‌طور کلی اگر f تابعی یک‌به‌یک و $f^{-۱}$ تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و $f^{-۱}$ را نشان می‌دهد.

$D_f = R_{f^{-1}}$

$R_f = D_{f^{-1}}$



اگر f تابعی وارون‌پذیر و $f^{-۱}$ وارون آن باشد، همواره داریم :

$$f(f^{-۱}(x)) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-۱}}$$

$$f^{-۱}(f(x)) = x \quad ; \quad x \in D_f$$

نکته :

$$f(f^{-1}(x)) \neq f^{-1}(f(x))$$

با توجه به آنچه که دیدیم می‌توان گفت اگر دو تابع f و g به گونه‌ای باشند که :

الف) $(fog)(x) = x \;;\; x \in D_g$

ب) $(gof)(x) = x \;;\; x \in D_f$

آنگاه توابع f و g وارون یکدیگرند.

مثال : نشان دهید توابع f و g وارون یکدیگرند.

$$f(x) = ۳x - ۴$$

$$g(x) = \frac{x+۴}{۳}$$

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی است، یعنی :

$x + \cancel{٤ - ٤} \; ۰$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = ۳g(x) - ۴ = \cancel{۳}\left(\frac{x+۴}{\cancel{۳}}\right) - ۴ = x \qquad (x \in D_g)$$

همچنین :

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+۴}{۳} = \frac{۳x \cancel{- ۴ + ۴}}{۳} = x \qquad (x \in D_f)$$

۰

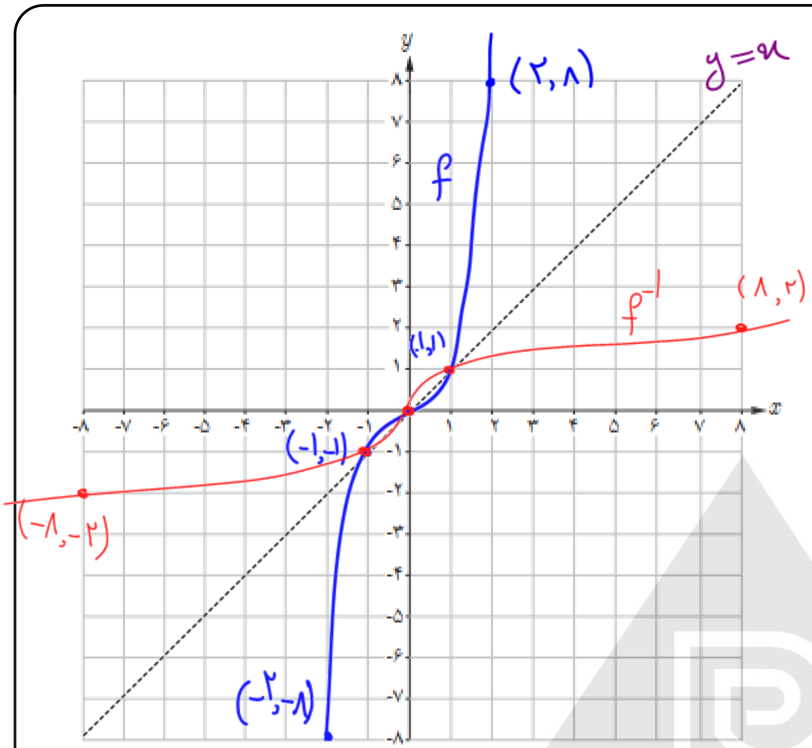
$$\frac{\cancel{۳}x}{\cancel{۳}} = x$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y = f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.[۱]

کار در کلاس

آیا تابع $f(x) = x^۳$ یک به یک است؟ چرا؟ در دستگاه مختصات زیر نمودار تابع $f(x) = x^۳$ و وارون آن را رسم کنید. ضابطهٔ تابع وارون چیست؟ بله . هر خط موازی محور x ها رسم کنیم حداکثر در یک نقطه قطع می کند



$$y = x^{۳}$$

$$\sqrt[۳]{y} = \sqrt[۳]{x^{۳}}$$

$$x = \sqrt[۳]{y}$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \sqrt[۳]{x}}$$

$$x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = -۳$$

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{\underline{x+۳}}$ ، دامنه و برد توابع f و f^{-1} را به‌دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید، ضابطهٔ f^{-1} را نیز به‌دست آورید.

تابع f یک‌به‌یک است، بنابراین دارای وارون است.

$$\begin{cases} D_f = [-۳, +\infty) \\ R_f = [۰, +\infty) \end{cases} \qquad \begin{cases} D_{f^{-1}} = [۰, +\infty) \\ R_{f^{-1}} = [-۳, +\infty) \end{cases}$$

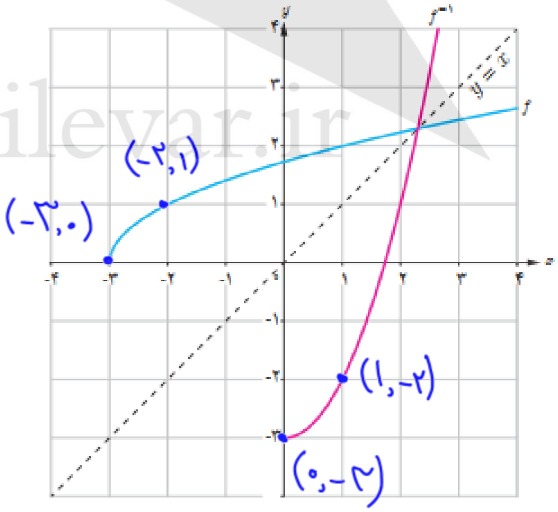
$$y^{۲} = (\sqrt{x+۳})^{۲}$$

$$y^{۲} = x + ۳$$

$$x = y^{۲} - ۳$$

$$f^{-1}(y) = y^{۲} - ۳$$

$$f^{-1}(x) = x^{۲} - ۳$$

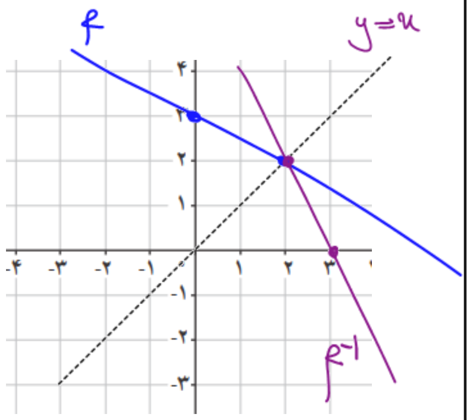


کار در کلاس

ضابطهٔ تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.

الف) $f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳$

۰	۲
۳	۲



$D_f=\mathbb{R}$ $\quad D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

$R=\mathbb{R}$ $\quad R_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

$y=-\frac{۱}{۲}x+۳ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x=-y+۳ \Rightarrow x=-۲y+۶$

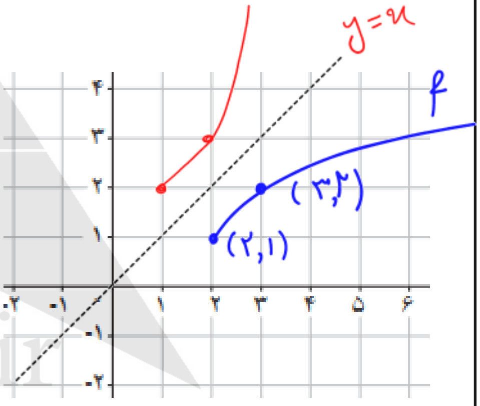
$f^{-1}(x)=-۲x+۶$

ب) $g(x)=۱+\sqrt{x-۲}$ $\quad x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$

x	۲	۳
y	۱	۲

$D_f=[۲,+\infty)$ $\quad D_{f^{-1}}=[۱,+\infty)$

$R_f=[۱,+\infty)$ $\quad R_{f^{-1}}=[۲,+\infty)$

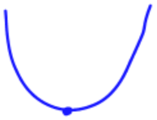


$y=۱+\sqrt{x-۲}$

$(y-۱)^۲=(\sqrt{x-۲})^۲ \Rightarrow (y-۱)^۲=x-۲ \Rightarrow (y-۱)^۲+۲=x$

$f^{-1}(x)=(x-۱)^۲+۲$

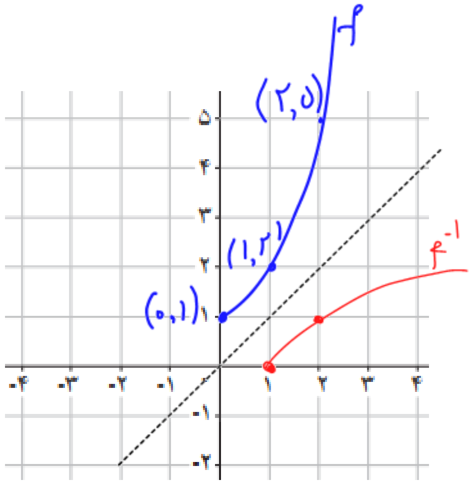
پ) $h(x)=x^۲+۱$



$x=\frac{-b}{۲a}=۰$

$D_f=[۰,+\infty)$ $\quad D_{f^{-1}}=[۱,+\infty)$

$R_f=[۱,+\infty)$ $\quad R_{f^{-1}}=[۰,+\infty)$

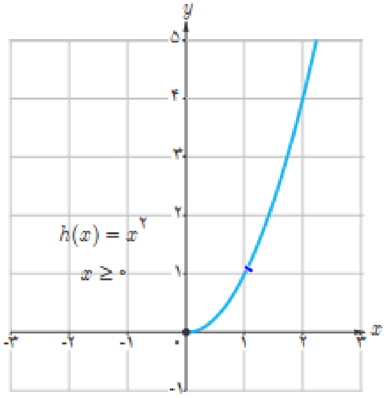


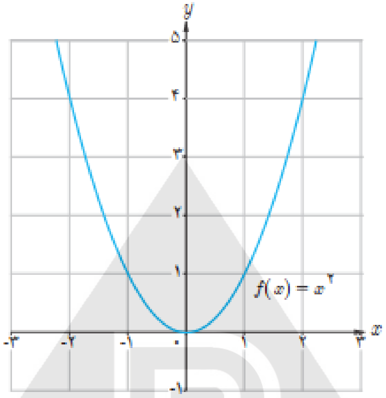
$y=x^۲+۱ \Rightarrow \sqrt{y-۱}=\sqrt{x^۲} \Rightarrow \sqrt{y-۱}=\overset{\oplus}{|x|}$

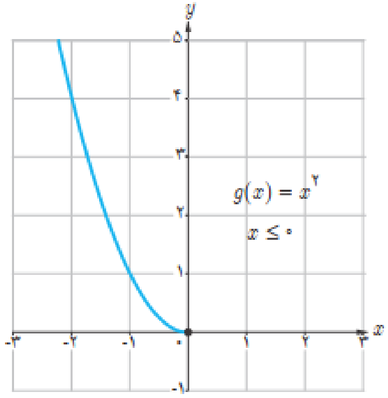
$\Rightarrow \sqrt{y-۱}=x \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=\sqrt{x-۱}}$

محدود کردن دامنه تابع

از سال قبل می‌دانیم که اگر تابعی یک‌به‌یک نباشد وارون‌پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنهٔ یک تابع، می‌توان تابعی یک‌به‌یک به‌دست آورد. به‌طور مثال تابع $f(x) = x^۲$ یک‌به‌یک نیست ولی با محدود کردن دامنهٔ تابع به بازهٔ $[۰ , +\infty)$ و یا $(-\infty , ۰]$ یا زیرمجموعه‌هایی از این دو بازه، تابعی یک‌به‌یک به‌دست می‌آید.







مثال : نمودار تابع $h(x)= x^۲ - ۲x + ۲$ نشان می‌دهد که این تابع یک‌به‌یک نیست. اما می‌توان با محدود کردن دامنهٔ این تابع آن را طوری محدود کرد که تابعی یک‌به‌یک به‌دست آید و سپس وارون آن را محاسبه کرد.

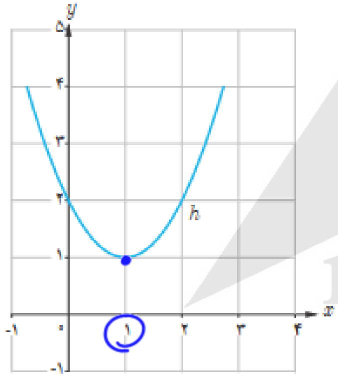
$x^۲-۲x+۱ + ۱$

$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{۲}{۲} = ۱$

$h(x)=x^۲-۲x+۲=(x-۱)^۲+۱$

مثلاً دامنهٔ تابع h را به بازهٔ $[۱,+\infty)$ محدود می‌کنیم. ضابطهٔ تابع جدید که آن را $k(x)$ می‌نامیم با ضابطهٔ $h(x)$ برابر است اما دامنهٔ تابع h مجموعهٔ اعداد حقیقی و دامنهٔ تابع k بازهٔ $[۱ , +\infty)$ است.

در تابع k، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم :



$k(x) = (x-۱)^۲ + ۱$

$y=(x-۱)^۲+۱$

$(x-۱)^۲ = y-۱$

$x-۱=\pm\sqrt{y-۱}$

$x = \pm\sqrt{y-۱}+۱$

$k^{-۱}(x) = \sqrt{x-۱}+۱$

$\sqrt{y-۱} = \sqrt{(x-۱)^۲}$

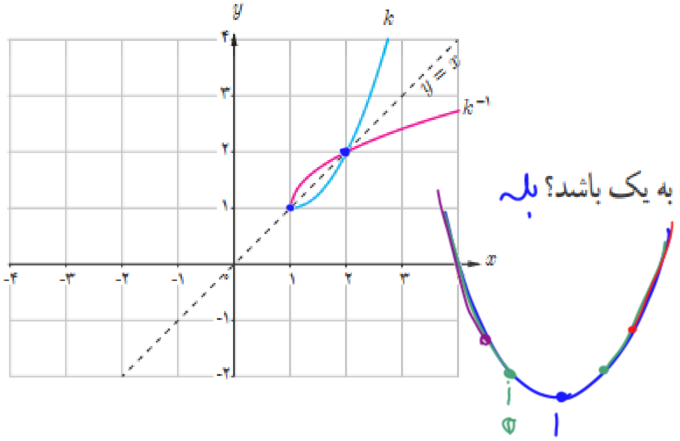
$\sqrt{y-۱} = |x-۱|$ $\oplus$

$\sqrt{y-۱} = x-۱$

$۱+\sqrt{y-۱} = x$

جواب منفی غیرقابل قبول است. (چرا؟)

نمودار توابع h و $h^{-۱}$ به‌صورت روبه‌رو است :



آیا به جز بازهٔ $[۱,+\infty)$، بازهٔ دیگری می‌توان یافت که تابع h در آن یک به یک باشد؟ بلی

$[۲,+\infty)$

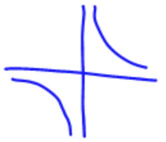
$[۳,+\infty)$

$[۵۰,+\infty)$

$(-\infty,۰)$

$(-\infty,-۱)$

مثال ۹ : ضابطه وارون تابع $y = \frac{۲x-۱}{x+۱}$ را بدست آورید.



یک به یک است

$$\frac{y}{۱} = \frac{۲x-۱}{x+۱} \Rightarrow yx + y = ۲x - ۱ \Rightarrow$$

$$yx - ۲x = -y - ۱ \Rightarrow x(y-۲) = -y - ۱ \Rightarrow$$

$$x = \frac{-y-۱}{y-۲} \Rightarrow \boxed{f^{-۱}(x) = \frac{-x-۱}{x-۲}}$$

نکته : وارون تابع هموگرافیک :
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

مثال ۱۰ : ضابطه وارون تابع $y = x^{۲} - ۶x$ را بدست آورید.

$$D = (-\infty, ۳]$$

۰

$$y = (x^{۲} - ۶x + ۹) - ۹$$

$$y = (x-۳)^{۲} - ۹ \Rightarrow \sqrt{y+۹} = \sqrt{(x-۳)^{۲}}$$

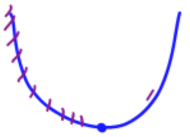
$$\sqrt{y+۹} = |x-۳| \Rightarrow \sqrt{y+۹} = -x + ۳$$

⊖

$$\Rightarrow x = ۳ - \sqrt{y+۹} \Rightarrow \boxed{f^{-۱}(x) = ۳ - \sqrt{x+۹}}$$

$\frac{۶}{۲} = ۳ \rightarrow ۳^{۲} = ۹$

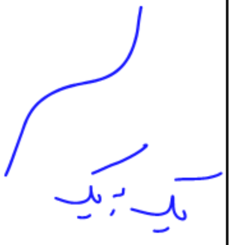
$\boxed{\left(\frac{b}{۲}\right)^{۲}}$



$x = \frac{۶}{۲} = ۳$

مثال ۱۱ : ضابطه وارون تابع $y = x^۳ - ۳x^۲ + ۳x + ۵$ را بدست آورید.

$\overset{\downarrow}{۵}$ $-۱+۶$



$y=(x^۳-۳x^۲+۳x-۱)+۶$

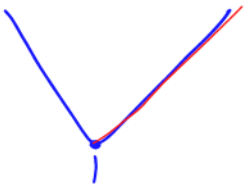
$y=(x-۱)^۳+۶$

$\sqrt[۳]{y-۶}=\sqrt[۳]{(x-۱)^۳} \Rightarrow \sqrt[۳]{y-۶}=x-۱ \Rightarrow x=۱+\sqrt[۳]{y-۶}$

$f^{-1}(x)=۱+\sqrt[۳]{x-۶}$

مثال ۱۲ : ضابطه وارون تابع $y = |\underbrace{x-۱}| + ۲$ را بدست آورید.

$x-۱=۰$
$x=۱$



$D=[۱,+\infty)$

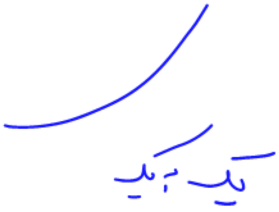
$y=|\underset{\oplus}{x-۱}|+۲$

$y=x-۱+۲ \Rightarrow y=x+۱ \Rightarrow x=y-۱$

$\boxed{f^{-1}(x)=x-۱}$

مثال ۱۳ : ضابطه وارون تابع $y = ۲^{۲x+۱} + ۱$ را بدست آورید.

$\boxed{A^x=B \Rightarrow x=\log_A B}$



$y=۲^{۲x+۱}+۱$

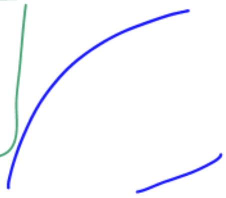
$y-۱=۲^{۲x+۱}$

$۲x+۱=\log_۲(y-۱) \Rightarrow ۲x=-۱+\log_۲(y-۱)$

$x=\dfrac{-۱+\log_۲(y-۱)}{۲} \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=\dfrac{-۱+\log(x-۱)}{۲}}$

مثال ۱۴ : ضابطه وارون تابع $y=\log_{۳}(۲x-۳)$ را بدست آورید.

$$\boxed{\log_{B} A = x \Rightarrow B^{x} = A}$$



یک به یک

$$y=\log_{۲}(۲x-۳)$$

$$۲x-۳=۲^{y}$$

$$۲x=۲^{y}+۳$$

$$x=\frac{۲^{y}+۳}{۲} \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=\frac{۲^{x}+۳}{۲}}$$

تمرین

① ضابطهٔ تابع وارون توابع یک‌به‌یک زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{-۸x+۳}{۲}$

$$y=\frac{-۸x+۳}{۲} \Rightarrow ۲y=-۸x+۳ \Rightarrow ۸x=-۲y+۳ \Rightarrow x=\frac{-۲y+۳}{۸}$$

$$\boxed{f^{-1}(x)=\frac{-۲x+۳}{۸}}$$

ب) $g(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}$

$$y=-۵-\sqrt{۳x+۱}$$

$$(y+۵)^{۲}=(-\sqrt{۳x+۱})^{۲}$$

$$(y+۵)^{۲}=۳x+۱$$

$$(y+۵)^{۲}-۱=۳x \Rightarrow x=\frac{(y+۵)^{۲}}{۳}-\frac{۱}{۳} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{(x+۵)^{۲}}{۳}-\frac{۱}{۳}$$

② در مورد هر یک از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x)=\frac{-۷}{۲}x-۳$ ، $g(x)=-\frac{۲x+۶}{۷}$

$(f\circ g)(x)=x$, $g\circ f(x)=x$

$$f(g(x))=\frac{-۷}{۲}g(x)-۳=\cancel{-}\frac{\cancel{۷}}{۲}\left(\cancel{-}\frac{۲x+۶}{\cancel{۷}}\right)-۳=\frac{۲x+۶}{۲}-۳=\frac{\cancel{۲}(x+۳)}{\cancel{۲}}-۳$$

$$x+\cancelto{۰}{۳-۳}=x\Rightarrow(f\circ g)(x)=x$$

$$g(f(x))=-\frac{۲f(x)+۶}{۷}=-\frac{۲\left(\frac{-۷}{۲}x-۳\right)+۶}{۷}=-\frac{-۷x\cancelto{۰}{-۶+۶}}{۷}$$

$$-\frac{-\cancel{۷}x}{\cancel{۷}}=x\Rightarrow(g\circ f)(x)=x$$

ب) $f(x)=-\sqrt{x-۸}$ ، $g(x)=۸+x^۲\ ;\ x\leq۰$

$$f(g(x))=-\sqrt{g(x)-۸}=-\sqrt{\cancel{۸}+x^۲-\cancel{۸}}=-\sqrt{x^۲}=-|x|\xrightarrow{x\leq۰}(-x)=x$$

$$g(f(x))=۸+(f(x))^۲=۸+(-\sqrt{x-۸})^۲=\cancel{۸}+x-\cancel{۸}=x$$

فارنهایت

سانتی‌گراد

③ رابطهٔ بین درجهٔ سانتی‌گراد و فارنهایت که برای اندازه‌گیری دما استفاده می‌شوند به‌صورت $f(x)=\frac{۹}{۵}x+۳۲$ است که در آن x میزان درجهٔ سانتی‌گراد و $f(x)$ میزان درجهٔ فارنهایت است. $f^{-۱}(x)$ را به دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می‌دهد.

$$y=\frac{۹}{۵}x+۳۲\Rightarrow y-۳۲=\frac{۹}{۵}x\xrightarrow{\times۵}۵y-۱۶۰=۹x\xrightarrow{\div۹}$$

$$\frac{۵}{۹}y-\frac{۱۶۰}{۹}=x\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{۵}{۹}x-\frac{۱۶۰}{۹}$$

سانتی‌گراد

فارنهایت

سانتی‌گراد را برحسب فارنهایت نشان می‌دهد

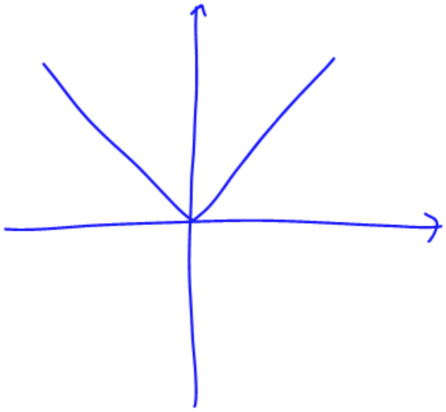
۴ توابع زیر یک‌به‌یک نیستند. با محدود کردن دامنهٔ آنها توابعی یک‌به‌یک بسازید و ضابطهٔ وارون آنها را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=|x|$

روش اول :

$D_f=[0,+\infty)$

$y=|x| \Rightarrow y=x \Rightarrow f^{-1}(x)=x$



$D_f=(-\infty,0]$

روش دوم :

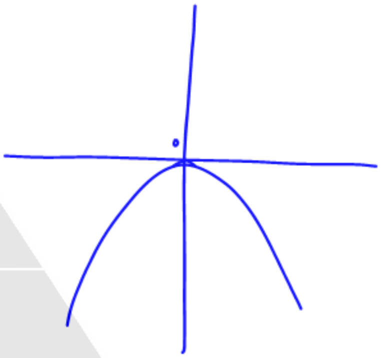
$y=|x| \longrightarrow y=-x \longrightarrow x=-y \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=-x}$

ب) $g(x)=-x^2$

$D=[0,+\infty)$

$y=-x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{-y} \Rightarrow |x|=\sqrt{-y}$

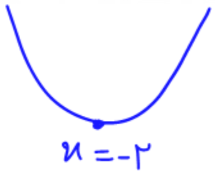
$x=\sqrt{-y} \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=\sqrt{-x}}$



پ) $h(x)=x^2+4x+3+1-1$

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2(1)}=-2$

$(\frac{4}{2})^2$



$D=[-2,+\infty)$

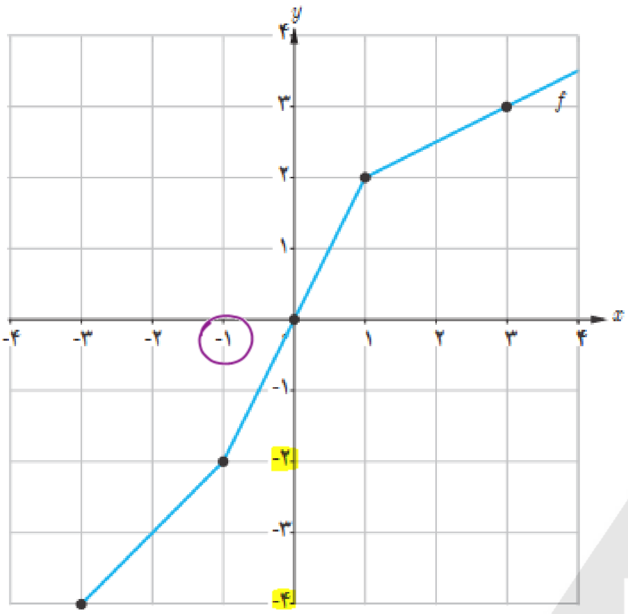
$y=(x^2+4x+4)-1$

$\oplus$

$y=(x+2)^2-1 \Rightarrow \sqrt{y+1}=\sqrt{(x+2)^2} \Rightarrow \sqrt{y+1}=|x+2|$

$\Rightarrow \sqrt{y+1}=x+2 \Rightarrow \sqrt{y+1}-2=x \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}-2}$

۵ از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید.



x	-۴	-۲	۲	۳
$f^{-1}(x)$	-3	-1	1	3

x	-3	-1	1	3
$f(x)$	-4	-2	2	3

$f^{-1}(-4)= \bigcirc \Rightarrow f(\boxed{-3})=-4$

$f^{-1}(-2)= \bigcirc \Rightarrow f(\boxed{-1})=-2$

۶ با محدود کردن دامنهٔ تابع $f(x)=x^2-4x+5$، یک تابع یک‌به‌یک به‌دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-4)}{2(1)}=2$

$D_f=[2,+\infty)$ $\quad D_{f^{-1}}=[1,+\infty)$

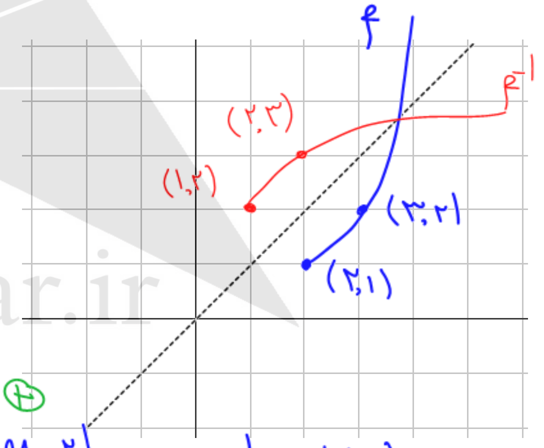
$R_f=[1,+\infty)$ $\quad R_{f^{-1}}=[2,+\infty)$

$f(x)=x^2-\underline{4}x+\underbrace{5}_{4+1}$ $\qquad (\frac{b}{2})^2=(\frac{4}{2})^2=4$

$y=(x^2-4x+4)+1$

$y=(x-2)^2+1 \Rightarrow \sqrt{y-1}=\sqrt{(x-2)^2} \Rightarrow \sqrt{y-1}=|\overset{\oplus}{x-2}|$

$\sqrt{y-1}=x-2 \Rightarrow \sqrt{y-1}+2=x \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}+2}$



$S(2,1)$

۷ اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^{۳}$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

$y=\frac{۱}{۸}x-۳ \Rightarrow y+۳=\frac{۱}{۸}x \Rightarrow ۸y+۲۴=x \rightarrow f^{-1}(x)=۸x+۲۴$

$\sqrt[۳]{y}=\sqrt[۳]{x^{۳}} \Rightarrow x=\sqrt[۳]{y} \Rightarrow g^{-1}(x)=\sqrt[۳]{x}$

الف) $(fog)^{-1}(۵)=۴$

$f(g(x))=\frac{۱}{۸}g(x)-۳=\frac{۱}{۸}x^{۳}-۳=۵ \Rightarrow \frac{۱}{۸}x^{۳}=۸ \Rightarrow x^{۳}=۶۴ \Rightarrow x=۴$

$(fog)^{-1}(۵)=☁ \Rightarrow (fog)(☁)=۵$

ب) $(f^{-1}of^{-1})(۶)=f^{-1}(f^{-1}(۶))=f^{-1}(۷۲)=۸\times۷۲+۲۴=۶۰۰$

$f^{-1}(۶)=۸\times۶+۲۴=۷۲$

پ) $(g^{-1}of^{-1})(۵)=g^{-1}(f^{-1}(۵))=g^{-1}(۶۴)=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$

$f^{-1}(۵)=۸\times۵+۲۴=۶۴$

نکته : $(fog)^{-1}(x)=g^{-1}of^{-1}(x)$

نمونه سوالات نهایی

۱- ضابطه و دامنه تابع وارون تابع زیر را به دست آورید. (دی ۱۴۰۲ – ۱/۵ نمره)

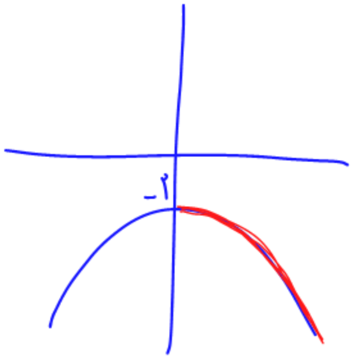
$$f(x) = -x^{۲} - ۲; x \geq ۰$$

$R_f = (-\infty, ۲]$

$y = -x^{۲} - ۲ \Rightarrow \sqrt{x^{۲}} = \sqrt{-y-۲}$

$\Rightarrow |x| = \sqrt{-y-۲}$

$x = \sqrt{-y-۲} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{-x-۲}$



$D_{f^{-1}} = (-\infty, -۲]$

۲- در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید (خرداد ۱۴۰۲ –۰/۲۵ نمره)

اگر $f(x) = ۳ + \sqrt{۲x - ۱}$ باشد، مقدار $(f o f^{-۱})(۵)$ برابر با ....۵.......... است.

$(f o f^{-1})(x) = x$

سوالات تکمیلی

۱- وارون تابع $y = x^{۳} - x + ۱$ از کدام نقطه عبور می کند؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۱)

~~الف~~ : $(-۱,۲)$ ✓ ب : $(\frac{۵}{۸},\frac{۱}{۲})$ ~~ج~~ : $(۱,۲)$ د : $(-\frac{۱}{۲} و -\frac{۱۱}{۸})$

$(۲,-۱) \in f$

$(\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۸}) \in f$

$(۲,۱) \in f$

$۸-۲+۱=۷$

$\frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۸}$

۲- محل تلاقی تابع $f(x) = ax - x^3 + b$ با وارون آن نقطه $\left(-1 , \frac{1}{2}\right)$ است . مقادیر b و a را بیابید.

$$\left(-1,\frac{1}{2}\right)\in f \longrightarrow -a+1+b=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} -a+b=-\frac{1}{2} \\ \frac{a}{2}+b=-\frac{7}{8} \end{cases} \quad \bigcirc\!\!\!-$$

$$\left(-1,\frac{1}{2}\right)\in f^{-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2},-1\right)\in f \to \frac{a}{2}-\frac{1}{8}+b=-1 \Rightarrow \frac{a}{2}+b=-\frac{7}{8}$$

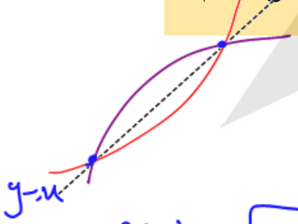
$$-\frac{\cancel{3}}{2}a=+\frac{\cancel{3}}{8} \Rightarrow a=-\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4}+b=-\frac{1}{2} \Rightarrow b=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$$

$$b=-\frac{3}{4}$$

نکته : اگر f یک تابع اکیدا صعودی باشد، در صورتی که f^{-1} و f در نقاطی همدیگر را قطع کنند، این نقاط حتما روی نیمساز ربع اول و سوم است.

$y=x$

نتیجه : در این حالت برای یافتن نقاط تقاطع f^{-1} و f کافی است f را با نیمساز ربع اول و سوم قطع دهیم.



۳- نقطه های تلاقی تقاطع وارون تابع $f(x) = \sqrt{4x - 3}$ با خود تابع را بیابید.

$$f(x)=\sqrt{4x-3}$$

$$\left(\sqrt{4x-3}\right)^2=(x)^2 \Rightarrow 4x-3=x^2$$

$$x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x-3)(x-1)=0 \begin{cases} x=3 \Rightarrow y=3 \\ x=1 \Rightarrow y=1 \end{cases}$$