

بررسی سطر به سطر کتاب درسی

ریاضی (۳)

رشته علوم تجربی

پایه دوازدهم

دوره دوم متوسطه

حل گام به گام کتاب درسی شامل :

- حل تمامی فعالیت های کتاب
- حل تمامی کار در کلاس ها و تمرینات کتاب
- حل مثالهای خارج از کتاب
- حل نمونه سوالات نهایی
- حل سوالات تکمیلی

تهیه کننده : رقیه پيله ور – دبیر ریاضی ناحیه دو اردبیل



برای تماشای ویدیوهای آموزشی ریاضی ۳ تجربی (همین جزوه) می توانید به سایت

math-pilevar.ir یا math-pilevar.com مراجعه کنید.



فصل ۱ تابع

توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

ترکیب توابع

تابع وارون

درس اول

درس دوم

درس سوم

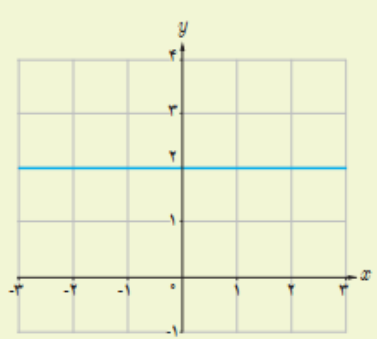
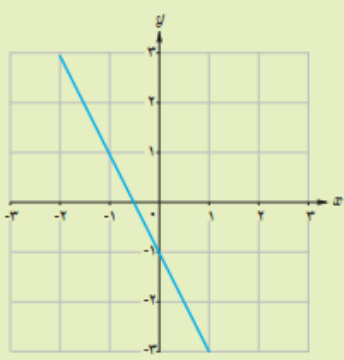
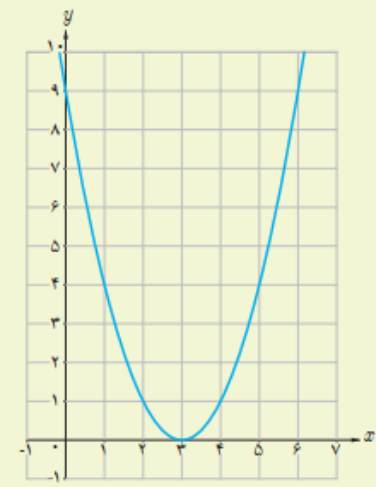
توابع چند جمله‌ای:

در سال‌های گذشته با تابع خطی آشنا شدیم. هر تابع با ضابطه $f(x) = ax + b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a = 0$ ، تابع به صورت $f(x) = b$ در می‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامیم. توابع ثابت و توابع خطی، مثال‌هایی از توابع چند جمله‌ای با درجه‌های ۰ و ۱ هستند.

هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را که در آن $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ باشد، یک تابع چند جمله‌ای از درجه n می‌نامیم. دامنه توابع چند جمله‌ای مجموعه اعداد حقیقی است. مثال: توابع زیر نمونه‌ای از توابع چند جمله‌ای به ترتیب از درجه ۱، ۲، ۳ و ۵ هستند.

$$y = 3x + 5, \quad y = -8x^2 + 2x - \frac{1}{2}, \quad y = \sqrt{2}x^3 - \frac{3}{4}x, \quad y = 2x^5 - 4x^3 + \sqrt{5}x^2$$

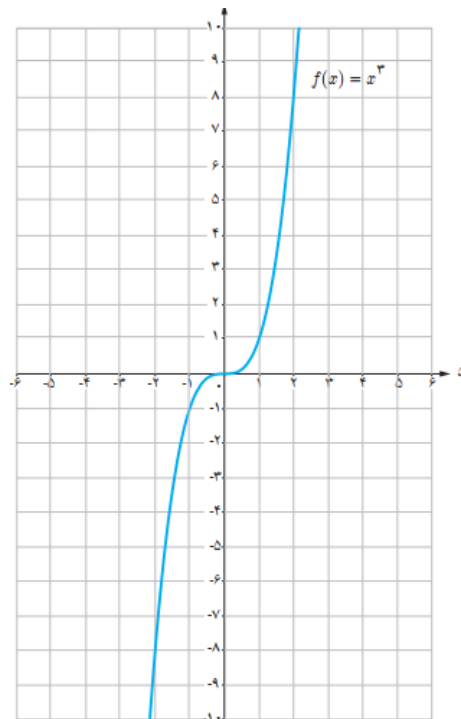
انواع توابع چند جمله‌ای که تا به حال با آنها آشنا شده‌ایم به صورت زیر است:

درجه تابع	۰	۱	۲
نام تابع	ثابت	خطی	درجه دوم
ضابطه کلی	$f(x) = b$	$f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$)	$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)
مثال	$f(x) = 2$ 	$f(x) = -2x - 1$ 	$f(x) = x^2 - 6x + 9$ 

تابع درجه ۳:

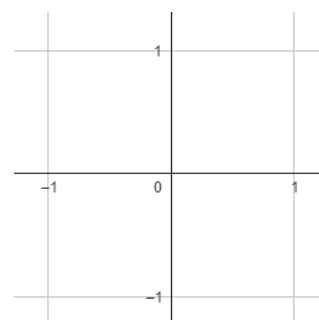
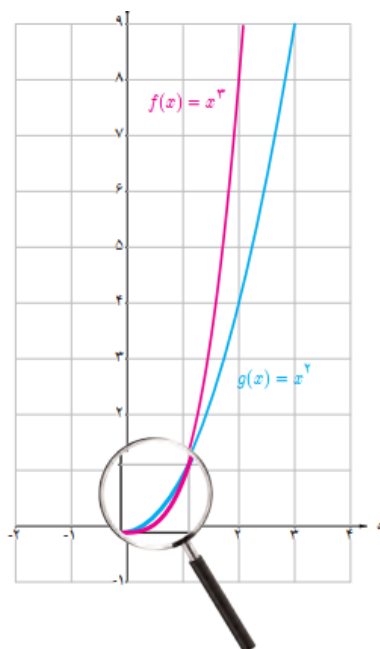
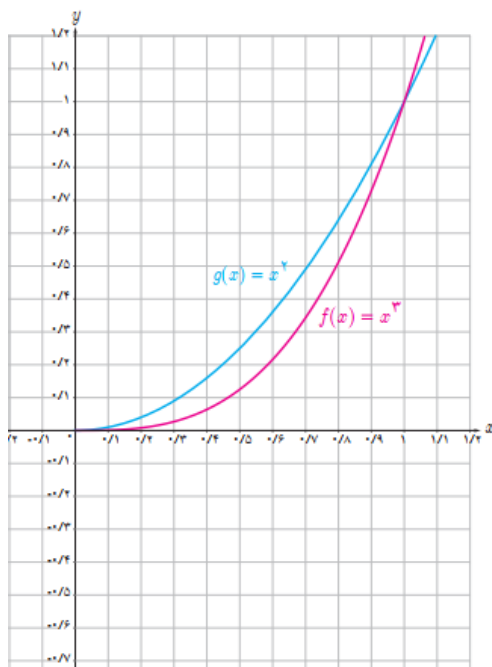
تابع چند جمله‌ای با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) یک تابع درجه ۳ است که در اینجا به طور خاص تابع $f(x) = x^3$ را بررسی می‌کنیم. دامنه و برد این تابع $\mathbb{R}$ است. ابتدا به کمک نقطه‌یابی نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:

x	$f(x) = x^3$
-۲	-۸
-۱	-۱
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
۰	۰
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
۱	۱
۲	۸



فعالیت

با توجه به نمودار توابع $f(x) = x^3$ و $g(x) = x^2$ که برای اعداد نامنفی رسم شده‌اند: الف) آیا برای تمام x های نامنفی، نمودار $f(x) = x^3$ بالای نمودار $g(x) = x^2$ قرار دارد؟ ب) نمودار این دو تابع را در بازه $[-1, 0]$ رسم کنید.



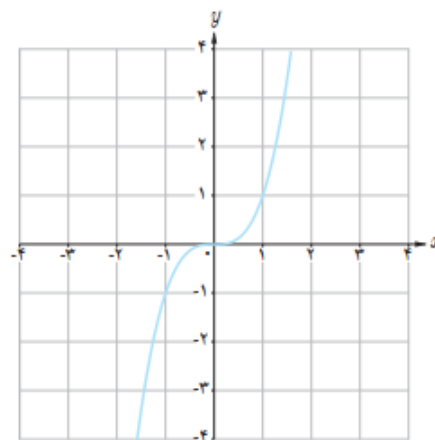
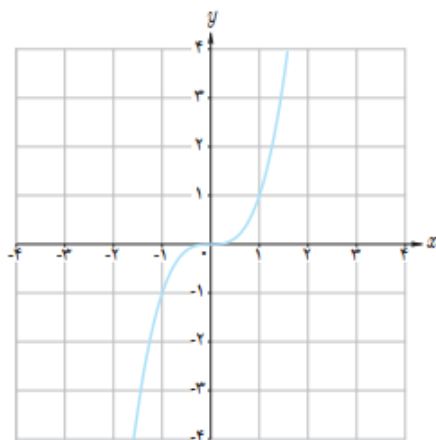
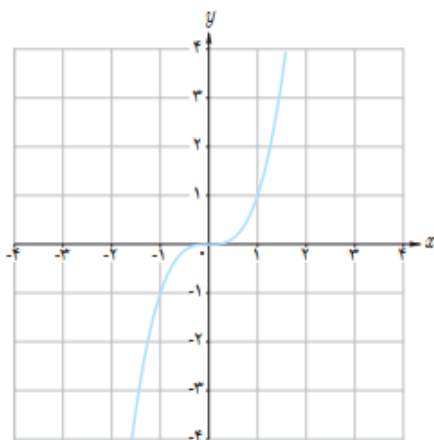
فعالیت

با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2$ ، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

الف) $y = -x^2 - 2$

ب) $y = (x + 2)^2$

پ) $y = -(x - 2)^2$



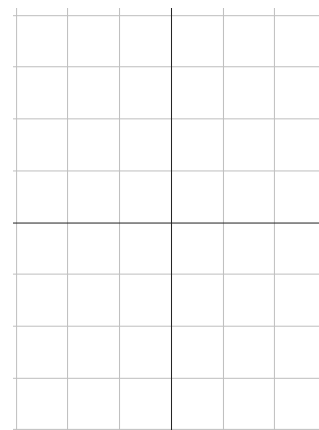
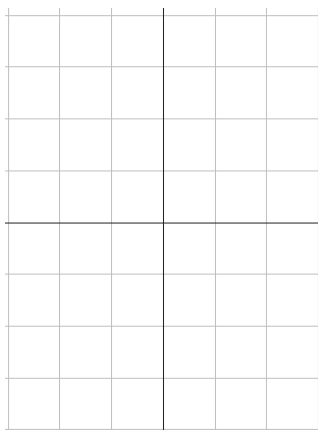
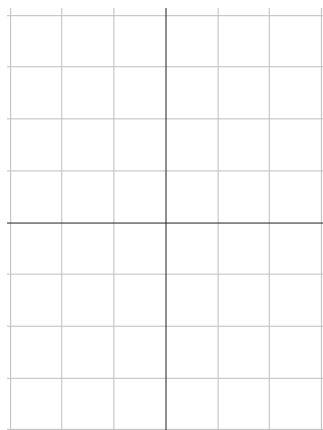
کار در کلاس

به کمک نمودار تابع $y = x^2$ ، ضابطه هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

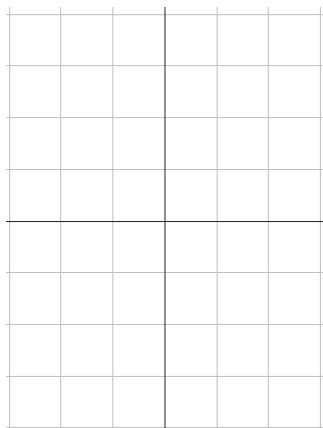
الف) $y = (x - 1)^2 + 2$

ب) $y = (x - 2)^2$

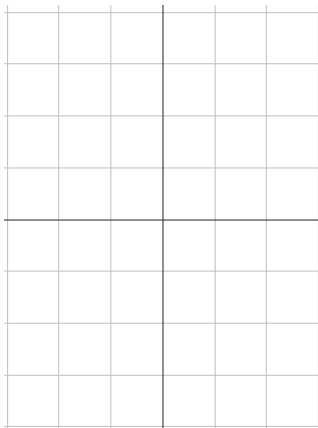
پ) $y = -x^2 + 1$



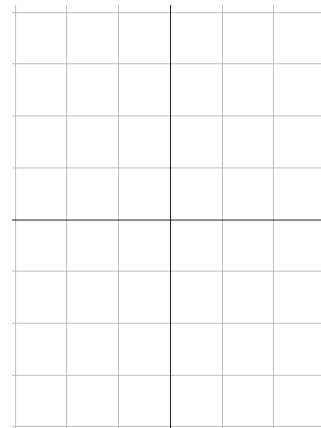
ت) $y = (x+1)^2 - 1$



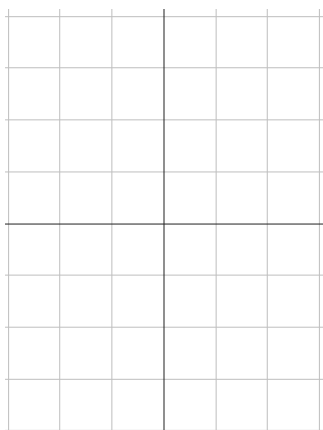
ث) $y = -x^2$



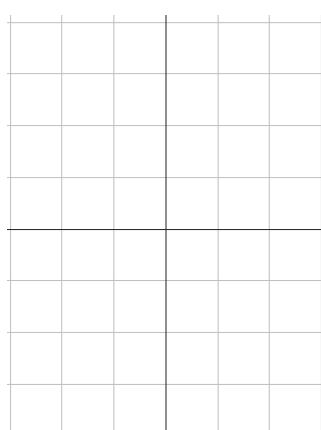
ج) $y = (x+1)^2$



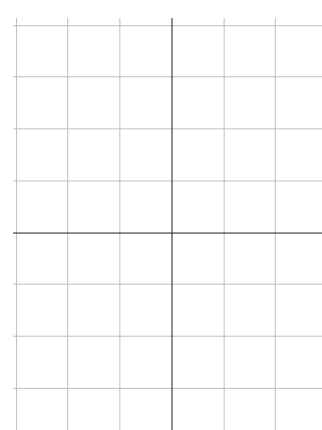
چ) $y = x^2 + 1$

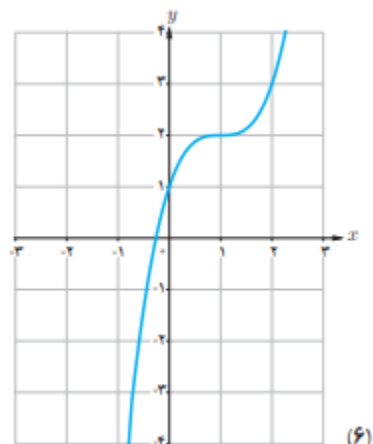
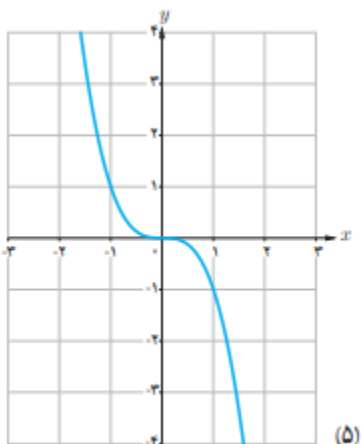
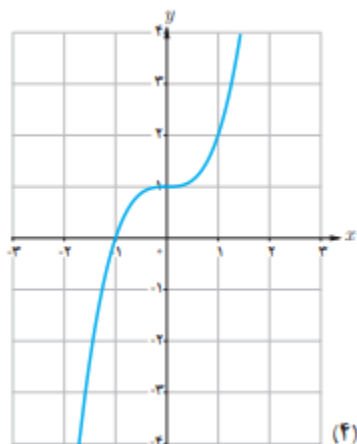
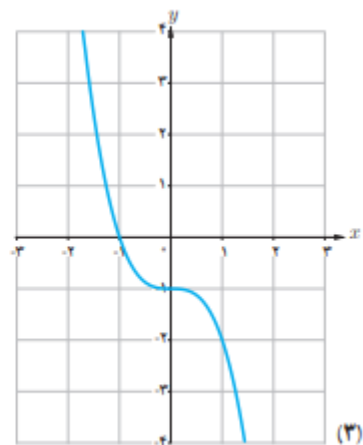
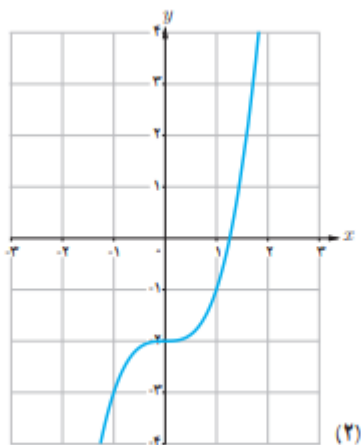
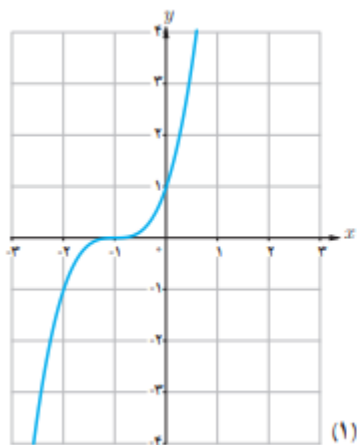


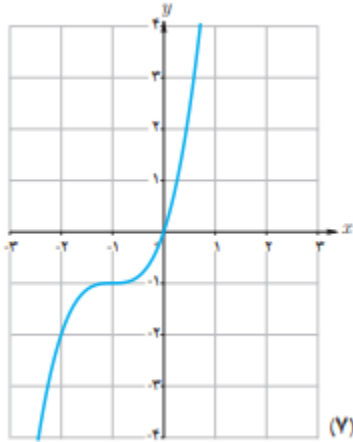
ح) $y = -x^2 - 1$



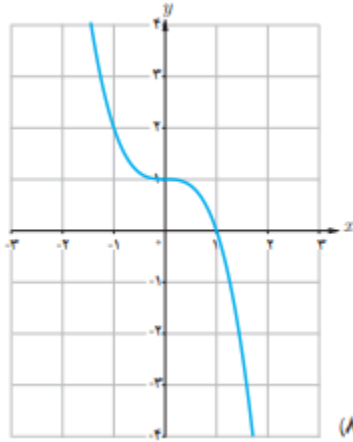
خ) $y = x^2 - 2$



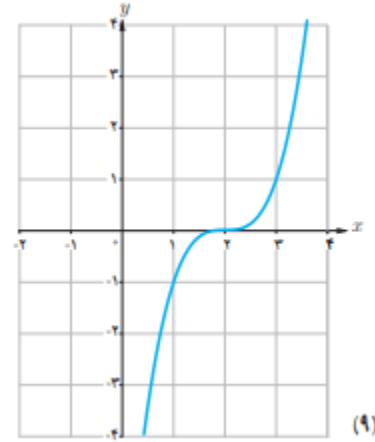




(V)



(A)

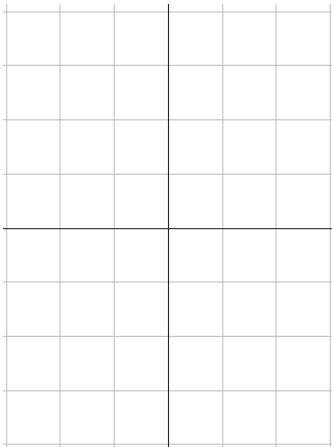


(B)

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

نکته: تبدیل به فرم استاندارد

مثال ۱: نمودار $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$ را رسم کنید.



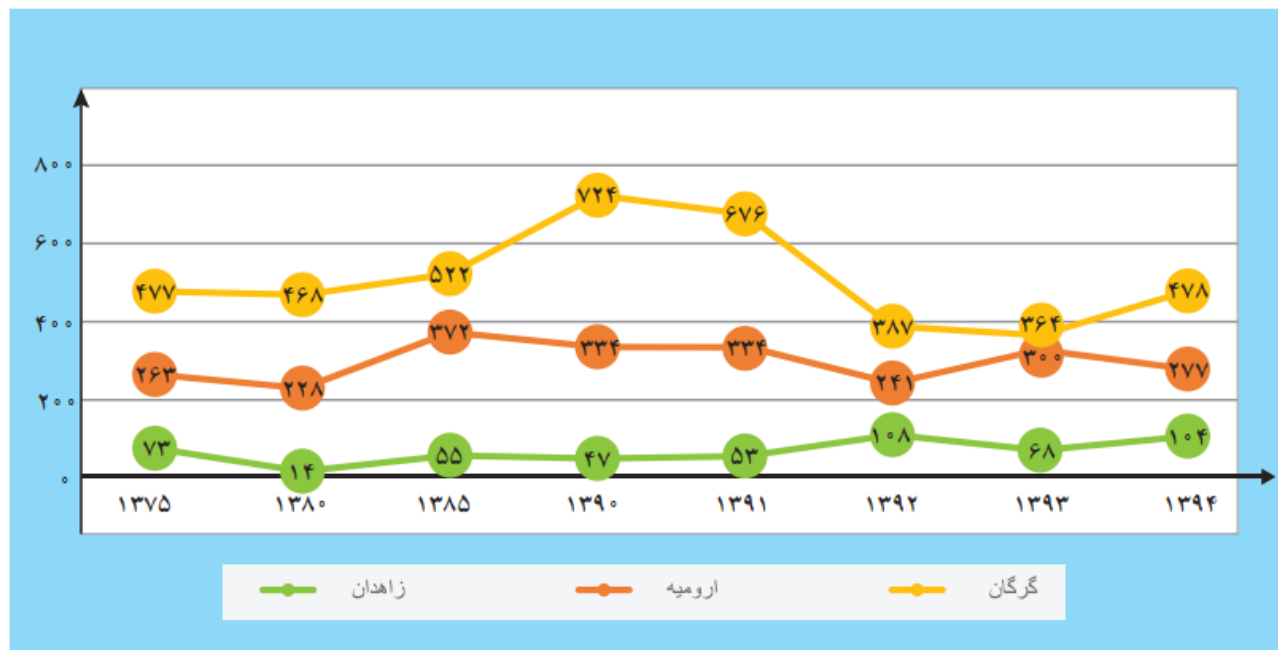
توابع صعودی و توابع نزولی:

فعالیت

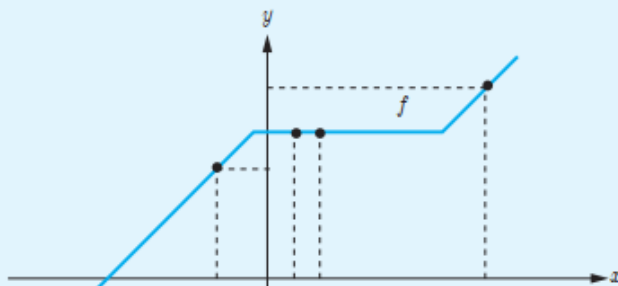
یکی از دغدغه‌های ما ایرانی‌ها در اکثر سال‌ها، بحث کاهش بارندگی در کشورمان است که خسارات بسیاری را به بار می‌آورد. در نمودار زیر میزان بارندگی سالانه سه شهر گرگان، زاهدان و ارومیه از سال ۱۳۷۵ تا سال ۱۳۹۴ (برحسب میلی‌متر) آورده شده است. به طور مثال در شهر ارومیه در سال ۸۵، میزان بارندگی ۳۷۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۳۳۴ میلی‌متر بوده است که روند نزولی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. همچنین در شهر گرگان در سال ۸۵، میزان بارندگی ۵۲۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۷۲۴ میلی‌متر بوده است که روند صعودی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) از سال ۷۵ تا ۹۱، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر گرگان روند صعودی داشته است؟

ب) از سال ۹۱ تا ۹۴، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر ارومیه روند نزولی داشته است؟

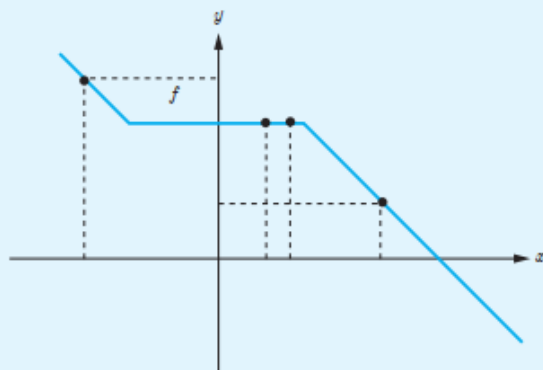


میزان بارندگی سالانه شهرهای گرگان، زاهدان و ارومیه (میلی‌متر)^۱



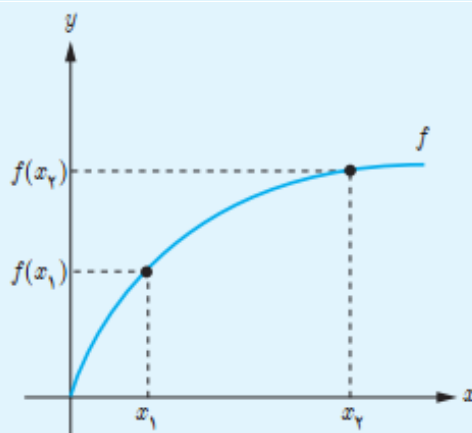
تابع صعودی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.



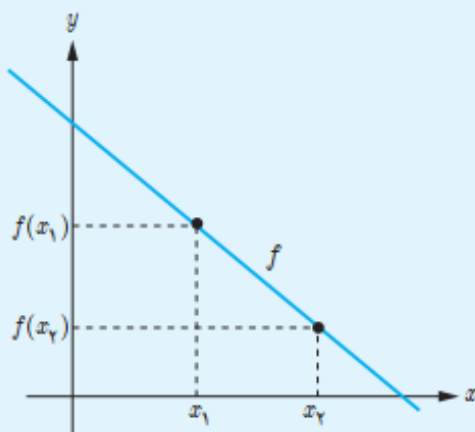
تابع نزولی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) \geq f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی نزولی می‌نامیم.



تابع اکیداً صعودی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.

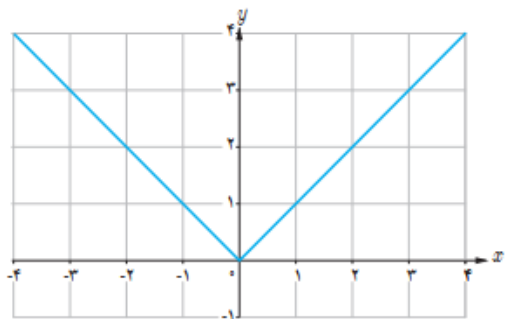


تابع اکیداً نزولی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.

تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

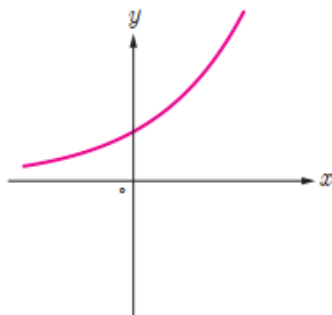
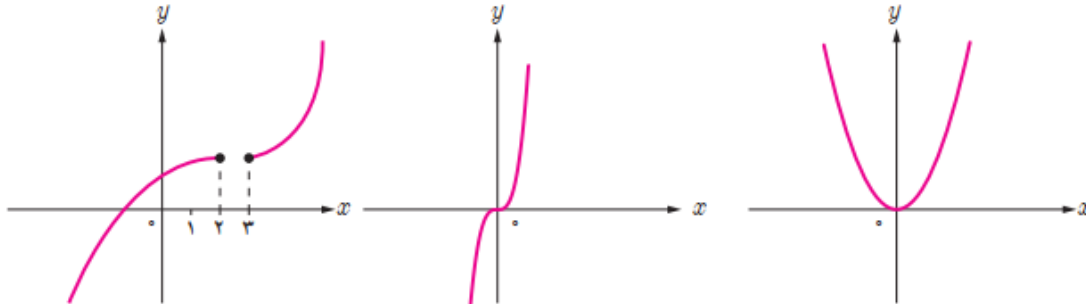
نکته: به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا می‌گوییم. همچنین به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گوییم. توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا هستند. آیا عکس این مطلب صحیح است؟ توضیح دهید.



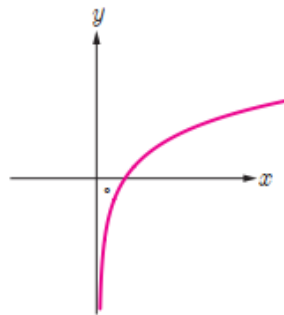
ممکن است تابعی در یک بازه صعودی (اکیداً صعودی) و در بازه دیگر نزولی (اکیداً نزولی) باشد.

مثال: تابع $f(x) = |x|$ در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی و در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است، اما در $\mathbb{R}$ نه صعودی است نه نزولی.

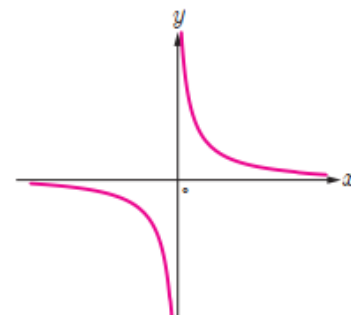
هر کدام از توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟



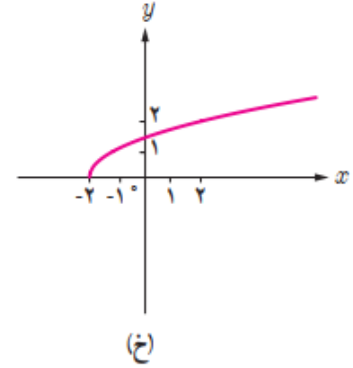
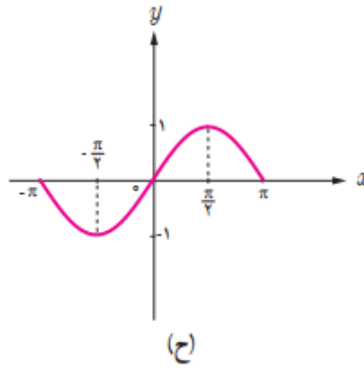
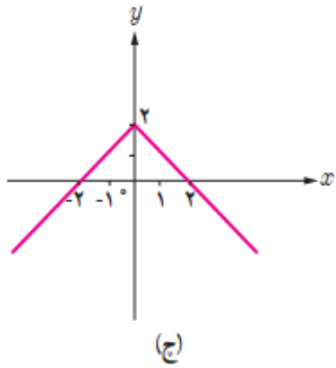
(ت)



(ث)

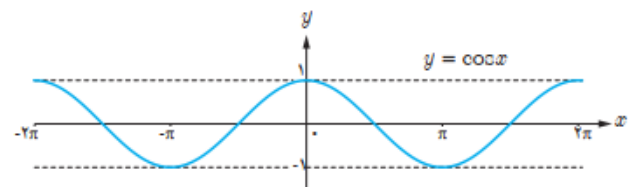
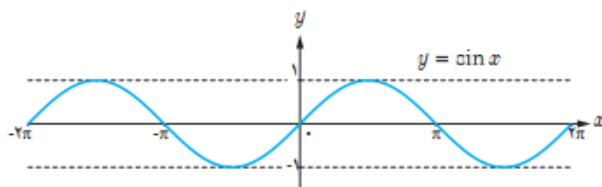


(ج)



کار در کلاس

نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم شده است. صعودی یا نزولی بودن آنها را در بازه‌های مشخص شده تعیین نمایید.



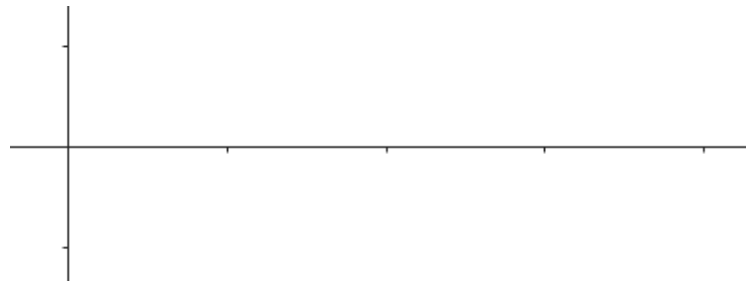
x	$[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$	$[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2}, 0]$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
$y = \sin x$					صعودی			

x	$[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$	$[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2}, 0]$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
$y = \cos x$							صعودی	

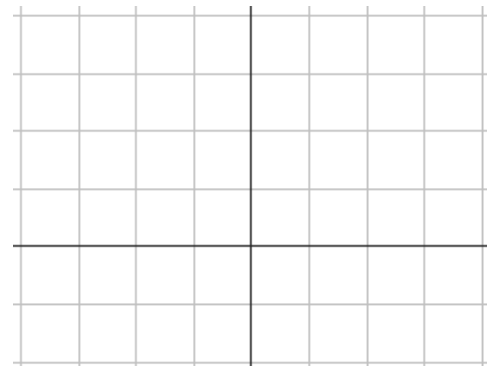
نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

الف) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$

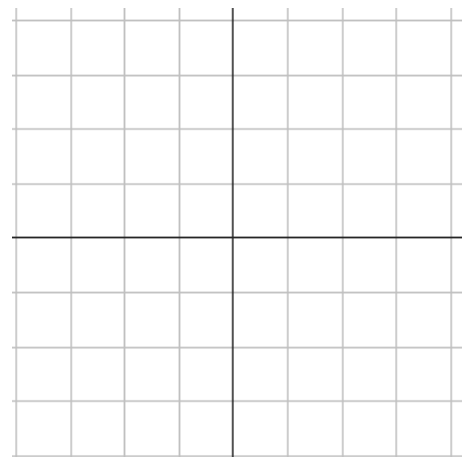
$D_f = [0, 2\pi]$



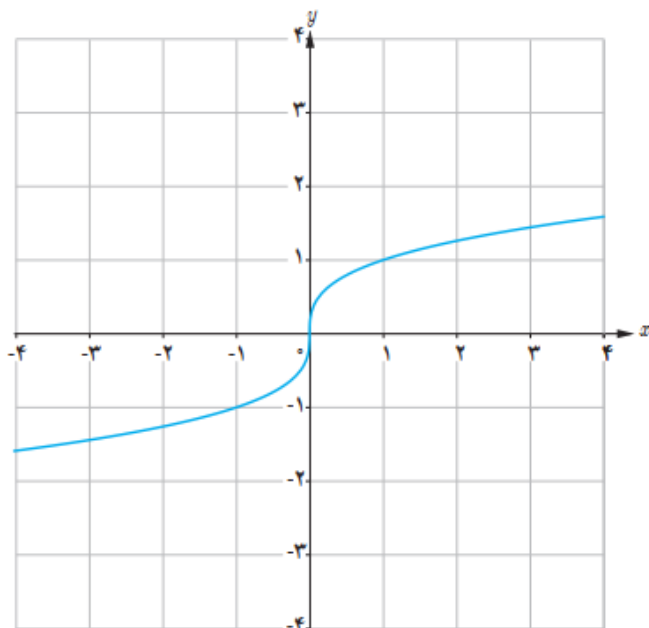
ب) $g(x) = x + |x|$



پ) $t(x) = -x^2 - 1$



فعالیت



به نمودار تابع روبه‌رو دقت کنید.

الف) این تابع اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟

ب) این تابع یک به یک است؟

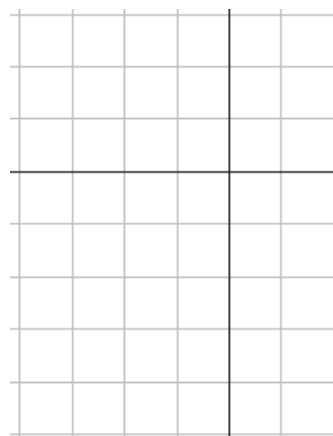
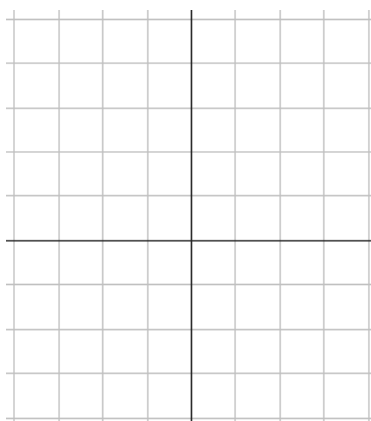
پ) آیا تابعی وجود دارد که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد ولی یک به یک نباشد؟

تمرین

۱) نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نمایید.

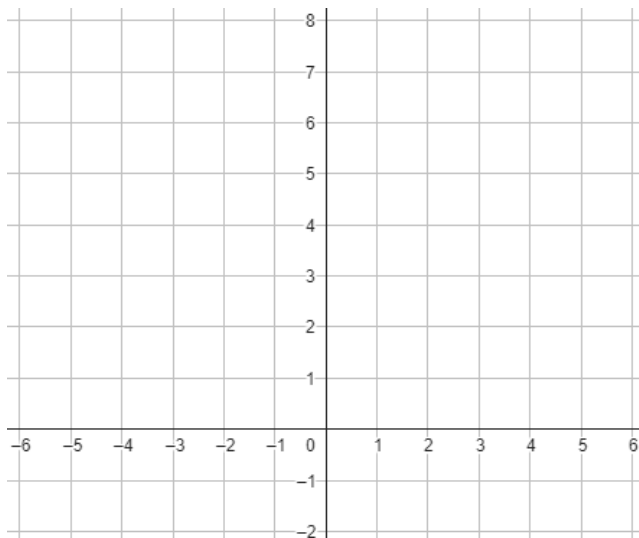
الف) $y = (x-1)^3 - 1$

ب) $y = (x+2)^3 - 2$

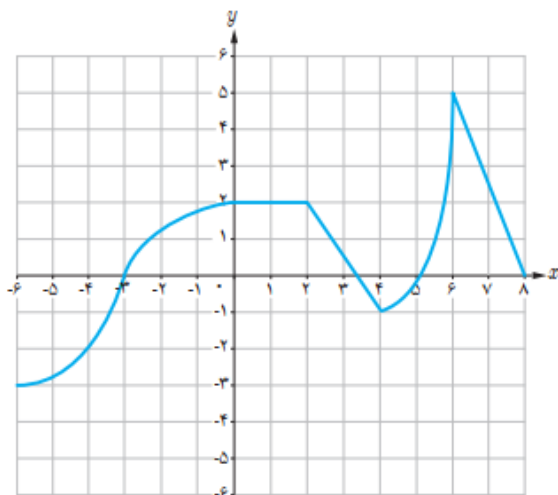


۲ نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

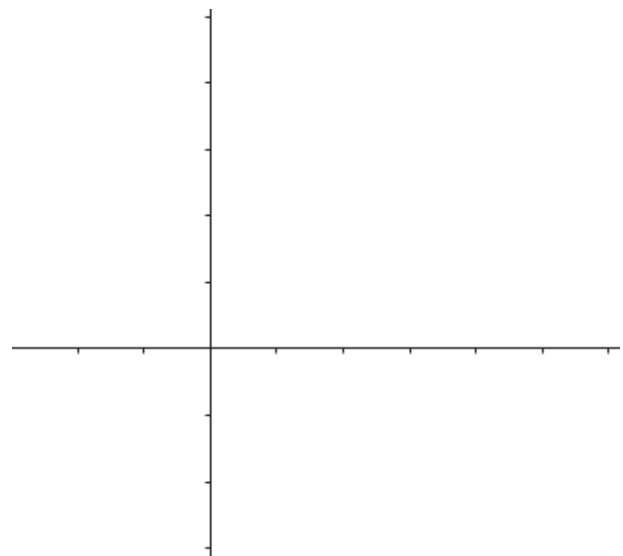
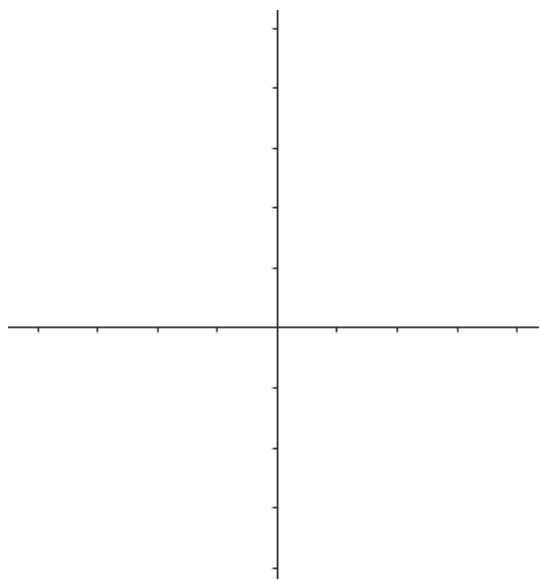
$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < 2 \\ 3x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$$



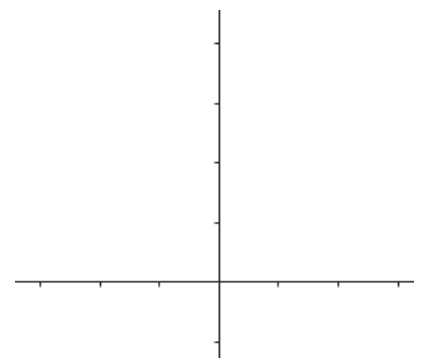
۳ با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟



۴ تابع نمایی $y = 2^x - 2$ و تابع لگاریتمی $y = -\log_2 x + 2$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

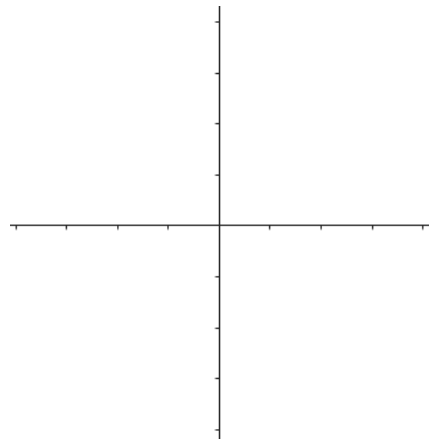
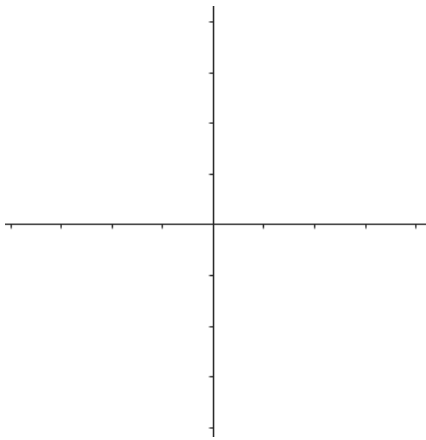


۵ تابع $y = x^2|x|$ در بازه $(-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چقدر است؟



۶ تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً نزولی باشد.

۷ نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد ولی در R اکیداً صعودی نباشد.



درس دوم

ترکیب توابع

در سال گذشته با اعمال جبری روی توابع آشنا شدیم، در این درس می‌خواهیم مفهوم ترکیب توابع را بررسی کنیم.

فعالیت

هنگامی که غذا از یخچال بیرون آورده می‌شود، دمای آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد و مقدار این دما با استفاده از تابع $d(t)$ با ضابطه زیر به دست می‌آید:

$$d(t) = 4t + 2 \quad ; \quad 0 \leq t \leq 3 \quad (\text{واحد } t, \text{ ساعت است.})$$

الف) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$$d(2) = 10$$

دمای غذایی که دو ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر 10° درجه سانتی‌گراد است.

$$d(1) = \dots\dots\dots$$

$$d(3) = \dots\dots\dots$$

همچنین اگر یک ماده غذایی را با دمای 2° درجه سانتی‌گراد از یخچال بیرون آوریم، میزان افزایش تعداد باکتری‌ها با بالا رفتن دما با استفاده از تابع $n(d)$ با ضابطه زیر به دست می‌آید:

$$n(d) = 20d^2 - 80d + 500; \quad 2 \leq d \leq 14$$

که در این تابع، d دمای ماده غذایی پس از خروج از یخچال برحسب درجه سانتی‌گراد است.

ب) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$$n(10) = 20(10)^2 - 80(10) + 500 = 1700$$

یعنی تعداد باکتری‌های موجود در یک ماده غذایی، پس از خروج از یخچال با رسیدن به دمای 10° درجه سانتی‌گراد به 1700 افزایش یافته است.

$$n(2) = \dots\dots\dots$$

$$n(3) = \dots\dots\dots$$

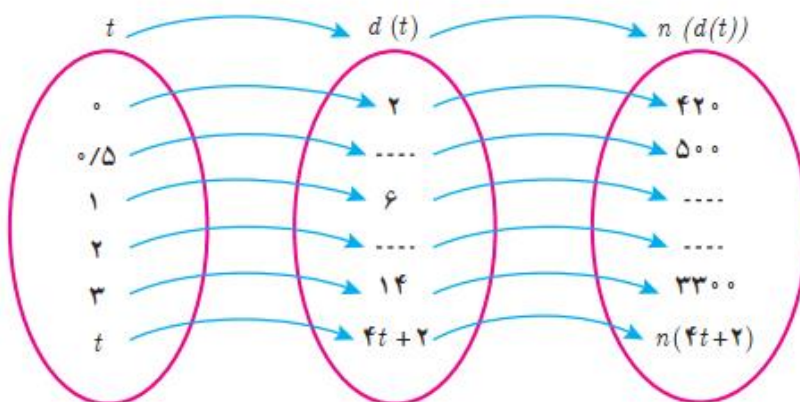
به‌طور کلی می‌توان گفت با استفاده از تابع d ، با داشتن زمان، می‌توان دمای غذا و با استفاده از تابع n ، با داشتن دمای غذا، می‌توان تعداد باکتری‌ها را به دست آورد، به عبارت دیگر:



از الف و ب می توان نتیجه گرفت: تعداد باکتری های موجود در یک ماده غذایی که به میزان ۲ ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر ۱۷۰۰ تاست.

پ) جدول روبه رو را کامل کنید و به کمک آن نمودار را تکمیل نمایید.

t	$d(t) = 4t + 2$	$n(d(t)) = n(4t + 2)$
۰	$d(0) = 2$	$n(d(0)) = n(2) = 420$
۰/۵	$d(0/5) = \dots$	$n(d(0/5)) = n(\dots) = 500$
۱	$d(1) = 6$	$n(d(1)) = n(6) = \dots$
۲	$d(2) = \dots$	$n(d(2)) = n(\dots) = \dots$
۳	$d(3) = 14$	$n(d(3)) = n(14) = 3300$



همان طور که دیدیم، می توان با داشتن زمان، دمای غذا را به دست آورد و با داشتن دما، تعداد باکتری ها قابل محاسبه است.

آیا به نظر شما می توان با داشتن زمان و بدون داشتن دما، تعداد باکتری ها را به دست آورد؟

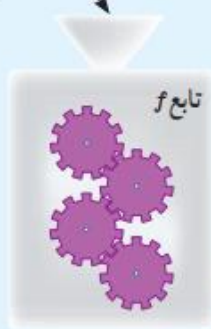
به بیان دیگر آیا می توان تابعی ساخت که n را بر حسب t مشخص کند؟

برای به دست آوردن چنین تابعی به صورت زیر عمل می کنیم:

$$n(d(t)) = n(4t + 2) = 20(4t + 2)^2 - 80(4t + 2) + 500 = \dots = 320t^2 + 420 \quad 0 \leq t \leq 3$$

$n(d(t))$ تعداد باکتری های موجود در غذای یخچالی را نشان می دهد که به میزان t ساعت از یخچال بیرون مانده است.

x باید در دامنه تابع f باشد.



$f(x)$ باید در دامنه تابع g باشد.



مراحل ساخت تابع $g(f(x))$:
مرحله اول: x ورودی و $f(x)$ خروجی است.

مرحله دوم: $f(x)$ ورودی و $g(f(x))$ خروجی است.

اگر f و g دو تابع باشند به طوری که برد تابع f و دامنه تابع g اشتراک ناتهی داشته باشند، تابع $g(f(x))$ را با نماد $(g \circ f)(x)$ نمایش می‌دهیم و تابع $g \circ f$ را تابع مرکب می‌نامیم، به عبارت دیگر:

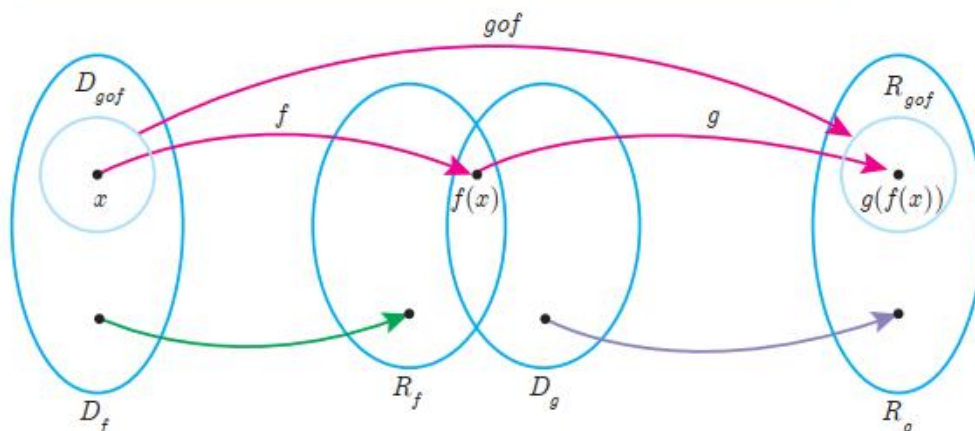
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

دامنه تابع مرکب:

دامنه تابع مرکب $g \circ f$ مجموعه x هایی است که هم زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱- x در دامنه f قرار داشته باشد.

۲- $f(x)$ در دامنه g قرار داشته باشد.



بنابراین دامنه تابع gof را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

به صورت مشابه دامنه تابع fog به صورت زیر است:

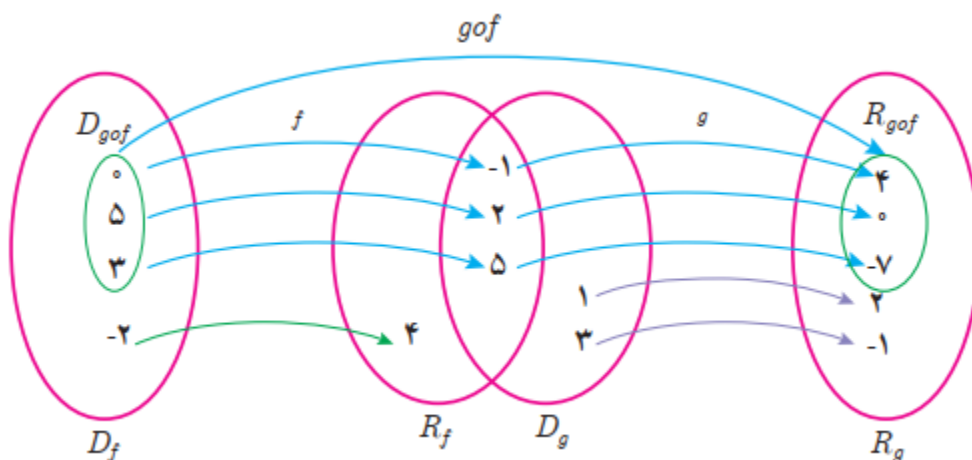
$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

و همچنین:

مثال: اگر $f = \{(\circ, -1), (\Delta, 2), (3, 5), (-2, 4)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, -1), (2, \circ), (-1, 4), (5, -7)\}$ تابع gof را در صورت امکان بنویسید.

$$\left. \begin{aligned} (gof)(\circ) &= g(f(\circ)) = g(-1) = 4 \\ (gof)(\Delta) &= g(f(\Delta)) = g(2) = \circ \\ (gof)(3) &= g(f(3)) = g(5) = -7 \\ (gof)(-2) &= g(f(-2)) = g(4) : \text{تعریف نشده} \end{aligned} \right\} \rightarrow gof = \{(\circ, 4), (\Delta, \circ), (3, -7)\}$$



کار در کلاس

با توجه به جدول‌های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

x	$f(x)$	x	$g(x)$
-۳	-۷	-۳	۸
-۲	-۵	-۲	۳
-۱	-۳	-۱	۰
۰	-۱	۰	-۱
۱	۳	۱	۰
۲	۵	۲	۳
۳	۵	۳	۸

الف) $(fog)(1) = \dots\dots\dots$

ب) $(fog)(-1) = \dots\dots\dots$

پ) $(gof)(\circ) = \dots\dots\dots$

ت) $(gog)(-2) = \dots\dots\dots$

ث) $(gof)(2) = \dots\dots\dots$

ج) $(fof)(1) = \dots\dots\dots$

مثال: اگر $f(x) = x - 2$ و $g(x) = x^2 - 1$ ، دامنه و ضابطه تابع $g \circ f$ را به دست آورید.

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}, D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 2) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (x - 2)^2 - 1$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x - 1}$ ، $g(x) = 2x^2 - 1$ ، دامنه و ضابطه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

$$D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x - 1} \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty)$$

عبارت $\sqrt{x - 1} \in \mathbb{R}$ به این معنی است که $\sqrt{x - 1}$ در اعداد حقیقی با معنی باشد یعنی $x - 1 \geq 0$ که بازه $[1, +\infty)$ به دست می آید.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(f(x))^2 - 1 = 2(\sqrt{x - 1})^2 - 1 = 2(x - 1) - 1 = 2x - 3$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\}$$

عبارت $2x^2 - 1 \in [1, +\infty)$ به این معنی است که عبارت $2x^2 - 1$ متعلق به بازه $[1, +\infty)$ باشد، یعنی $2x^2 - 1 \geq 1$ ، بنابراین:

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x) - 1} = \sqrt{2x^2 - 1 - 1} = \sqrt{2x^2 - 2}$$

اگر دامنه و ضابطه توابع $g \circ f$ و $f \circ g$ را با هم مقایسه کنید چه نتیجه ای می گیرید؟

تذکر: دامنه توابع مرکب را همیشه با توجه به تعاریف آن به دست می آوریم نه از روی ضابطه آن. مثلاً در اینجا می بینیم که دامنه تابع $g \circ f$ با توجه به ضابطه آن $\mathbb{R}$ است در صورتی که برابر $[1, +\infty)$ است.

کار در کلاس

اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{3}{x}$ ، دامنه و ضابطه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

مثال ۲: اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ باشد دامنه و ضابطه تابع $f \circ g(x)$ را بدست آورید.

وقتی $f \circ g$ و یکی از تابع های f و g را داریم



الف: $f \circ g$ و f را داریم و g را می خواهیم.

مثال ۳: اگر $f(x) = x^3 - 1$ و $f \circ g(x) = 2x$ ، تابع $g(x)$ را بدست آورید.

مثال ۴: اگر $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ و $f \circ g(x) = x^2 - 1$ ، مقدار $g(\sqrt{5})$ را بدست آورید.

ب: $f \circ g$ و g را داریم و f را می خواهیم.

مثال ۵: اگر $f \circ g(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = 2x - 1$ ، تابع $f(x)$ را بدست آورید.

مثال ۶: اگر $g(x) = \frac{1}{x} - 1$ و $f \circ g(x) = x^2 + x$ ، ضابطه تابع $f(x)$ را بدست آورید.

نمونه سوالات نهایی



(دی ۱۴۰۲ - ۰.۲۵ نمره)

۱- جای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

الف) اگر $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$ مقدار $f \circ f(1)$ برابر است.

(شهریور ۱۴۰۲ - ۰.۷۵ نمره)

۲- اگر $f(g(x)) = 4x^2 + 1$ و $f(x) = \frac{x}{4} - 1$ ، آنگاه ضابطه تابع $g(x)$ را بیابید.۳- اگر $f = \{(0, -1), (5, 9), (3, 7), (-2, 4)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, -1), (9, 0), (-1, 4), (7, 7)\}$

(شهریور ۱۴۰۱ - ۰.۷۵ نمره)

تابع $g \circ f$ را در صورت وجود بنویسید.

(دی ۱۴۰۱ - ۱/۲۵ نمره)

۴- اگر $g(x) = \sqrt{x+3}$ و $f(x) = 7-4x^2$ باشد:

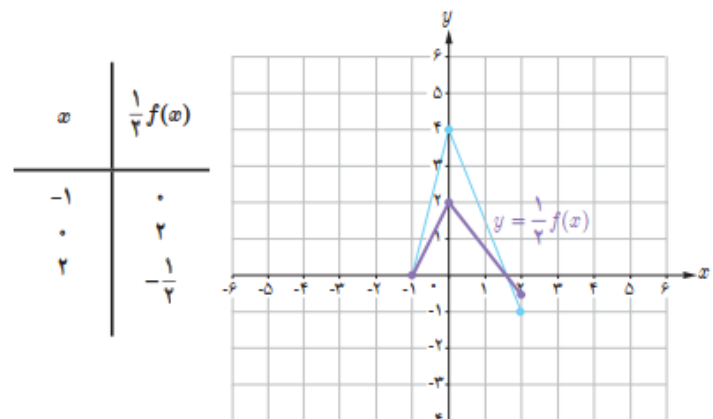
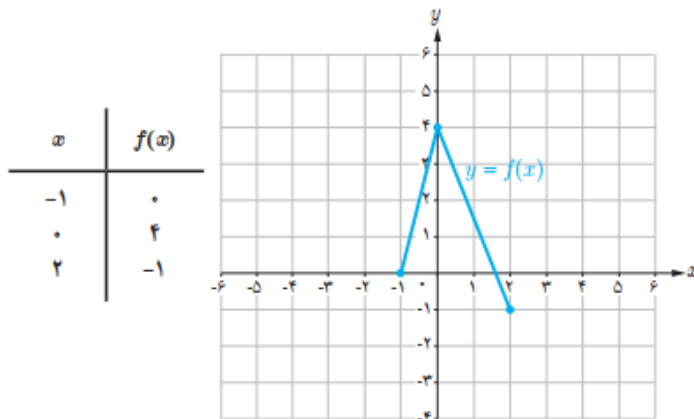
الف: دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب: مقدار $(g \circ f)(1)$ را محاسبه کنید.

تبدیل نمودار توابع

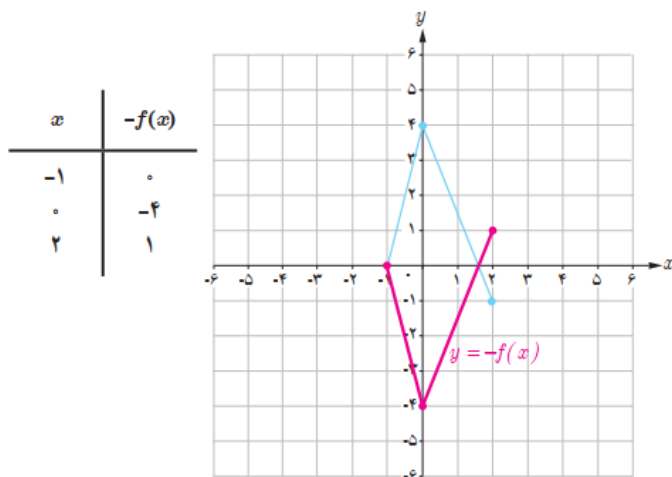
یادآوری: همان طور که در پایه یازدهم دیدیم برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه $y = f(x)$ را با حفظ طول آن نقطه، k برابر کنیم.

مثال: در شکل زیر نمودار تابع f و با کمک آن نمودار توابع $y = \frac{1}{3}f(x)$ ، $y = -f(x)$ و $y = 2f(x)$ رسم شده است.

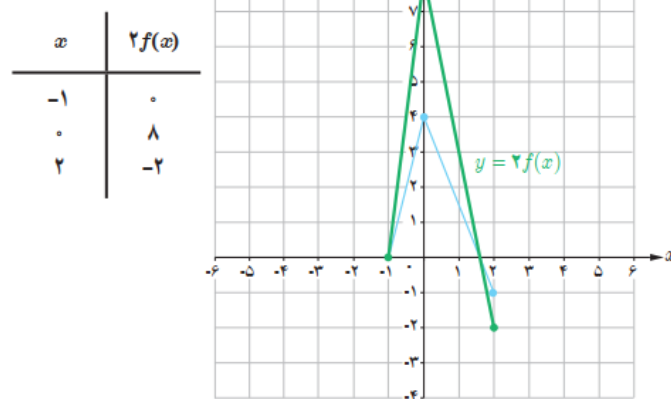


برای رسم نمودار $y = \frac{1}{3}f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در $\frac{1}{3}$ ضرب می‌کنیم.

از آنجایی که ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ و $kf(x) = 0$ یکسان است بنابراین محل تلاقی نمودار توابع f و kf با محور x ها یکسان است.

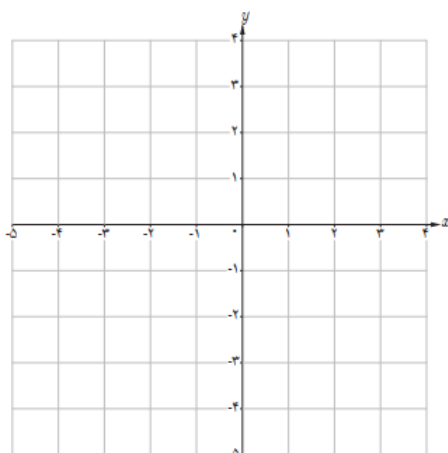


برای رسم نمودار $y = -f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در -1 ضرب می‌کنیم.



برای رسم نمودار $y = 2f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در 2 ضرب می‌کنیم.

دامنه تابع با ضابطه تابع $y = kf(x)$ همان دامنه تابع $y = f(x)$ است، اما برد آنها لزوماً یکسان نیست.

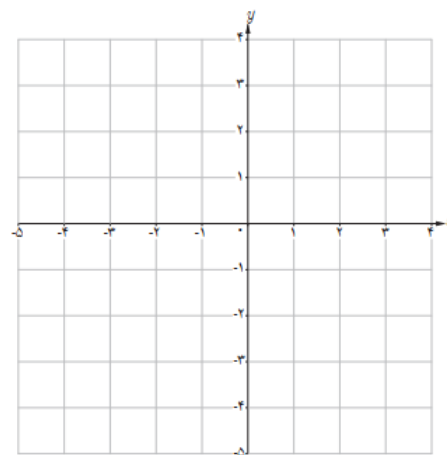


کار در کلاس

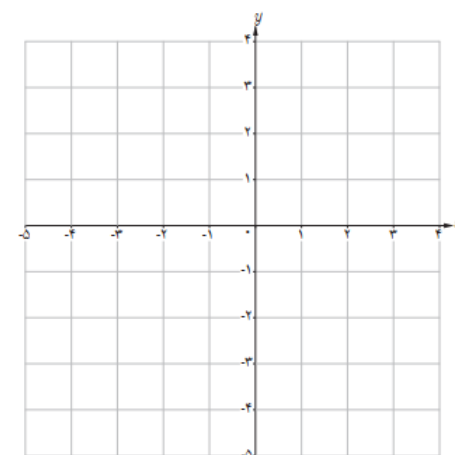
نمودار تابع $f(x) = |x - 2|$ را در بازه $[-2, 3]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع

$g(x) = -|x - 2|$ و $h(x) = \frac{1}{3}|x - 2|$ و $k(x) = -\frac{1}{3}|x - 2|$ را رسم کنید.

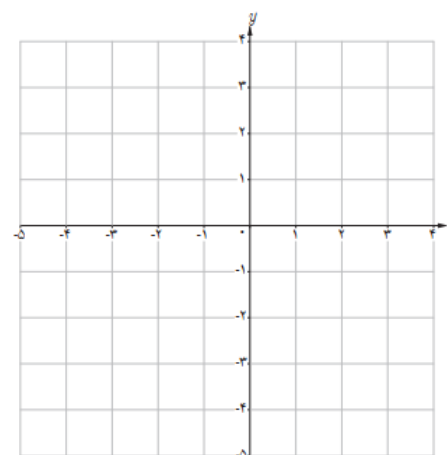
$$g(x) = -|x - 2|$$

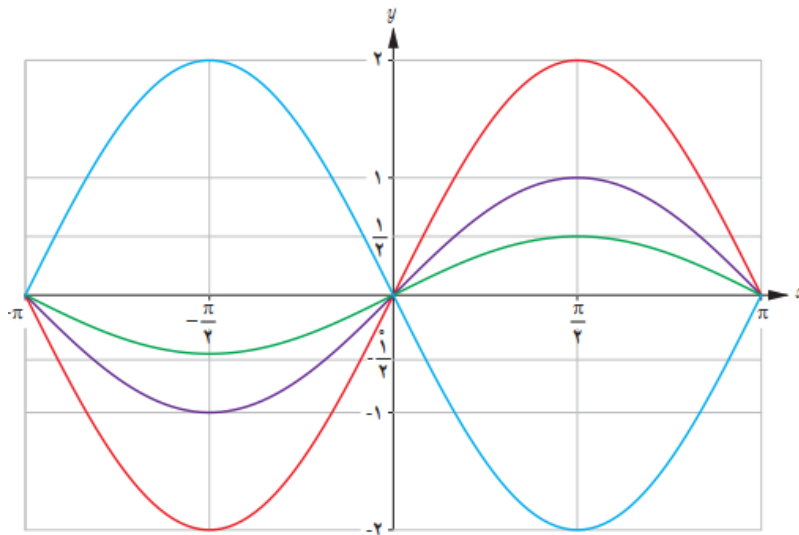


$$h(x) = \frac{1}{2}|x - 2|$$



$$k(x) = -\frac{1}{3}|2 - x|$$





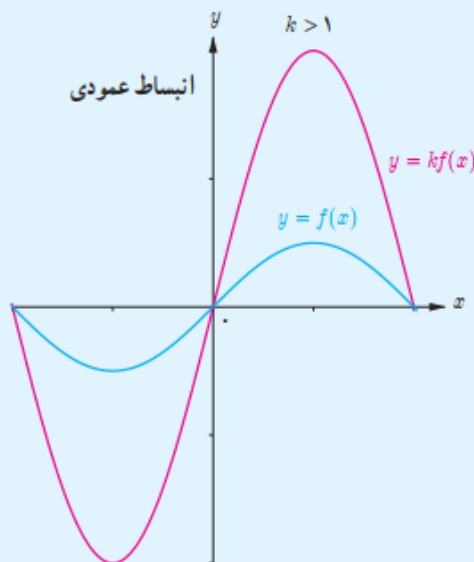
در شکل روبه‌رو نمودار توابع با ضابطه‌های $y = \sin x$ ، $y = 2 \sin x$ ، $y = -2 \sin x$ و

$y = \frac{1}{4} \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم شده است. نمودار تابع $y = \sin x$ را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار توابع دیگر چگونه به کمک آن رسم شده است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.

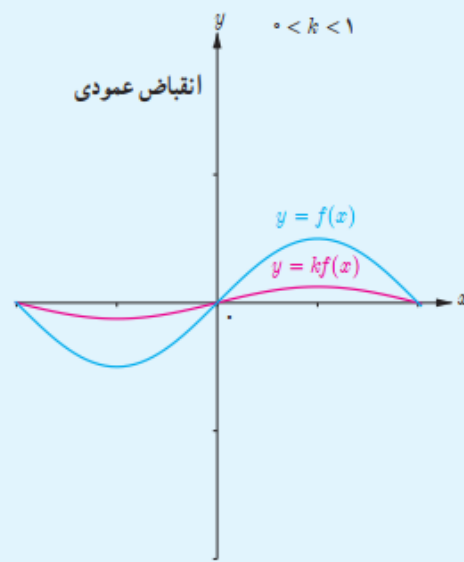
می توان گفت نمودار تابع $y = kf(x)$ تغییرات زیر را نسبت به نمودار $y = f(x)$ دارد:

اگر $k > 0$ ، نمودار $y = kf(x)$ را می توان با انبساط یا انقباض نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور y ها به دست آورد.

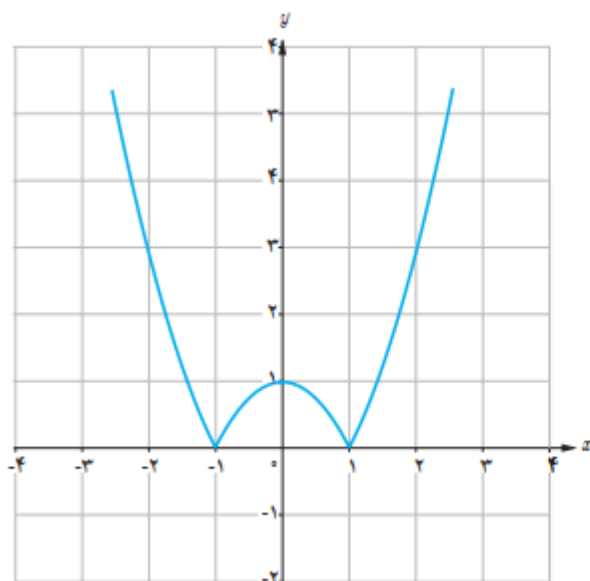
اگر $k < 0$ ابتدا نمودار f نسبت به محور x ها قرینه می شود، سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می شود.



اگر $k > 1$ ، نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k کشیده می شود که در این حالت می گوئیم نمودار انبساط عمودی یافته است.



اگر $0 < k < 1$ ، نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k فشرده می شود که در این حالت می گوئیم نمودار انقباض عمودی یافته است.

رسم نمودار $|f(x)|$ رسم نمودار $|f|$:

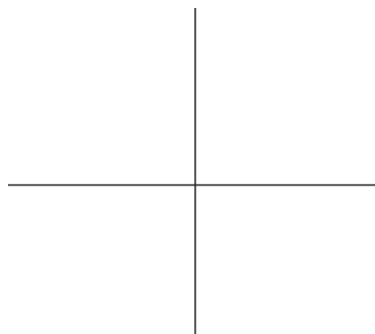
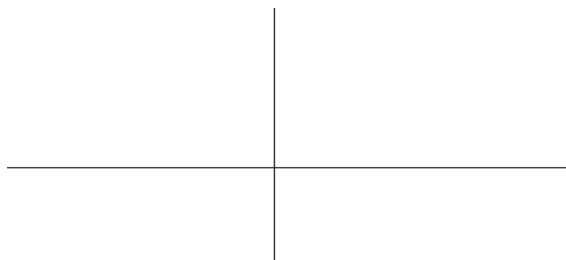
برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار f زیر محور x هاست، قرینه نمودار f را نسبت به محور x ها رسم کنیم.

مثال: در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = |x^2 - 1|$ رسم شده است.

مثال ۷: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف: $y = |\sin x|$

ب: $y = \left| \frac{1}{x} \right|$

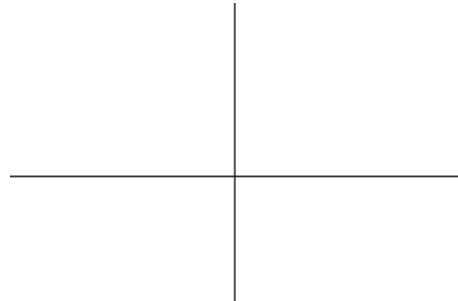
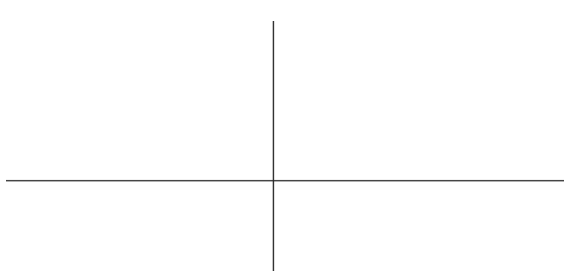
رسم نمودار $f(|x|)$ 

برای رسم نمودار $y = f(|x|)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را فقط برای $x \geq 0$ رسم کرده و تصویر آینه ای آن را نسبت به محور y ها به آن اضافه کنیم.

مثال ۸: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف: $y = \sin|x|$

ب: $y = \sqrt{|x|}$

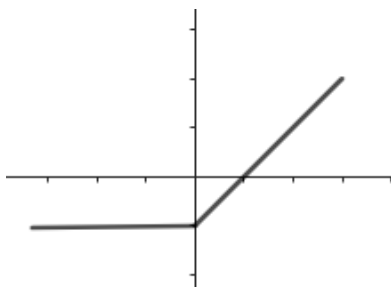


مقایسه دو نمودار $f(|x|)$ و $|f(x)|$ در یک سوال

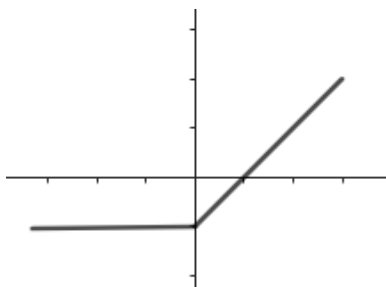


مثال ۹: نمودار تابع $y = f(x)$ داده شده است. نمودار تابع های خواسته شده را رسم کنید.

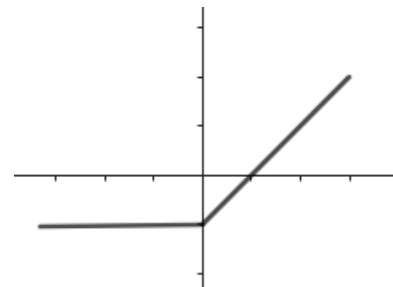
$y = f(x)$



$y = |f(x)|$



$y = f(|x|)$



رسم نمودار $f(kx)$ با استفاده از نمودار $f(x)$:

مثال: تابع $f(x) = x + 3$ را با دامنه $[-4, 0]$ در نظر می گیریم و چگونگی رسم نمودار توابع $y = f(\frac{x}{2})$ و $y = f(2x)$ را بررسی می کنیم. ضابطه تابع $y = f(2x)$ به صورت $f(2x) = 2x + 3$ است و دامنه آن به شکل زیر مشخص می شود:

$$-4 \leq 2x \leq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 0 \rightarrow \text{دامنه } f(2x): D = [-2, 0]$$

همچنین ضابطه تابع $y = f(\frac{x}{3}) = \frac{x}{3} + 3$ به صورت $f(\frac{x}{3}) = \frac{x}{3} + 3$ است و دامنه آن به شکل زیر مشخص می شود:

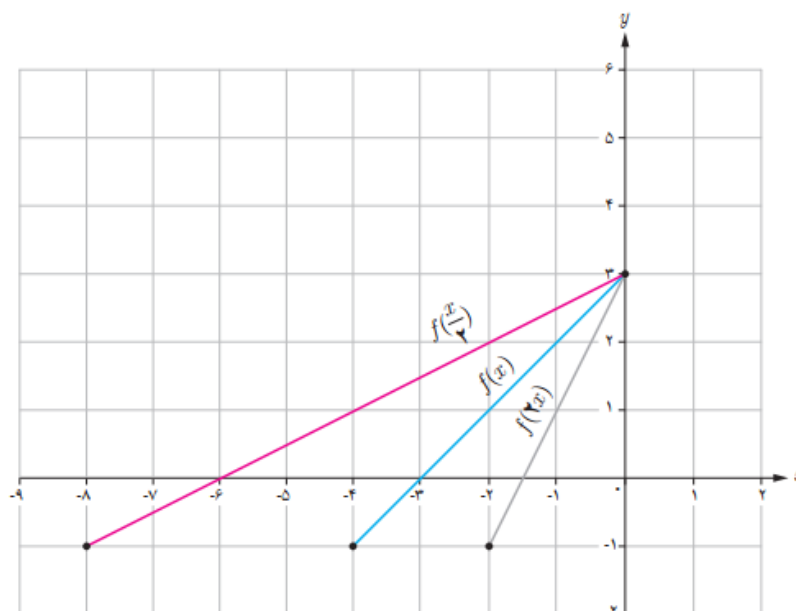
$$-4 \leq \frac{x}{3} \leq 0 \rightarrow -12 \leq x \leq 0 \rightarrow f(\frac{x}{3}) \text{ دامنه: } D = [-12, 0]$$

برخی از نقاط نمودار این سه تابع در جدول های زیر نوشته شده است:

x	-4	-3	-2	-1	0
$f(x) = x + 3$	-1	0	1	2	3

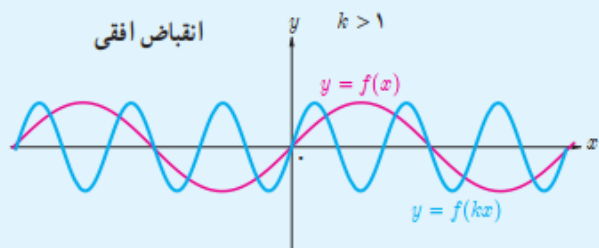
x	-2	-1/5	-1	-0/5	0
$f(2x) = 2x + 3$	-1	0	1	2	3

x	-12	-6	-4	-2	0
$f(\frac{x}{3}) = \frac{x}{3} + 3$	-1	0	1	2	3

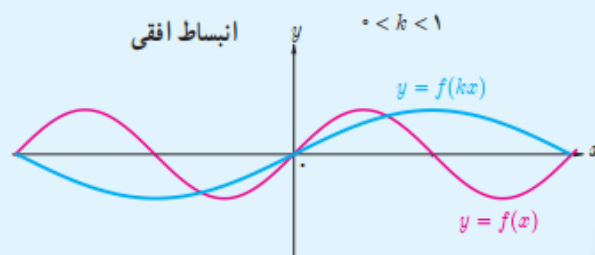


همان طور که ملاحظه می شود برد توابع $f(\frac{x}{3})$ و $f(2x)$ با برد تابع $f(x)$ یکسان است.

برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.
 اگر $k > 0$ ، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور x ها به دست آورد.
 اگر $k < 0$ ، ابتدا نمودار f نسبت به محور y ها قرینه می‌شود، سپس با ضرب $\left|\frac{1}{k}\right|$ به طور افقی منبسط یا منقبض می‌شود.

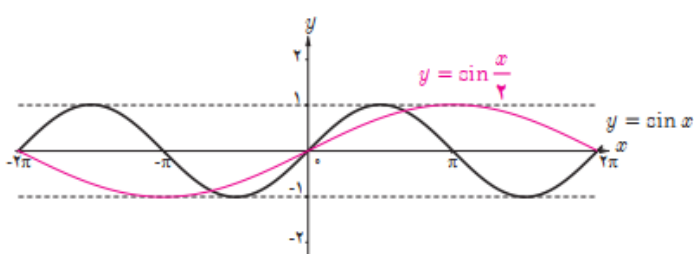
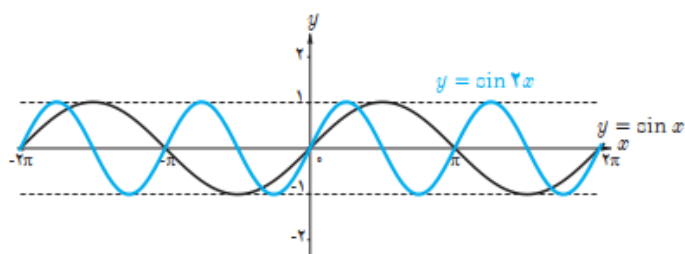


اگر $k > 1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور x ها با ضرب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض افقی یافته است.

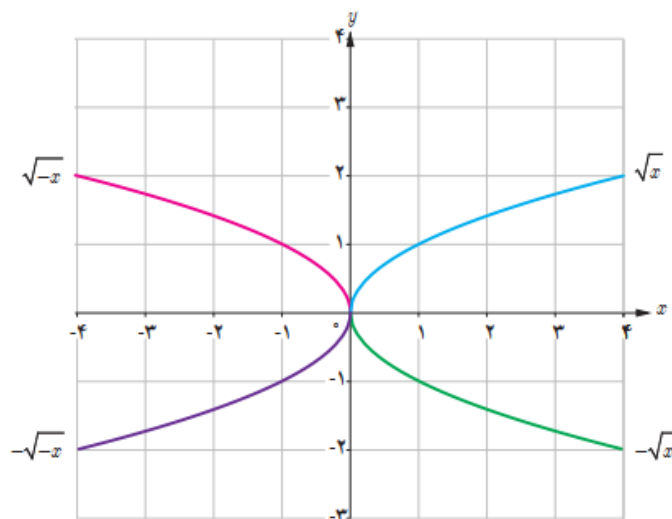


اگر $0 < k < 1$ ، نمودار $f(x)$ در امتداد محور x ها با ضرب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط افقی یافته است.

مثال: در شکل‌های زیر نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\sin 2x$ و $y=\sin \frac{x}{2}$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم شده‌اند. همان‌طور که می‌بینیم نمودار تابع $y=\sin 2x$ با انقباض نمودار تابع $y=\sin x$ در امتداد محور x ها و نمودار تابع $y=\sin \frac{x}{2}$ با انبساط نمودار تابع $y=\sin x$ در امتداد محور x ها به دست آمده است.



کار در کلاس

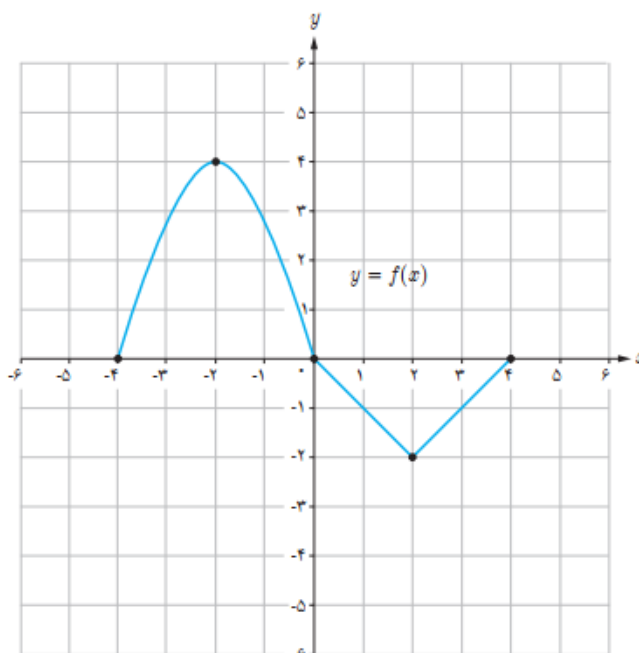


نمودار توابع $y = \sqrt{-x}$ و $y = -\sqrt{x}$ و $y = \sqrt{x}$ به کمک نمودار تابع $y = x^2$ رسم شده است. دامنه و برد توابع فوق را مشخص کنید.

کار در کلاس

نمودار تابع f با دامنه $[-4, 4]$ به صورت زیر داده شده است، می‌خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y = f(\frac{1}{2}x)$ و $y = f(2x)$ را رسم کنیم.

x	$f(x)$
-4	0
-2	4
0	0
2	-2
4	0

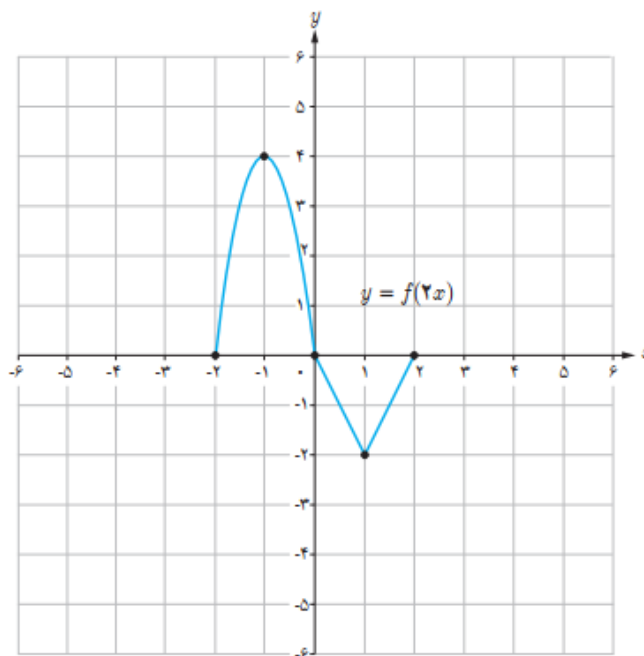


الف) برای تعیین دامنه $y=f(2x)$ به صورت زیر عمل می کنیم:

$$-4 \leq 2x \leq 4 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

بنابراین دامنه تابع $y=f(2x)$ بازه $[-2, 2]$ است. جدول نقاط را کامل کنید.
برای رسم نمودار $f(2x)$ ، طول نقاط یا همان x ها باید محاسبه شود.

x	$2x$	$f(2x)$	$(x, f(2x))$
-2	-4	0	$(-2, 0)$
...	-2	4	$(..., 4)$
...	0	0	$(..., 0)$
...	2	-2	$(..., -2)$
...	4	0	$(..., 0)$

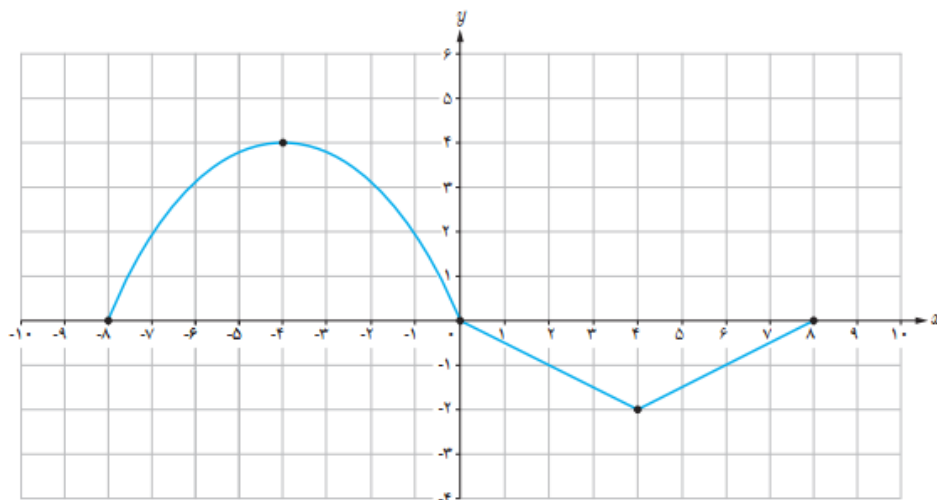


ب) برای تعیین دامنه $y=f(\frac{1}{2}x)$ به صورت زیر عمل می کنیم.

$$-4 \leq \frac{1}{2}x \leq 4 \rightarrow -8 \leq x \leq 8$$

پس دامنه تابع $y=f(\frac{1}{2}x)$ بازه $[-8, 8]$ است و نقاط متناظر به صورت زیر است:

x	$f(\frac{1}{2}x)$
-8	0
-4	4
0	0
4	-2
8	0



همان طور که ملاحظه شد برای رسم نمودار $y=f(2x)$ طول هر نقطه نمودار $y=f(x)$ را در $\frac{1}{2}$ و برای رسم نمودار $y=f(\frac{1}{2}x)$ طول هر نقطه را در ۲ ضرب می کنیم.

دامنه تابع $y=f(kx)$ با دامنه تابع $y=f(x)$ الزاماً یکسان نیست ولی برد تابع $y=f(kx)$ همان برد تابع $y=f(x)$ است.

تمرین

۱ اگر $f = \{(7, 8), (5, 3), (9, 8), (11, 4)\}$ و $g = \{(5, 7), (3, 5), (7, 9), (9, 11)\}$ ، توابع $g \circ f$ و $f \circ g$ را به دست آورید.

۲ در هر قسمت موارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

الف) $f(x) = x^4 - 5$; $g(x) = \sqrt{x+6}$: $D_{fog}, (fog)(x)$

ب) $f(x) = \sqrt{3-2x}$; $g(x) = \frac{6}{3x-5}$: $D_{fog}, (fog)(x)$

پ) $f(x) = \sqrt{x+2}$; $g(x) = \sqrt{x^2-16}$: $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$

ت) $f(x) = \sin x$; $g(x) = \sqrt{x}$: $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$

۳ اگر $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(x) = 3x - 4$ ، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.

۴ مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ؛ آنگاه $(f \circ g)(5) = -25$.

ب) برای دو تابع f و g که $f \neq g$ تساوی $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

پ) اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آنگاه $(f \circ g)(4) = 5$.

ت) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 2x - 1$ ، آنگاه $(f \circ g)(5) = g(2)$.

۵) الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ‌تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج‌شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام یک از حالت‌های الف یا ب به نفع الناز است؟
الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

۶ تابع $h(x) = (3x^2 - 4x + 1)^5$ ترکیب کدام دو تابع زیر است؟

الف) $f(x) = \sqrt[5]{x}$; $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$

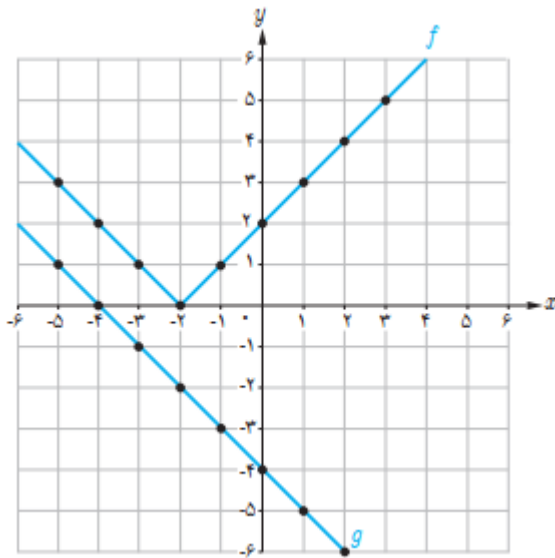
ب) $k(x) = x^5$; $l(x) = 3x^2 - 4x + 1$

۷ هریک از توابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

الف) $h(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

ب) $l(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

۸ با توجه به نمودارهای توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.



الف) $(fog)(-1)$

ب) $(gof)(0)$

پ) $(fog)(1)$

ت) $(gof)(-1)$

۹ با توجه به ضابطه‌های توابع f و g ، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = x^2 - 3x + 8 : (fog)(x) = 7$

ب) $f(x) = 3x^2 + x - 1$, $g(x) = 1 - 2x : (gof)(x) = -5$

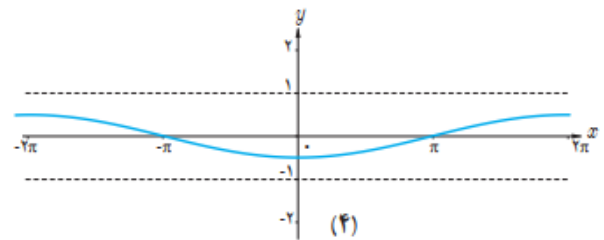
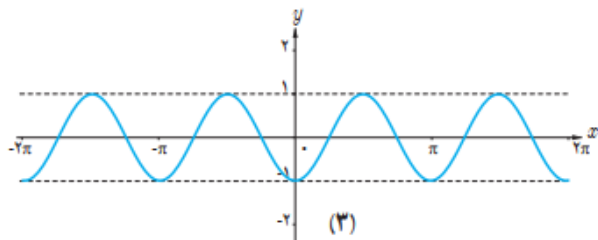
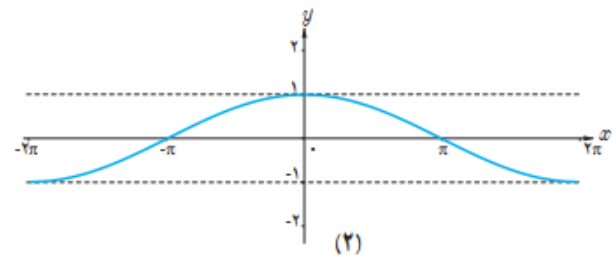
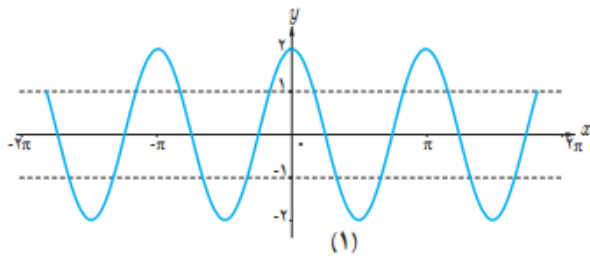
۱۰ با استفاده از نمودار $y = \cos x$ ، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

الف) $y = -\frac{1}{2} \cos(-\frac{1}{2}x)$

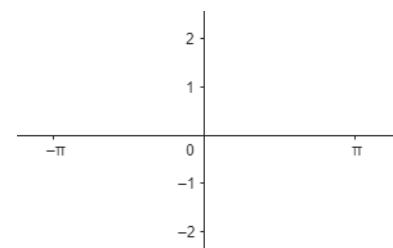
ب) $y = 2 \cos 2x$

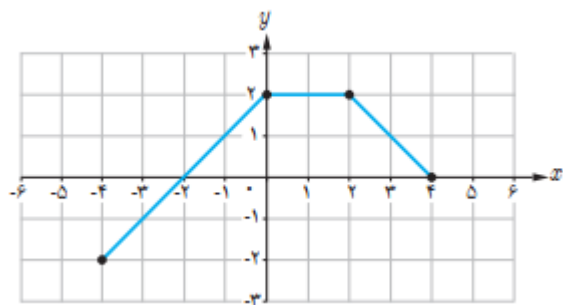
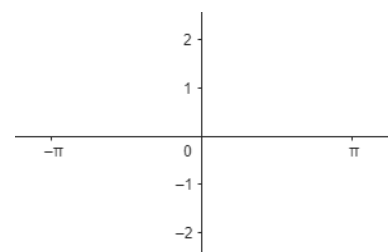
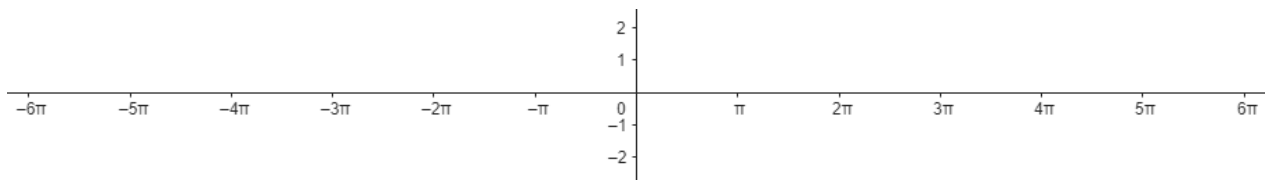
پ) $y = \cos(\frac{1}{2}x)$

ت) $y = -\cos 2x$



۱۱ نمودار توابع $y = 2 \sin(\frac{1}{3}x)$ و $y = -\sin 2x - 1$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.



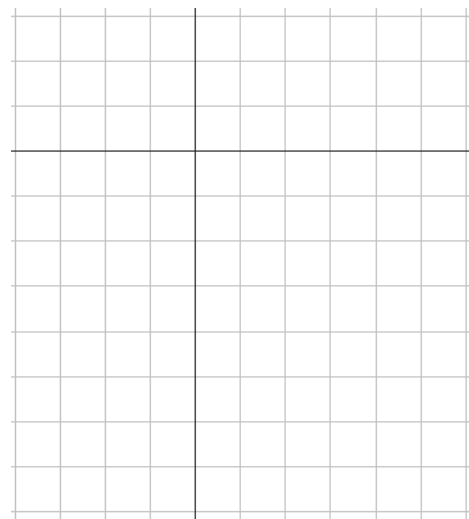


۱۲ با استفاده از نمودار تابع f ، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.

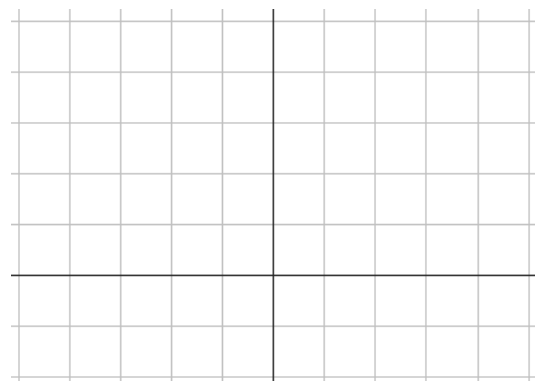
الف) $y = \frac{1}{4} f(2x) - 1$



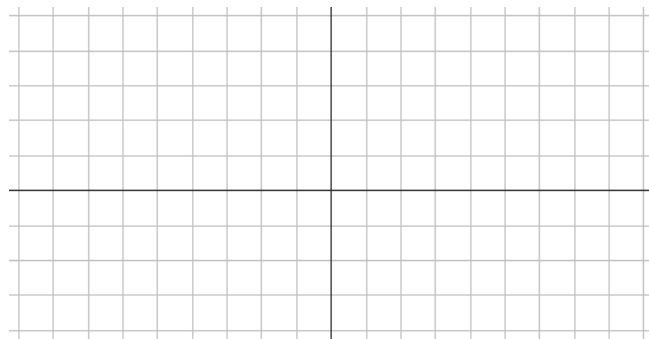
ب) $y = -f(-x) + 2$



پ) $y = 2f(x - 1) - 3$



$$ت) y = 2f\left(\frac{1}{2}x\right)$$

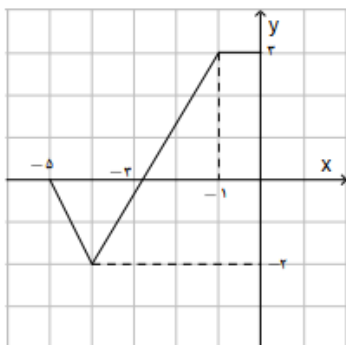


نمونه سوالات نهایی

- ۱- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را ابتدا سه واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم، ضابطه تابع جدید را بنویسید.

(دی ۱۴۰۲ - ۱ نمره)

- ۲- نمودار تابع f به صورت مقابل است. دامنه و برد تابع $g(x) = 2f(-x)$ را بنویسید.



۳- برد تابع f بازه $(-3, 1)$ است. برد تابع $y = -2f(3x - 1) + 3$ کدامیک از موارد زیر است؟ (خرداد ۱۴۰۱ - ۵/۵ نمره)

الف) $(-8, 0]$ ب) $(-12, 0]$ پ) $(1, 9)$ ت) $(-10, 2)$



۱- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4x - x^2$ را در امتداد محور x ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. (سراسری تجربی ۱۴۰۱)

فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبدأ مختصات کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ $2\sqrt{5}$ ۴ $\sqrt{10}$

۲- نقطه $A(2,3)$ روی نمودار تابع $y = 2f(3x - 1) + 1$ است. نقطه متناظر با A را روی نمودار تابع $y = 1 - f(2 - x)$ را بیابید.

۳- اگر دامنه تعریف تابع f بازه $[-1, 2]$ باشد، دامنه تعریف تابع $y = 2f(2x - 1)$ را بیابید.

۴- اگر دامنه تعریف تابع $y = 1 + 3f(3x + 4)$ بازه $[1, 2]$ باشد، دامنه تعریف تابع f را بیابید.

۴- اگر دامنه تعریف تابع $y = -f(3x + 1)$ بازه $(-1, 3)$ باشد، دامنه تعریف تابع $y = 3f(x + 1) + 1$ را بیابید.

۵- اگر برد تابع $y = 2f(x+1) - 3$ بازه $(-3, 3)$ باشد، برد تابع $y = 2 - f(3x-1)$ را بیابید.

۶- اگر $f(x) = \frac{x^2}{2x+7}$ و $g(x) = x + \sqrt{x+9}$ باشد، حاصل $fog(-5)$ را بیابید.

۷- اگر $f(x) = x^3 - x$ و $g(x) = x^2 - 2x$ باشد، صفرهای تابع fog را بیابید.

درس سوم

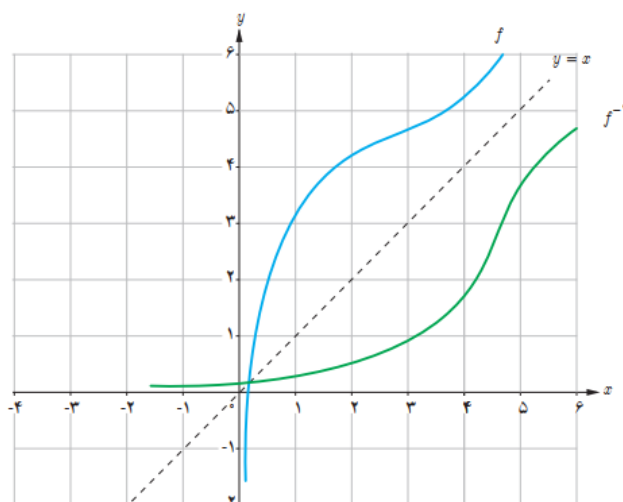
تابع وارون

یادآوری

همان طور که در فصل تابع کتاب ریاضی ۲ دیدیم با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج‌های مرتب تابع یک به یک f ، تابعی جدید به دست می‌آید که وارون تابع f است و آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم. یعنی اگر نقطه (a, b) روی نمودار تابع f قرار داشته باشد آن گاه نقطه (b, a) روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد و به عکس:

$$(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$$

همچنین دیدیم نمودار تابع f و تابع وارون آن نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه‌اند.



مثال:

اگر $f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 5)\}$ آن گاه:

$$f^{-1} = \{(4, 1), (3, 2), (5, 3)\}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (fof^{-1})(4) = f(f^{-1}(4)) = f(1) = 4 \\ (fof^{-1})(3) = f(f^{-1}(3)) = f(2) = 3 \rightarrow fof^{-1} = \{(4, 4), (3, 3), (5, 5)\} \\ (fof^{-1})(5) = f(f^{-1}(5)) = f(3) = 5 \end{cases}$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنه تابع f^{-1} داریم:

$$(fof^{-1})(x) = x$$

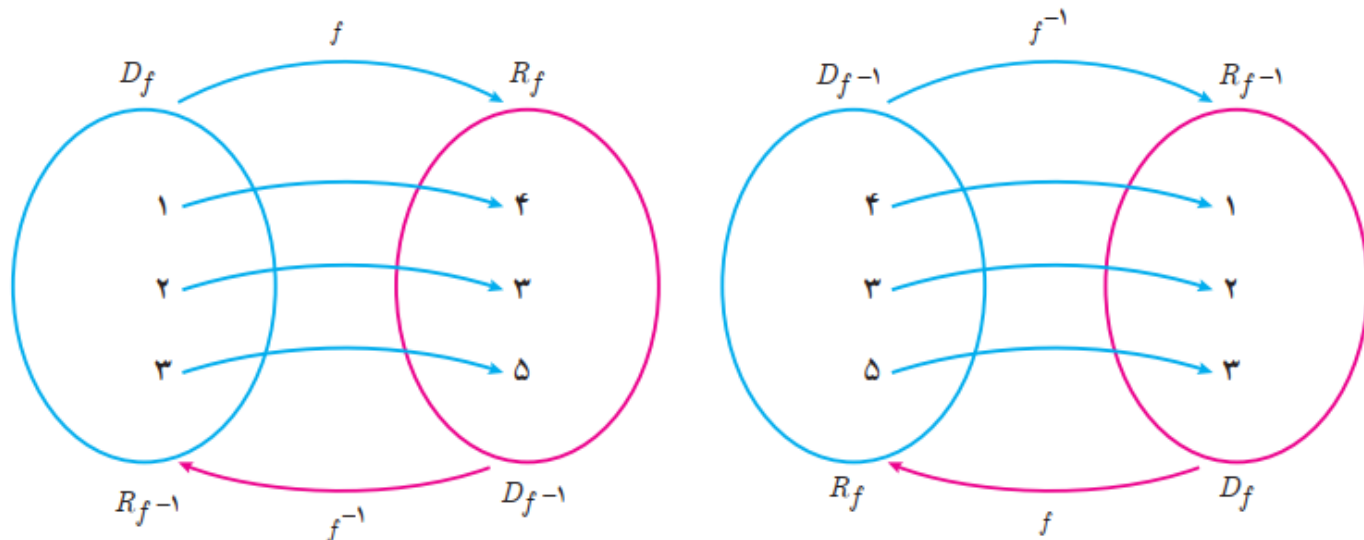
$$f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 5)\} \quad f^{-1} = \{(4, 1), (3, 2), (5, 3)\}$$

همچنین:

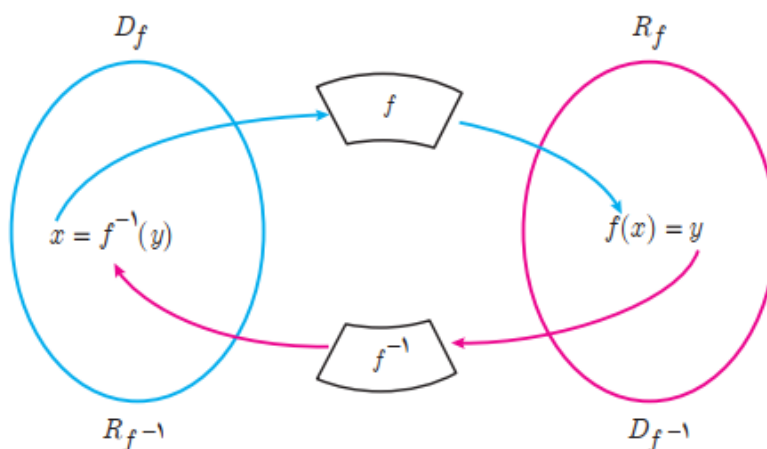
$$\begin{cases} (f^{-1} \circ f)(1) = f^{-1}(f(1)) = f^{-1}(4) = 1 \\ (f^{-1} \circ f)(2) = f^{-1}(f(2)) = f^{-1}(3) = 2 \rightarrow f^{-1} \circ f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \\ (f^{-1} \circ f)(3) = f^{-1}(f(3)) = f^{-1}(5) = 3 \end{cases}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنه تابع f داریم:



به طور کلی اگر f تابعی یک به یک و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و f^{-1} را نشان می دهد.



اگر f تابعی وارون پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، همواره داریم:

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad ; \quad x \in D_f$$

با توجه به آنچه که دیدیم می توان گفت اگر دو تابع f و g به گونه ای باشند که:

$$(f \circ g)(x) = x \quad ; \quad x \in D_g \quad (\text{الف})$$

$$(g \circ f)(x) = x \quad ; \quad x \in D_f \quad (\text{ب})$$

آنگاه توابع f و g وارون یکدیگرند.

مثال: نشان دهید توابع f و g وارون یکدیگرند.

$$f(x) = 3x - 4$$

$$g(x) = \frac{x+4}{3}$$

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی است، یعنی:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 4 = 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 = x \quad (x \in D_g)$$

همچنین:

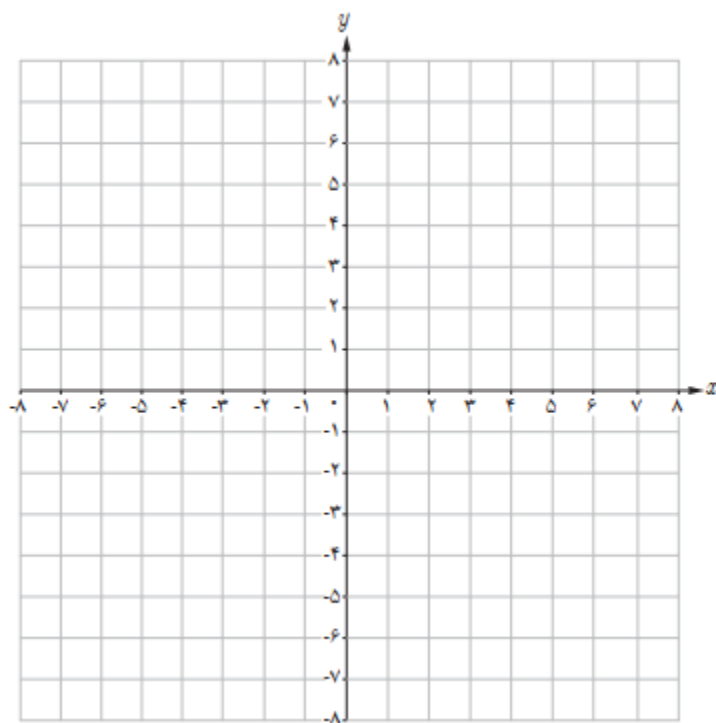
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+4}{3} = \frac{3x-4+4}{3} = x \quad (x \in D_f)$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک به یک مانند f ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را بر حسب y محاسبه می کنیم، سپس با تبدیل y به x ، $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم.

کار در کلاس

آیا تابع $f(x) = x^2$ یک به یک است؟ چرا؟ در دستگاه مختصات زیر نمودار تابع $f(x) = x^2$ و وارون آن را رسم کنید. ضابطه تابع وارون چیست؟



مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x+3}$ ، دامنه و برد توابع f و f^{-1} را به دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید، ضابطه f^{-1} را نیز به دست آورید. تابع f یک به یک است، بنابراین دارای وارون است.

$$\begin{cases} D_f = [-3, +\infty) \\ R_f = [0, +\infty) \end{cases} \quad \begin{cases} D_{f^{-1}} = [0, +\infty) \\ R_{f^{-1}} = [-3, +\infty) \end{cases}$$

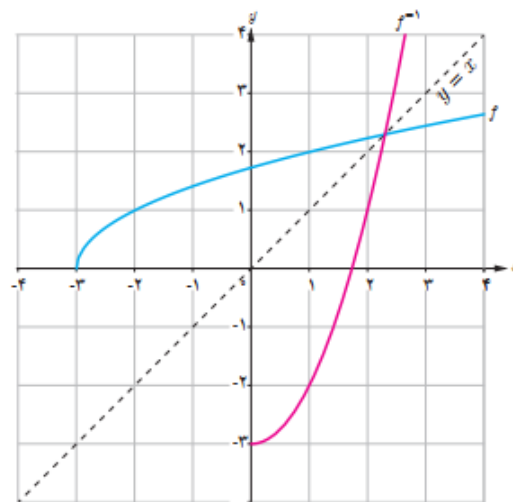
$$y = \sqrt{x+3}$$

$$y^2 = x+3$$

$$x = y^2 - 3$$

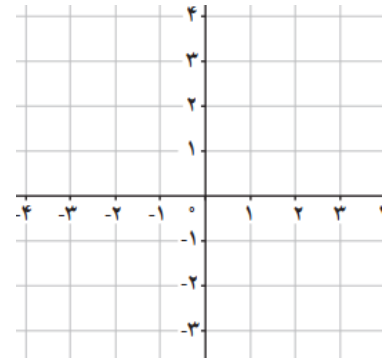
$$f^{-1}(y) = y^2 - 3$$

$$f^{-1}(x) = x^2 - 3$$



ضابطه تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.

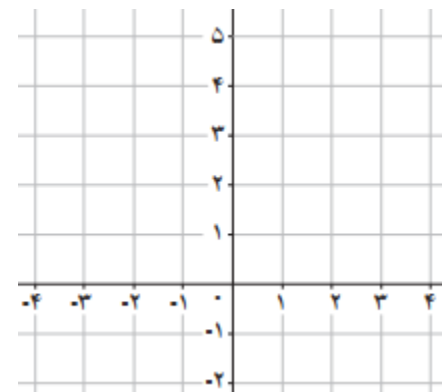
الف) $f(x) = -\frac{1}{4}x + 3$



ب) $g(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$

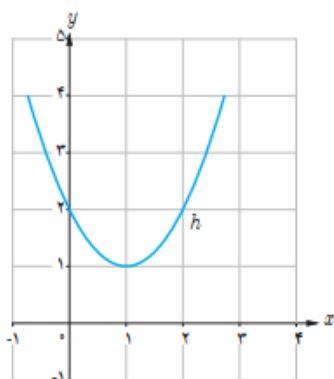
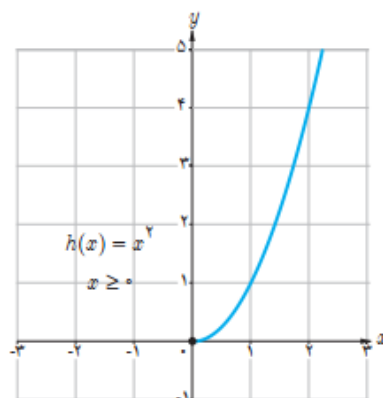
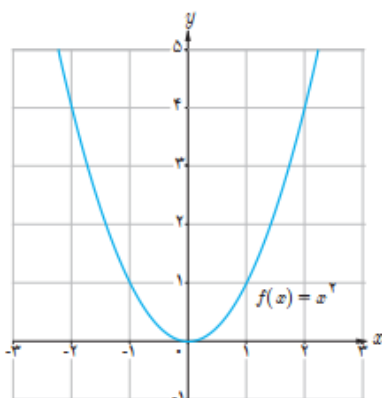
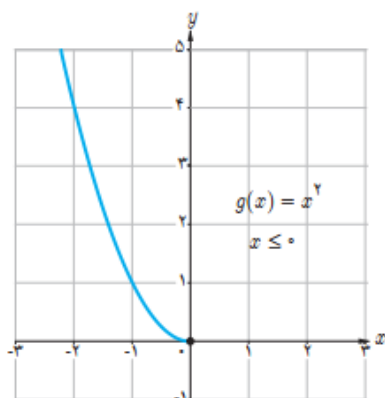


پ) $h(x) = x^2 + 1$



محدود کردن دامنه تابع

از سال قبل می‌دانیم که اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنه یک تابع، می‌توان تابعی یک به یک به دست آورد. به طور مثال تابع $f(x) = x^2$ یک به یک نیست ولی با محدود کردن دامنه تابع به بازه $[0, +\infty)$ و یا $(-\infty, 0]$ یا زیر مجموعه‌هایی از این دو بازه، تابعی یک به یک به دست می‌آید.



مثال: نمودار تابع $h(x) = x^2 - 2x + 2$ نشان می‌دهد که این تابع یک به یک نیست. اما می‌توان با محدود کردن دامنه این تابع آن را طوری محدود کرد که تابعی یک به یک به دست آید و سپس وارون آن را محاسبه کرد.

$$h(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$$

مثلاً دامنه تابع h را به بازه $[1, +\infty)$ محدود می‌کنیم. ضابطه تابع جدید که آن را $k(x)$ می‌نامیم با ضابطه $h(x)$ برابر است اما دامنه تابع h مجموعه اعداد حقیقی و دامنه تابع k بازه $[1, +\infty)$ است.

در تابع k ، x را بر حسب y به دست می‌آوریم:

$$k(x) = (x-1)^2 + 1$$

$$y = (x-1)^2 + 1$$

$$(x-1)^2 = y - 1$$

$$x - 1 = \pm \sqrt{y - 1}$$

$$x = \pm \sqrt{y - 1} + 1$$

$$k^{-1}(x) = \sqrt{x - 1} + 1$$

جواب منفی غیر قابل قبول است. (چرا؟)



نمودار توابع k و k^{-1} به صورت روبه‌رو است:

آیا به جز بازه $(1, +\infty)$ ، بازه دیگری می‌توان یافت که تابع k در آن یک به یک باشد؟

مثال ۹: ضابطه وارون تابع $y = \frac{2x-1}{x+1}$ را بدست آورید.

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

نکته: وارون تابع هموگرافیک:



مثال ۱۰: ضابطه وارون تابع $y = x^2 - 6x$ را بدست آورید.

مثال ۱۱: ضابطه وارون تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$ را بدست آورید.

مثال ۱۲: ضابطه وارون تابع $y = |x - 1| + 2$ را بدست آورید.

مثال ۱۳: ضابطه وارون تابع $y = 2^{x+1} + 1$ را بدست آورید.

مثال ۱۴: ضابطه وارون تابع $y = \log_3(2x - 3)$ را بدست آورید.

تمرین

۱ ضابطه تابع وارون توابع یک به یک زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{-8x + 3}{2}$

ب) $g(x) = -5 - \sqrt{3x + 1}$

۲ در مورد هر یک از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف $f(x) = \frac{-7}{2}x - 3$, $g(x) = -\frac{2x+6}{7}$

ب $f(x) = -\sqrt{x-8}$, $g(x) = 8+x^2; x \leq 0$

۳ رابطه بین درجه سانتی‌گراد و فارنهایت که برای اندازه‌گیری دما استفاده می‌شوند به صورت $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ است که در آن x میزان درجه سانتی‌گراد و $f(x)$ میزان درجه فارنهایت است. $f^{-1}(x)$ را به دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می‌دهد.

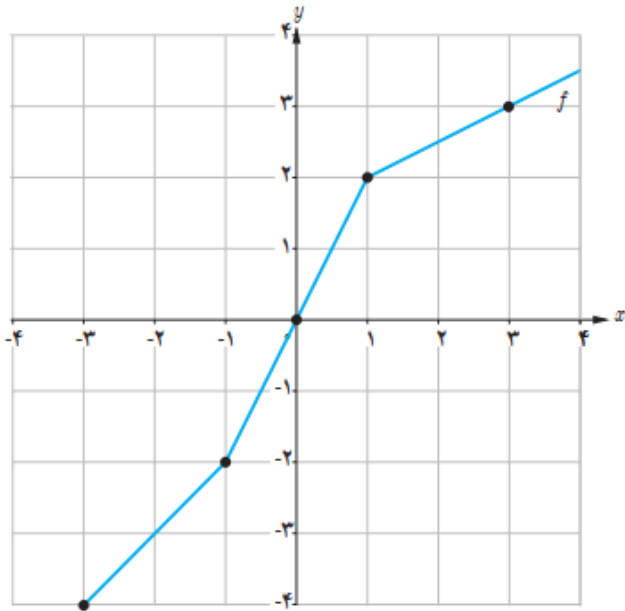
۴ توابع زیر یک به یک نیستند. با محدود کردن دامنه آنها توابعی یک به یک بسازید و ضابطه وارون آنها را به دست آورید.

الف) $f(x) = |x|$

ب) $g(x) = -x^2$

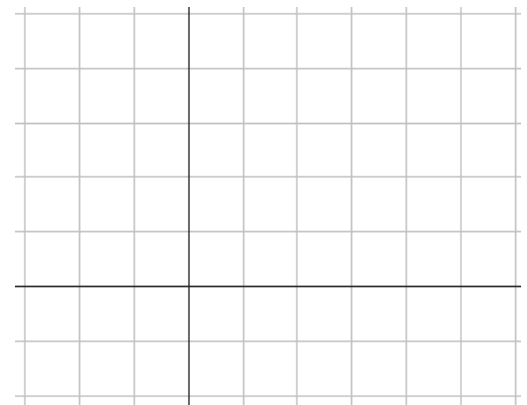
پ) $h(x) = x^2 + 2x + 3$

۵ از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید.



x	-4	-2	2	3
$f^{-1}(x)$	...	...	...	...

۶ با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ، یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.



۷ اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^2$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.

الف $(f \circ g)^{-1}(5)$

ب $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$

پ $(g^{-1} \circ f^{-1})(5)$

نمونه سوالات نهایی



(دی ۱۴۰۲ - ۱/۵ نمره)

۱- ضابطه و دامنه تابع وارون تابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = -x^2 - 2; x \geq 0$$

(خرداد ۱۴۰۲ - ۰/۲۵ نمره)

۲- در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید

اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x-1}$ باشد، مقدار $(f \circ f^{-1})(5)$ برابر با است.

سوالات تکمیلی



(سراسری تجربی ۱۴۰۱)

۱- وارون تابع $y = x^3 - x + 1$ از کدام نقطه عبور می کند؟

$$\left(-\frac{1}{6}, -\frac{11}{8}\right) \text{ : د}$$

$$(1, 2) \text{ : ج}$$

$$\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right) \text{ : ب}$$

$$(-1, 2) \text{ : الف}$$

۲- محل تلاقی تابع $f(x) = ax - x^3 + b$ با وارون آن نقطه $(-\frac{1}{2}, -1)$ است. مقادیر a و b را بیابید.

نکته: اگر f یک تابع اکیدا صعودی باشد، در صورتی که f^{-1} و f در نقاطی همدیگر را قطع کنند، این نقاط حتماً روی نیمساز ربع اول و سوم است.



نتیجه: در این حالت برای یافتن نقاط تقاطع f^{-1} و f کافی است f را با نیمساز ربع اول و سوم قطع دهیم.



۳- نقطه های تلاقی تقاطع وارون تابع $f(x) = \sqrt{4x-3}$ با خود تابع را بیابید.

فصل ۲ مثلثات

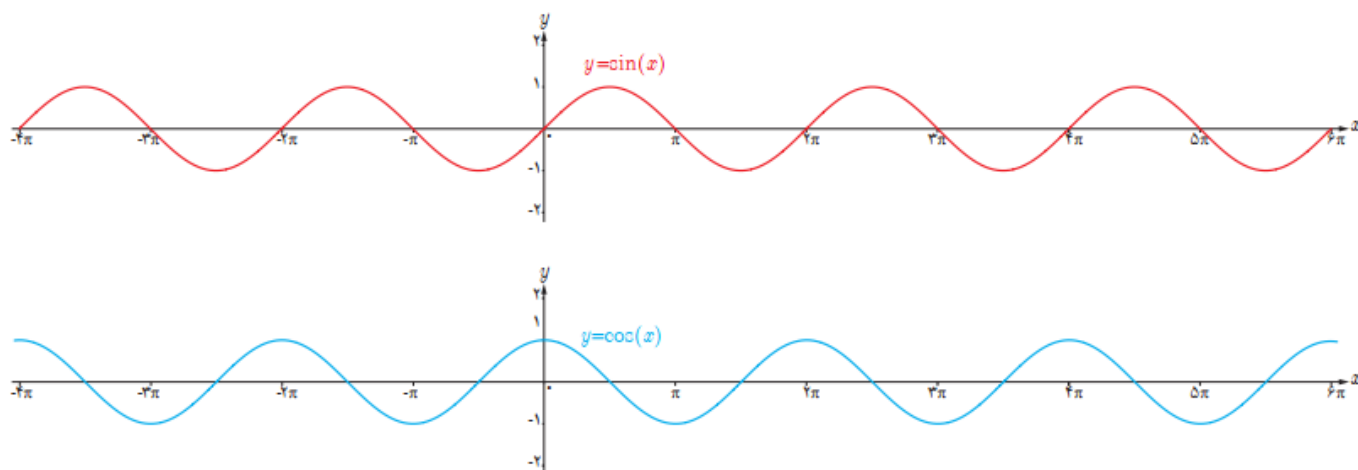
تناوب و تانژانت

درس اول

معادلات مثلثاتی

درس دوم

با توابع مثلثاتی $f(x) = \cos x$ و $f(x) = \sin x$ در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصله 2π روی محور x ها یکسان است ($\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x$ و $\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x$) به عبارتی اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در بازه‌ای به طول 2π داشته باشیم، با تکرار این تکه می‌توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می‌توانید در شکل‌های زیر مشاهده نمایید.

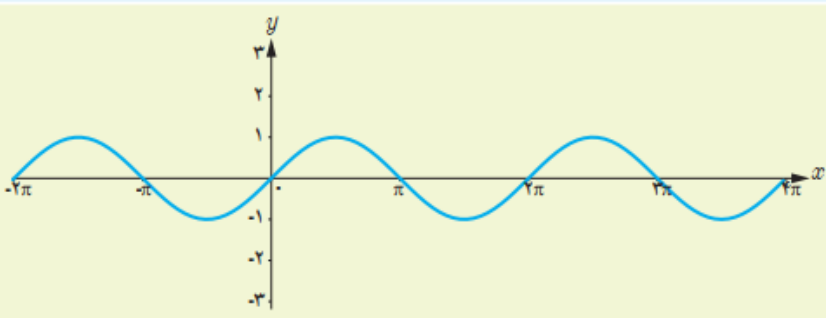
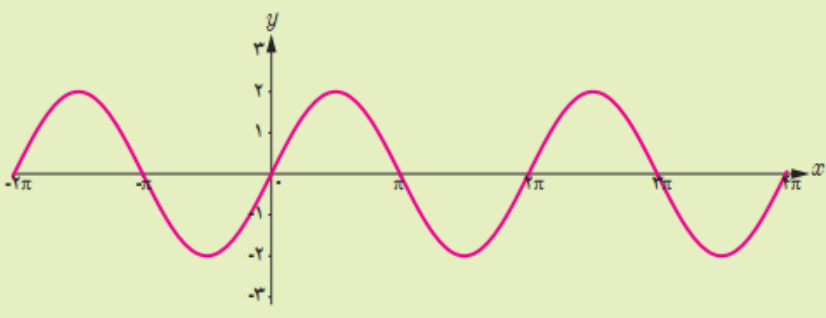
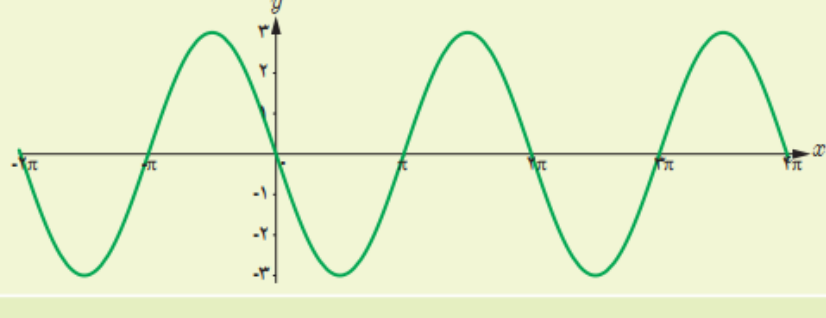
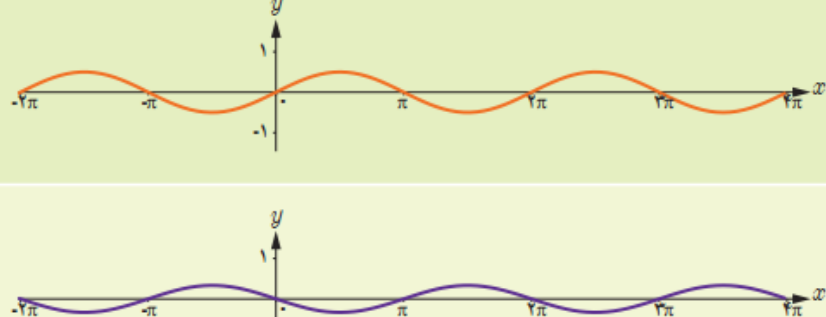
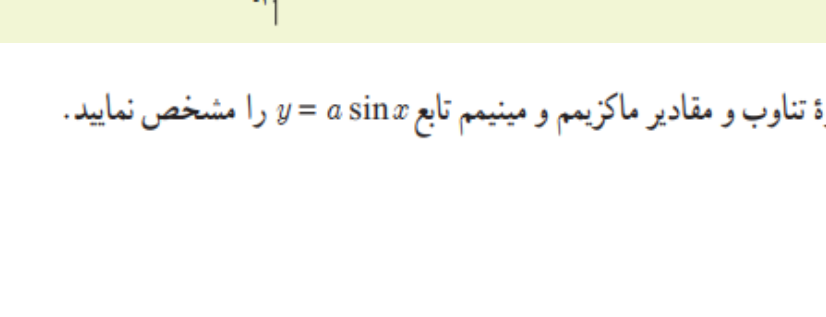


با دقت به نمودار توابع فوق می‌توان مشاهده کرد که نمودار در بازه‌هایی به طول 2π ، 4π ، 6π و ... تکرار می‌شود. اما کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار این توابع در آن تکرار شده است، همان 2π است. چنین توابعی را توابع متناوب و 2π را دوره تناوب آنها می‌نامیم.

تعریف: تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$. کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f می‌نامیم.

فعالیت

۱ می‌دانیم دوره تناوب تابع $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ برابر 2π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع به ترتیب ۱ و -۱ است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب a را در تابع $f(x) = a \sin x$ بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی نماییم.

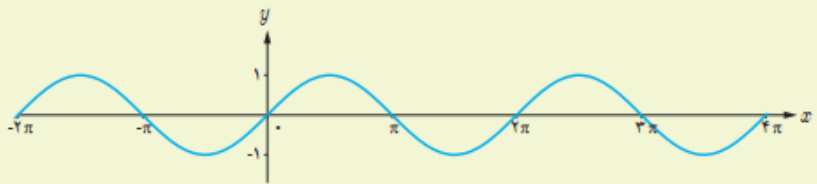
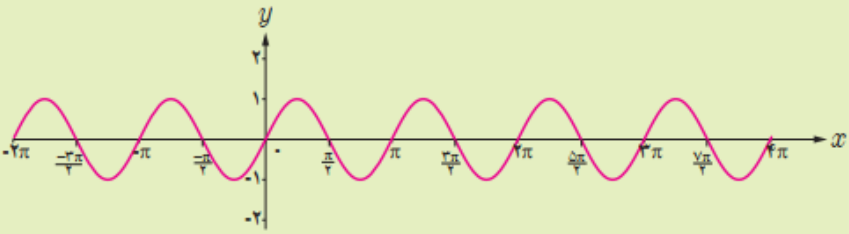
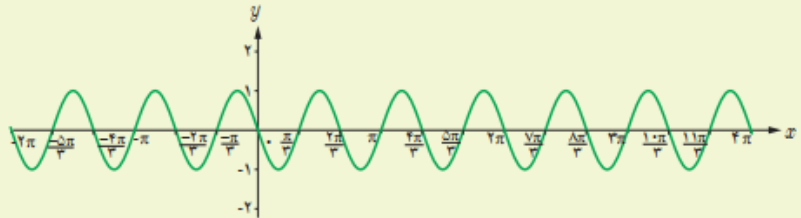
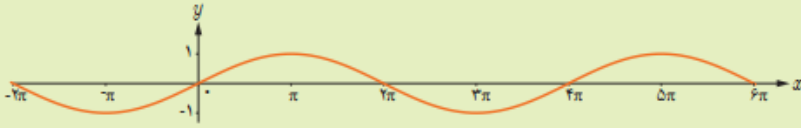
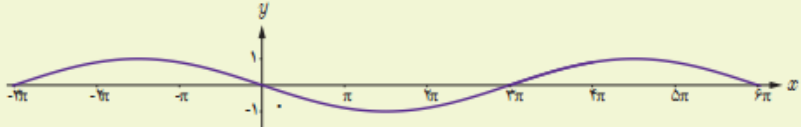
تابع	نمودار تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره تناوب
$y = \sin x$		۱	-۱	2π
$y = 2 \sin x$		...	...	...
$y = -3 \sin x$		...	...	...
$y = \frac{1}{3} \sin x$		...	...	...
$y = -\frac{1}{3} \sin x$		...	...	...

۲ با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = a \sin x$ را مشخص نمایید.

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می دانید مشخص نمایید دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = a \sin x + c$ چگونه است. با انجام مراحل مشابه بالا می توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y = a \cos x + c$ و $y = a \cos x$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می آید.

فعالیت

۱ با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شده زیر، دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب b در تابع $y = \sin bx$ را بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

تابع	نمودار تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره تناوب
$y = \sin x$		۱	-۱	2π
$y = \sin 2x$		...	...	...
$y = \sin(-3x)$		...	...	...
$y = \sin \frac{x}{3}$		...	...	...
$y = \sin(-\frac{x}{3})$		...	...	...

۲ با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx$ را مشخص نمایید.

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می دانیم، مشخص نمایید دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx + c$ چگونه است. با انجام مراحل مشابه مراحل بالا می توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y = \cos bx$ و $y = \cos bx + c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می آید.

همان طور که در فعالیت های قبل دیدیم در توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ ضریب a در دوره تناوب تابع بی تأثیر است، اما در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضریب b در دوره تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بی تأثیر است. مقدار c نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می شود، در دوره تناوب بی تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است.

توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$

و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

بنابراین با داشتن ضابطه تابعی به صورت فوق می توان مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب تابع را به دست آورد و برعکس با داشتن مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب یک تابع مثلثاتی، می توان ضابطه تابع مورد نظر را به دست آورد.

مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y = 3 \sin(2x) - 2$

ب) $y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x)$

پ) $y = \pi \sin(-x) + 1$

ت) $y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

حل:

$$y = 3 \sin(2x) - 2$$

$$\text{الف) } \max = |3| - 2 = 1 \quad \min = -|3| - 2 = -5 \quad T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x)$$

$$\text{ب) } \max = \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4} \quad \min = -\left| -\frac{1}{4} \right| = -\frac{1}{4} \quad T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$y = \pi \sin(-x) + 1$$

$$\text{پ) } \max = |\pi| + 1 = \pi + 1 \quad \min = -|\pi| + 1 = 1 - \pi \quad T = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$$

$$y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$\text{ت) } \max = |8| = 8 \quad \min = -|8| = -8 \quad T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$$



بدست آوردن پارامترهای a, b, c وقتی نمودارهای $y = a \cos bx + c$ و $y = a \sin bx + c$ داده شود.

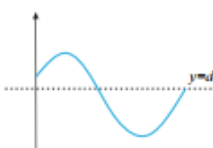
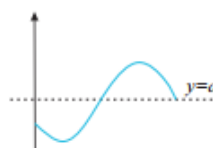
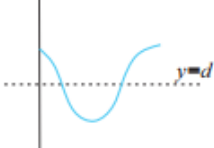
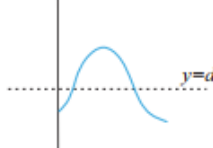
در موج سینوسی همواره داریم:

$$f(t) = a \sin(bt) + c$$

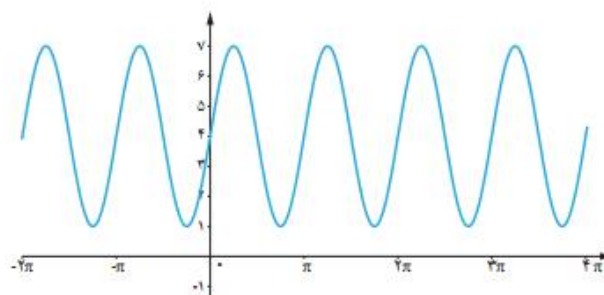
$|a| = \frac{\max - \min}{2}$ $|b| = \frac{2\pi}{T}$ $c = \frac{\max + \min}{2}$

جهت حرکت نمودار تابع‌های

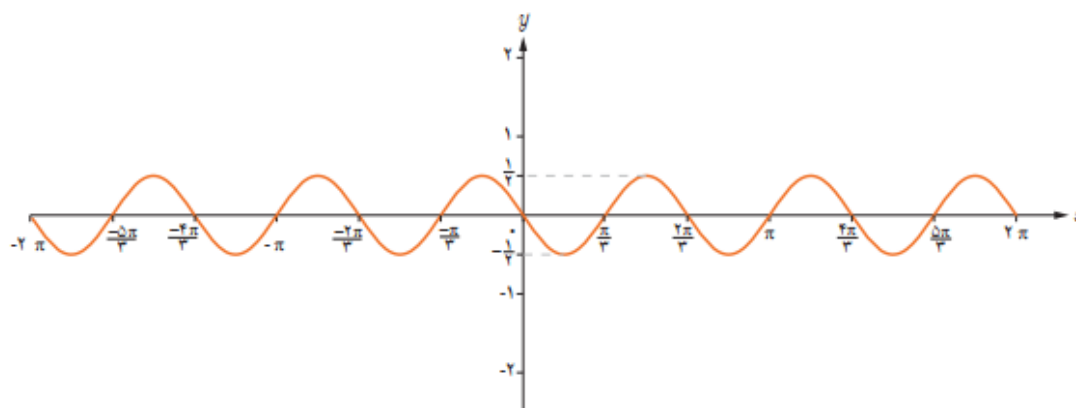
$y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$ با شرط $0 \leq c < \frac{\pi}{2}$ در شروع رسم از $x = 0$ به صورت زیر است:

نمودار $y = a \sin(bx + c)$		نمودار $y = a \cos(bx + c) + d$	
علامت a منفی	علامت a منفی	علامت a منفی	علامت a منفی
			
در شروع از $x = 0$ به بالا می‌رود. [شبه $y = \sin x$]	در شروع از $x = 0$ به پایین می‌رود. [شبه $y = -\sin x$]	در شروع از $x = 0$ به پایین می‌رود. [شبه $y = \cos x$]	در شروع از $x = 0$ به بالا می‌رود. [شبه $y = -\cos x$]

مثال: هر يك از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \sin bx + c$ یا $f(x) = a \cos bx + c$ است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص نمایید.

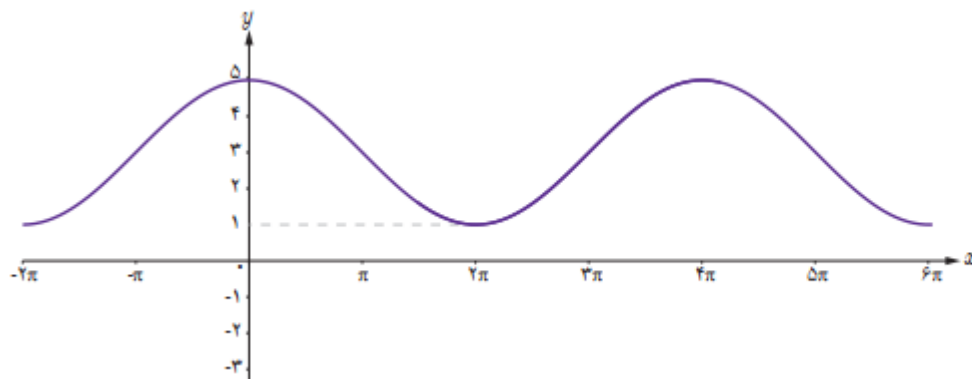


(الف)

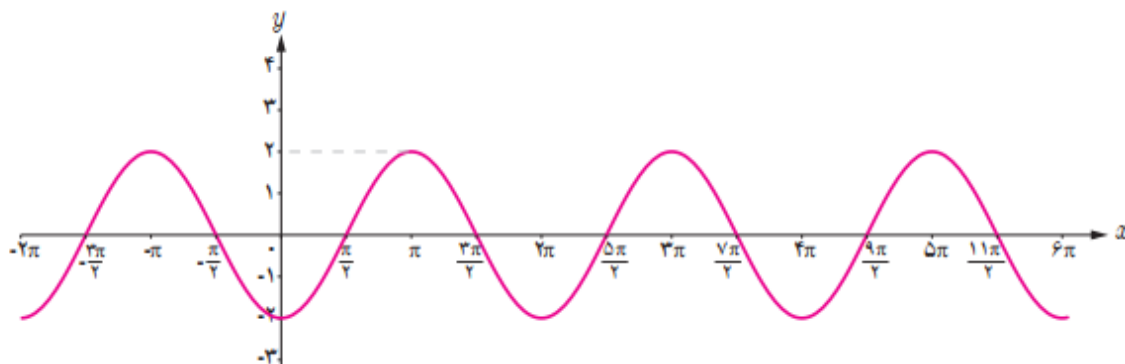


(ب)

(ب)



(ت)



حل: الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و دوره تناوب برابر π است. لذا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = 2$.

از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $|a| + c$ و $-|a| + c$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c = 4$ و در نتیجه $|a| = 3$.
با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای x و y دارد، هر دوی a و b باید مثبت باشند لذا ضابطه تابع مورد نظر به صورت مقابل است:

$$y = 3 \sin(2x) + 4$$

ب) با توجه به نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب از روی نمودار، $c = 0$ و $|a| = \frac{1}{3}$ و $|b| = 3$ به دست می‌آید که در آن علامت a منفی (مثبت) و b مثبت (منفی) است. بنابراین داریم

$$y = -\frac{1}{3} \sin 3x$$

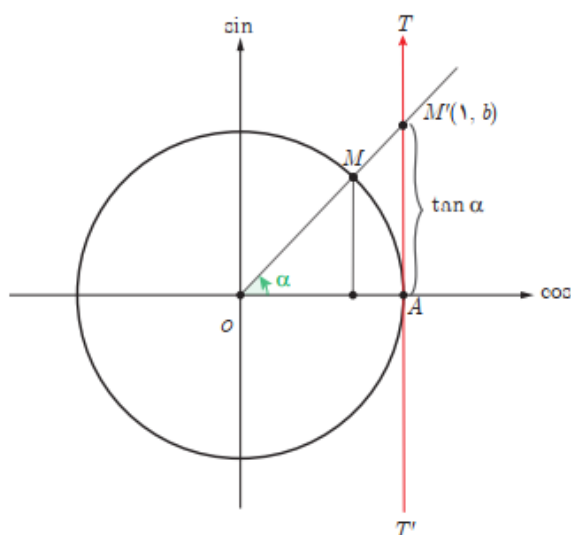
پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و دوره تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{4}$ و $|a| = 2$. لذا $a = 2$ و $b = \frac{1}{4}$ و بنابراین داریم $y = 2 \cos(\frac{x}{4}) + 3$.

ت) ضابطه این نمودار نیز می‌تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و $c = 0$ و $|a| = 2$ و $|b| = 1$ و a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم

$$y = -2 \cos x$$

تائزات

فعالیت



در دایره مثلثاتی رویه‌رو خط TAT' در نقطه A بر محور کسینوس‌ها عمود است. الف) زاویه α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطه M' قطع کند. نشان دهید:

$$\tan \alpha = AM' = b$$

می‌توان دید که تائزات هر زاویه دلخواه مانند α ، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود. بنابراین خط TAT' را محور تائزات می‌نامیم. نقطه A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

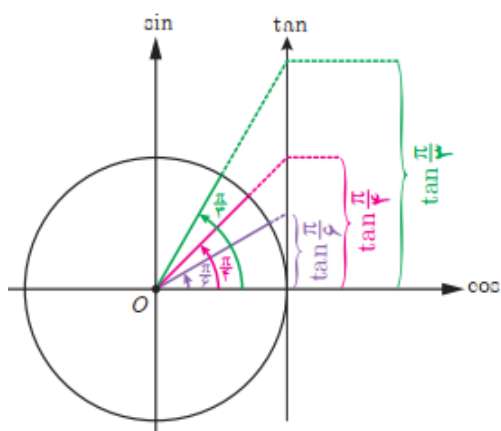
ب) چرا تائزات زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد

مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟

پ) آیا $\tan \frac{\pi}{4}$ عددی حقیقی است؟ $\tan \frac{3\pi}{4}$ چطور؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.

تغییرات تانژانت

فعالیت

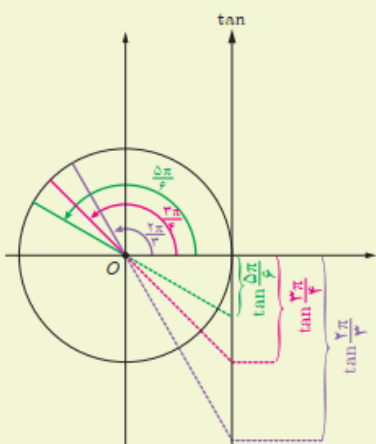
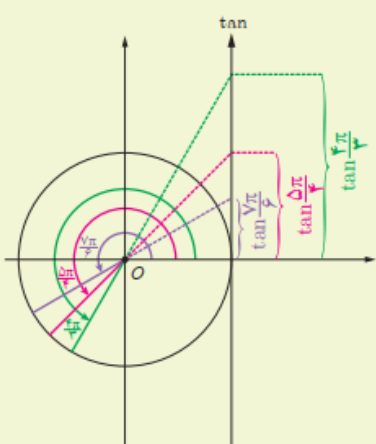
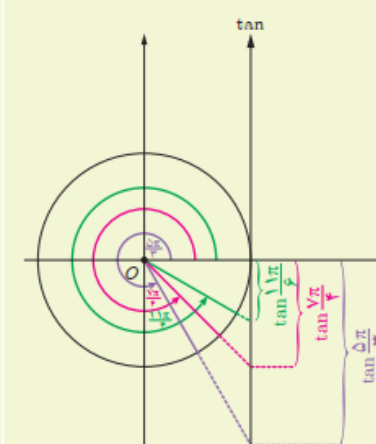


با تغییر زاویه α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایره مثلثاتی بررسی می‌کنیم. اگر $\alpha = 0$ ، مقدار $\tan \alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه α ، مقدار $\tan \alpha$ نیز افزایش می‌یابد.

الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویه α در ربع اول و نزدیک شدن آن به $\frac{\pi}{4}$ ، مقادیر تانژانت تا چه حد افزایش می‌یابد؟

ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت a را داشته باشیم، چگونه می‌توان زاویه‌ای مانند α یافت، به طوری که $\tan \alpha = a$.

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع‌های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهش؟
ب) بازه تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.

ردیف	دوم	سوم	چهارم
زوايا			
افزایشی یا کاهش			
بازه تغییرات			

پ) جدول زیر را کامل کنید. (علامت $\nearrow$ به معنی افزایش یافتن و علامت $\searrow$ به معنی کاهش یافتن است.)

ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{6}$ π	$\frac{7\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{4}$ $\frac{4\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$ $\frac{7\pi}{4}$ $\frac{11\pi}{6}$ 2π
$\nearrow \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\nearrow +\infty$	... -1 ...		

تابع تانژانت

همان طور که می بینیم به ازای هر زاویه دلخواه در دایره مثلثاتی (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$), عددی حقیقی به عنوان $\tan x$ داریم و تابعی با ضابطه $y = \tan x$ مشخص می کند. دامنه این تابع مجموعه $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می توان دید تابع $y = \tan x$, تابعی متناوب است و دوره تناوب آن π است، زیرا:

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

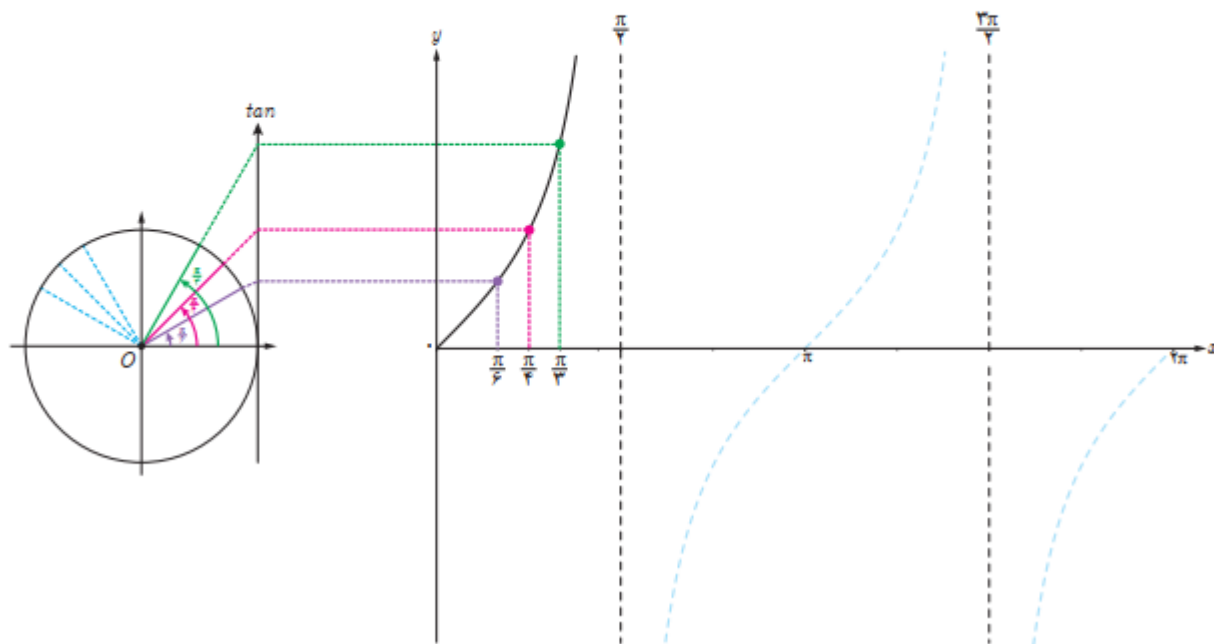
کار در کلاس

صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan x$ را در مجموعه $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] - \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$ بررسی کنید.

رسم تابع $y = \tan x$

فعالیت

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan x$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع های دیگر رسم کنید.



۱ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هریک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 1 + 2 \sin 7x$

ب) $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{4} x$

پ) $y = -\pi \sin\left(\frac{x}{4}\right) - 2$

ت) $y = -\frac{3}{4} \cos 3x$

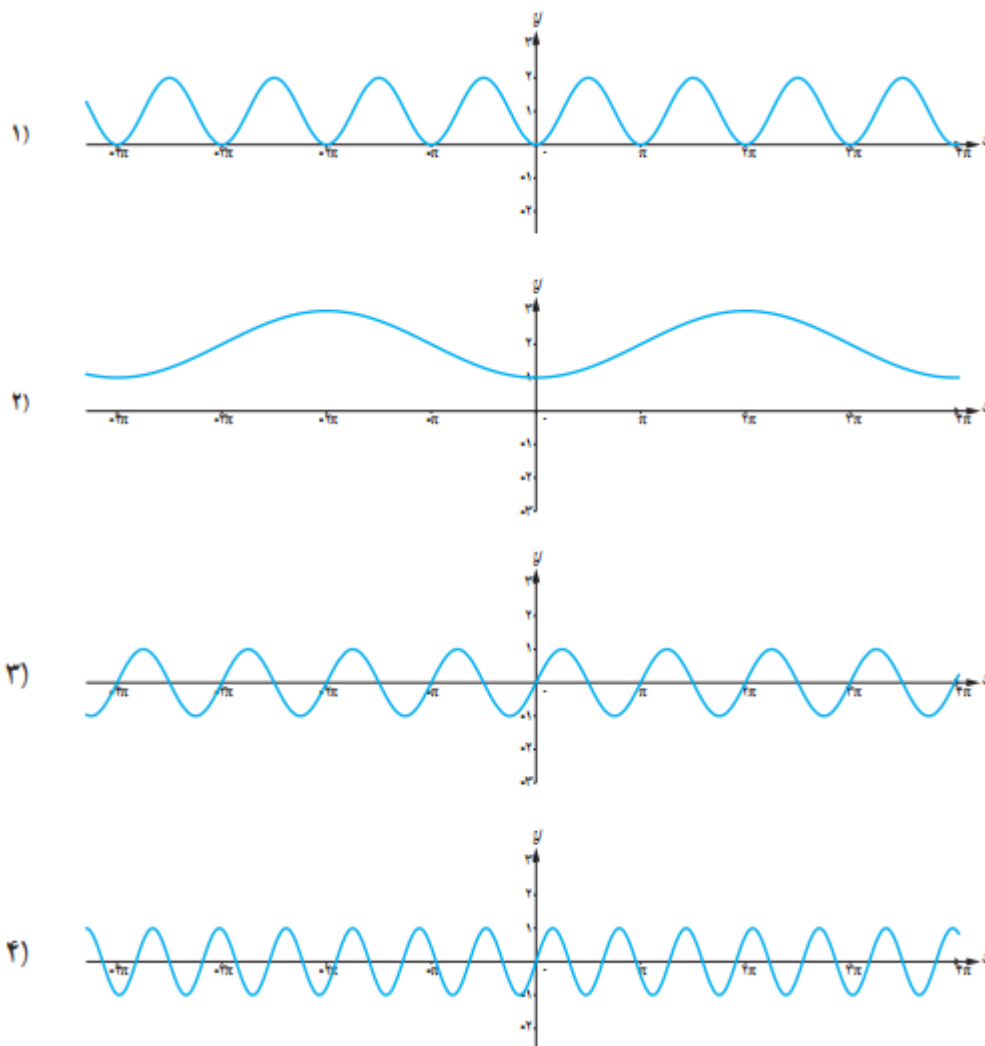
۲) هر يك از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

ت) $y = 1 - \cos 2x$

ب) $y = \sin 2x$

ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{4}x$

الف) $y = \sin \pi x$



۳) در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

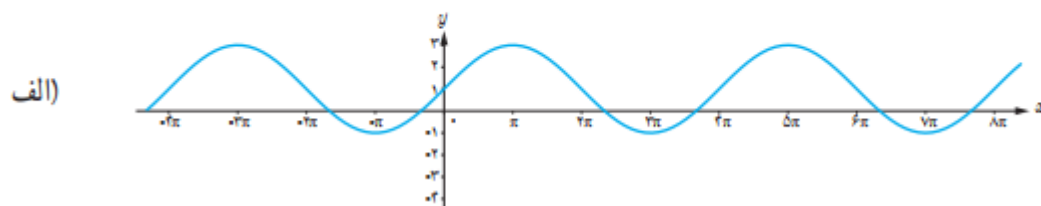
الف) $T = \pi$, $\max = 3$, $\min = -3$

ب) $T = 3$, $\max = 9$, $\min = 3$

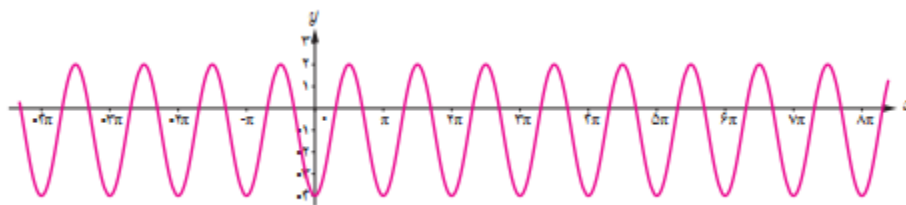
پ) $T = 4\pi$, $\max = -1$, $\min = -7$

ت) $T = \frac{\pi}{4}$, $\max = 1$, $\min = -1$

۴ ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.



ب)



۵ کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است.

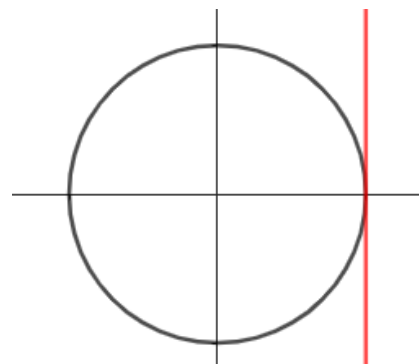
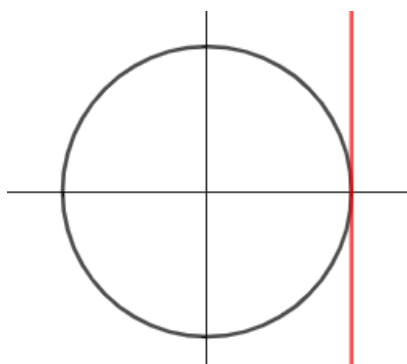
ب) می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

پ) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

۶ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید:

ب) $\frac{3\pi}{4} < \alpha < 2\pi$

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$

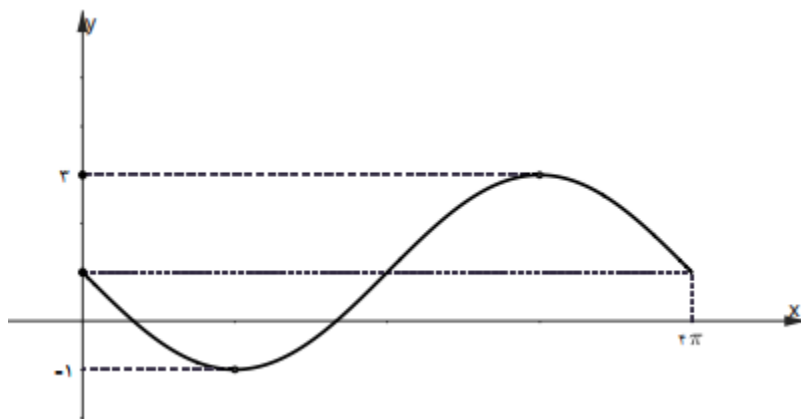


نمونه سوالات نهایی



- ۱- اگر بیشترین و کمترین مقدار تابع $y = a \sin(\lambda x) + c$ به ترتیب ۹ و ۳ باشد.
الف: مقادیر $|a|$ و c را بیابید. ب: دوره تناوب تابع را بدست آورید.

- ۲- نمودار زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin bx + 1$ است. حاصل ab را بیابید.

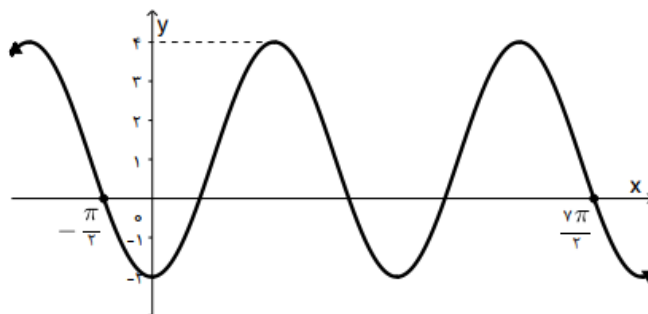


(دی ۱۳۹۷-۱/۵ نمره)

۳- الف: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 2 - 3 \sin 4x$ را بدست آورید.ب: دامنه تابع $f(x) = \tan(2x)$ را بدست آورید.۴- نمودار تابع با ضابطه $y = a \cos bx + c$ به صورت زیر رسم شده است. مقادیر a و b و c را بدست

آورید.

(دی ۱۴۰۱-۱/۷۵ نمره)



سوالات تکمیلی



۱- دوره تناوب $f(x) = \frac{1}{2} - \sin \frac{2x}{a}$ برابر $\frac{\pi}{3}$ است. دوره تناوب $y = \cos ax$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۳ نوبت دوم)

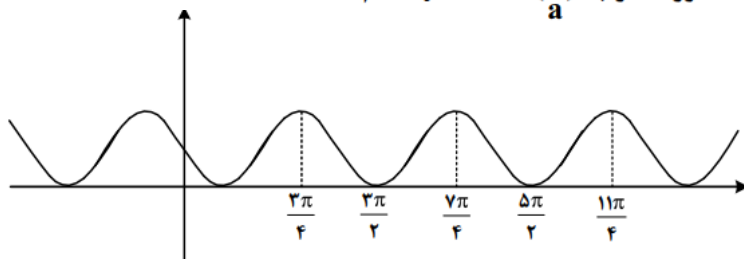
۱۲π (۴)

۶π (۳)

۴π (۲)

۳π (۱)

۲- شکل زیر، نمودار تابع $y = 1 + \sin ax$ است. دوره تناوب $y = 3 \cos(\frac{x}{a})$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۳ نوبت اول)



۴π (۱)

۶π (۲)

۳π (۳)

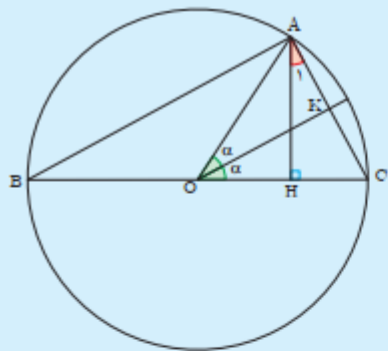
۲π (۴)

درس دوم

معادلات مثلثاتی

نسبت های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان

در محاسبات فنی گاهی نسبت مثلثاتی برخی زوایا مورد نیاز است که مقدار آن را می توان به کمک دیگر زوایا به دست آورد. اگر مقدار $\cos 15^\circ$ را نیاز داشته باشیم چگونه می توان آن را با استفاده از مقدار $\cos 30^\circ$ به دست آورد؟ به وضوح 15° نصف 30° است و نیز می دانیم $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. آیا با نصف کردن مقدار $\cos 30^\circ$ می توان $\cos 15^\circ$ را به دست آورد؟ در ادامه خواهیم دید که جواب منفی است ولی همچنان می شود مقدار $\cos 15^\circ$ را به کمک مقدار معلوم $\cos 30^\circ$ یافت اما نه با نصف کردن^۱.



دایره رویه رو به شعاع واحد و مرکز O را در نظر بگیرید. مطابق شکل، زاویه مرکزی O برابر 2α داده شده که رویه رو به وتر AC است. از این رو در مثلث $OA\hat{K}$ داریم:

$$AK = \sin \alpha \Rightarrow AC = 2AK = 2 \sin \alpha \quad (1)$$

همچنین $\widehat{AC} = 2\alpha$ و از آنجا که زاویه محاطی B رویه رو به $\widehat{AC}$ است، لذا نصف آن است پس: $\hat{B} = \alpha$.

از طرفی $\hat{A}$ یک زاویه محاطی رویه رو به قطر BC است و لذا: $\hat{A} = 90^\circ$. همچنین از مجموع زوایای $\hat{ABC}$ به دست می آید:

$$\hat{ABC}: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \alpha + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \alpha$$

به طور مشابه در $\hat{AHC}$ داریم:

$$\hat{AHC}: \hat{H} + \hat{A}_1 + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{A}_1 + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = \alpha$$

اکنون ضلع AH را در $\hat{AHC}$ و $\hat{OAC}$ به دست آورده و برابر قرار می دهیم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{OAC}: AH = \sin 2\alpha \\ \hat{AHC}: \cos \hat{A}_1 = \cos \alpha = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \cos \alpha \xrightarrow{(1)} AH = 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

همچنین در $\hat{OAH}$ داریم: $OH = \cos 2\alpha$ و در $\hat{AHC}$ داریم:

$$\sin \hat{A}_1 = \sin \alpha = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = \sin \alpha \times AC = \sin \alpha (2 \sin \alpha) = 2 \sin^2 \alpha$$

از طرفی با توجه به اینکه $OC = 1$ شعاع دایره است پس داریم:

$$OC = OH + HC = 1 \Rightarrow OH = 1 - HC \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

و نیز با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ به دست می آوریم $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$.

۱- این روش را ابوالوفا بوزجانی ریاضی دان مشهور ایرانی ارائه داده است. طرح اثبات فوق در ارزشیابی ها مجاز نیست.

به طور کلی داریم:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

مثال: مقدار $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ را بیابید.

$$\cos 30^\circ = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$$

$$\sin 30^\circ = 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \cos 15^\circ$$

$$\sin^2 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

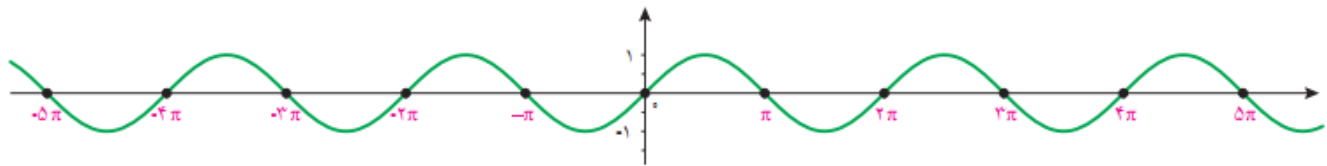
$$\frac{1}{2} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \cos 15^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad (15^\circ \text{ در ربع اول است.})$$

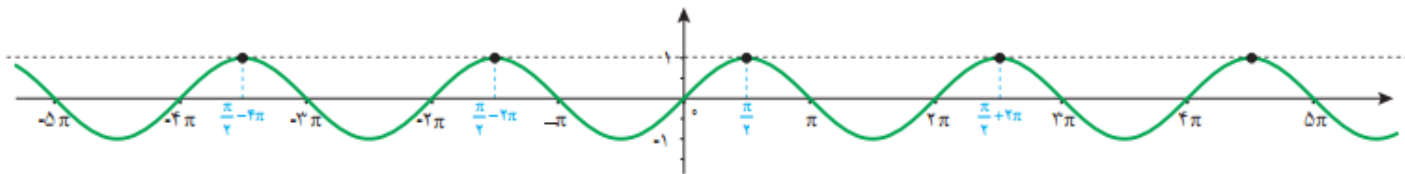
$$\cos 15^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} \quad (15^\circ \text{ در ربع اول است.})$$

معادلات مثلثاتی

معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول داریم، یک معادله مثلثاتی نام دارد.
مثال: تابع مثلثاتی $y = \sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید.



همان‌طور که از نمودار پیداست، صفرهای این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x = 0$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به صورت $\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ می‌باشند، محل تقاطع تابع ثابت $y = 0$ (یعنی محور x ها) و تابع $y = \sin x$ است. این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x = k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.
به‌طور مشابه جواب‌های معادله $\sin x = 1$ مقدارگیری از x هستند که به ازای آنها مقدار $\sin x$ برابر ۱ می‌شود. این مقادیر محل تقاطع $y = 1$ و $y = \sin x$ است که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادله صفحه قبل به صورت

$$x = \dots, \frac{\pi}{2} - 2\pi, \frac{\pi}{2} - 4\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \dots$$

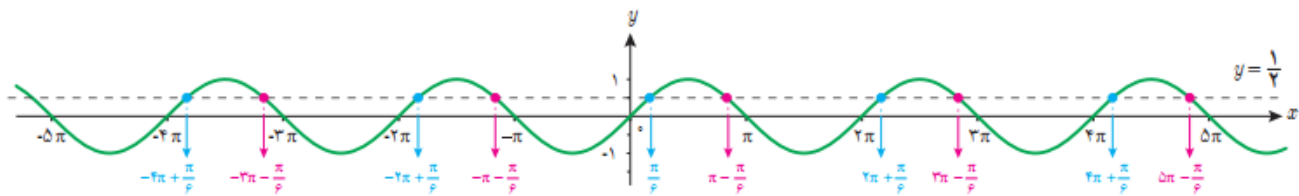
می‌باشند که به صورت کلی $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ قابل نمایش است.

اکنون معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ را در نظر می‌گیریم. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

فعالیت

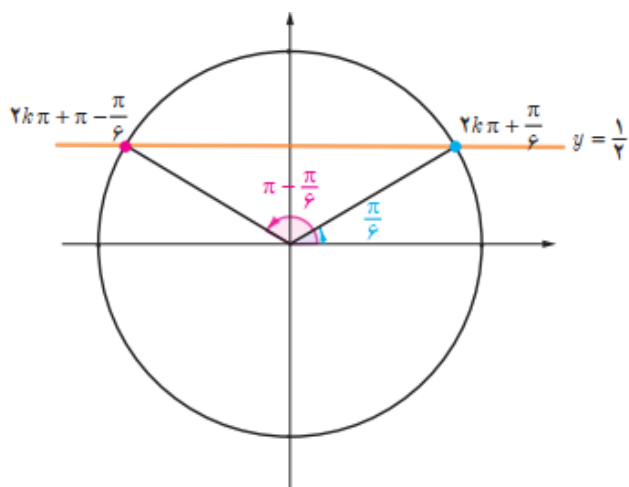
۱ چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است مثال بزنید.

۲ خط $y = \frac{1}{2}$ و نمودار $y = \sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری را که مثال زده‌اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده‌اید در بین نقاط نمایش داده شده در زیر هستند؟



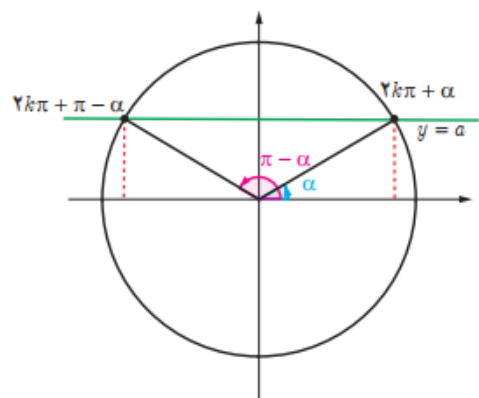
۳ طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{4}$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴ در دایره مثلثاتی زیر خط $y = \frac{1}{4}$ و زوایای $\frac{\pi}{6}$ و $\pi - \frac{\pi}{6}$ که سینوس آنها برابر $\frac{1}{4}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{6}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi - \frac{\pi}{6}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟



هم انتها با $\frac{\pi}{6}$: $\dots, -2\pi + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, \dots$

هم انتها با $\pi - \frac{\pi}{6}$: $\dots, -\pi - \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}, \dots$



برای عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ که $\sin x = a$ ، زاویه‌ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم $\sin \alpha = a$. بنابراین معادله $\sin x = a$ به صورت $\sin x = \sin \alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x = \sin \alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را بیابیم.

با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به‌طوری که $\sin x = \sin \alpha$ در دوران‌های مختلف به‌صورت زیر است:

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \text{ و } x = (2k+1)\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: معادله $\sin x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید.

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

کار در کلاس

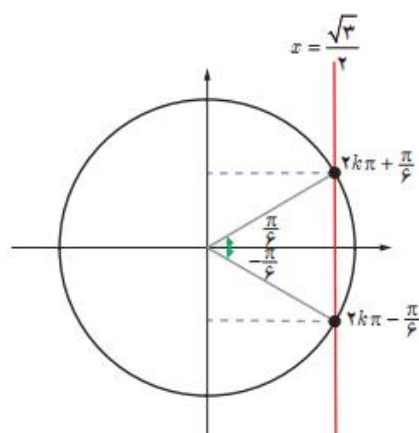
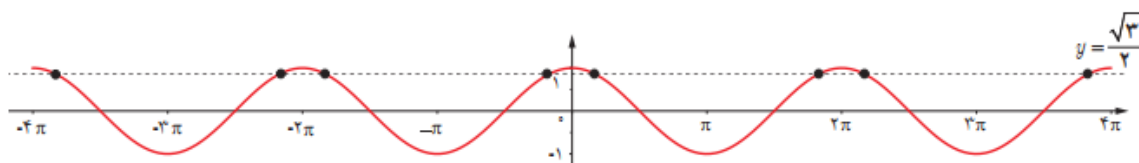
معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

ب) $4\sin x + \sqrt{8} = 0$

فعالیت

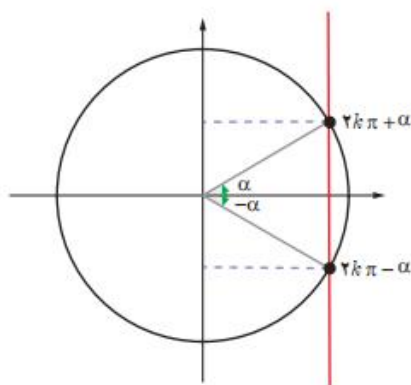
نمودار تابع $y = \cos x$ و خط $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را بیابید.



الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه‌رو و محل تقاطع خط $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ با دایره مثلثاتی، جواب‌های معادله فوق را به دست آورید.

برای هر عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ در معادله $\cos x = a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که $\cos \alpha = a$.



بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به صورت $\cos x = \cos \alpha$ نوشته و سپس رابطه بین زوایای x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو به صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \text{ و } x = 2k\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: جواب‌های معادله $\cos x = \frac{1}{3}$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi, \pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}$ پس معادله به صورت $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق نتیجه می‌شود که جواب‌های $x = -2\pi - \frac{\pi}{3}, -2\pi + \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

مثال: معادله $\sin 2x = \sin 3x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند:

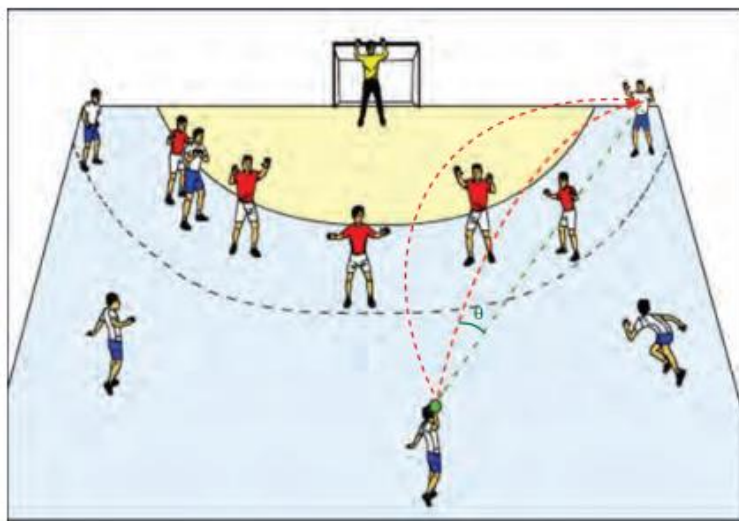
$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - 3x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال: معادله $2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

$$2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$$

$$2\sin 3x = \sqrt{2}$$

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



مثال: یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت 16 m/s برای هم‌تیمی خود که در $12/8$ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{10}$$

از رابطه داده شده به دست می‌آید:

$$12/8 = \frac{(16)^2 \sin 2\theta}{10} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{12/8 \times 10}{256} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2\theta = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta = \frac{\pi}{12}$ و $\theta = \frac{5\pi}{12}$ می باشد.

مثال: جواب های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را به دست آورید.

$$2 \sin x \cos x = 2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال: معادله $\cos x (2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به صورت $2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$ می نویسیم. با تغییر متغیر $\cos x = t$ می توان معادله فوق را به معادله درجه دوم

$2t^2 - 9t - 5 = 0$ تبدیل کرد. جواب های این معادله $t = 5$ و $t = -\frac{1}{2}$ است. بنابراین جواب های معادله مثلثاتی بالا از حل دو معادله ساده

$\cos x = 5$ و $\cos x = -\frac{1}{2}$ به دست می آیند. از آنجا که $\cos x = 5$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب های معادله $\cos x = -\frac{1}{2}$ را به دست می آوریم.

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

روش های حل معادلات مثلثاتی



اصلی ترین روش های موجود برای حل یک معادله ی مثلثاتی را به صورت زیر دسته بندی می کنیم؛ (u و v عبارت هایی برحسب x هستند).

حالت	فرم معادله	روش حل معادله
۱	$\sin u = \sin v$	با این که v خودش مجهول است، اما فرم کلی جواب ها را می نویسیم، انگار که v معلوم است! بعد با حل معادله ای برحسب x ، آن را پیدا می کنیم.
	$\cos u = \cos v$	
۲	$\sin u = \cos v$	با متمم کردن یکی از کمان ها، مثل حالت بالا می شود! $\sin u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ یا $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos v$
۳	$a \sin^2 u + b \sin u + c = 0$	با روش Δ یا تجزیه، نسبت مثلثاتی را در می آوریم و بعد هم فرم کلی جواب ها و ... انگار در ابتدا داریم: $aA^2 + bA + c = 0$
	$a \cos^2 u + b \cos u + c = 0$	

مثال ۱: جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos^3 x = \cos x$ را بدست آورید.

مثال ۲: جواب کلی معادله $\sin^2 x = \cos x$ را بدست آورید.

نکته: حل معادلات مثلثاتی با ظاهر درجه دوم


برای حل معادلات مثلثاتی با ظاهر درجه دوم، با دو حالت کلی زیر مواجه می‌شویم:

- ۱ اگر نسبت‌های مثلثاتی یکسان باشند، می‌توانیم با استفاده از اتحادهای جبری، معادله را به صورت ضرب چند عامل بنویسیم.
- ۲ اگر در معادله، هم سینوس و هم کسینوس وجود داشته باشد، ابتدا عبارت را برحسب نسبت مثلثاتی یکسان می‌نویسیم و سپس آن را تجزیه می‌کنیم.

چیزی که در معادله‌ی مثلثاتی می‌بینید	کاری که باید انجام بدهید...
$\sin^2 u$ به همراه $\cos u$ $\cos^2 u$ به همراه $\sin u$	با اتحاد مثلثاتی $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ ، نسبت مثلثاتی توان دو را هم‌جنس دیگری کنید.
$\cos^2 u$ در کنار $\sin u$ $\cos^2 u$ در کنار $\cos u$	با اتحاد $\cos^2 u = 1 - \sin^2 u$ ، تمامی نسبت‌های مثلثاتی موجود می‌شوند $\sin u$. با اتحاد $\cos^2 u = 1 - \sin^2 u$ ، تمامی نسبت‌های مثلثاتی موجود می‌شوند $\cos u$.
$\sin^2 u$ در کنار $\cos u$ یا $\sin u$	$\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u$ یا $\sin^2 u \cos u = \sin u \cos u$

مثال ۳: جواب‌های کلی معادله $\cos(2x) + \sin x = -2$ را بدست آورید.

مثال ۴: جواب‌های کلی معادله $\sin(2x) - 2\cos x = 0$ را بدست آورید.

تمرین

۱ فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\cos^2 \alpha$

ب) $\sin^2 \alpha$

۲ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به دست آورید.

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 3x$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

پ) $\cos x = \cos 2x$

$$\text{ت) } \cos^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

$$\text{ث) } \cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$$

$$\text{ج) } \sin x - \cos^2 x = 0$$

۲ مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت ها می توان ساخت؟

نمونه سوالات نهایی 

۱- جوابهای معادله $\cos(2x) = \frac{1}{p}$ را در بازه $(0, \pi)$ بدست آورید. (خرداد ۱۴۰۳-۱/۲۵ نمره)

(خرداد ۱۴۰۲-۰/۲۵ نمره)

۲- درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
فقط دو زاویه وجود دارد که مقدار کسینوس آن $\frac{2}{5}$ باشد.

۳- جواب معادله مثلثاتی $2 \sin 4x = 1$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ هستند؟ (خرداد ۱۴۰۲-۱/۵ نمره)

۴- درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
مقدار عددی عبارت $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$ برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}$ است. (دی ۱۴۰۱-۰/۲۵ نمره)

۵- حاصل عبارت $4 \sin x \cos x \cos 2x$ را به ازای $x = 7/5^\circ$ را محاسبه نمایید. (شهریور ۱۴۰۰-۱ نمره)

سوالات تکمیلی



۱- اختلاف جوابهای معادله مثلثاتی $\cos 2x = 3 \sin x - 1$ که در بازه $[0, \pi]$ قرار دارند، کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۳ نوبت دوم)

$$\frac{2\pi}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{\pi}{6} \quad (۳)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{5\pi}{6} \quad (۱)$$

۲- معادله مثلثاتی $\sin 2x - 4 \sin^2 x \cos x = 0$ چند جواب در بازه $(-\pi, \pi)$ دارد؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۳ نوبت اول)

$$۷ \quad (۴)$$

$$۶ \quad (۳)$$

$$۵ \quad (۲)$$

$$۴ \quad (۱)$$

فصل ۳

حد بی نهایت و حد در بی نهایت

حد بی نهایت

درس اول

حد در بی نهایت

درس دوم

تهیه کننده : رقیه پيله ور - دبیر ریاضی ناحیه دو اردبیل



برای تماشای ویدیوهای آموزشی ریاضی ۳ تجربی (همین جزوه) می توانید به سایت

math-pilevar.ir یا math-pilevar.com مراجعه کنید.



درس اول

حد بی نهایت

یادآوری و تکمیل

در کلاس یازدهم با مفهوم حد تابع در یک نقطه آشنا شدیم. در فصل حاضر به حد بی نهایت و حد در بی نهایت خواهیم پرداخت. پیش از آن لازم است مطالبی را از پایه قبل یادآوری و تکمیل کنیم. همچنین، برخی پیش نیازها باید ارائه گردد.

بخش پذیری چندجمله ای ها بر $(x - a)$:

فعالیت

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5x + 1 \quad | \quad x - 3 \\ -(\square - 6x) \quad \quad 2x + \square \\ \hline x + 1 \\ -(\square - 3) \\ \hline 4 \end{array}$$

۱ الف) چندجمله ای $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ را بر دو جمله ای درجه اول $(x - 3)$ تقسیم

کرده ایم. جاهای خالی را پر کنید :

ب) اگر در تقسیم بالا، باقیمانده را با R نشان دهیم، داریم $R = \dots$

پ) مقدار $f(3)$ را محاسبه کنید.

ت) $f(3)$ و R چه رابطه ای با هم دارند؟

ث) رابطه تقسیم را کامل کنید : $2x^2 - 5x + 1 = (x - 3)(2x + \square) + 4$

۲ الف) اکنون می خواهیم در حالت کلی چندجمله ای دلخواه $f(x)$ را بر دو جمله ای درجه اول $(x - a)$ تقسیم کنیم. فرض کنیم

خارج قسمت این تقسیم، چندجمله ای $Q(x)$ و باقیمانده آن عدد ثابت R باشد :

$$\begin{array}{r} f(x) \quad | \quad x - a \\ \quad \quad Q(x) \\ \hline R \end{array}$$

رابطه تقسیم به صورت زیر است :

$$f(x) = (x - a) Q(x) + R$$

این رابطه، به ازای تمام مقادیر x درست است؛ از جمله به ازای $x = a$. با قرار دادن a به جای x در دو طرف رابطه فوق خواهیم داشت :

$$f(a) = (a - a) Q(a) + R$$

ب) از رابطه اخیر مقدار R را به دست آورید.

از فعالیت قبل دیده می شود که :

قضیه : در تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر دوجمله ای درجه اول $(x - a)$ ، باقی مانده تقسیم برابر $f(a)$ است.
نتیجه : اگر $f(a)$ برابر صفر باشد آنگاه $f(x)$ بر $(x - a)$ بخش پذیر است.

نتیجه حاضر را می توان برای تجزیه چندجمله ای ها به کار برد.

کار در کلاس

۱ در چندجمله ای $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$ ، مقدار $f(2)$ برابر صفر است. بنابراین $f(x)$ بر $(x - 2)$ بخش پذیر است. با تکمیل مراحل تقسیم، درستی این مطلب را بررسی کنید.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x - 2 \quad | \quad x - 2 \\ -(3x^2 - 6x) \quad \quad 3x + \dots \\ \hline x - 2 \\ -(\dots\dots\dots) \\ \hline R = \dots \end{array}$$

بنابر رابطه تقسیم داریم : $f(x) = 3x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(3x + \dots)$
 همانگونه که دیده می شود، $f(x)$ به صورت حاصل ضرب عامل های آن نوشته شده است.

۲ چندجمله ای $g(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا $g(x)$ بر $(x + 1)$ بخش پذیر است؟ چرا؟

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید :

پ) $g(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل ها بنویسید.

$$2x^3 + x^2 + 1 \quad | \quad x + 1$$

۳ نشان دهید چندجمله ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر دوجمله ای $x + 2$ بخش پذیر است.

حد توابع کسری

با قضیه زیر از پایه قبل آشنا هستیم :

قضیه : اگر دو تابع f و g در نقطه ای به طول a حد داشته باشند و حد آنها در این نقطه به ترتیب l و m باشد به طوری که $m \neq 0$ ، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و این حد برابر $\frac{l}{m}$ است.

مثال ۱:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = \frac{12}{6} = 2$$

در سال گذشته دیدیم که در یک تابع گویا مثل $\frac{f}{g}$ ، اگر $f(a) = g(a) = 0$ ، در این صورت دیگر قضیه بالا برای محاسبه حد تابع $\frac{f}{g}$ در a قابلیت استفاده ندارد. در این حالت با توجه به روابط $f(a) = 0$ و $g(a) = 0$ ، نتیجه می‌گیریم که چند جمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x - a)$ بخش پذیرند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج کسر $\frac{f}{g}$ بر $(x - a)$ ، تابع گویای دیگری حاصل می‌شود که حد آن در نقطه a ، در صورت وجود با حد $\frac{f}{g}$ در a برابر است.

مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$ را محاسبه کنید.

حل: صورت و مخرج کسر به ازای $x = 1$ برابر صفرند. بنابراین هم صورت و هم مخرج بر $(x - 1)$ بخش پذیرند. این عامل را به کمک تجزیه، در صورت و مخرج ظاهر و سپس حذف می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

مثال: حد تابع $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + 8}$ را در نقطه $x = -2$ در صورت وجود به دست آورید.

حل: در این مثال نیز صورت و مخرج به ازای $x = -2$ برابر صفرند. باید عامل $(x + 2)$ را در صورت و مخرج ظاهر کنیم. مخرج را می‌توانیم به کمک اتحاد مجموع مکعب‌های دو جمله به حاصل ضرب عامل‌های اول تجزیه کنیم. اما برای تجزیه صورت، آن را بر $(x + 2)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 3x^2 + 4 \quad | \quad x+2 \\ -(2x^3 + 4x^2) \\ \hline -x^2 + 4 \\ -(-x^2 - 2x) \\ \hline 2x + 4 \\ -(2x + 4) \\ \hline 0 \end{array}$$

بنابر رابطه تقسیم می‌توان نوشت $2x^3 + 3x^2 + 4 = (x + 2)(2x^2 - x + 2)$. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x^2 - x + 2)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{8 + 2 + 2}{4 + 4 + 4} = 1$$

تذکر: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. در این حالت برای محاسبه حد $\frac{f}{g}$ در نقطه a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x - a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به دست آوریم.

مثال: حد تابع $g(x) = \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$ را در نقطه به طول $x=5$ در صورت وجود به دست آورید.
 حل: هم حد صورت و هم حد مخرج در نقطه ۵ برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $2 + \sqrt{x-1}$ ضرب می‌کنیم تا صورت کسر عبارتی گویا شود.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5} \times \frac{2 + \sqrt{x-1}}{2 + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4 - (x-1)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(2 + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{2+2} = \frac{-1}{4}\end{aligned}$$

مثال: حد تابع $h(x) = \frac{x^2 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2}$ را در $x=8$ در صورت وجود به دست آورید.
 حل: هم حد صورت و هم حد مخرج در $x=8$ برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4$ ضرب می‌کنیم تا مخرج کسر گویا شود.

$$\lim_{x \rightarrow 8} h(x) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x \cancel{(x-8)} (\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{\cancel{x-8}} = 8(4 + 4 + 4) = 96$$

کار در کلاس

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x - 1}$

پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}$

ت) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x + 3}}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x^2 + 3x + 2}$

حد نامتناهی

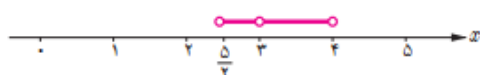
تابعی مثل f را در نظر بگیرید که در نزدیکی یک نقطه مثل a ، مقدارش از هر عدد دلخواه مثبتی بتواند بزرگ تر شود؛ به عبارت دیگر، در نقطه a حد آن $+\infty$ شود. در اینجا، حدهایی از این نوع را بررسی می‌کنیم. ابتدا به چند تعریف نیاز داریم.

همسایگی: هر بازه باز شامل عدد حقیقی x را یک همسایگی x می‌نامیم. به عبارت دیگر اگر $x \in (a, b)$ آنگاه بازه (a, b) یک همسایگی x می‌باشد.

مثال: بازه $(2, 5)$ یک همسایگی ۳ است. آیا بازه $(0, 4)$ هم یک همسایگی برای ۳ محسوب می‌شود؟ شما دو همسایگی دیگر برای ۳ بنویسید و جواب خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



همسایگی محذوف: اگر بازه (a, b) یک همسایگی عدد حقیقی x باشد، آنگاه مجموعه $(a, b) - \{x\}$ یک همسایگی محذوف x نامیده می‌شود.



مثال: مجموعه $(\frac{5}{4}, 4) - \{3\}$ یک همسایگی محذوف ۳ می‌باشد.

همسایگی چپ و راست: اگر r عددی مثبت باشد آنگاه $(x, x+r)$ یک همسایگی راست x نامیده می‌شود. همچنین، $(x-r, x)$ را یک همسایگی چپ x می‌نامیم.

مثال: بازه $(3, 4)$ یک همسایگی راست ۳ و بازه $(\frac{3}{4}, 3)$ یک همسایگی چپ ۳ است. شما یک همسایگی راست دیگر برای ۳ و یک همسایگی چپ برای آن بنویسید.

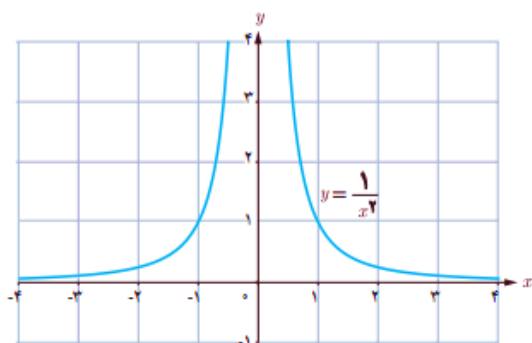


فعالیت

می‌خواهیم مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ را در صورت وجود به دست آوریم. می‌دانیم تابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ در هر نقطه غیر صفر تعریف شده است؛ یعنی $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. با تکمیل جدول زیر، به رفتار تابع f در یک همسایگی محذوف صفر توجه کنید.

x	-0.2	-0.1	-0.01	-0.0001	$\rightarrow 0 \leftarrow$	0.0001	0.001	0.01	0.1	0.2
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	25	100	...	100000000	$\rightarrow ? \leftarrow$	...	100000000	...	...	25

در جدول دیده می‌شود که وقتی x از سمت راست یا چپ به صفر نزدیک می‌شود، مقدار x^2 نیز به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین مقادیر $\frac{1}{x^2}$ ، به هر اندازه دلخواه بزرگ می‌شوند. در واقع با دقت در نمودار تابع $y = \frac{1}{x^2}$ می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه به اندازه کافی x را به صفر نزدیک کنیم، خواهیم توانست مقادیر $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه بزرگ



نماییم. بنابراین دیده می‌شود که مقدارهای بزرگ‌شونده $f(x)$ به هیچ عددی میل نمی‌کنند؛ در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ موجود نیست. با این حال، در چنین مواقعی برای توصیف بهتر رفتار تابع در همسایگی محذوف صفر، می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

تذکر: همچنان که از سال‌های قبل می‌دانیم، $+\infty$ یک عدد حقیقی نیست و رابطه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ صرفاً به حالت خاصی از عدم وجود حد اشاره دارد. به این معنا که $\frac{1}{x^2}$ را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم بزرگ کنیم، مشروط بر آنکه x را به قدر کافی به صفر نزدیک کرده باشیم. این گونه حدها را حد نامتناهی یا حد بی‌نهایت می‌نامیم.

تعریف ۱: فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

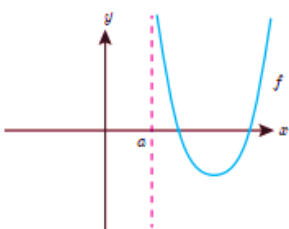
رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شود:

تعریف ۲: فرض کنیم f در یک تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی کرد، مشروط بر آنکه x به قدر به a نزدیک اختیار شود.

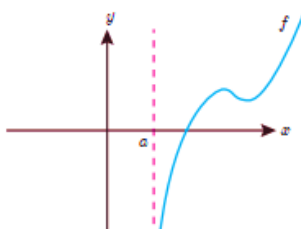
حدهای یک طرفه نامتناهی نیز به روش مشابهی تعریف می‌شوند. به عنوان نمونه تعریف $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ در زیر آمده است.

تعریف ۳: فرض کنیم f در یک همسایگی راست از a تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x با مقادیر بزرگ‌تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

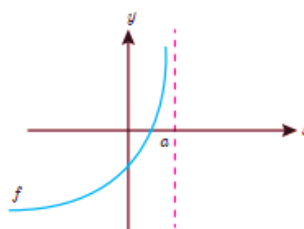
به نمودار مربوط به $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ و همچنین سایر حالت‌های حدود نامتناهی یک طرفه، در شکل‌های زیر دقت کنید.



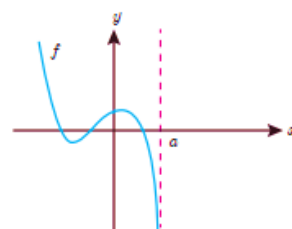
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



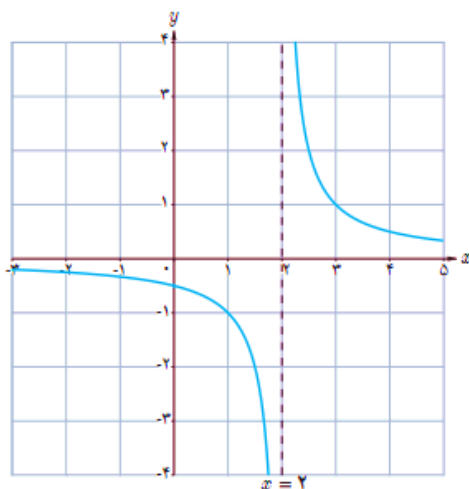
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



مثال: حد چپ و راست تابع $f(x) = \frac{1}{x-2}$ را در $x=2$ به دست آورید.

حل: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x-2}$ رسم شده است. به مقادیر تابع در سمت راست و چپ $x=2$ دقت نمایید. وقتی $x \rightarrow 2^+$ در این حالت مخرج کسر یعنی $(x-2)$ عددی مثبت و کوچک نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه $\frac{1}{x-2}$ مثبت و بسیار بزرگ می شود که مقدار آن می تواند از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر شود. بنابراین همان طور که از نمودار هم دیده می شود، $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$.

به همین ترتیب وقتی $x \rightarrow 2^-$ ، مخرج کسر یعنی $(x-2)$ عددی منفی و بسیار نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه مقدار $\frac{1}{x-2}$ می تواند از هر عدد منفی دلخواه، کوچک تر شود، بنابراین $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$. درستی این مطلب، از روی نمودار هم قابل مشاهده است.

در مورد حدهای نامتناهی قضیه زیر بدون اثبات ارائه می شود.

قضیه: فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ در این صورت:

الف) اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ب) اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

پ) اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

ت) اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

تذکر: قضیه قبل، برای حالتی که $x \rightarrow a^+$ و یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x]-3}{|2x-1|}$ را محاسبه کنید.

حل: مخرج در نزدیکی $\frac{1}{2}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می کند و حد صورت هم در $\frac{1}{2}$ برابر -3 است. پس بنابر قسمت (پ) قضیه قبل داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x]-3}{|2x-1|} = -\infty$$

کار در کلاس

۱. حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x-5}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x}{x-5}$

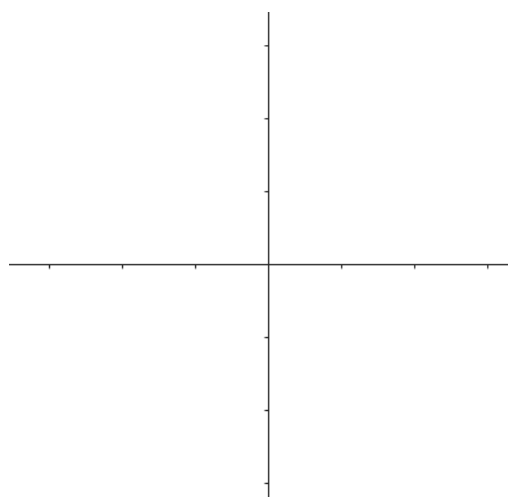
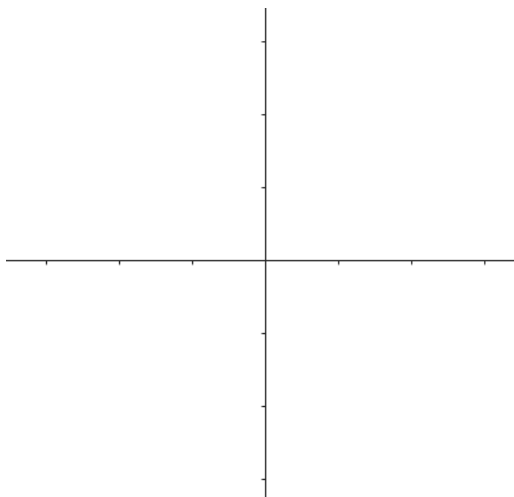
پ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|}$

ث) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin^2 x}$

۲. نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف ۲- تعریف شده باشد به طوری که $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.



تمرین

۱ الف) نشان دهید چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ بر دوجمله‌ای $x + 1$ بخش پذیر است.

ب) به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنویسید.

۲ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 + 4x^2 + x + 4}$

۲) حدود زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^2 - x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x + 16}{\sqrt[3]{x} + 2}$

۴ حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{9}{(x+6)^2}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{(x-3)^4}$

ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}} \frac{4x+1}{(2x+1)^2}$

چ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-5x}{x^2-9}$

ح) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2-4}$

خ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x}$

د) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x$

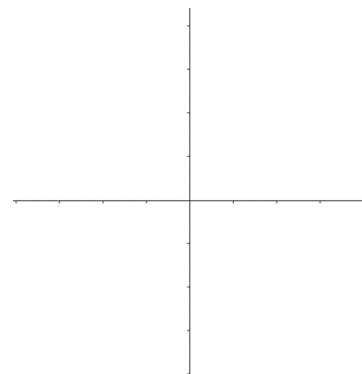
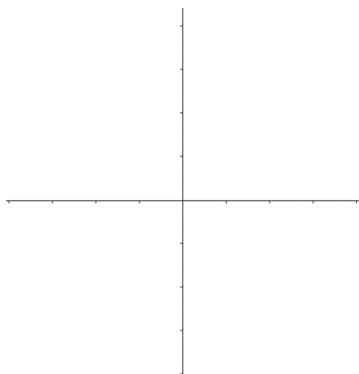
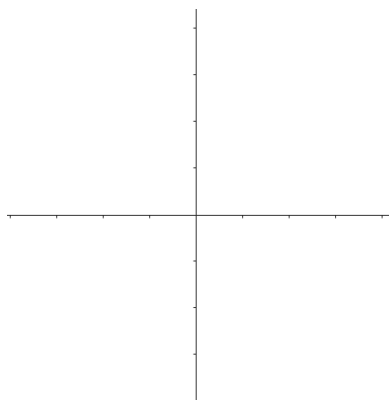
ذ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$

ر) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-3}{x-3}$

۵ الف) عبارت $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

ب) عبارت $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

پ) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در هر دو شرط بالا صدق کند. مسئله چند جواب دارد؟



نمونه سوالات نهایی



(خرداد ۱۴۰۳ - ۱/۵ نمره)

۱- حدود زیر را محاسبه کنید. (نماد [] علامت جزء صحیح است.)

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)^4}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-[x]}{x-3}$

(دی ۱۴۰۲ - ۰/۲۵ نمره)

۲- درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ بر $x - 1$ برابر ۲ است.

(دی ۱۴۰۲ - ۰/۲۵ نمره)

۳- جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

بازه $(-2, 0)$ یک همسایگی چپ برای عدد است.

(خرداد ۱۴۰۲ - ۰/۵ نمره)

۴- آیا مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{[x] - 1}$ وجود دارد؟ چرا؟

(خرداد ۹۹ - ۱/۲۵ نمره)

۵- حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - \sqrt{x+6}}$$

سوالات تکمیلی



(سراسری ریاضی ۹۸)

۱- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-5}{x^2+ax+b} = -\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

-۱ (۱)

(سراسری تجربی ۱۴۰۱)

۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-4}{x^3-[x^3]}$ کدام است؟

 $+\infty$ (۴)

۱ (۳)

 $\frac{1}{3}$ (۲)

صفر (۱)

درس دوم

حد در بی نهایت

حد در بی نهایت

در درس قبل که حدهای نامتناهی را بررسی کردیم، دیدیم که وقتی x به سمت عددی مثل a نزدیک می‌شود، مقادیر y به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کرد. در اینجا x را به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌دهیم و حد تابع را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

فعالیت

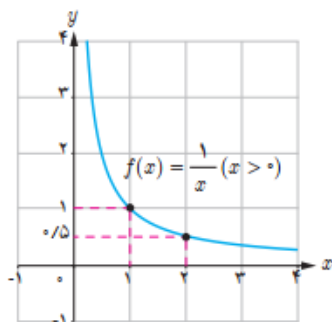
فرض کنید بخواهیم سطح مربعی به ضلع ۱ متر را طی فرایندی مطابق شکل‌های زیر رنگ کنیم. در مرحله اول، نصف سطح مربع را رنگ می‌کنیم. در مرحله دوم نصف قسمت‌های رنگ نشده را رنگ می‌زنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

مرحله	۱	۲	۳	۴	...
شکل					...
سطح رنگ شده (متر مربع)	$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2}$	$\frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{2^3}$	...	...

الف) در مرحله دهم، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

ب) در مرحله n ام، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

پ) اگر n به قدر کافی بزرگ اختیار شود، در مورد مساحت سطح رنگ شده در مرحله n ام چه می‌توان گفت؟



مثال : تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه $(0, +\infty)$ در نظر می‌گیریم. رفتار این تابع را به ازای برخی مقادیر مثبت x در جدول زیر مشاهده می‌کنید.

x	۱	۲	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	...	$\rightarrow +\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	۱	۰/۵	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	...	$\rightarrow ?$

از جدول دیده می‌شود که با افزایش مقدار x ، مقدار $\frac{1}{x}$ به صفر نزدیک و نزدیک تر می‌شود. به عنوان مثال، برای آنکه فاصله $\frac{1}{x}$ تا صفر، کمتر از 0.0001 باشد، لازم است x بزرگ تر از 100000 انتخاب شود. به نظر شما، آیا به هر میزان که بخواهیم، می‌توانیم مقدار $\frac{1}{x}$ را به صفر نزدیک کنیم؟ آیا مقداری از x وجود دارد که به ازای آن، فاصله $\frac{1}{x}$ تا صفر کمتر از 0.000001 باشد؟
با این شرایط می‌گوییم حد تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در $+\infty$ برابر صفر است و می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. به طور کلی می‌توان گفت:

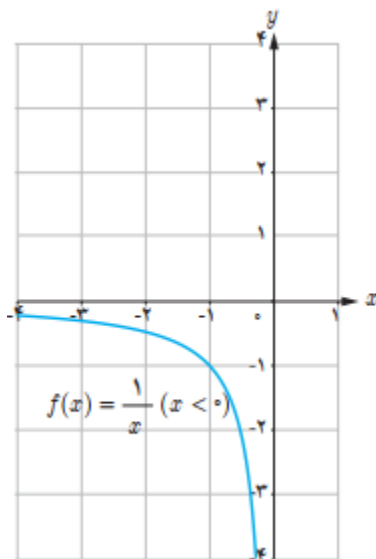
اگر تابع f در بازه‌ای مثل $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد، رابطه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می‌توان به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شود:

فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty, b)$ تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ به این معناست که به هر مقدار می‌توان $f(x)$ را به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کوچک و منفی اختیار شود.

مثال: با توجه به جدول زیر و با ملاحظه نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ که در بازه $(-\infty, 0)$ رسم شده است، دیده می‌شود که $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

x	$-\infty \leftarrow$	...	-1000000	-100000	-1000	-100
$f(x) = \frac{1}{x}$	$0 \leftarrow$	...	-0.000001	...	...	-0.01



در مورد حدهای نامتناهی، دو قضیه زیر مفیدند.

قضیه ۱: فرض کنیم n عددی طبیعی باشد. در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (\text{الف}) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (\text{ب})$$

قضیه ۲: فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m$. در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l \pm m \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l \cdot m \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{l}{m} \quad (m \neq 0) \quad (\text{پ})$$

تذکر: قضیه ۲ برای وقتی که $x \rightarrow -\infty$ نیز برقرار است.

مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2 - 4x + 1}{3x^2 + 5x - 6}$ را به دست آورید.

حل: برای محاسبه این حد، ابتدا باید صورت و مخرج را بر بزرگ‌ترین توانی از x که در مخرج وجود دارد، یعنی x^2 تقسیم کنیم (چون $x \rightarrow +\infty$ ، پس می‌توان نتیجه گرفت که $x^2 \neq 0$).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2 - 4x + 1}{3x^2 + 5x - 6} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{7x^2 - 4x + 1}{x^2}}{\frac{3x^2 + 5x - 6}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2})}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2})} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 7 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2}} = \frac{7 - 0 + 0}{3 + 0 - 0} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

کار در کلاس

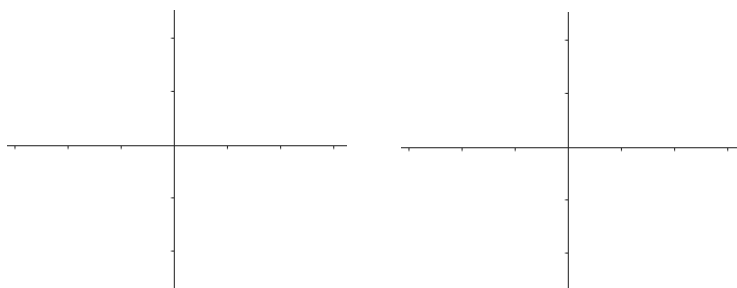
۱ مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 2}{x - 1}$

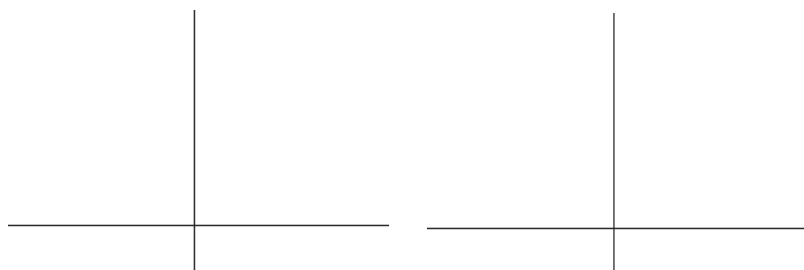
ب) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1-5t^2}{t^2+3t}$

پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-3x}$

۲ الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-1) باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.



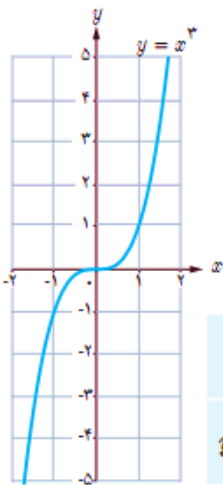
ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر 100 باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.



حد نامتناهی در بی نهایت

برخی توابع مانند f هستند که وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ مقدار آنها یعنی $f(x)$ می تواند به هر اندازه دلخواه بزرگ (یا کوچک منفی) شود. در این بخش رفتار این گونه تابع ها را در $+\infty$ یا $-\infty$ مورد مطالعه قرار می دهیم.

مثال: تابع $f(x) = x^3$ را در نظر بگیرید.



x	$-\infty \leftarrow$	-1000	-100	-10	10	100	1000	$\rightarrow +\infty$
$y = x^3$	$-\infty \leftarrow$	-1000000000	-1000000	-1000	1000	1000000	1000000000	$\rightarrow +\infty$

جدول بالا و همچنین نمودار تابع نشان می دهند که با افزایش مقدار x ، مقدار x^3 هم افزایش می یابد به طوری که با بزرگ کردن x به قدر کافی، می توان مقدار x^3 را از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر کرد. در این حالت می نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$. در حالت کلی داریم:

تعریف: فرض کنیم تابع f در بازه ای مثل $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد. رابطه

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

به روش مشابه از جدول و نمودار بالا دیده می شود که با منفی و کوچک گرفتن x به قدر کافی، می توان مقدار x^3 را از هر عدد منفی دلخواهی کوچک تر کرد. در این حالت می نویسیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$. در حالت کلی می توان گفت:

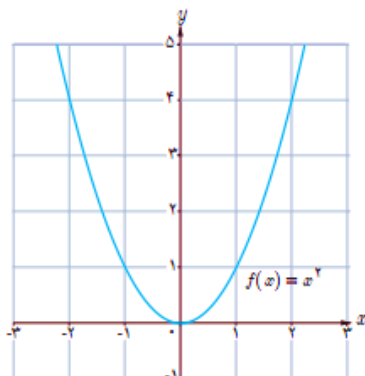
تعریف: فرض کنیم تابع f در بازه ای مثل $(-\infty, b)$ تعریف شده باشد. رابطه

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچک تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

تذکر ۱: رابطه های $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می شوند.

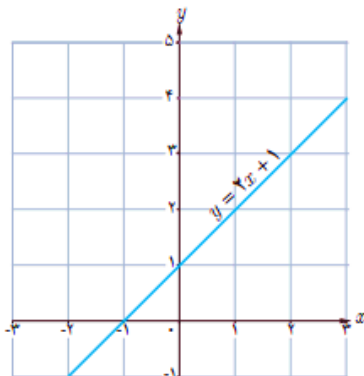
تذکر ۲: رابطه هایی مانند $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ را حد نامتناهی در بی نهایت می نامیم. همچنان که قبلاً بیان شد، این دو مورد، صورت هایی از عدم وجود حد تابع f در $+\infty$ هستند؛ چرا که $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند که بیانگر حد تابع f در $+\infty$ باشند.

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی ها را بنویسید.



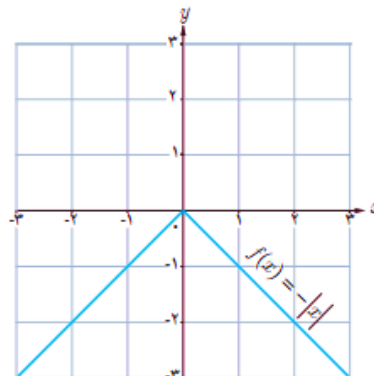
الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \dots$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \dots$



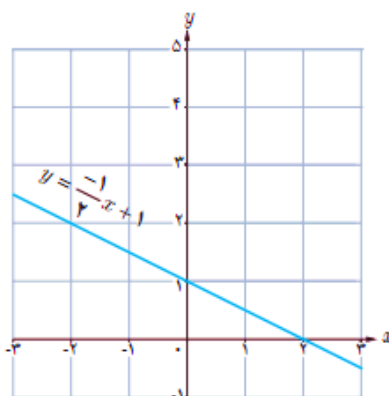
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) = \dots$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) = \dots$



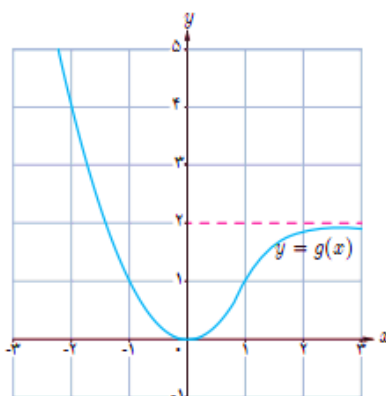
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$



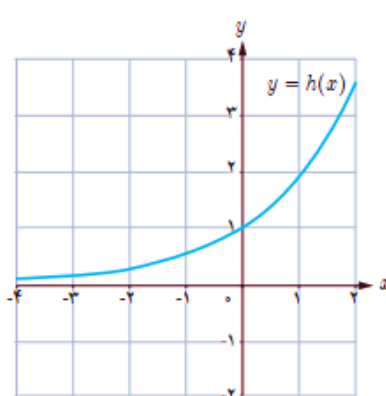
ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{2}x + 1 \right) = \dots$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{2}x + 1 \right) = \dots$



ث) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \dots$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots$



ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \dots$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \dots$

از قضیه زیر برای محاسبه حد تابع یک جمله ای $f(x) = ax^n$ در $+\infty$ و $-\infty$ استفاده می کنیم.

قضیه: فرض کنیم n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیر صفر باشد.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (a \text{ مثبت}) \\ -\infty & (a \text{ منفی}) \end{cases}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ مثبت}) \\ -\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ منفی}) \\ -\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ مثبت}) \\ +\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ منفی}) \end{cases}$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 + 5x^2)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 4x^2 - 5x - 9)$

حل:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 + 5x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + 5 \right)$

بنابر قضیه‌ای از درس قبل، حد $\frac{2}{x}$ و $\frac{3}{x^2}$ در $+\infty$ برابر صفرند؛ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + 5 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (0 - 0 + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 = +\infty$$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 4x^2 - 5x - 9) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{9}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 (-2 + 0)$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty$$

در هر دو قسمت مثال قبل دیده می‌شود که حد یک تابع چندجمله‌ای مثل f در $+\infty$ یا $-\infty$ برابر است با حد جمله با بزرگ‌ترین توان f در $+\infty$ یا $-\infty$. این مطلب در حالت کلی درست است و می‌توان به روش مثال بالا آن را اثبات کرد یعنی:

فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجه n به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیر صفر است. در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n$$

از این مطلب می‌توان برای محاسبه حد توابع گویا، زمانی که $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ نیز استفاده کرد. به مثال زیر دقت کنید.

مثال: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^5 + 7x^3 - 2x - 9}{3x^2 - 8x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^5}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^3) = +\infty$

نتیجه بسیار مهم براساس هم ارزی پرتوان



براساس هم ارزی پرتوان، یک نتیجهی بسیار مهم دربارهی کسرهایی که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای است. برای $x \rightarrow \pm\infty$ به دست می‌آید:

مثال	حاصل حد	شرط	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x + 5} = -\infty$	$+\infty$ یا $-\infty$	$n > m$ درجهی صورت از درجهی مخرج بیشتر است:	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots}$ $(m, n \in \mathbb{N}, a, a' \neq 0)$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x - 1}{x^2 + 2x - 7} = \frac{3}{1} = 3$	$\frac{a}{a'}$	$n = m$ درجهی صورت و مخرج مساوی است:	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5}{x^2 + 6x - 1} = 0$	صفر	$n < m$ درجهی صورت از درجهی مخرج کمتر است:	

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید :

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 4}{7x^3 - 11x^2 - 6x}$

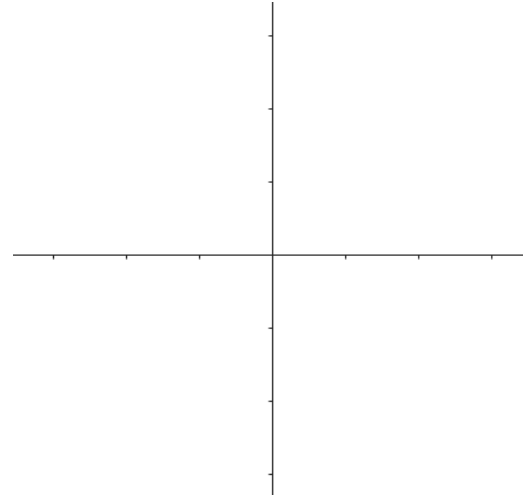
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 4}{x^3 + x - 8}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^5 + 5x^2}{2x^3 + 9}$

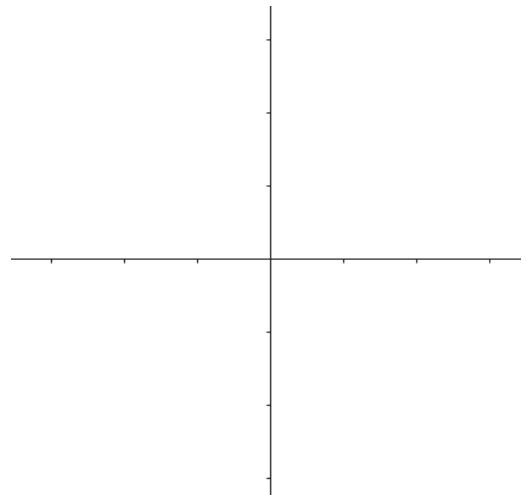
تمرین

۱ نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{1}{x}$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

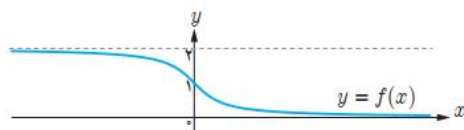


ب) $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$



۲ با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.

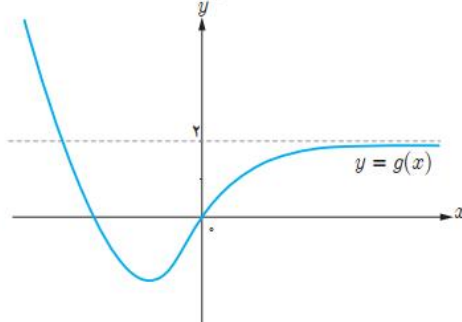
(الف)



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$$

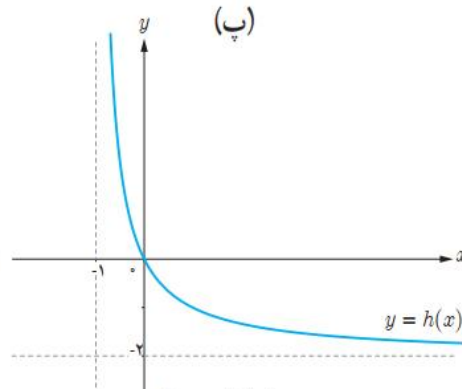
(ب)



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots$$

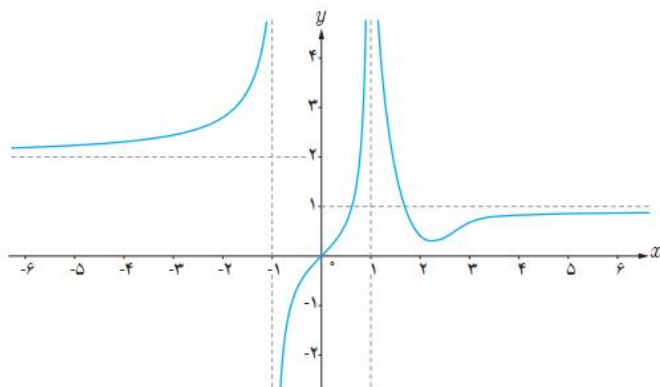
(پ)



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} h(x) = \dots$$

۳ نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید:



الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

ث) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

۴ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (9 + \frac{7}{x^3})$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x^3 + 7x^2 - 6\right)$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x - 3}$

ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$

ث) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{3x + 1}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5x - 3}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 6x^3 - x}{x^2 - 5x + 1}$

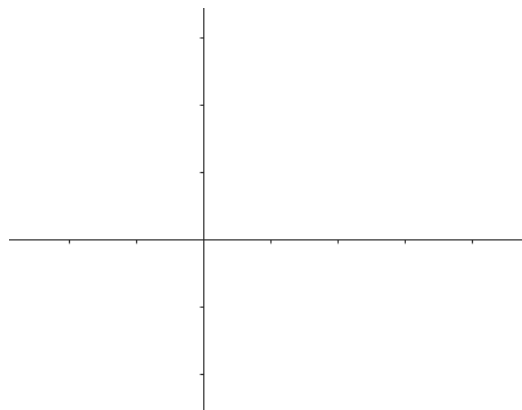
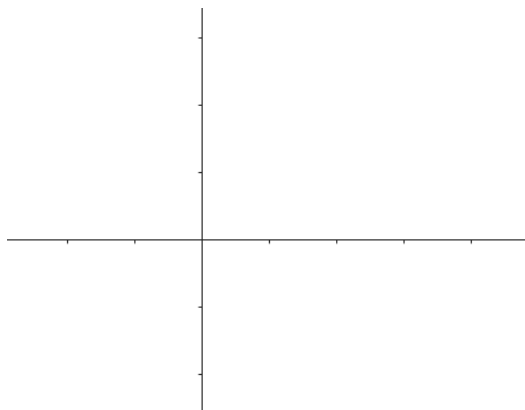
ح) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$

خ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x}$

د) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{4}$

۵ الف) هریک از رابطه‌های $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ به چه معنا هستند؟ توضیح دهید.

ب) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که هر دو ویژگی الف را داشته باشد. مسئله چند جواب دارد؟



نمونه سوالات نهایی



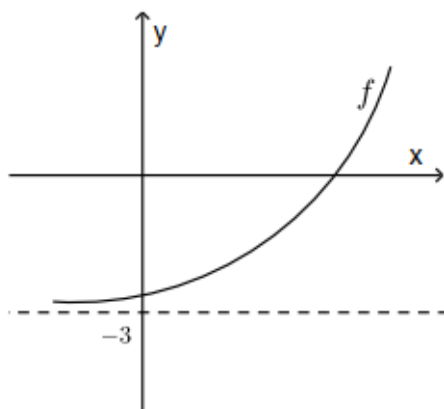
۱- حد زیر را حساب کنید.

(شهریور ۱۴۰۳ - ۰/۵ نمره)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2 - \frac{3}{x^3}} =$$

۲- با توجه به نمودار تابع f ، حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

(شهریور ۱۴۰۲ - ۰/۵ نمره)



الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$

سوالات تکمیلی



۳- اگر $f(x) = x - \sqrt{4x^2 + x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۸ خارج از کشور)

۳ (۴) ۲ (۳) -۱ (۲) -۲ (۱)

۴ مشتق

فصل

آشنایی با مفهوم مشتق

درس اول

مشتق پذیری و پیوستگی

درس دوم

آهنگ تغییر

درس سوم

تهیه کننده : رقیه پيله ور - دبیر ریاضی ناحیه دو اردبیل



برای تماشای ویدیوهای آموزشی ریاضی ۳ تجربی (همین جزوه) می توانید به سایت

math-pilevar.ir یا math-pilevar.com مراجعه کنید.



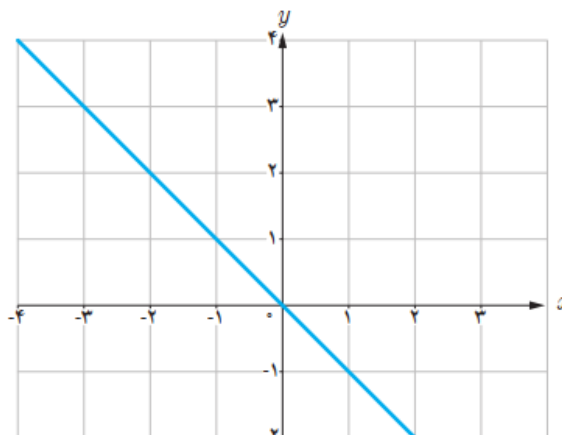
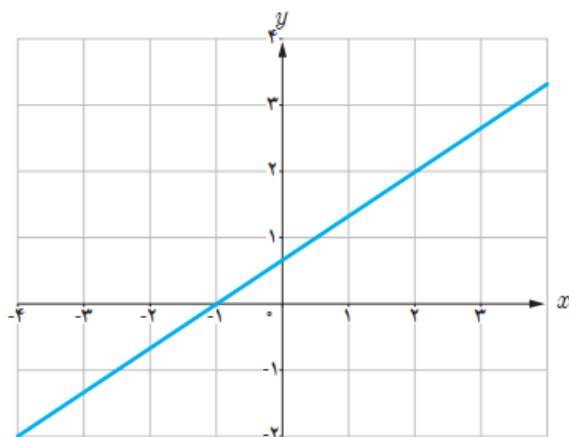
درس اول

آشنایی با مفهوم مشتق

مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربردهای وسیع در ریاضیات و علوم دیگر است. ایده اولیه در مورد مفهوم مشتق، به شیب یک خط مربوط می‌شود. به کمک این ایده به تدریج به صورت دقیق‌تری با مفهوم مشتق آشنا می‌شویم.

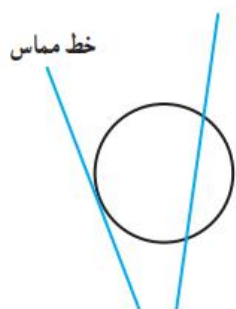
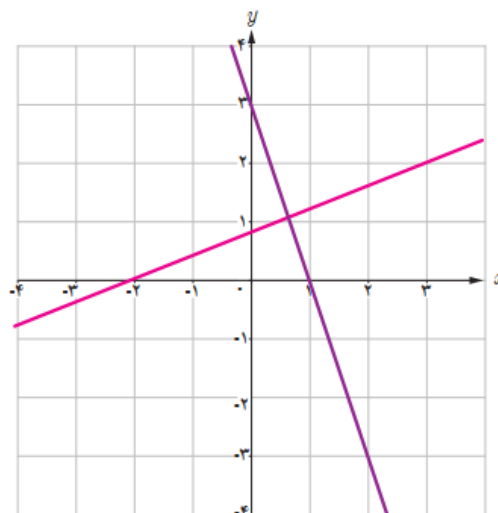
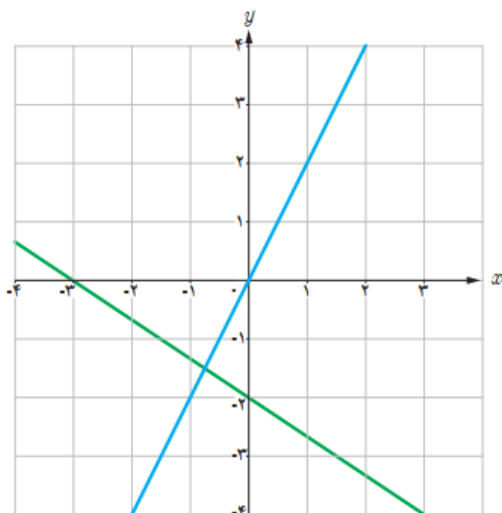
فعالیت

۱ شیب هر یک از خط‌های داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟



۲ با توجه به جدول روبه‌رو، نمودار مربوط خط‌های d_1, d_2, d_3 و d_4 را روی شکل مشخص کنید.

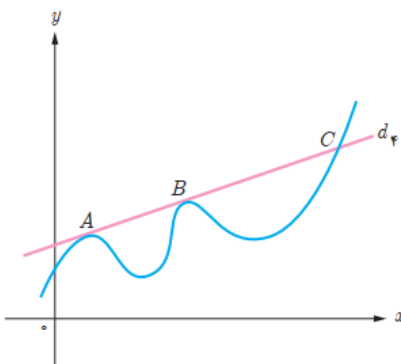
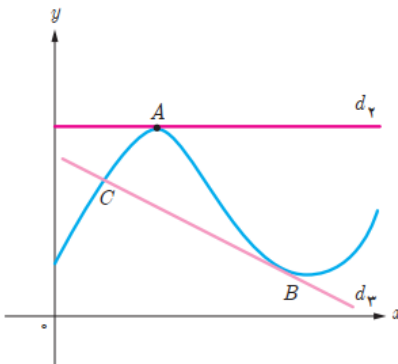
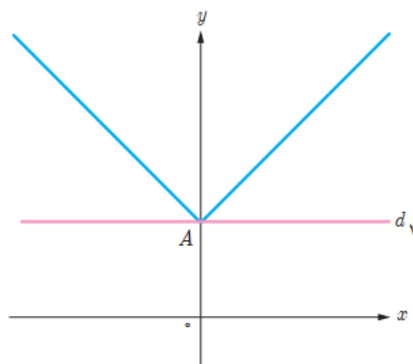
خط	d_1	d_2	d_3	d_4
شیب	$\frac{2}{5}$	-۳	۲	$-\frac{2}{3}$



خط مماس بر یک منحنی

یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی مسئله‌ای تاریخی است که زمانی طولانی برای حل آن صرف شده است. مفهوم خط مماس بر یک دایره از زمان‌های گذشته مشخص بوده است. خط مماس بر دایره، خطی است که با دایره یک و فقط یک نقطه مشترک داشته باشد. این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی‌ها صادق نیست.

خط‌های d_1 تا d_4 را در نظر بگیرید. خط d_1 در نقطه A ، خط d_2 در نقطه B و خط d_3 در نقاط A و B بر منحنی مماس هستند. خط d_4 در نقطه A بر منحنی مماس نیست. همچنین خطوط d_2 و d_3 در نقطه C بر منحنی مماس نیستند. در ادامه این درس با دلایل این امر به صورت دقیق‌تری آشنا خواهید شد.



خواندنی

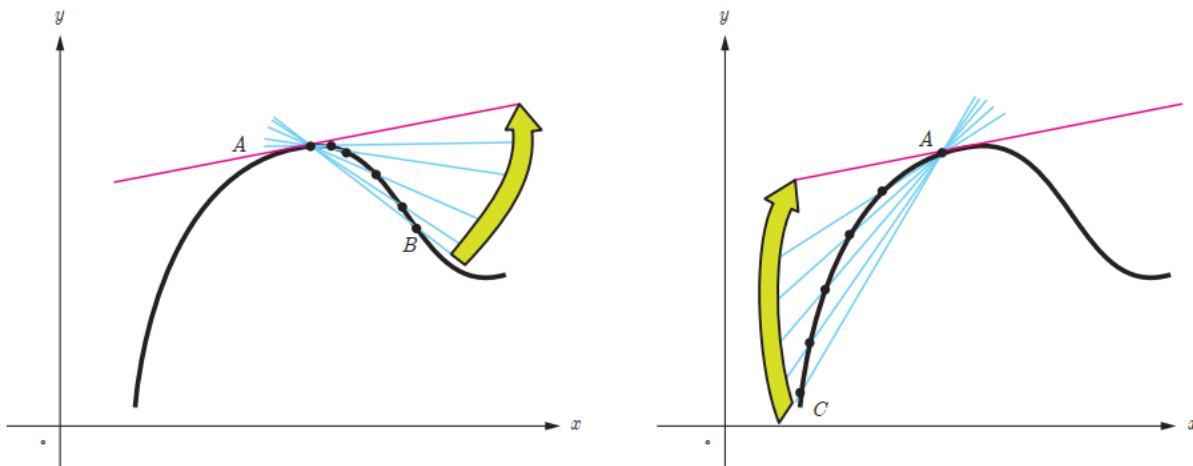
از نظر تاریخی مسئله یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی، برای اولین بار در اوایل قرن هفدهم میلادی زمانی مطرح شد که فرما ریاضی دان فرانسوی اقدام به تعیین ماکزیم ها و مینیم های چند تابع خاص کرد. فرما دریافت که خطوط مماس، در نقاطی که منحنی ماکزیم یا مینیم دارد باید افقی باشد. از این رو به نظرش رسید که مسئله تعیین نقاط ماکزیم یا مینیم به حل مسئله دیگر، یعنی یافتن مماس های افقی مربوط می شود. تلاش برای حل این مسئله کلی تر بود که فرما را به کشف برخی از ایده های مقدماتی مفهوم «مشتق» هدایت کرد. مفهوم مشتق به شکل امروزی آن توسط نیوتن و به فاصله چند سال بعد از او توسط لایپ نیتس، مستقل از یکدیگر پدید آمد. شیوه نیوتن مبتنی بر دیدگاه فیزیکی بود و از مشتق برای به دست آوردن سرعت لحظه ای استفاده کرد، اما لایپ نیتس با دیدگاهی هندسی از مشتق برای به دست آوردن شیب خط مماس در منحنی ها استفاده کرد.



اکنون سعی می کنیم که به کمک نمودار منحنی، خط مماس بر منحنی در یک نقطه را بررسی کنیم. نقطه ثابت A را روی منحنی زیر در نظر می گیریم. خطی که از A و B می گذرد یک خط قاطع نامیده می شود. روی منحنی نقطه های دیگری را نزدیک تر به نقطه A اختیار می کنیم و خط های گذرنده از A و آن نقطه ها را رسم می کنیم. حدس بزنید که وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می شوند، برای خط های قاطع چه اتفاقی می افتد؟ به عبارت دیگر خط های قاطع به چه خطی نزدیک می شوند؟

اکنون نقطه C را سمت چپ نقطه A اختیار می کنیم و خط قاطع AC را رسم می کنیم. مانند قبل نقاط دیگری را نزدیک تر به نقطه A اختیار می کنیم. حدس می زنید برای خط های قاطع چه اتفاقی می افتد؟ به طور شهودی می توان گفت:

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A حد شیب خط های قاطع گذرنده از A است به شرطی که نقطه ها به قدر کافی به A نزدیک شوند.



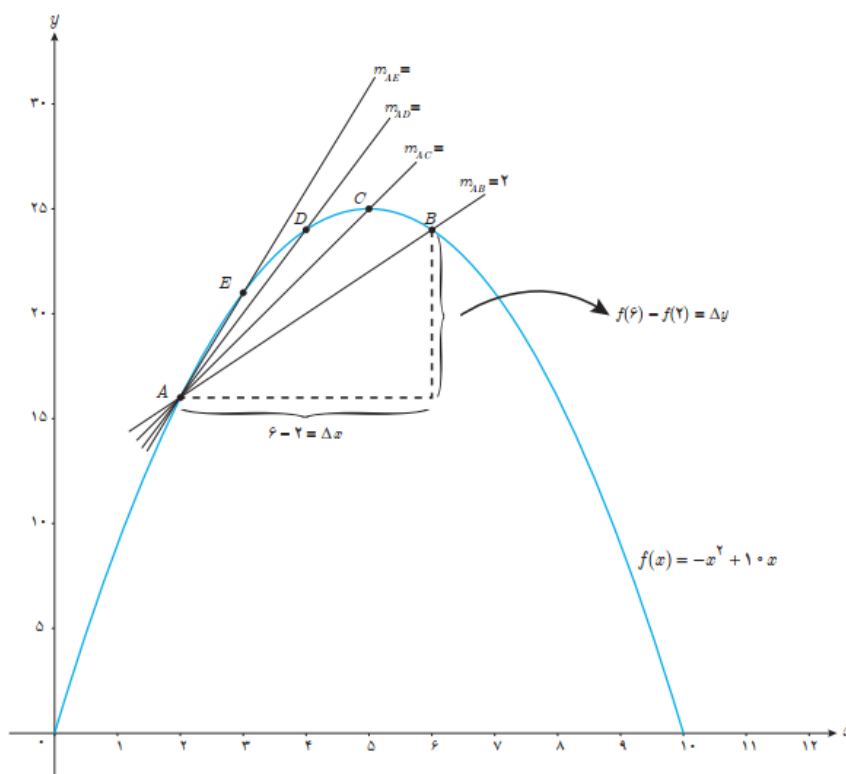
در ادامه این بحث را دقیق تر بررسی خواهیم کرد.

فعالیت

الف) تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ داده شده است، اگر $0 \leq x \leq 10$ نقاط $A(2, f(2))$ ، $B(6, f(6))$ ، $C(5, f(5))$ ، $D(4, f(4))$ و $E(3, f(3))$ را روی منحنی در نظر می گیریم. شیب خطی که از نقاط A و B می گذرد یعنی m_{AB} از دستور زیر به دست می آید:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{24 - 16}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

به همین روش m_{AC} و m_{AD} و m_{AE} را به دست آورید.

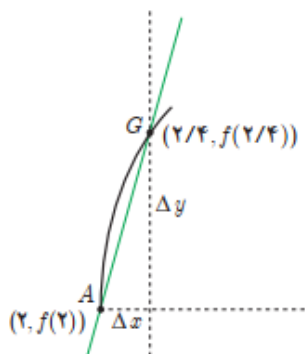
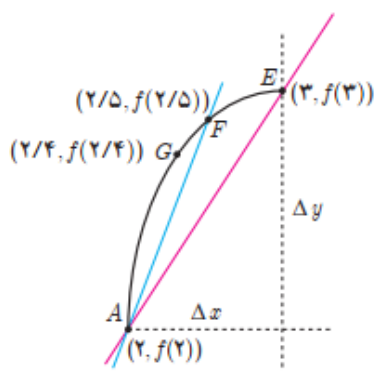


همان طور که می دانید برای محاسبه شیب خط AB نسبت تغییر عمودی را به تغییر افقی به دست می آوریم. اگر این تغییرات را به ترتیب با Δy و Δx نمایش دهیم، داریم:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در هنگام محاسبه شیب های بالا، توضیح دهید که Δx ها چگونه تغییر می کنند؟

$[2, 6]$	۲ _____ ۶	$\Delta x = 6 - 2 = 4$	$\Delta y = 24 - 16 = 8$
$[2, 5]$	۲ _____ ۵	$\Delta x = 5 - 2 = 3$	$\Delta y = 25 - 16 = 9$
$[2, 4]$	۲ _____ ۴	$\Delta x = 4 - 2 = 2$	$\Delta y = 24 - 16 = 8$
$[2, 3]$	۲ _____ ۳	$\Delta x = 3 - 2 = 1$	$\Delta y = 21 - 16 = 5$



ب) حال فرض کنید که با ادامه روندی که در قسمت (الف) اختیار کردیم، نقاط بیشتری را نزدیک به A انتخاب کنیم. شیب خطوط به دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می شود. برای درک بهتر این موضوع، منحنی $f(x) = -x^2 + 10x$ در فاصله $[2, 3]$ رسم شده است. در ادامه نمودار تابع در بازه $[2, 2/4]$ رسم شده است.

$$\begin{aligned} m_{AF} &= \frac{f(2/5) - f(2)}{2/5 - 2} \\ &= \frac{18/25 - 16}{-9/5} \\ &= \frac{2/25}{-9/5} = -2/45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{AG} &= \frac{f(2/4) - f(2)}{2/4 - 2} \\ &= \text{_____} \\ &= \end{aligned}$$

اگر به همین ترتیب بازه های کوچک تری در نظر بگیریم، شیب خطوط به دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می شود. برای درک بهتر این موضوع، با تکمیل جدول و مقایسه شیب خط های قاطع، شیب خط مماس را حدس بزنید.

بازه $[a, b]$	شیب خطی که از نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ می‌گذرد. $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
$[2, 2/4]$	$\frac{f(2/4) - f(2)}{2/4 - 2} = \frac{17/16 - 16}{-1/4} = 5/6$
$[2, 2/3]$	$\frac{f(2/3) - f(2)}{2/3 - 2} = \frac{16/9 - 16}{-4/3} = 5/9$
$[2, 2/2]$	$\frac{f(2/2) - f(2)}{2/2 - 2} = \frac{16/4 - 16}{-1} = 5/8$
$[2, 2/1]$	$\frac{f(2/1) - f(2)}{2/1 - 2} = \frac{16/2 - 16}{-1} = 5/9$
$[2, 2/0.1]$	$\frac{f(2/0.1) - f(2)}{2/0.1 - 2} = \frac{16/0.01 - 16}{-1.99} = 5/99$
$[2, 2/0.01]$	$\frac{f(2/0.01) - f(2)}{2/0.01 - 2} = \frac{16/0.0001 - 16}{-1.9999} = 5/999$
$\vdots$	$\vdots$
$[2, 2+h]$ h یک عدد خیلی کوچک و مثبت است.	$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} \longrightarrow ?$

اگر بخواهیم دقیق‌تر صحبت کنیم، باید در مورد مقادیر عبارت $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ وقتی h به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) است، بررسی کنیم. روند بالا این حدس را تقویت می‌کند که هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم این مقادیر را به عدد ۶ نزدیک کنیم مشروط بر آنکه h را به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) اختیار کنیم. به عبارت دیگر حدس می‌زنیم که: $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 6$ کافی است با محاسبه مقدار حد، صحت حدس خود را بررسی کنیم:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(2+h)^2 + 1 \cdot (2+h) - 16}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(h^2 + 4h + 4) + 2 + 1 \cdot h - 16}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 - 4h - 4 + 2 + h - 16}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 - 3h - 18}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 + 6h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(-h + 6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (-h + 6) = 6\end{aligned}$$

به طریق مشابه می‌توان دید که اگر نقاط روی منحنی را در سمت چپ A اختیار کنیم، به عبارت دیگر اگر بازه‌هایی مانند، $[1/5, 2]$ ، $[1/6, 2]$ ، $[1/7, 2]$ ، $[1/8, 2]$ و ... را در نظر بگیریم شیب خط‌های قاطع برابر با $6/5$ ، $6/4$ ، $6/3$ ، $6/2$ ، ... خواهد شد. به عبارت دیگر در این حالت هم شیب خط‌های قاطع به هر اندازه که بخواهیم به عدد ۶ نزدیک می‌شوند، مشروط بر آنکه h به قدر کافی از سمت چپ به

صفر نزدیک شود، یعنی داریم: $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 6$

بنابراین به طور کلی می‌توان نوشت: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 6$

شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $A(a, f(a))$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود و متناهی باشد.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، یعنی:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

حد مذکور را شیب منحنی در a نیز می‌نامند.

بنابراین در مثال قبل داریم $f'(2) = 6$. در ادامه $f'(3)$ برای $f(x) = -x^2 + 10x$ محاسبه شده است:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(3+h)^2 + 10(3+h) - 21}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-9 - 6h - h^2 + 30 + 10h - 21}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h + 4) = 4 \end{aligned}$$

مثال: معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ را در نقطه $A(2, f(2))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

حل: با توجه به آنچه که در فعالیت قبل مشاهده شد:

$$f'(2) = 6 = \text{شیب خط مماس در نقطه } A$$

$$A(2, f(2)) = (2, 16)$$

$$y - 16 = 6(x - 2) \Rightarrow y = 6x + 4$$

کار در کلاس

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 3$ را در نقطه‌ای به طول ۲- بنویسید.

تذکر: با نمادهای معرفی شده در فعالیت در مورد شیب خط‌های قاطع می‌توان دستوره‌های معادل دیگری برای محاسبه مشتق در یک نقطه به دست آورد، به‌طور مثال شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

و از آنجا:

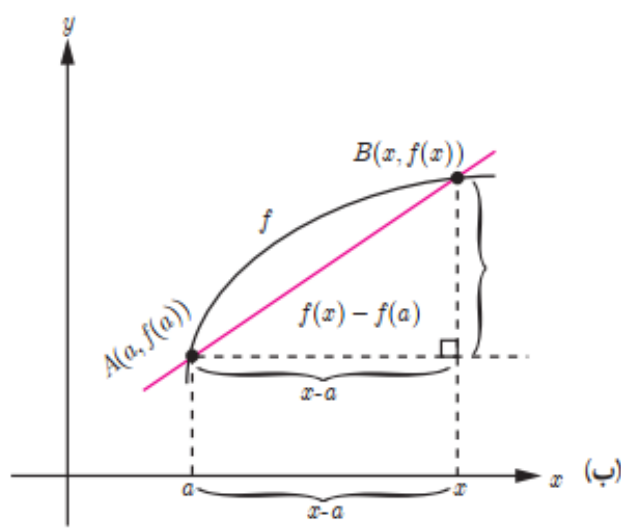
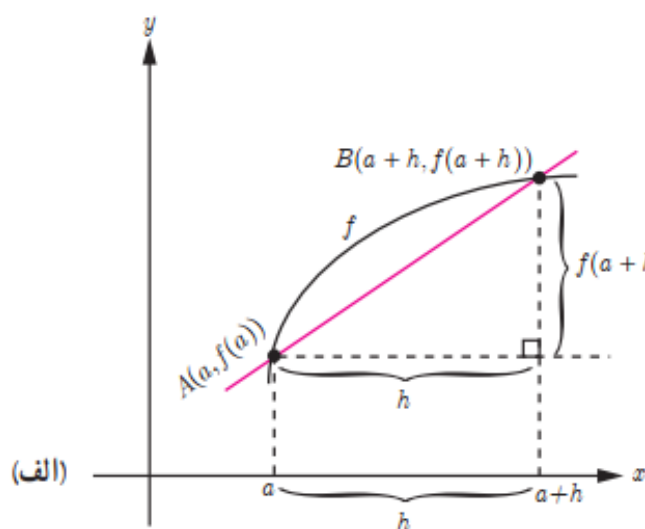
مثال: اگر $f(x) = -x^2 + 1$ و $f'(2)$ را از دستور بالا به دست آورید:

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(2 + \Delta x)^2 + 1 - (-2^2 + 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\cancel{4} - \Delta x^2 - \cancel{4}\Delta x + \cancel{4} + 1 \cdot \Delta x - \cancel{4}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x^2 + 6\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(-\Delta x + 6)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-\Delta x + 6) = 6$$

محاسبه $f'(a)$ به روش دیگر

مشتق تابع f در نقطه $x = a$ به صورت: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ تعریف شد. اکنون دستور دیگری برای مشتق تابع f در نقطه $x = a$ می‌یابیم که در برخی محاسبات کار را ساده‌تر می‌کند.



با استفاده از نموداری مشابه نمودار (الف) برای محاسبه مشتق f در a داریم:

$$AB \text{ شیب خط} = m_{AB} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$A \text{ شیب خط مماس بر منحنی در} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

با استفاده از نمودار (ب) راه دیگر محاسبه شیب خط مماس این است که نقطه دلخواه B را به مختصات $(x, f(x))$ در نظر بگیریم در این صورت داریم:

$$AB \text{ شیب خط} = m_{AB} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

برای محاسبه شیب خط مماس کافی است که x را مرتباً به a نزدیک کنیم. در این صورت شیب خط مماس برابر با $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ است مشروط بر اینکه این حد موجود باشد (واضح است که مانند قبل x باید از راست و چپ به قدر کافی به a نزدیک شود). به عبارت

$$\text{دیگر: } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مثال: اگر $f(x) = x^2$ ، $f'(3)$ را به دو روش به دست آورید.
حل:

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+3)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h + 9 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+6) = 6$$

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$$

روش دوم:

در موقعیت‌های مختلف، ممکن است یکی از این دو روش بر دیگری به دلیل ساده‌تر بودن محاسبات برتری داشته باشد.

کار در کلاس

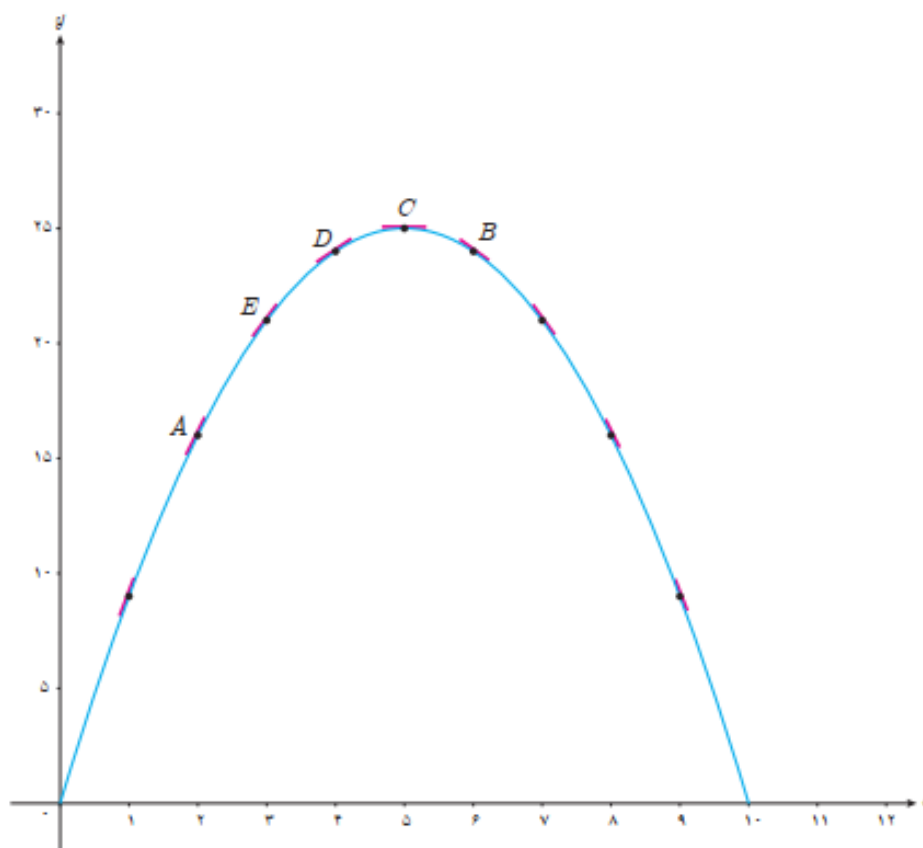
الف) برای تابع $f(x) = -x^2 + 1 \circ x$ ، $f'(8)$ و $f'(5)$ را حساب کنید.

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد.

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی مشتق منفی است.

ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خطهای مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید.

ث) با محاسبه $f'(3)$ و $f'(4)$ صحت حدس خود را بررسی نمایید.



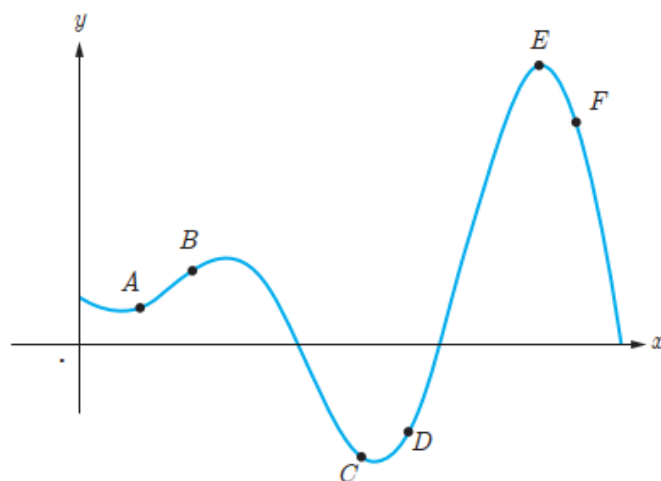
$$f(x) = -x^2 + 1 \circ x$$

تمرین

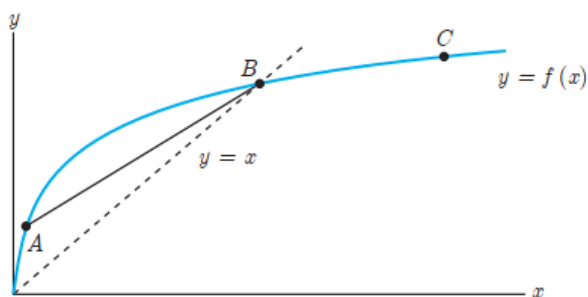
۱ اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	نقطه
-۳	
-۱	
۰	
$\frac{1}{2}$	
۱	
۲	



۳ برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطه A

ب) شیب نمودار در نقطه B

پ) شیب نمودار در نقطه C

ت) شیب خط AB

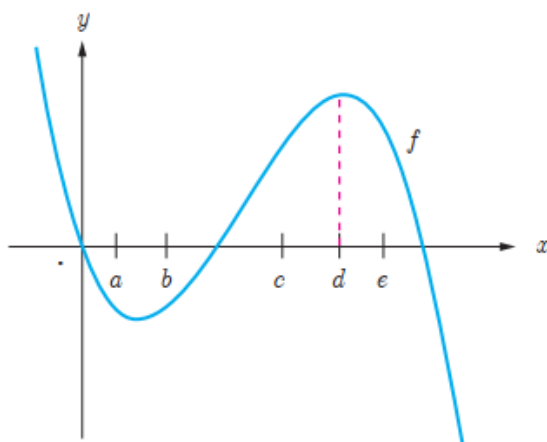
ث) شیب خط $y = 2$

ج) شیب خط $y = x$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب $m_1, m_2, \dots, m_6$ در نظر بگیرید.

۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d, e و c را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
	۰
	۰/۵
	۲
	-۰/۵
	-۲



۵ نقاطی مانند A, B, C, D, E, F و G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری که:

الف) A ، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

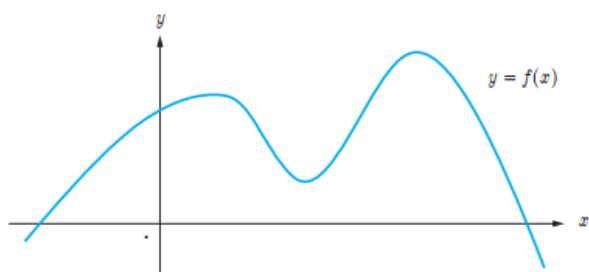
ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

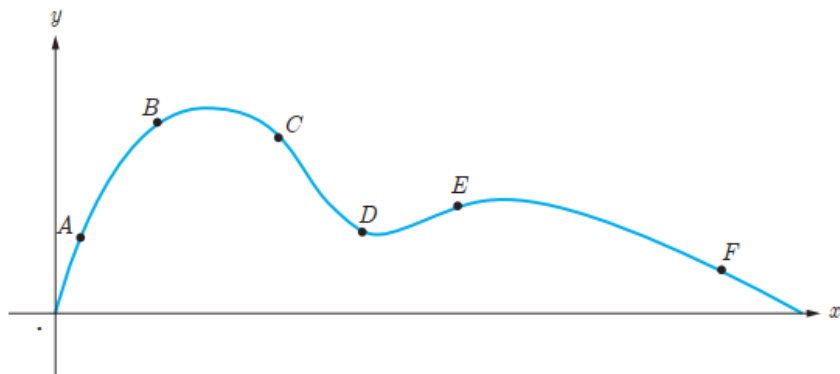
ث) نقاط F و E نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



۶ اگر $f(x) = x^3 - 2$ ، $f'(-1)$ را به دست آورید.

۷ نقاط F, E, D, C, B, A را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام یک نادرست است؟



الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است.

ب) $m_A < m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را

با m_A نمایش داده‌ایم)

پ) $m_E < m_B < m_A$

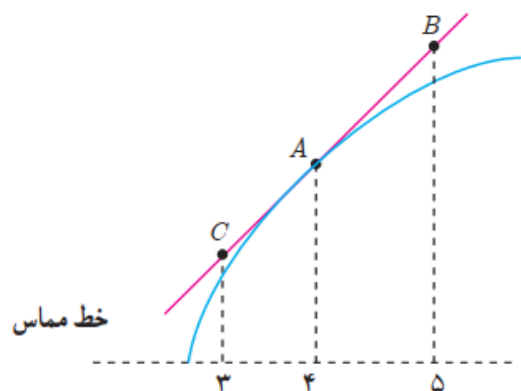
ت) شیب منحنی در نقاط D، F و C منفی است.

ث) $m_F < m_D < m_C$

ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$

۸ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$ با توجه به شکل

مختصات نقاط A، B و C را بیابید.

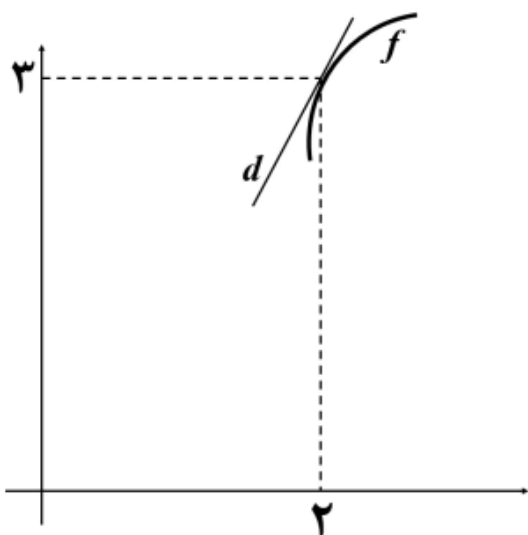


نمونه سوالات نهایی



۱- اگر نمودار تابع f از نقطه $A(2, 4)$ بگذرد و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3$ باشد، معادله خط مماس بر نمودار f را در نقطه A بدست آورید.
(خرداد ۱۴۰۳ - نمره ۱)

۲- با توجه به شکل، اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5f(x) - 15}{x - 2} = 10$ باشد معادله خط d را به دست آورید. (شهریور ۱۴۰۳ - ۱/۲۵ نمره)



درس دوم

مشتق پذیری و پیوستگی

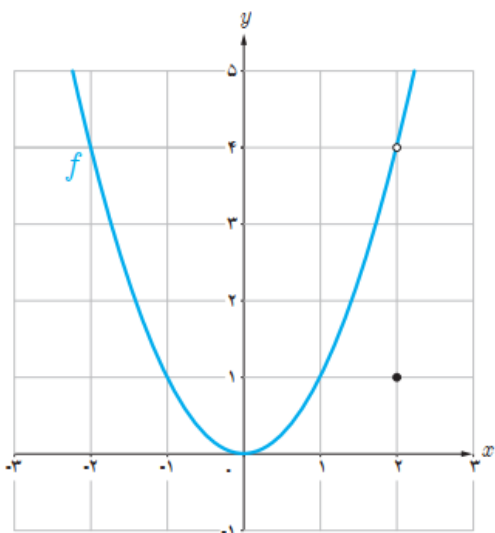
در درس گذشته مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 به یکی از دو صورت زیر تعریف شد:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{یا} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

در صورت وجود حد (متناهی) فوق گفته می‌شود که f در x_0 مشتق پذیر است.
در مطالعه رفتار یک تابع، مشخص کردن نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق پذیر نیست دارای اهمیت است.
در فعالیت زیر با یکی از حالت‌هایی که یک تابع در آن مشتق پذیر نیست آشنا می‌شوید.

فعالیت

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ (شکل مقابل) را در نظر می‌گیریم:



الف) چگونه به کمک نمودار تابع و تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس می‌توانید استدلال کنید که $f'(2)$ وجود ندارد؟
اگر برای بررسی مشتق پذیری این تابع در $x = 2$ تعریف مشتق f در $x = 2$ را به کار گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

حد صورت کسر برابر ۳ است و حد مخرج کسر برابر صفر است. وقتی $x \rightarrow 2$ ، داریم:

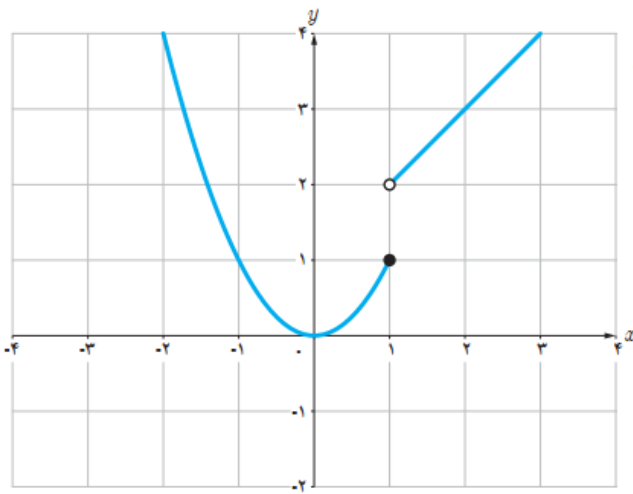
$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = +\infty$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = -\infty$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ موجود (و متناهی) نیست، پس $f'(2)$ وجود ندارد.

ب) نقطه دیگری (به جز $x = 2$) در نظر بگیرید. آیا تابع در این نقطه مشتق پذیر است؟ پاسخ خود را با پاسخ دوستانان مقایسه کنید.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$$



تابع g (شکل روبه‌رو) را به صورت $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ در نظر می‌گیریم.

چرا $g'(1)$ موجود نیست؟

نکته: ارتباط بین پیوستگی و مشتق پذیری



● ۱- اگر تابع f در نقطه $x = a$ ناپیوسته باشد، حتماً در این نقطه مشتق پذیر نخواهد بود.

مشتق ناپذیری $\Rightarrow$ ناپیوستگی

● ۲- اگر تابع f در نقطه $x = a$ مشتق پذیر باشد، حتماً در این نقطه پیوسته بوده است.

پیوستگی $\Rightarrow$ مشتق پذیری

توابع f و g فعالیت و کار در کلاس قبل به ترتیب در $x = 2$ و $x = 1$ ناپیوسته بودند و همان گونه که مشاهده کردید، $f'(2)$ و $g'(1)$ موجود نبودند. بنابراین به نظر می‌رسد که اگر تابعی در یک نقطه مشتق پذیر باشد، الزاماً در آن نقطه باید پیوسته باشد. این مطلب را به عنوان یک قضیه ثابت می‌کنیم.

قضیه: اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد آن گاه f در a پیوسته است.

اثبات: کافی است نشان دهیم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} ((x - a) \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right))$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = 0 \cdot f'(a) = 0$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$ و از آنجا $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (چرا؟)

با توجه به این قضیه به طور منطقی می‌توان نتیجه گرفت که:

اگر تابع f در $x = a$ پیوسته نباشد، آن گاه f در $x = a$ مشتق پذیر هم نیست.

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه درست نیست، یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی‌توان مشتق پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1}$$

برای محاسبه $f'(1)$ ناچاریم حدهای راست و چپ را به دست آوریم.

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = -2$$



بنابراین $f'(1)$ موجود نیست. به عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x=1$ وجود ندارد. اما حدهای یک طرفه فوق را می توان با وجود نیم خط های مماس بر منحنی در نقطه $x=1$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x=1$ نزدیک شویم، شیب نیم خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲ و اگر از سمت چپ به $x=1$ نزدیک شویم، شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر -۲ است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق های راست و چپ f در $x=1$ می نامیم و با $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ نمایش می دهیم.

در مثال قبل f در $x=1$ پیوسته است ولی f در آن مشتق پذیر نیست.

نیم خط های مماس راست و چپ را به اختصار، نیم مماس راست و چپ می نامیم.

در حقیقت:

$$f'_-(1) = \text{شیب نیم مماس چپ}$$

$$f'_+(1) = \text{شیب نیم مماس راست}$$

معادله این نیم مماس ها نیز به ترتیب عبارت اند از :

$$y - 0 = 2(x - 1) \text{ یا } y = 2x - 2, x \geq 1 \quad \text{نیم مماس راست}$$

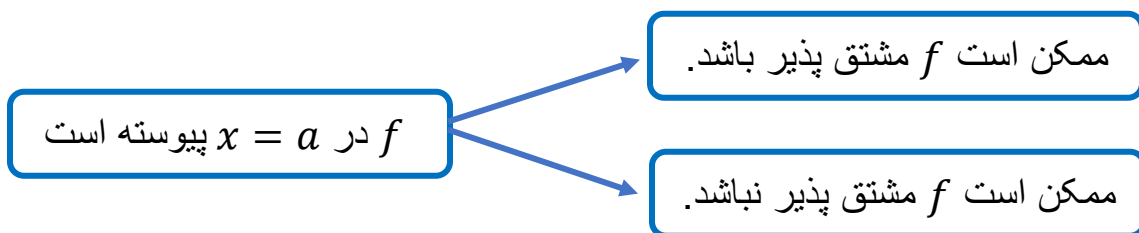
$$y - 0 = -2(x - 1) \text{ یا } y = -2x + 2, x \leq 1 \quad \text{نیم مماس چپ}$$

$$f(x) = |x^2 - 1|$$

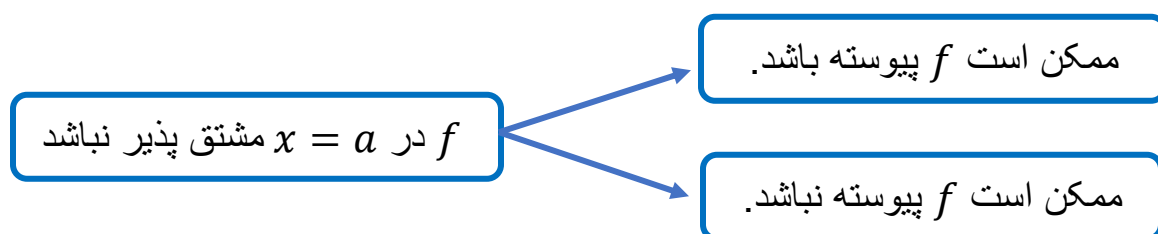
تذکر:



● ۱- اگر تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته باشد، نمی توان لزوما نتیجه گرفت که f در این نقطه مشتق پذیر است!



● ۲- اگر تابع f در نقطه $x = a$ مشتق پذیر نباشد، ممکن است f در آن نقطه پیوسته باشد یا نباشد!



$$f(x) = |x^2 - 1|$$

نشان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل در $x = -1$ نیز موجود نیست.
در صورت امکان معادله نیم مماس های راست و چپ در $x = -1$ را بنویسید.

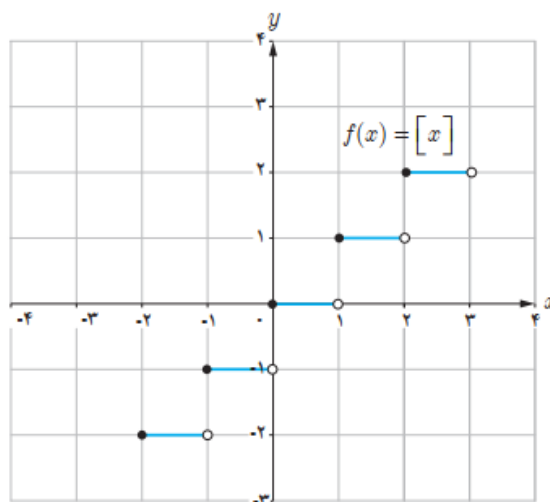
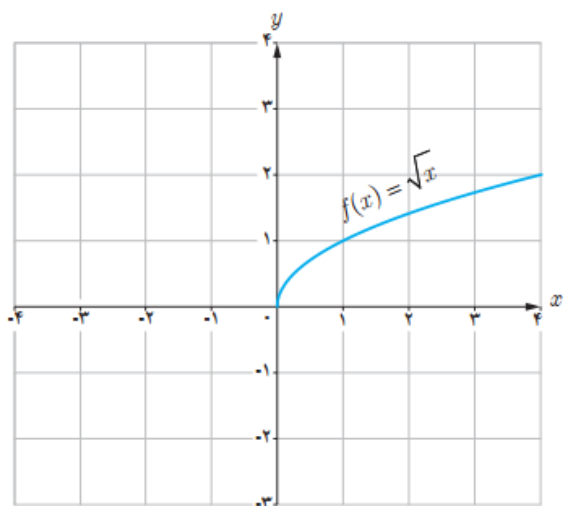
تعریف: مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x = a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

یا به طور معادل:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال: توابع $f(x) = [x]$ و $g(x) = \sqrt{x}$ در صفر پیوسته نیستند. بنابراین $f'(0)$ و $g'(0)$ موجود نیستند.



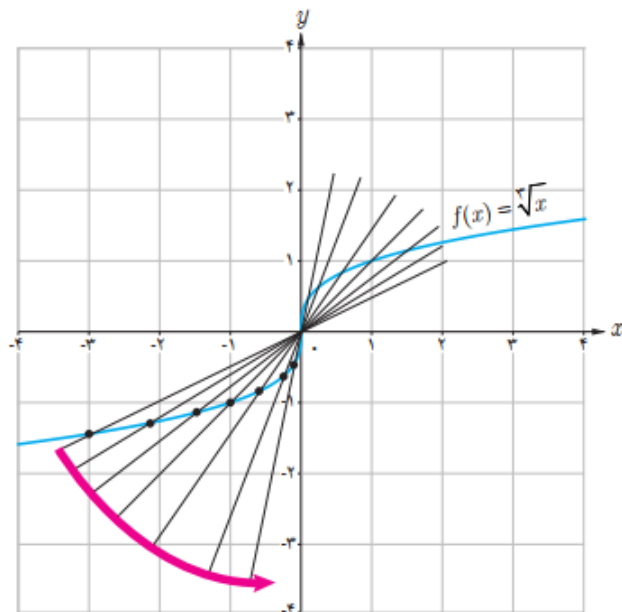
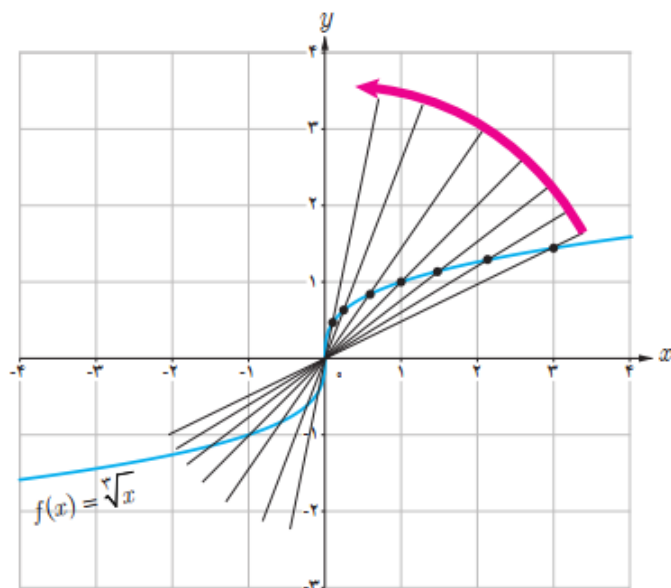
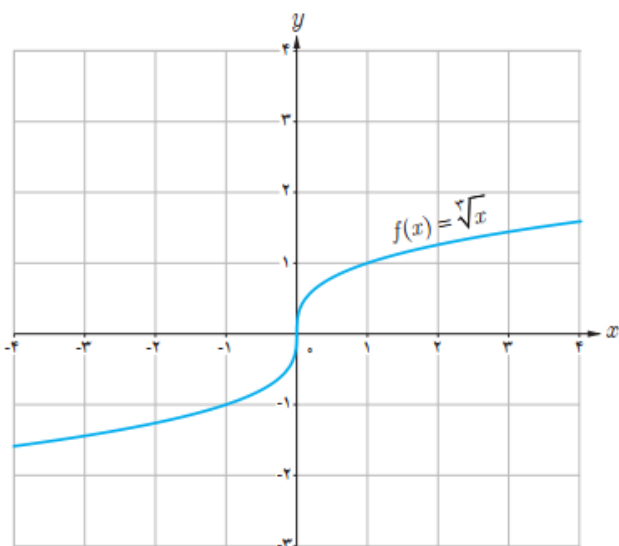
اکنون به بررسی حالت دیگری می‌پردازیم که در آن تابع مشتق پذیر نیست.

مثال: تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نظر می‌گیریم. مشتق‌پذیری این تابع را در $x = 0$ بررسی کنید.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

بنابراین تابع f در صفر مشتق پذیر نیست. شکل‌ها نشان می‌دهند که وقتی از سمت راست یا چپ به نقطه صفر نزدیک می‌شویم خط‌های قاطع به خط $x = 0$ نزدیک می‌شوند.

تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ مشتق پذیر نیست. خط $x = 0$ را «مماس قائم» منحنی می‌نامیم.



اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتق چپ و راست نامتناهی داشته باشد، در این صورت خط $x = a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a, f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

به طور خلاصه می‌توان گفت:

اگر تابع f در $x = a$ هر یک از شرایط زیر را داشته باشد، در این صورت f در این نقطه مشتق پذیر نیست.

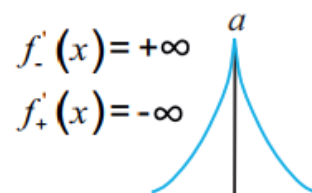
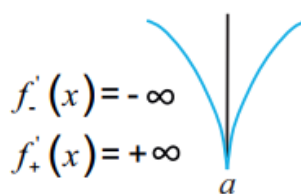
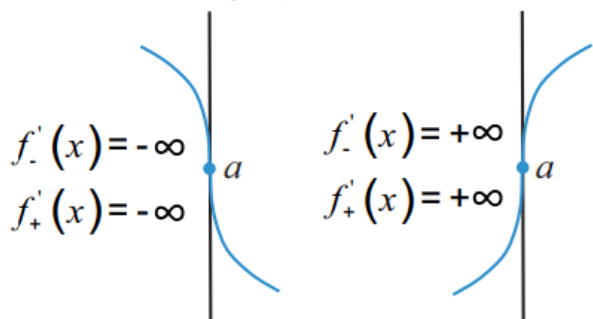
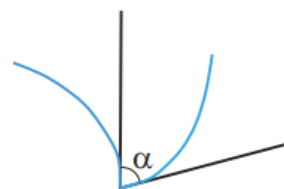
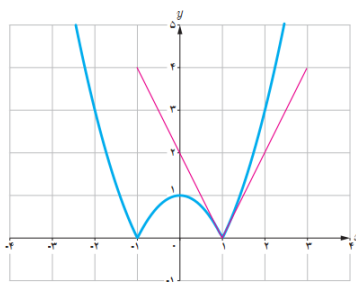
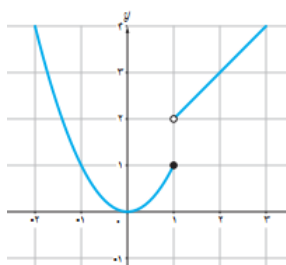
۱- f در a پیوسته نباشد.

۲- f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x = a$:

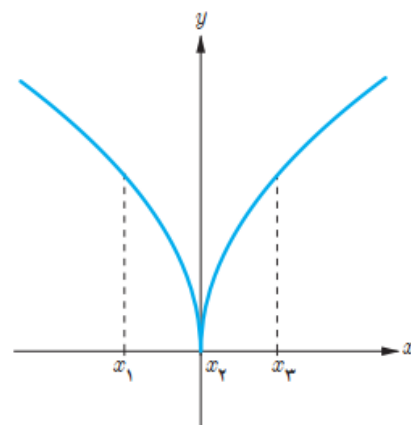
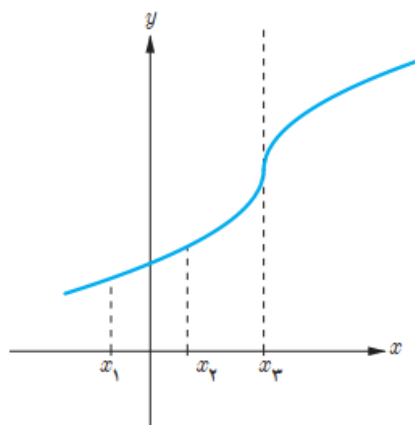
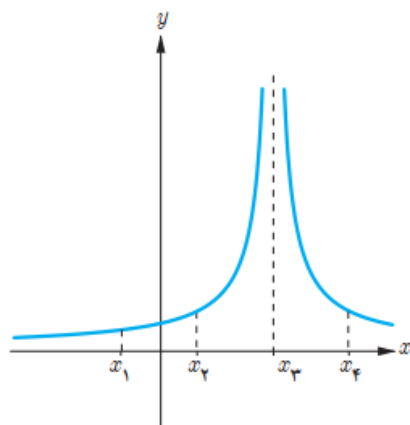
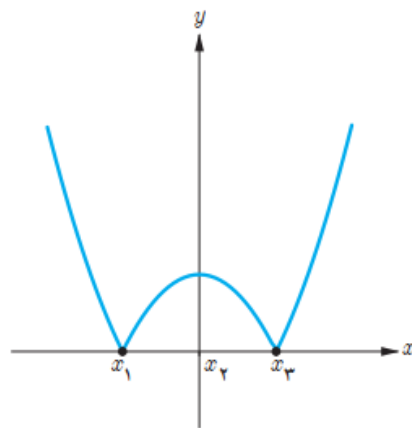
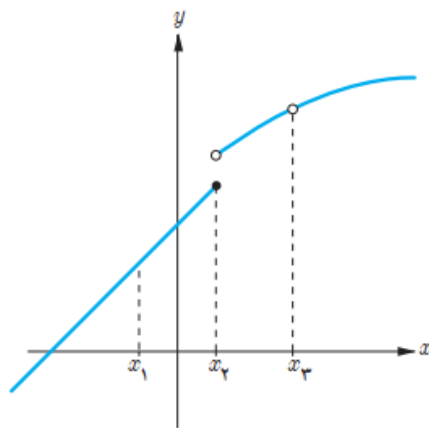
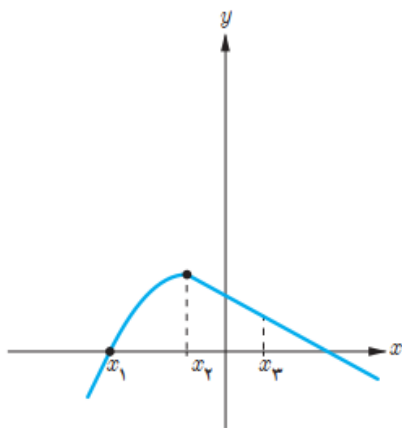
(الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).

(ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).

(پ) هر دو نامتناهی باشند.



در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق پذیر نیست.

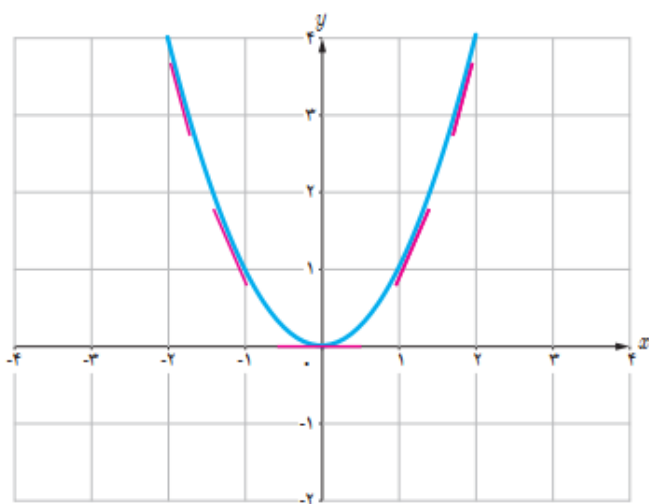


تابع مشتق

تاکنون با مفهوم مشتق تابع در یک نقطه (معین) آشنا شده‌اید. حال به دنبال یافتن رابطه‌ای بین مجموعه نقاط متعلق به دامنه یک تابع و مشتق تابع در آن نقاط هستیم.

فعالیت

تابع $f(x) = x^2$ را در نظر می‌گیریم.



جدول زیر را کامل کنید (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده‌اند).

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	۲
$f'(x)$		-۴		۰		$2\sqrt{3}$	۴

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -4$$

$$f'(\sqrt{3}) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

می‌دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکتاست، بنابراین $f'(x)$ تابعی از x است. حدس می‌زنید در چه نقاطی مشتق تابع $f(x) = x^r$ وجود دارد؟

اگر x عضوی از دامنه تابع f باشد، تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مشروط بر آنکه حد فوق موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه f' می‌نامیم.

به طور مثال برای تابع $f(x) = x^r$ ، دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. روش محاسبه ضابطه تابع f' نیز، در ادامه ارائه شده است.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^r - x^r}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^r + rhx + h^r - x^r}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(rx + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (rx + h) = rx \end{aligned}$$

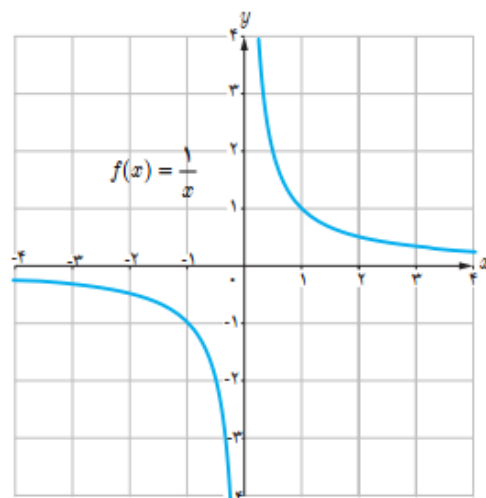
بنابراین $f'(x) = rx$. همان گونه که قبلاً ذکر شد دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. به کمک این دستور مقدار مشتق تابع $f(x) = x^r$ در هر نقطه را می‌توان حساب کرد، به طور مثال:

$$f'(-\frac{1}{5}) = -\frac{2}{5}, \quad f'(\sqrt{7}) = 2\sqrt{7} \quad \text{و} \quad f'(50) = 100$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید. $f'(3)$ را با استفاده از تابع مشتق و سپس با استفاده از تعریف مشتق در $x = 3$ به دست آورید.

حل: $f'(0)$ وجود ندارد. دامنه f' برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است. اگر $x \neq 0$ داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - x - h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$



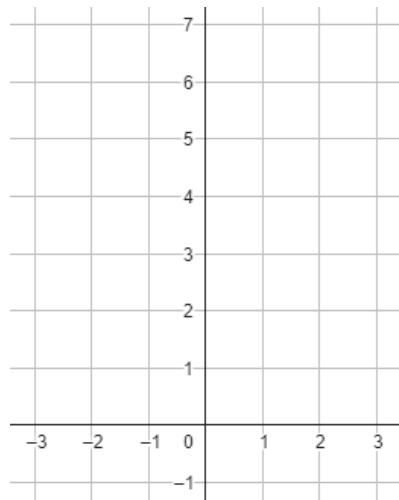
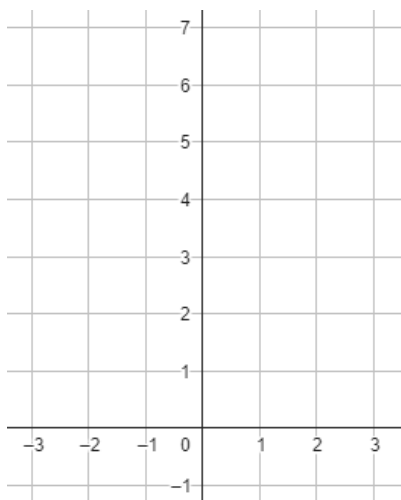
با استفاده از دستور فوق داریم: $f'(3) = \frac{-1}{9}$ البته مشتق f در هر نقطه دیگر ($x \neq 0$) را نیز به کمک این دستور می توان محاسبه کرد،

به طور مثال: $f'(\sqrt{5}) = \frac{-1}{5}$ و $f'(-2) = -\frac{1}{4}$ ، $f'(3)$ را به طور مستقیم نیز می توان حساب کرد:

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{3-x}{3x}}{\frac{x-3}{1}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{3x(x-3)} = -\frac{1}{9}$$

در عمل هنگام حل مسائل با توجه به شرایط هر یک از دو روش فوق ممکن است مورد استفاده قرار گیرد.

$f(x) = \begin{cases} 5x & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ اگر دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

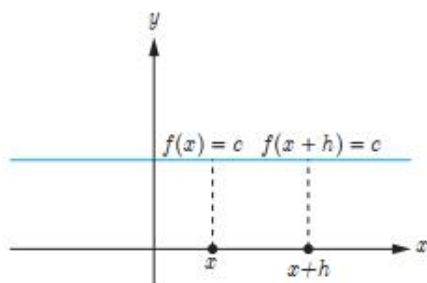


اکنون آماده هستیم که برای برخی از توابع، تابع مشتق را محاسبه کنیم.

محاسبه تابع مشتق برخی توابع

۱- اگر $f(x) = c$ آن گاه $f'(x) = 0$. به عبارت دیگر مشتق تابع ثابت در هر نقطه برابر صفر است.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$



به طور مثال اگر $f(x) = 7$ و $g(x) = -\frac{2}{5}$ آن گاه $f'(x) = 0$ و $g'(x) = 0$.

۲- اگر $n \in \mathbb{N}$ و $f(x) = x^n$ آن گاه $f'(x) = nx^{n-1}$.

این دستور کاربرد زیادی دارد. قبلاً ثابت کردیم که اگر $f(x) = x^1$ ، آن گاه $f'(x) = 1x$. همچنین اگر $f(x) = x^2$ ، به کمک این دستور نشان می دهیم که: $f'(x) = 2x^1$

ابتدا این رابطه آخر را ثابت می کنیم و از روش ارائه شده برای اثبات دستور مشتق $f(x) = x^n$ استفاده می کنیم. اگر $f(x) = x^2$ داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^2 + x(x+h) + x^2] = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^1 \end{aligned}$$

سومین تساوی در اثبات فوق بر اساس اتحاد $a^2 - b^2 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ به دست آمده است.

در حالت کلی می توان نشان داد که: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$ ($n \in \mathbb{N}$) از این اتحاد در ادامه برای محاسبه مشتق $f(x) = x^n$ استفاده شده است.

اکنون اگر $f(x) = x^n$ ، محاسبات کمی دشوارتر می‌شود، اما در عوض دستور مهم‌تری را ثابت کرده‌ایم:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cancel{x} + h - \cancel{x})[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}] \\
 &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{\text{بار } n} = nx^{n-1}
 \end{aligned}$$

۳- به‌طور کلی اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x) = x^n$ آن‌گاه: $f'(x) = nx^{n-1}$

مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $x \neq 0$ قبلاً دیدید که $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

همچنین با استفاده از دستور اخیر داریم: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

مثال: $y = x^5$
 $y = x^{-3}$

*۴- اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $x > 0$ آن‌گاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

۵- اگر $f(x) = \sqrt{ax+b}$ و $ax+b > 0$ آن گاه $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b})(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{ax} + ah + \cancel{b} - \cancel{ax} - \cancel{b}}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b}} = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} \end{aligned}$$

۶- اگر $f(x) = \sqrt[3]{x}$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})}{h(\underbrace{\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}}_A)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h \cdot A} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

۷- اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق پذیر باشند، آن گاه توابع kf ($k \in \mathbb{R}$)، $f \pm g$ و

$\frac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$) نیز در $x = a$ مشتق پذیرند و داریم:

الف) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$ ب) $(kf)'(a) = kf'(a)$

پ) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ ت) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

به کمک تعریف مشتق هر یک از روابط بالا را می‌توان ثابت نمود، اما در این کتاب به اثبات آنها نمی‌پردازیم.
مثال: مشتق چند تابع محاسبه شده است.

$$\text{الف) } f(x) = -\frac{2}{3}x^4 \Rightarrow f'(x) = -\frac{8}{3}x^3$$

$$\text{ب) } g(x) = x^5 + 4x^3 - \sqrt{2}x + 1 \Rightarrow g'(x) = 5x^4 + 12x^2 - \sqrt{2}$$

$$\text{پ) } h(x) = (2x^2 + 1)(-x^2 + 7x - 2) \Rightarrow h'(x) = 4x(-x^2 + 7x - 2) + (2x^2 + 1)(-2x + 7)$$

$$\text{ت) } t(x) = \frac{x^2 - 4}{3x + 1} \Rightarrow t'(x) = \frac{2x(3x + 1) - 3(x^2 - 4)}{(3x + 1)^2}$$

کار در کلاس

۱ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید:

$$\text{الف) } f(x) = \frac{1}{x - 4}$$

$$\text{ب) } g(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 5)$$

$$\text{پ) } h(x) = \frac{x}{2x^2 + x - 1}$$

۲ اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 5$ ، $g(2) = 8$ و $g'(2) = -6$ مقدار $(fg)'(2)$ و $(\frac{f}{g})'(2)$ را به دست آورید.

مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری

اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب $f \circ g$ مشتق پذیر است و داریم:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

مثال: اگر $h(x) = (x^2 + 3x + 1)^7$ ، مطلوب است $h'(x)$.

حل: اگر $f(x) = x^7$ و $g(x) = x^2 + 3x + 1$ ، آن گاه $h(x) = f(g(x))$.

$$h'(x) = g'(x)f'(g(x)) = (2x+3)f'(g(x))$$

اگر $g(x) = u$ آن گاه لازم است که $f'(u)$ را پیدا کنیم.

$$f(u) = u^7 \Rightarrow f'(u) = 7u^6 = 7(g(x))^6 = 7(x^2 + 3x + 1)^6$$

بنابراین:

$$h'(x) = (2x+3)(7)(x^2 + 3x + 1)^6$$

دستور فوق را به صورت زیر نیز می توان ارائه کرد،

اگر f تابعی بر حسب u و u تابعی از x باشد:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

مثال : مشتق تابع $y = (\frac{x^2}{3x-1})^5$ را به دست آورید.

حل : با فرض $\frac{x^2}{3x-1} = u$ داریم $y = u^5$ و از آنجا :

$$y' = u' \cdot 5u^4 = \frac{2x(3x-1) - 3x^2}{(3x-1)^2} \cdot 5(\frac{x^2}{3x-1})^4 = 5(\frac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2})(\frac{x^2}{3x-1})^4$$

کار در کلاس

مشتق تابع های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = (x^2+1)^2(5x-1)$

ب) $g(x) = (\frac{-3x-1}{x^2+5})^8$

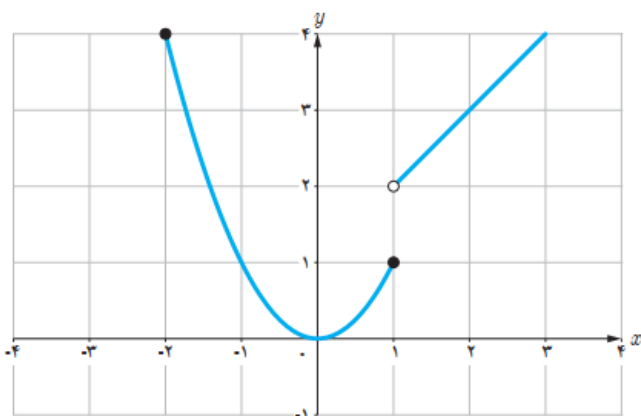
مشتق پذیری روی یک بازه

تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.
تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه f در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

کار در کلاس

مشتق پذیری روی بازه‌های $[a, b]$ و (a, b) را به طور مشابه تعریف کنید.
تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است هرگاه ...

تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه ...



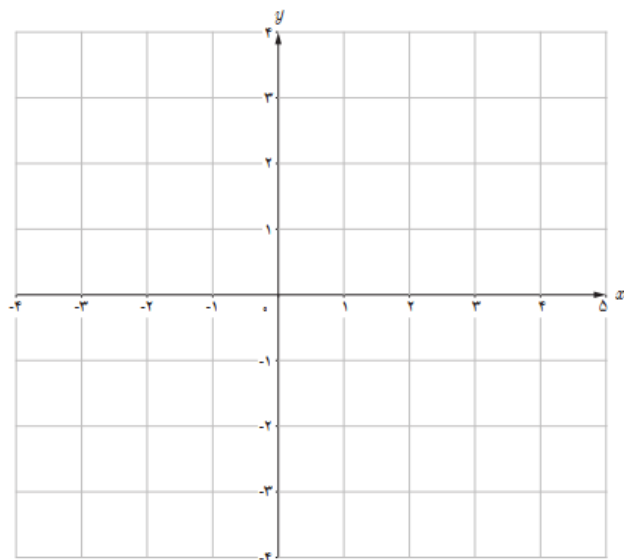
اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق پذیر باشد، گوئیم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ مشتق پذیر است.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

f روی بازه‌های $[-2, 1]$ و $(1, \infty)$ مشتق پذیر است. ولی f روی بازه $[1, 2]$ مشتق پذیر نیست (چرا؟)

$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 < x < 5 \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق پذیری f را روی بازه‌های $[-1, 1]$ ، $(2, 5)$ و $[-2, 0]$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 < x < 5 \end{cases}$$



مشتق مرتبه دوم

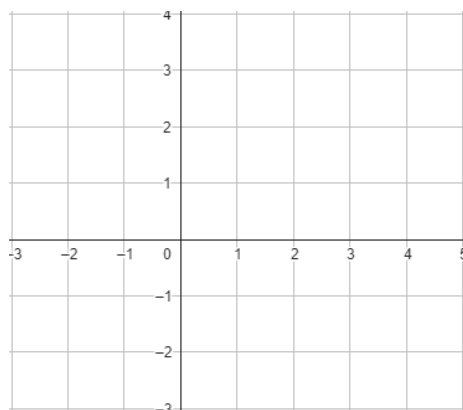
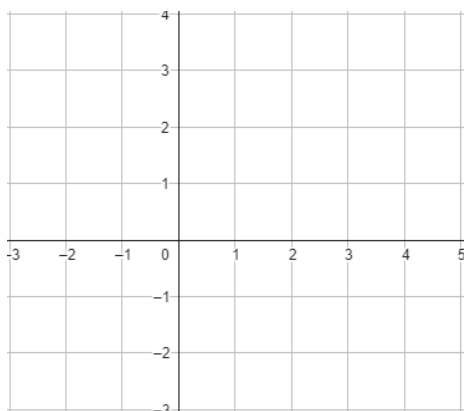
مشتق تابع $y=f(x)$ با نماد $y'=f'(x)$ نمایش داده شد. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y=f(x)$ را به $y''=f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y'=f'(x)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

مثال: اگر $y=3x^2+2x-1$ آن گاه:

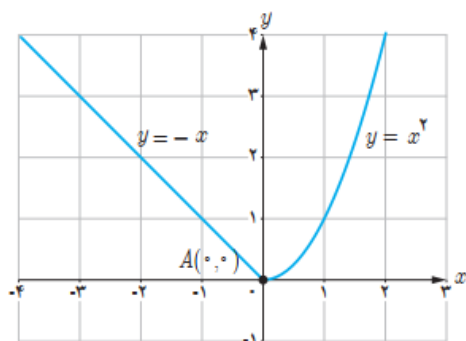
$$y' = 6x + 2, \quad y'' = 6$$

تمرین

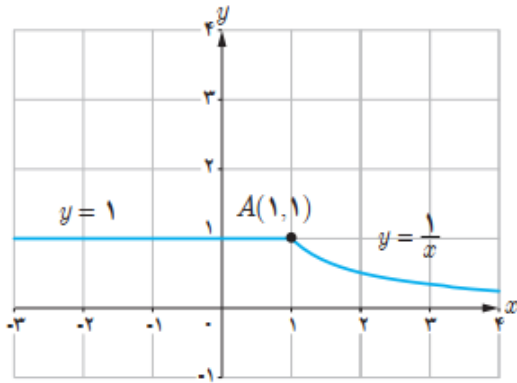
۱ دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x = 2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق پذیر نباشند.



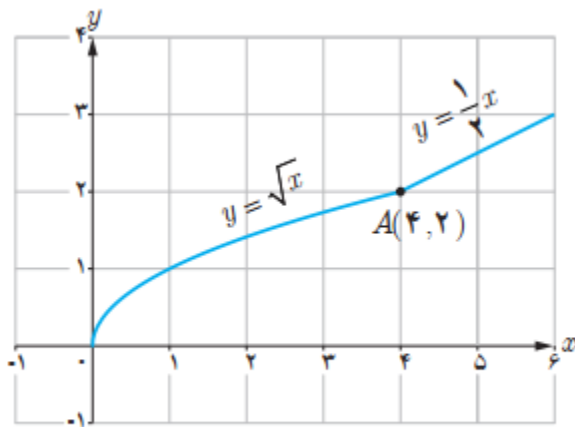
۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A ، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق پذیر نیستند.



(الف)



(ب)



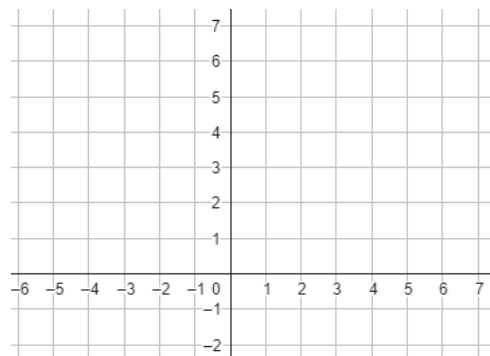
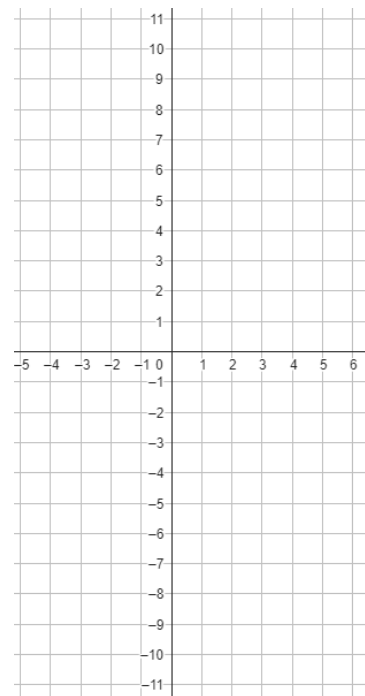
(ب)

۳ تابع $f(x) = \begin{cases} 5x - 4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x + 6 & x > 3 \end{cases}$ داده شده است.

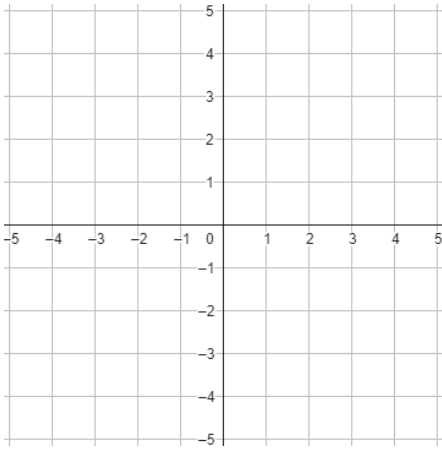
ب) با توجه به نمودار تابع f بگویید که چرا $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند؟
ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.
پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

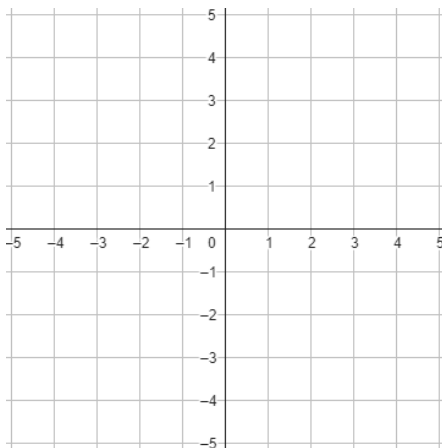
$$f(x) = \begin{cases} 5x - 4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x + 6 & x > 3 \end{cases}$$



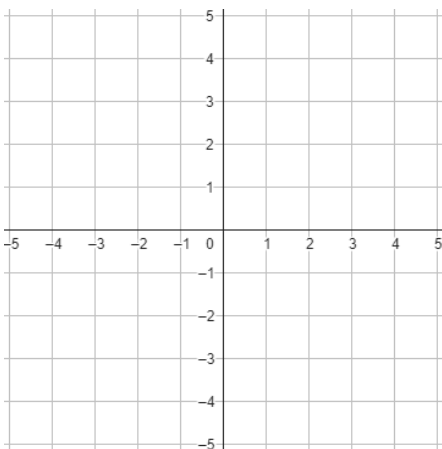
۴ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن
الف) در یک نقطه برابر صفر شود.



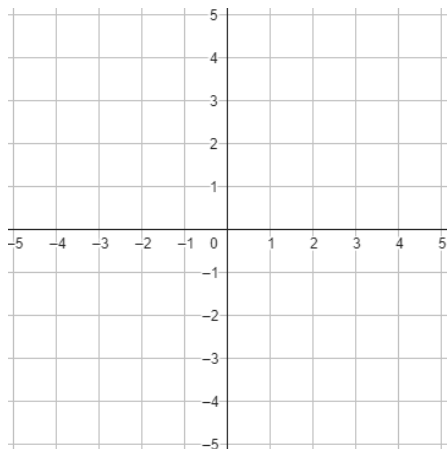
ب) در $x = 2$ برابر ۳ شود.



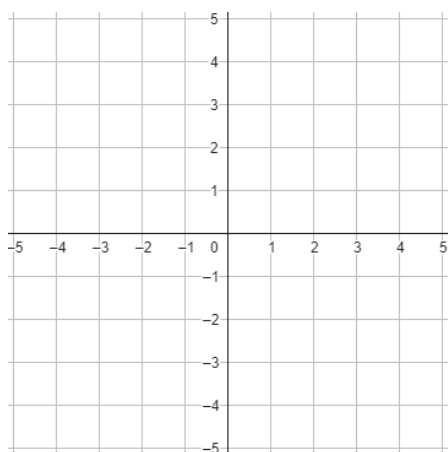
پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

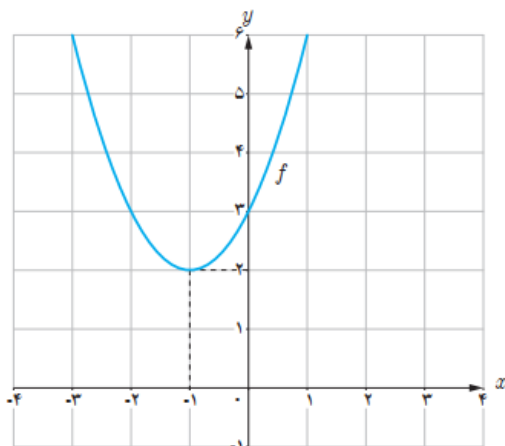


ت) در تمام نقاط یکسان باشد.



ث) در تمام نقاط منفی باشد.





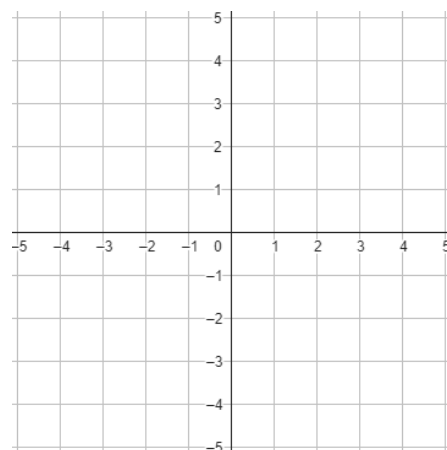
۵

الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

$$f'(2) \text{ و } f'(-1) \text{ و } f'(0) \text{ و } f'(3)$$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ بررسی کنید.

پ) تابع مشتق را رسم کنید.



۶ مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

۸ اگر $f(x) = |x^2 - 4|$ به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری f را در نقاط به طول های ۲ و -۲ بررسی کنید.

۹ مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ را به دست آورده و مشخص کنید در چه نقطه‌ای مماس قائم دارد؟

ارتباط نمودارهای f و f' با یکدیگر



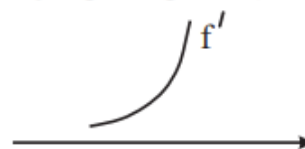
ارتباط نمودارهای f و f' با یکدیگر

نمودار f در بازه‌ی I اکیداً صعودی



$\Leftrightarrow$

نمودار f' در بازه‌ی I بالای محور x ها



نمودار f در بازه‌ی I اکیداً نزولی



$\Leftrightarrow$

نمودار f' در بازه‌ی I زیر محور x ها

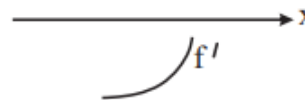


جهت تعقر f در بازه‌ی I رو به بالا



$\Leftrightarrow$

نمودار f' در بازه‌ی I اکیداً صعودی

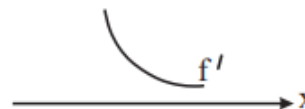


جهت تعقر f در بازه‌ی I رو به پایین

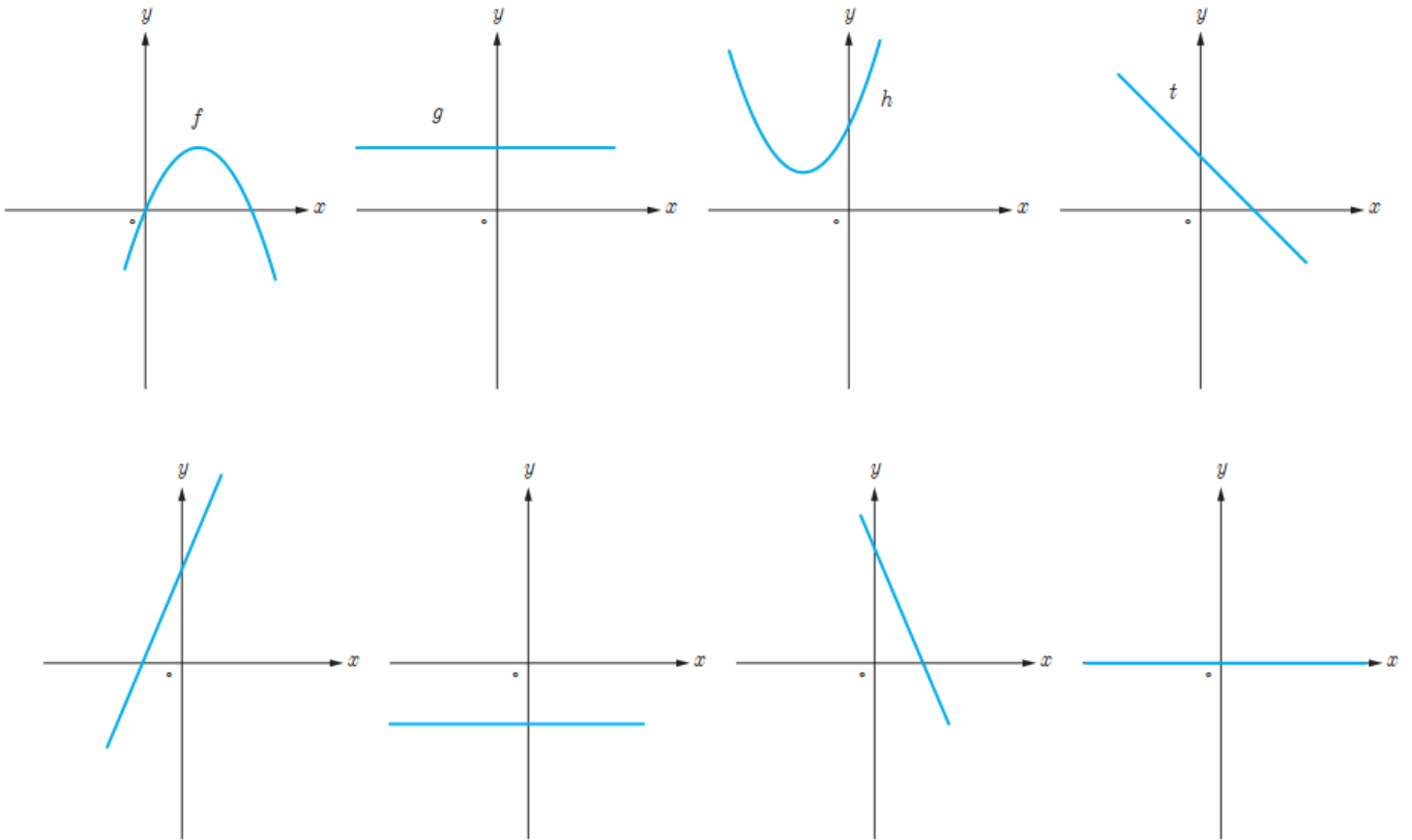


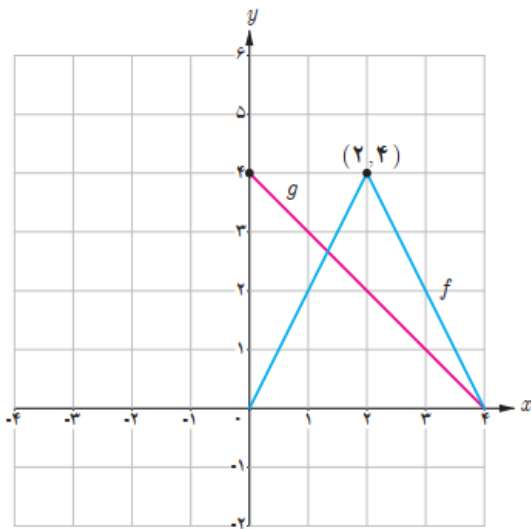
$\Leftrightarrow$

نمودار f' در بازه‌ی I اکیداً نزولی



۱۰ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.





۱۱ نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

الف) اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $h'(1)$ ، $h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(1)$ ، $k'(2)$ و $k'(3)$

۱۲ اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است، $(f + g)'(1)$ و $(3f + 2g)'(1)$

۱۳ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

۱۴ مشتق توابع داده شده را به دست آورید.

الف) $f(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^2$

ب) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$

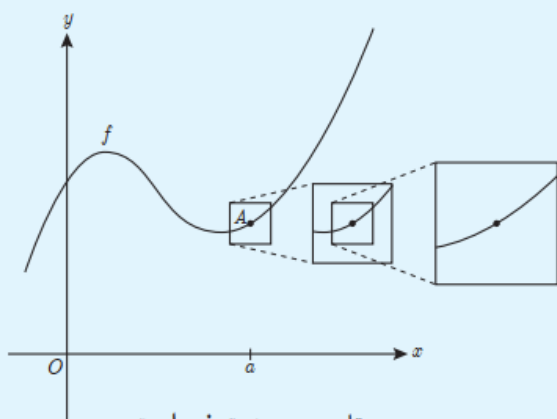
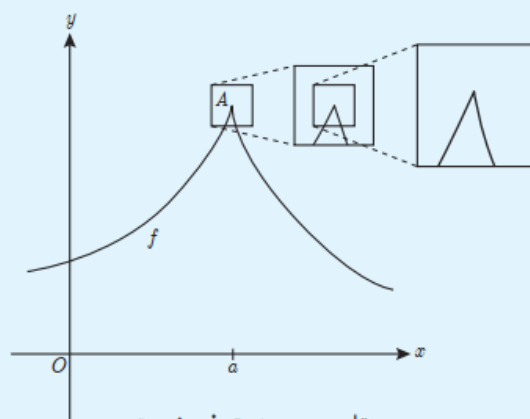
پ) $f(x) = (\sqrt{3x + 2})(x^3 + 1)$

ت) $f(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$

۱۵ اگر $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x$ ، مقدار $f''(-1)$ را به دست آورید.

خواندنی

مشتق پذیری در یک نقطه به صورت شهودی می تواند برحسب رفتار تابع در نزدیکی نقطه $A(a, f(a))$ تعبیر شود. اگر نمودار تابع را در نزدیک نقطه A در نظر بگیریم و مرتباً از نمای نزدیک تری به نمودار نگاه کنیم، هنگامی که f در a مشتق پذیر باشد، نمودار منحنی شبیه یک خط راست می شود.

تابع در a مشتق پذیر است.تابع در a مشتق پذیر نیست.

نمونه سوالات نهایی



(خرداد ۱۴۰۳ - ۱/۲۵ نمره)

۱- مشتق تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = (x - ۶)^3 + \frac{۵x+۳}{\sqrt{۳x-۱}}$$

(شهریور ۱۴۰۳ - ۱/۲۵ نمره)

۲- مشتق تابع داده شده را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$h(x) = \left(\frac{\sqrt{1-3x}}{7+x} \right)^6$$

۳- مشتق پذیری تابع $x=2$ $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & x < 2 \\ 6x - 4 & x = 2 \\ 2\sqrt{x-1} + 6 & x > 2 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=2$ بررسی کنید.

(شهریور ۱۴۰۳ - ۱ نمره)



۱- اگر $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $(f \circ g)'(2) = 6$ باشد. $f'(5)$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) ۳

(سراسری تجربی ۹۸)

۲- خط d در نقطه $(-1, 5)$ بر نمودار تابع f مماس است. اگر شیب خط d برابر $-\frac{1}{p}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}f(x)$

(سراسری تجربی دی ۱۴۰۱)

باشد. مقدار $g'(-1)$ کدام است؟

$$\frac{13}{6} \quad (4)$$

$$\frac{7}{6} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{4}{3} \quad (1)$$

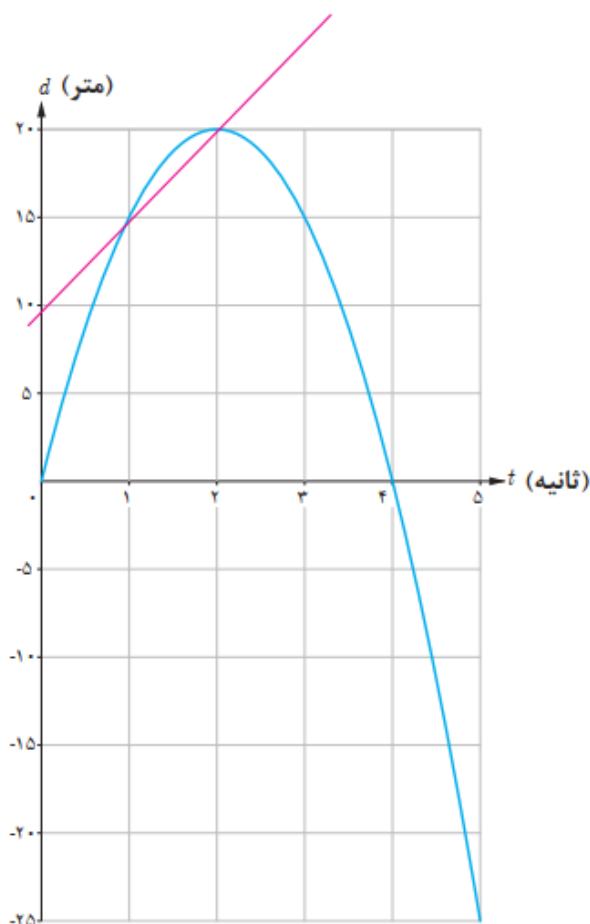
درس سوم

آهنگ تغییر

با مفهوم سرعت متوسط در فیزیک آشنا شده‌اید. اگر اتومبیلی در امتداد خط راست مسافت 280 کیلومتر را در 4 ساعت طی کند سرعت متوسط آن در این زمان $70 = \frac{280}{4}$ کیلومتر بر ساعت است. با این حال ممکن است اتومبیل در لحظات مختلف سرعت‌های متفاوتی داشته باشد. همچنین مطابق آنچه که در درس فیزیک آموخته‌اید، سرعت متوسط روی یک بازه زمانی خیلی کوچک، به سرعت لحظه‌ای نزدیک است. اگر نمودار مکان - زمان در مورد حرکت اتومبیل را داشته باشیم، سرعت متوسط اتومبیل بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که نمودار مکان - زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند.

همچنین در درس فیزیک سرعت لحظه‌ای در هر لحظه دلخواه t ، برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه تعریف شد. با آنچه که در درس‌های گذشته ملاحظه کردید، می‌توان گفت که سرعت در لحظه t همان مقدار مشتق تابع (مکان - زمان) در لحظه t است. مفهوم مشتق را در بسیاری از پدیده‌های دیگر نیز می‌توان مشاهده کرد. ابتدا در مورد سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای به ذکر مثالی خواهیم پرداخت.





مثال: خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله $d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می‌کند، که در آن $0 \leq t \leq 5$ برحسب ثانیه است. با در نظر گرفتن نمودار مکان - زمان (شکل):

الف) سرعت متوسط خودرو را در بازه‌های زمانی $[1, 2]$ و $[1, 1/5]$ و $[1, 1/4]$ به دست آورید.

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری مانند $[1, 1/3]$ و $[1, 1/2]$ و ... اختیار کنیم، سرعت متوسط در این بازه‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

پ) سرعت لحظه‌ای را با استفاده از مشتق تابع d در $t=1$ به دست آورید.

ت) سرعت لحظه‌ای در $t=2$ و $t=3$ چقدر است؟

حل:

الف)

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 2] = \frac{d(2) - d(1)}{2 - 1} = \frac{20 - 15}{1} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 1/5] = \frac{d(1/5) - d(1)}{1/5 - 1} = \frac{18/5 - 15}{-4/5} = \frac{3/5}{-4/5} = -3/4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 1/4] = \frac{d(1/4) - d(1)}{1/4 - 1} = \frac{18/2 - 15}{-3/4} = \frac{3/2}{-3/4} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های زمانی کوچک‌تری اختیار کنیم، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای در $t=1$ نزدیک می‌شود.

پ) $d'(t) = -10t + 20$ ، پس ، $d'(1) = 10$

ت) $d'(2) = 0$ ، $d'(3) = -10$

سرعت در لحظه $t=2$ ، صفر است و مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور x هاست و خودرو ساکن است. مقدار سرعت در لحظه‌های $t=1$ و $t=3$ برابر است و علامت منفی در مورد $d'(3)$ نشان می‌دهد که جهت حرکت در $t=3$ برخلاف جهت حرکت در $t=1$ است.

به جز مفهوم سرعت، در مطالعه پدیده‌های زیاد دیگری که در قالب یک تابع نمایش داده می‌شوند با موضوع نسبت تغییرات متغیر وابسته به تغییرات متغیر مستقل مواجه می‌شویم. نسبت تغییرات دما به تغییرات زمان و همچنین نسبت تغییرات جمعیت نسبت به زمان نمونه‌های دیگری از اینگونه تغییرات هستند.

به طور کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a, a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

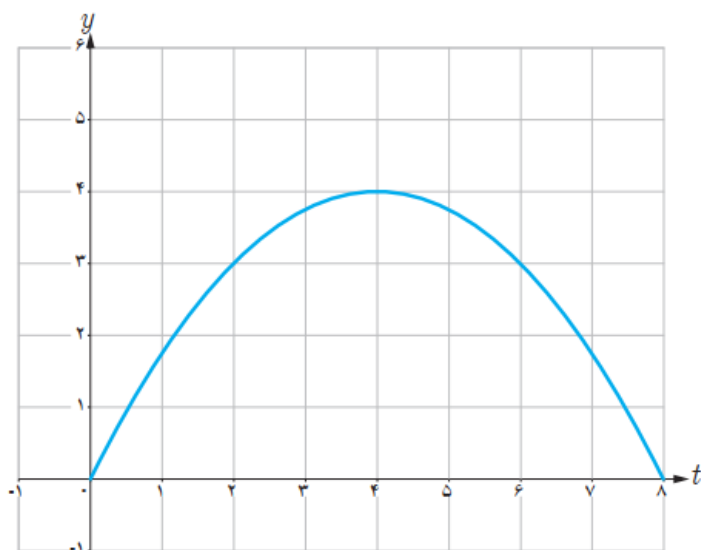
$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در نقطه } x=a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.

۱ نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه t نمایش می‌دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید: (محاسبه عددی لازم نیست.)

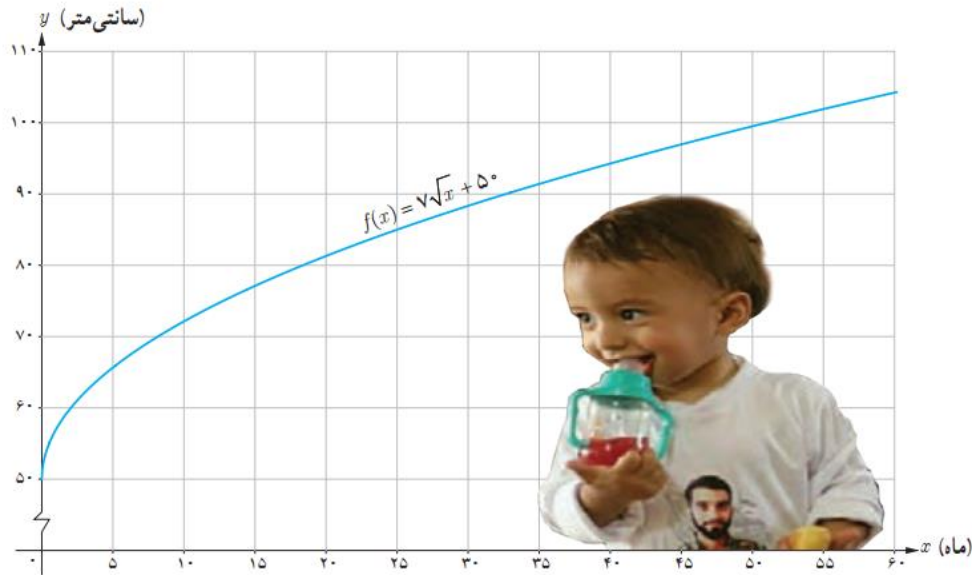
A سرعت متوسط بین $t=1$ و $t=3$ B سرعت متوسط بین $t=5$ و $t=6$ C سرعت لحظه‌ای در $t=1$ D سرعت لحظه‌ای در $t=3$ E سرعت لحظه‌ای در $t=5$ F سرعت لحظه‌ای در $t=6$

کاربردهایی دیگر از آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

آهنگ رشد: تابع $f(x) = \sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را برحسب سانی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. به طور مثال $f(25) = 85$ آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 60]$ چنین است:

$$\frac{f(60) - f(0)}{60 - 0} = \frac{\sqrt{60} + 50 - 50}{60} \approx \frac{0.9}{\text{ماه}} \text{ سانی متر}$$

یعنی در طی ۵ سال، رشد متوسط قد حدود ۰/۹ سانی متر در هر ماه است.



کار در کلاس

$$f(x) = 7\sqrt{x} + 50$$

الف) آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟

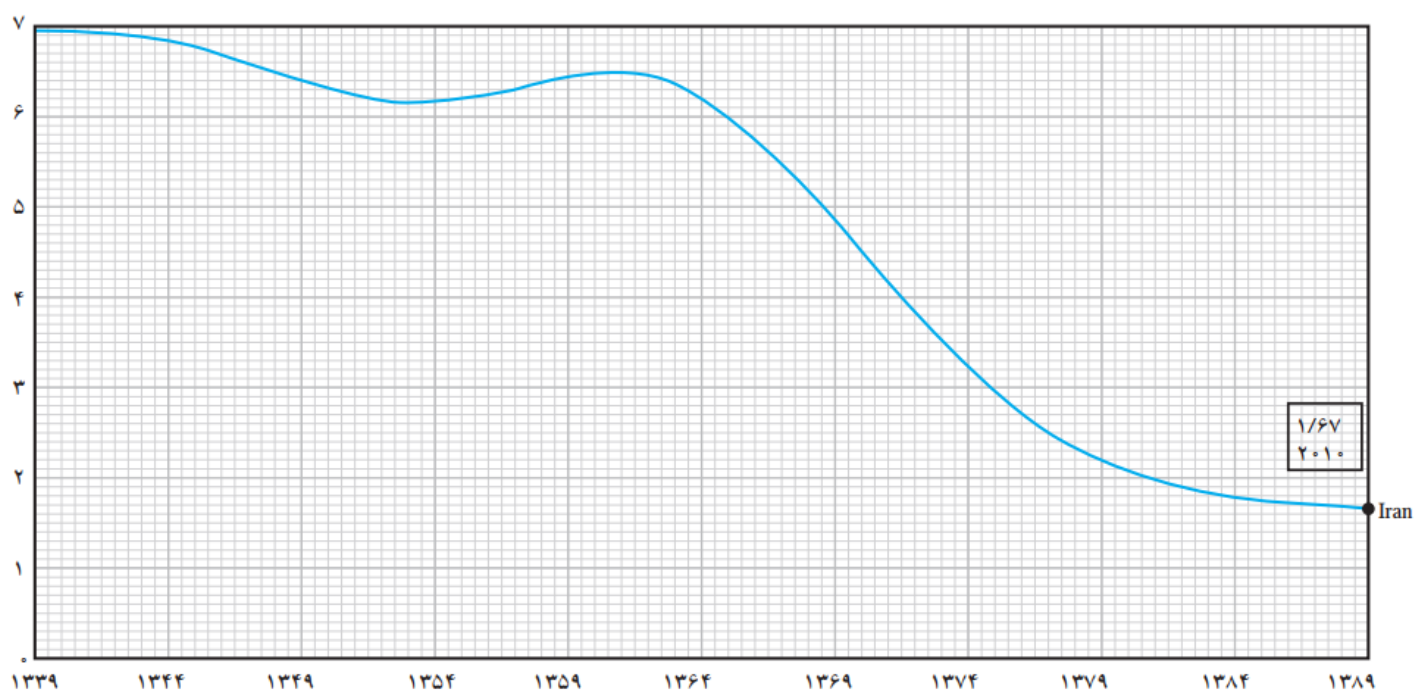
ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام یک بیشتر است؟

پ) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی، ۸۰ سانتی متر و در ۳۶ ماهگی، ۹۵ سانتی متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله حساب کنید و با نمودار بالا مقایسه کنید.

نرخ باروری: نمودار زیر روند رو به کاهش نرخ باروری در کشورمان را در طی نیم قرن نمایش می دهد. آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۸۹، ۱۳۳۹] در مدت ۵۰ سال برابر است با:

$$\frac{1/6 - 7}{1389 - 1339} = \frac{-5/4}{50} = -0.108$$

آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۷۹، ۱۳۶۴] را به دست آورید. (با استفاده از مقادیر تقریبی روی نمودار) بازه زمانی را مشخص کنید که در آن آهنگ متوسط تغییر باروری مثبت باشد.



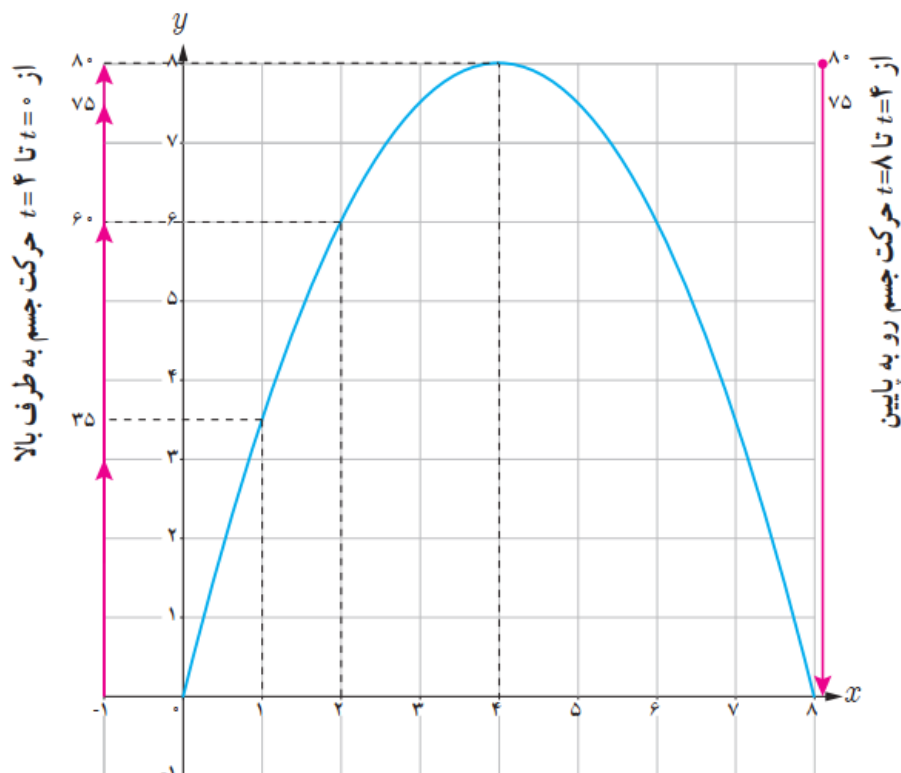
خواندنی

نرخ باروری در ایران در سال‌های ۱۳۶۰ تا ۱۳۶۵ به حدود ۶/۵ فرزند رسید. با توجه به اینکه کشورمان امکانات لازم برای چنین رشد جمعیت بالایی را دارا نبود، سیاست‌های کاهش جمعیت و عوامل دیگر باعث شد که نرخ باروری تا سال ۱۳۸۵ به ۱/۹ کاهش یابد. بررسی‌ها نشان می‌دهند که کاهش باروری در ایران بزرگ‌ترین و سریع‌ترین کاهش باروری ثبت شده بود. کارشناسان معتقدند که باید سیاست‌های کاهش رشد جمعیت پس از کاهش نرخ باروری به حدود ۲/۵ فرزند متوقف می‌شد. کاهش رشد جمعیت مشکلات فراوانی نظیر کاهش نیروی کار و بحران سالمندی را در پی خواهد داشت. با ابلاغ سیاست‌های کلی «جمعیت» توسط رهبر معظم انقلاب اسلامی در سال ۱۳۹۳، و تغییر برنامه‌های وزارت بهداشت، براساس نتایج سرشماری عمومی نفوس و مسکن سال ۱۳۹۵، نرخ باروری به حدود ۲/۱ افزایش یافته است. با این حال نگرانی‌های مربوط به احتمال کاهش بیش از حد رشد جمعیت در سال‌های ۱۴۲۵ تا ۱۴۳۰ تأکید می‌کند که این سیاست‌ها تا دست‌یابی کامل به اهداف تعیین شده باید دنبال شود.

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

مثال: جسمی را از سطح زمین به‌طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید. به‌طور مثال ۲ ثانیه پس از پرتاب این جسم در ارتفاع ۶۰ متری از سطح زمین است.

به هر حال جسم پس از مدتی به زمین برمی‌گردد. نمودار مکان - زمان حرکت این جسم در شکل نشان داده شده است.



اگر سرعت متوسط این جسم در بازه‌های زمانی $[0, 2]$ ، $[1, 2]$ ، $[2, 3]$ و $[3, 4]$ را به ترتیب با v_1 ، v_2 ، v_3 و v_4 نمایش دهیم، داریم:

$$v_1 = \frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{60}{2} = 30 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = 25 \text{ m/s}$$

$$v_3 = \frac{h(3) - h(2)}{3 - 2} = \frac{75 - 60}{1} = 15 \text{ m/s}$$

$$v_4 = \frac{h(4) - h(3)}{4 - 3} = \frac{80 - 75}{1} = 5 \text{ m/s}$$

سرعت لحظه‌ای در زمان‌های $t=1$ ، $t=2$ ، $t=3$ و $t=4$ با استفاده از مشتق تابع h چنین به دست می‌آید:

$$h(t) = -5t^2 + 40t \Rightarrow h'(t) = -10t + 40$$

$$h'(1) = 30 \text{ m/s} \quad , \quad h'(2) = 20 \text{ m/s} \quad , \quad h'(3) = 10 \text{ m/s} \quad , \quad h'(4) = 0 \text{ m/s}$$

در $t=4$ جسم به بالاترین ارتفاع خود از سطح زمین (80 متر) می‌رسد و در این لحظه سرعت آن برابر صفر (متر بر ثانیه) می‌شود. سپس

جسم شروع به حرکت به طرف زمین می‌کند. سرعت متوسط در بازه $[4, 5]$ برابر $\frac{h(5) - h(4)}{5 - 4} = \frac{75 - 80}{1} = -5 \text{ m/s}$ و سرعت لحظه‌ای در $t=5$ برابر $h'(5) = -10 \text{ m/s}$ است. علامت منفی نشان می‌دهد که حرکت جسم رو به پایین است.

کار در کلاس

با توجه به مثال قبل:

$$h(t) = -5t^2 + 40t$$

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به دست آورید.

$$h(t) = -5t^2 + 40t$$

ب) سرعت متوسط جسم را در بازه زمانی $[5, 8]$ به دست آورید.

$$h(t) = -5t^2 + 40t$$

پ) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم 35 m/s و -35 m/s است.

تمرین

۱) جدول زیر درجه حرارت T (سانتی گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

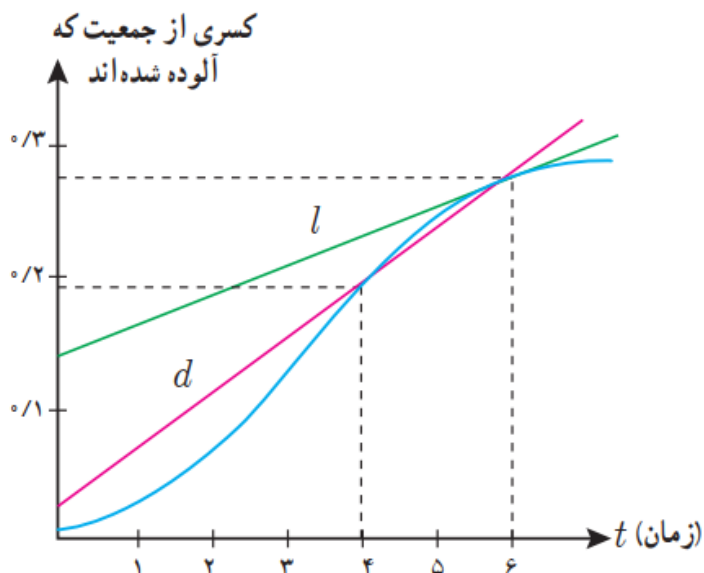
آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را :
الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.

پ) پاسخ ها را تفسیر کنید.

۲ کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار زیر نشان داده شده است.

الف) شیب‌های خطوط l و d چه چیزهایی را نشان می‌دهند.

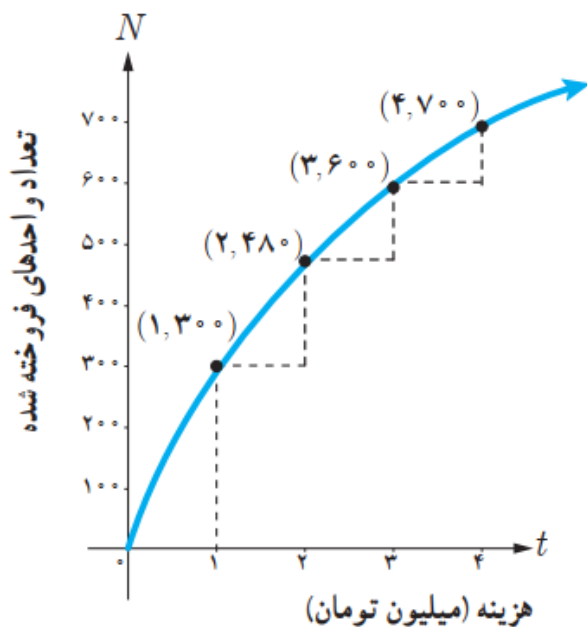


ب) گسترش آلودگی در کدام یک از زمان‌های $t=1$ ، $t=2$ یا $t=3$ بیشتر است؟

پ) قسمت ب را برای $t=4$ ، $t=5$ و $t=6$ بررسی کنید.

۳ نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N بر حسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.



ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

۴ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (t بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

t	ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$	متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

۵ تویی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول روبه‌رو نمایش داده شده است.

بر اساس جدول کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه، است نشان دهد؟

ت) $۱۶/۰۳ \text{ m/s}$

پ) $۱۱/۵ \text{ m/s}$

ب) $۱۴/۹۱ \text{ m/s}$

الف) $۱/۲۳ \text{ m/s}$

۶ کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است :
الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[0, 1]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است.

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است.

پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a) = 0$ و هم $f(a) = 0$

۷ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است.
الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چقدر است؟

$$m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$$

۸ گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 40(1 - \frac{t}{100})^2$ به دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0, 1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می شود؟

$$V = 40(1 - \frac{t}{100})^2$$

نمونه سوالات نهایی



- ۱- تابع $f(x) = x^2 - x$ را در نظر بگیرید.
 الف : آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازه $[0, 2]$ بدست آورید.
 ب : حدود x را چنان بیابید که آهنگ تغییر لحظه ای تابع f از آهنگ تغییر متوسط آن ، در بازه $[0, 2]$ بزرگتر باشد.

- ۲- گنجایش ظرفی ۲۰ لیتر مایع است. در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می شود اگر حجم مایع باقیمانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 20 \left(1 - \frac{t}{50}\right)^2$ به دست آید در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 50]$ می شود؟
 (شهریور ۱۴۰۳ - ۱/۲۵ نمره)

سوالات تکمیلی



۱- بازه $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin x \cos^2 x$ چند برابر آهنگ متوسط تغییر تابع

$y = \sin^4 x - \cos^4 x$ است؟

(سراسری ریاضی خارج ۱۴۰۱)

$$\frac{1}{2} (4)$$

$$-\frac{1}{2} (3)$$

$$1 (2)$$

$$-1 (1)$$

۲- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ اختلاف آهنگ تغییر لحظهای در $x = 2$ ، از آهنگ تغییر متوسط

در بازه $[1, 4]$ ، کدام است؟

(سراسری تجربی ۹۸)

$$0.75 (4)$$

$$0.45 (3)$$

$$0.5 (2)$$

$$0.25 (1)$$

فصل ۵ کاربرد مشتق

اکسترم‌های تابع

درس اول

بهینه سازی

درس دوم

تهیه کننده : رقیه پيله ور - دبیر ریاضی ناحیه دو اردبیل



برای تماشای ویدیوهای آموزشی ریاضی ۳ تجربی (همین جزوه) می توانید به سایت math-pilevar.com یا math-pilevar.ir مراجعه کنید.



درس اول

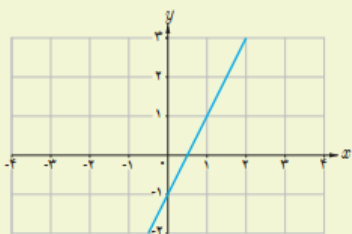
اکسترم‌های تابع

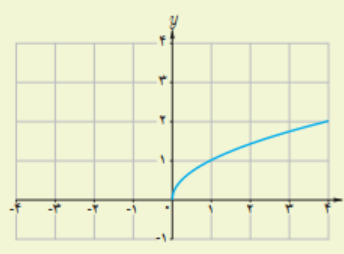
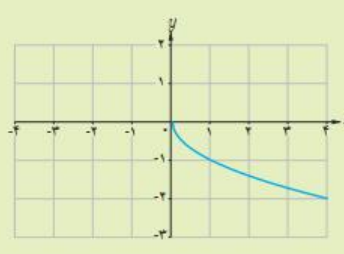
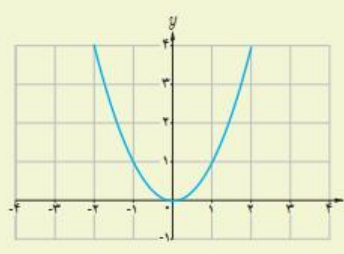
یکنوایی تابع و ارتباط آن با مشتق

در فصل اول، تعریف تابع صعودی و تابع نزولی را دیدیم. در اینجا می‌خواهیم ارتباط علامت مشتق یک تابع را با صعودی یا نزولی بودن آن تابع بررسی کنیم.

فعالیت

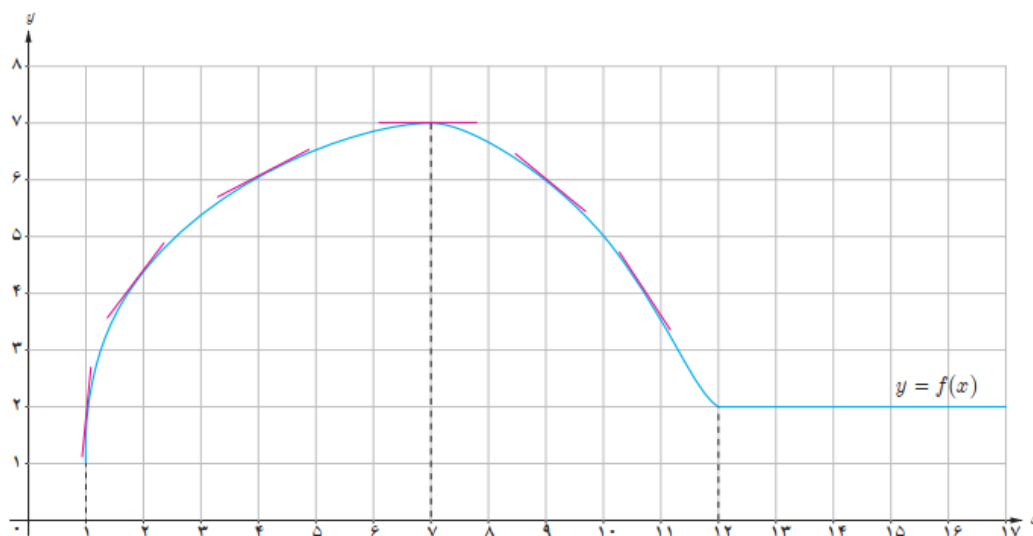
جدول زیر را در نظر بگیرید. در این جدول ضابطه و نمودار چند تابع ارائه شده است که از قبل با آنها آشنا هستیم. همچنین یکنوایی این تابع‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. به علاوه، مشتق هر کدام از این تابع‌ها، تعیین علامت شده است. جدول را کامل کنید.

علامت مشتق	تابع مشتق	یکنوایی تابع	نمودار تابع	ضابطه تابع
f' همواره مثبت است	$f'(x) = 2$	تابع f در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است		$f(x) = 2x - 1$
g' همواره ... است	$g'(x) = -1$	تابع g در $\mathbb{R}$ اکیداً ... است		$g(x) = -x + 1$

$h(x) = \sqrt{x}$		تابع h در $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است	$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	h' در $(0, +\infty)$... است
$u(x) = -\sqrt{x}$		تابع u در $[0, +\infty)$ اکیداً ... است	$u'(x) = \dots$	u' در $(0, +\infty)$ ، همواره ...
$k(x) = x^2$		تابع k در $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی و در $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.	$k'(x) = 2x$	k' در $(-\infty, 0)$ منفی و در $(0, +\infty)$ است.
$l(x) = \dots$				

با بررسی جدول بالا، توضیح دهید که چه رابطه‌ای بین علامت مشتق تابع در یک بازه و یکنوایی تابع در آن بازه وجود دارد.

از فصل قبل می‌دانیم که مشتق هر تابع در یک نقطه، با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه برابر است. تابع زیر را در نظر بگیرید:



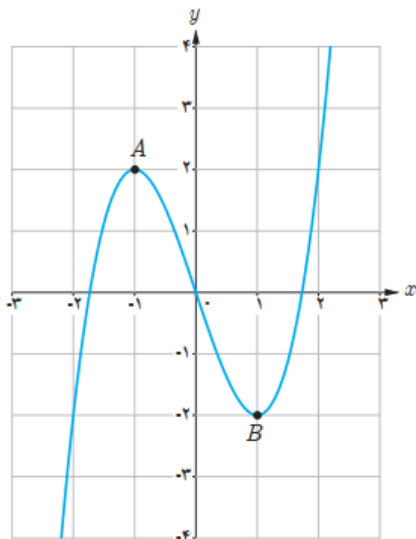
ملاحظه می‌شود که:

- الف) در بازه $(1, 7)$ که f اکیداً صعودی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f ، مثبت است؛ بنابراین در این بازه علامت f' است.
- ب) در بازه $(7, 12)$ که تابع اکیداً نزولی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f ، است؛ بنابراین در این بازه علامت f' است.
- پ) در بازه $(12, +\infty)$ که تابع، مقدار ثابت دارد، مقدار f' برابر است.

مطلب فوق برای توابع مشتق‌پذیر همواره درست است که آن را به شکل زیر بیان می‌کنیم:

آزمون یکنوایی تابع

- الف) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.
- ب) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.
- پ) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.



بنابراین برای مشخص کردن بازه‌های مربوط به صعودی بودن یا نزولی بودن تابع f ، کافی است مانند مثال زیر، f' را تعیین علامت کنیم.

مثال ۱: تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه‌ها اکیداً نزولی است؟

حل: f' را به دست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
بازه		$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
علامت f'		+	-	+
یکنوایی f	$-\infty$	اکیداً صعودی	اکیداً نزولی	اکیداً صعودی $+\infty$

نمودار تابع f مربوط به مثال قبل را رسم کرده‌ایم. آن را با جدول مقایسه کنید.

اکسترم‌های نسبی تابع

در نمودار این تابع، نقاط به طول ۱ و -۱ را که صفرهای تابع f' هستند مورد توجه قرار دهید. اهمیت این نقاط در این مثال از این جهت است که در هر یک از آنها، رفتار تابع از نظر صعودی یا نزولی بودن عوض شده است (جدول ملاحظه شود). اگر این دو نقطه را به ترتیب A و B بنامیم، آنگاه A نقطهٔ ماکزیمم نسبی f و B نقطهٔ مینیمم نسبی آن است.

تعریف: گوئیم تابع f در نقطه‌ای به طول c ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند $I \subseteq D_f$ باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$.
در این حالت $f(c)$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع f نامیده می‌شود.

همچنان که گفته شد، تابع مثال قبل در نقطه $A(-1, 2)$ ماکزیمم نسبی دارد و مقدار ماکزیمم نسبی تابع برابر ۲ می‌باشد. مینیمم نسبی به روش مشابه تعریف می‌شود.

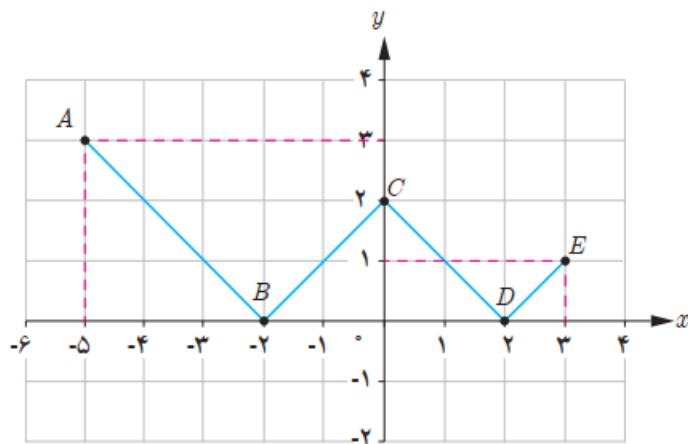
تعریف: گوئیم تابع f در نقطه‌ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند I باشد که برای هر $x \in I \subseteq D_f$ داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

در مثال قبل مقدار مینیمم نسبی تابع چقدر است؟

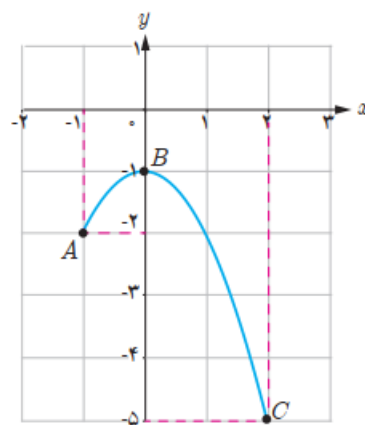
تذکر: نقاط ماکزیمم و مینیمم یک تابع را نقاط اکسترم آن تابع هم می‌گوئیم. در تابع مثال قبل، نقاط A و B اکسترم‌های نسبی تابع هستند.

کار در کلاس

نوع اکسترم‌های نسبی هر یک از توابع زیر را در نقاط مشخص شده تعیین کنید و جدول‌ها را کامل کنید.



الف) $f(x) = |x - 2|, x \in [-5, 3]$



ب) $g(x) = -x^2 - 1, x \in [-1, 2]$

نقطه	نوع اکسترم نسبی	مقدار اکسترم نسبی	مقدار مشتق
A	نه max نسبی و نه min نسبی	—	—
B	min نسبی	۰	$f'(-2)$ موجود نیست
C	...	۲	...
D	...	...	...
E	...	—	—

نقطه	نوع اکسترم نسبی	مقدار اکسترم نسبی	مقدار مشتق
A	نقطه اکسترم نسبی نیست	—	—
B	max نسبی	...	$f'(0)$ برابر صفر است
C	...	—	—

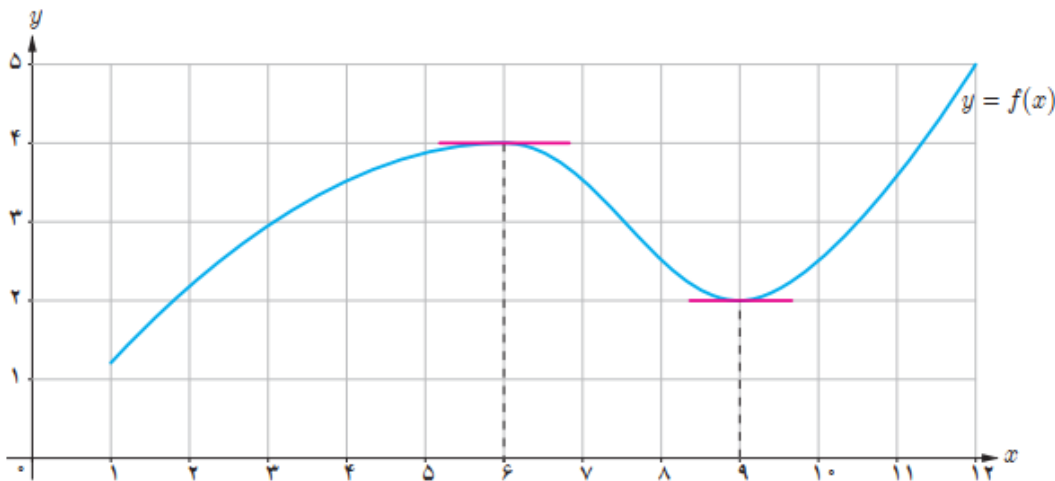
نقاط بحرانی تابع

حال این سؤال پیش می‌آید که در چه نقاطی از دامنه تابع f باید به دنبال اکسترم‌های نسبی آن باشیم؟ همان‌گونه که در تابع‌های قبلی دیده می‌شود، جواب عبارت است از نقاطی از دامنه f که f' در آنها تعریف نشده باشد و همچنین نقاطی که مقدار f' در آنها برابر صفر است. به لحاظ اهمیت این دو دسته از نقاط، شایسته است که نامی برای خود داشته باشند؛ آنها را نقاط بحرانی تابع می‌نامیم:

تعریف: نقطه به طول c از دامنه تابع f را یک نقطه بحرانی برای این تابع می‌نامیم هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع زیر را در نظر بگیرید. دیده می‌شود که خط مماس بر نمودار f در این نقاط به صورت افقی، یعنی با شیب صفر است. از آنجا که مشتق تابع در یک نقطه، برابر شیب خط مماس بر منحنی تابع در آن نقطه است، لذا در این تابع داریم:

$$f'(6) = 0, \quad f'(9) = 0$$



این مطلب در مورد نقاط اکسترم نسبی هر تابع مشتق‌پذیر، درست است. قضیه زیر را در این مورد بیان می‌کنیم.

قضیه: اگر تابع f در نقطه به طول c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = 0$. به عبارت دیگر، هر نقطه اکسترم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

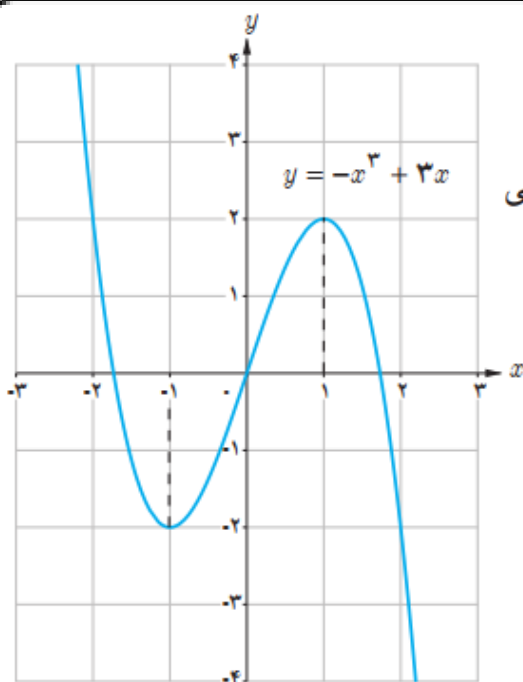
کار در کلاس



۱ الف) با رسم نمودار تابع $f(x) = |x-2|$ ، نشان دهید که f در $x = 2$ مینیمم نسبی دارد.

ب) آیا $f'(2)$ موجود است؟ چرا؟

پ) آیا $x = 2$ طول نقطه بحرانی تابع است؟ چرا؟



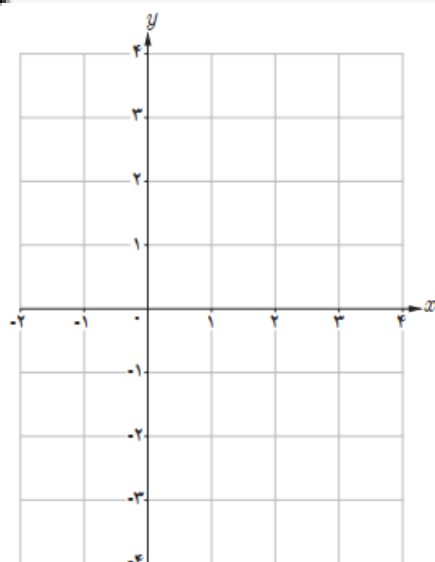
۲ نمودار تابع $f(x) = -x^3 + 3x$ را رسم کرده ایم.

الف) طول های نقاط اکسترمم نسبی f را تعیین کنید.

ب) می دانیم این تابع در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است. ریشه های معادله $f'(x) = 0$ ، یعنی

طول های نقاط بحرانی تابع را به دست آورید.

پ) با توجه به الف و ب، درستی قضیه قبل را در مورد این تابع بررسی کنید.



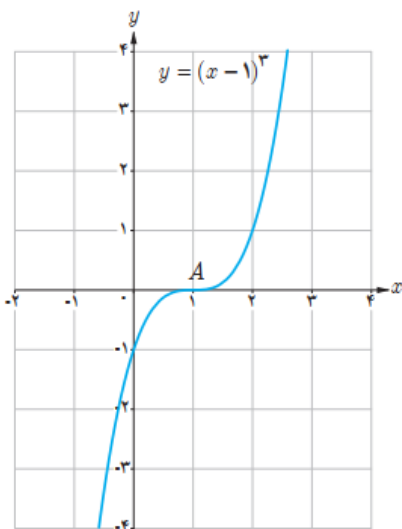
۳ تابع با ضابطه $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ را در نظر بگیرید. f همواره مشتق پذیر است.

الف) $f'(x)$ را به دست آورید.

ب) ریشه معادله $f'(x) = 0$ را محاسبه کنید تا طول نقاط بحرانی تابع به دست آید.

پ) با رسم نمودار سهمی، تحقیق کنید که آیا نقطه اکسترم f منطبق بر نقطه بحرانی آن است؟

از مثال های قبل، این سؤال مطرح می شود که آیا صفرهای تابع مشتق، همواره طول نقاط اکسترم نسبی تابع را به دست می دهند؟ با وجود آنکه جواب این سؤال در مورد برخی از تابع های مورد بحث ما مثبت است، مثال زیر نشان می دهد که این مطلب همیشه هم درست نیست. به عبارت دیگر، عکس قضیه قبل در حالت کلی درست نیست.



مثال: به نمودار تابع $f(x) = (x-1)^3$ دقت کنید. تابع مشتق این تابع به صورت $f'(x) = 3(x-1)^2$ است. با وجود آنکه مقدار $f'(x)$ در $x=1$ برابر صفر است، اما با توجه به نمودار f ، دیده می‌شود که نقطه به طول ۱ برای این تابع نه ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی. دلیل این مطلب، آن است که f' ، قبل و بعد از $x=1$ همواره مثبت است؛ به عبارت دیگر، f در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است و لذا نمی‌تواند اکسترمم نسبی داشته باشد.

تذکر: مثال بالا نشان می‌دهد که عکس قضیه قبل در حالت کلی درست نیست. در واقع نقطه A به طول ۱ برای تابع $f(x) = (x-1)^3$ یک نقطه بحرانی است، اما اکسترمم نسبی آن نیست. شما یک مثال نقض دیگر برای عکس این قضیه ارائه کنید که نشان دهد یک نقطه بحرانی لزوماً اکسترمم نسبی نیست.

هر نقطه اکسترمم نسبی



نقطه بحرانی

نقطه بحرانی

ممکن است نقطه اکسترمم نسبی باشد.

ممکن است نقطه اکسترمم نسبی نباشد.



کار در کلاس

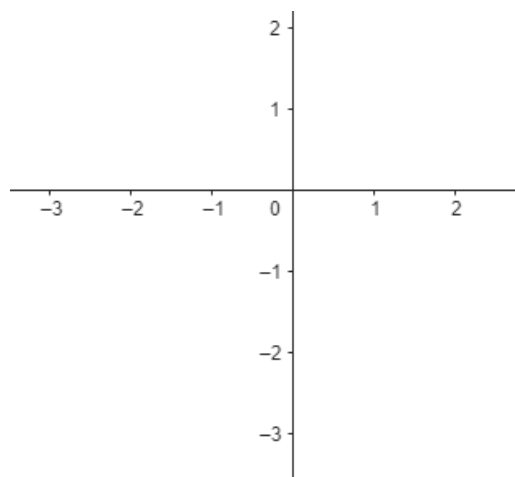
۱ جدول تغییرات تابع $f(x) = -x^2 - 2x$ در زیر آمده است که در آن با تعیین علامت f' ، بازه‌هایی که تابع f در آنها صعودی است و همچنین بازه‌هایی که نزولی می‌باشد، تعیین شده است. همچنین، اکسترمم نسبی تابع در جدول مشخص شده است:

$$f'(x) = -2x - 2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = -1 \quad \text{طول نقطه بحرانی}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
بازه	$(-\infty, -1)$		$(-1, +\infty)$
علامت f'	+		-
یکنوایی f	صعودی اکید		نزولی اکید
	$-\infty$	max نسبی	$-\infty$

با توجه به جدول، مشخص است که نقطه به طول (-1) ، ماکزیمم نسبی تابع است؛ چرا که رفتار تابع در این نقطه از صعودی اکید به نزولی اکید تغییر کرده است. با توجه به جدول و در صورت لزوم با یافتن نقاط دیگری از تابع، نمودار آن را رسم کنید.



۲ جدولی مشابه جدول بالا برای تابع $g(x) = x^2 - 3x^2$ رسم کنید که نقاط اکسترمم نسبی تابع در آن مشخص شده باشد.

مثال‌های بالا از توابع پیوسته، این مطلب را القا می‌کنند که تغییر رفتار این گونه تابع‌ها در یک نقطه از صعودی بودن به نزولی بودن، نشان‌دهنده نقطه ماکزیمم نسبی آن تابع است. برای مینیمم نسبی هم می‌توان مطلب مشابهی را بیان کرد که در ادامه آمده است.

آزمون مشتق اول

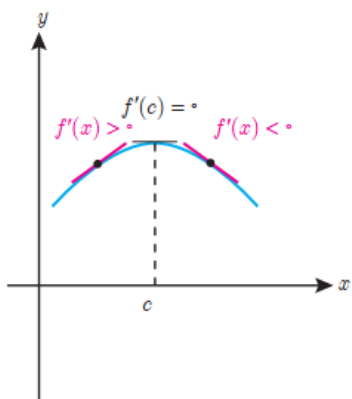
فرض کنیم c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر باشد.

الف) اگر علامت f' در $x = c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آنگاه $x = c$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است.

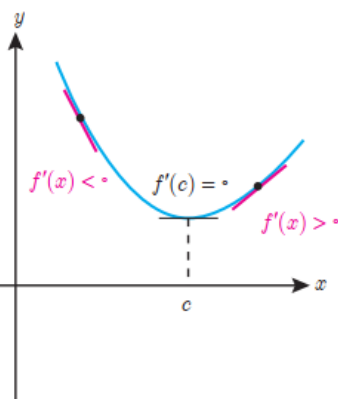
ب) اگر علامت f' در $x = c$ از منفی به مثبت تغییر کند، آنگاه $x = c$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع f است.

پ) اگر f' در c تغییر علامت ندهد؛ به طوری که f' در یک همسایگی محذوف c همواره مثبت (یا همواره منفی) باشد، آنگاه f در c ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

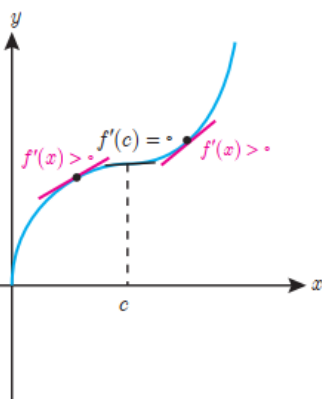
درستی آزمون مشتق اول را در همسایگی نقطه c در هر یک از نمودارهای زیر مورد توجه قرار دهید.



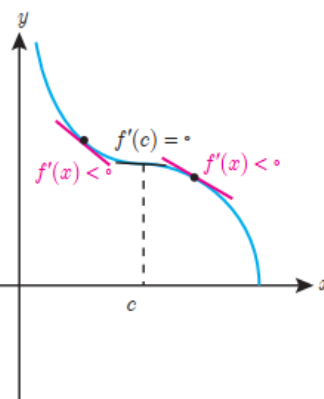
$x=c$: طول ماکزیمم نسبی



$x=c$: طول مینیمم نسبی



$x=c$: نه طول ماکزیمم نسبی است
و نه مینیمم نسبی



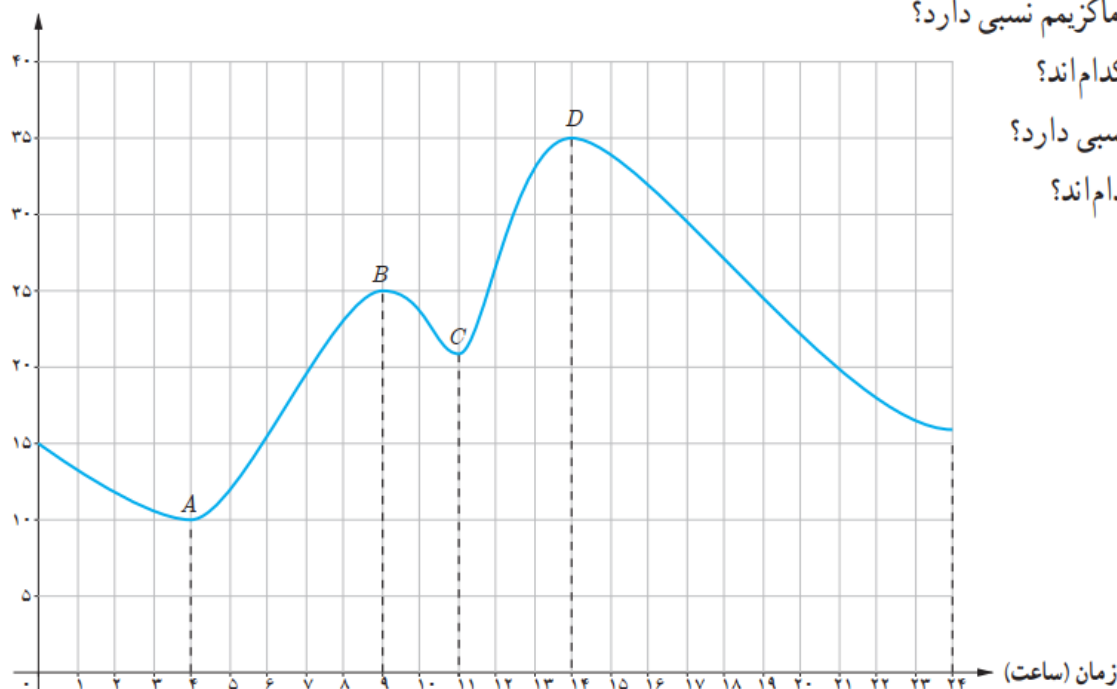
$x=c$: نه طول ماکزیمم نسبی است
و نه مینیمم نسبی

اکسترم های مطلق تابع

فعالیت

نمودار زیر نشان دهنده تغییرات دمایی برای یک شهر در طی ۲۴ ساعت است.

دما (سانتی گراد)



الف) تابع مقابل در چه نقاطی ماکزیمم نسبی دارد؟

ب) مقادیر ماکزیمم نسبی تابع کدام اند؟

پ) تابع در چه نقاطی مینیمم نسبی دارد؟

ت) مقادیر مینیمم نسبی تابع کدام اند؟

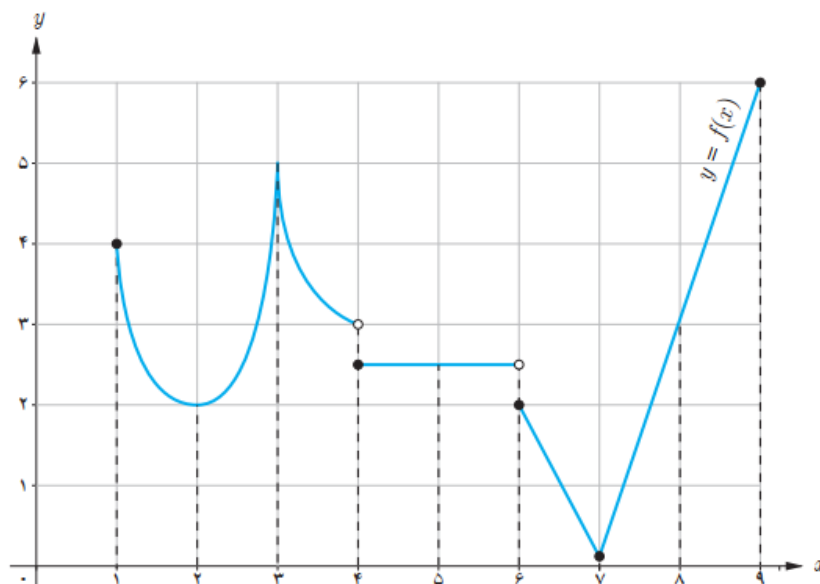
با توجه به نمودار، دیده می‌شود که دمای هوا در ساعت ۱۴ بیشترین مقدار و برابر با ۳۵ درجه سانتی‌گراد بوده است. در این حالت می‌گوییم، نقطه $(14, 35)$ D ماکزیمم مطلق تابع است و مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر ۳۵ می‌باشد. نقطه مینیمم مطلق این تابع و همچنین مقدار مینیمم مطلق آن را بنویسید.

تعریف: با فرض $c \in D_f$ ، نقطه $(c, f(c))$ ، یک نقطه ماکزیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

تعریف: با فرض $c \in D_f$ ، نقطه $(c, f(c))$ ، یک نقطه مینیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

در تابع صفحه قبل، اکسترم‌های مطلق تابع f یعنی نقاط A و D ، به ترتیب نقاط مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق تابع هستند.

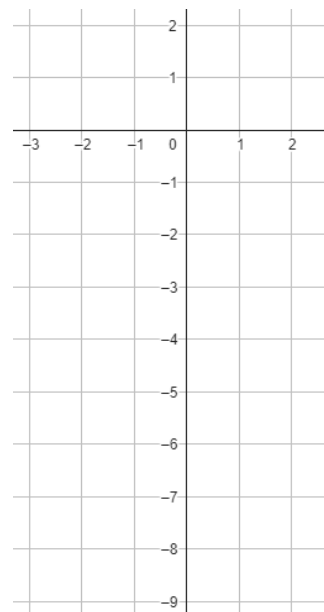
۱ با تکمیل جدول زیر، اکسترم‌های مطلق و نسبی تابع زیر و همچنین نقاط بحرانی آن را در نقاط مشخص شده تعیین کنید.



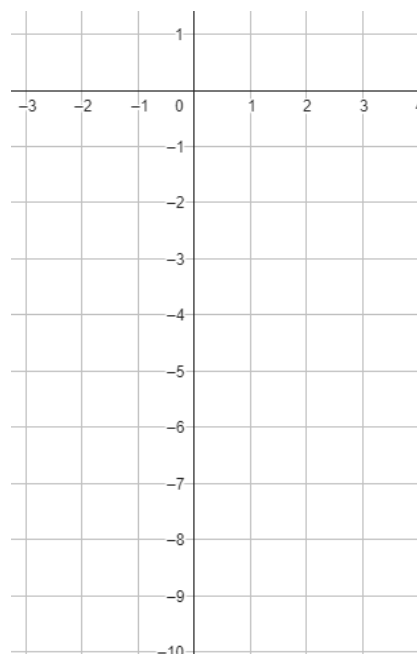
طول نقطه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$\max$ مطلق	×	×			×	×			✓
$\min$ مطلق	×	×			×	×			×
$\max$ نسبی	×	×			✓	×			×
$\min$ نسبی	×	✓			✓	×			×
نقطه بحرانی	✓	✓			✓	✓			✓

۲ به کمک رسم نمودار تابع، مقادیر اکسترمم نسبی و مطلق تابع های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

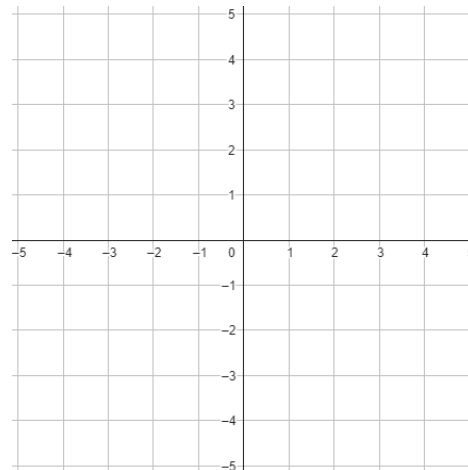
الف) $t(x) = x^2 ; x \in [-2, 1]$



ب) $g(x) = -x^2 ; x \in [-2, 3]$



پ) $u(x) = \frac{1}{x}$

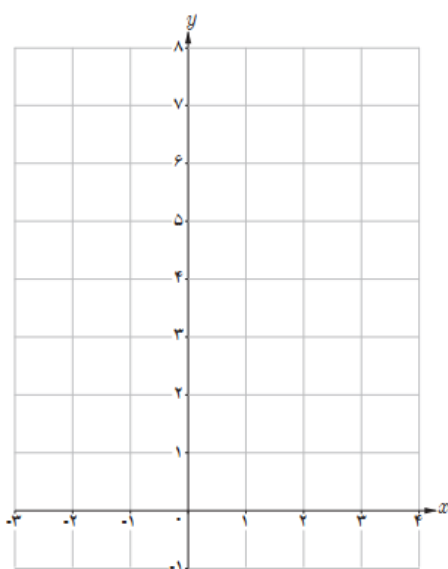


فعالیت

تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در بازه $[-2, 3]$ رسم کنید و با توجه به نمودار، نقاط اکسترمم مطلق را تعیین کنید.

در فعالیت قبل دیده می‌شود که تابع پیوسته $f(x) = |x^2 - 1|$ در بازه بسته $[-2, 3]$ هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق که این مطلب همواره درست است. همچنین مشاهده می‌شود که نقاط اکسترمم مطلق، در نقاط بحرانی تابع یا نقاط انتهایی بازه واقع‌اند. این موضوع نیز همواره درست است.

قضیه: فرض کنیم تابع f در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد. در این صورت f در این بازه هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق.



قضیه فوق، تنها وجود اکسترم‌های مطلق توابع پیوسته را در بازه‌های بسته تضمین می‌کند و به روش یافتن این نقاط اشاره‌ای ندارد. مراحل یافتن اکسترم‌های مطلق تابع پیوسته f در بازه بسته $[a, b]$ به شرح زیر است:

- ۱- مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی f را می‌یابیم.
- ۲- مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی و همچنین در نقاط انتهایی بازه محاسبه می‌کنیم.
- ۳- در مرحله ۲، بزرگ‌ترین عدد به دست آمده، مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک‌ترین آنها مینیمم مطلق تابع در بازه $[a, b]$ است.

مثال: نقاط اکسترم مطلق تابع $f(x) = 2x^2 + 3x - 12$ را در بازه $[-1, 3]$ تعیین کنید.
حل: ابتدا به کمک f' ، نقاط بحرانی تابع را به دست می‌آوریم.

$$f'(x) = 4x + 3 - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

بنابراین نقاط به طول $-1, 1, 3$ ، نقاط بحرانی بازه $[-1, 3]$ است. $\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$

x	-1	1	3
$f(x)$	13	-7	45

با توجه به جدول، دیده می‌شود که بزرگ‌ترین مقدار برای تابع در بازه $[-1, 3]$ برابر 45 و کوچک‌ترین مقدار، مساوی -7 است. به همین دلیل، این دو مقدار به ترتیب مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع در این بازه‌اند.

تمرین

۱) بزرگ‌ترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x) = x^2 - 12x + 4$ در آن نزولی اکید باشد، کدام است؟ چرا؟

۲) با تشکیل جدول تغییرات تابع $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ ، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید است؟

۳ نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

ب) $g(x) = x^2 + 3x^2 - 4$

پ) $h(x) = \sqrt[3]{x}$

۴ در هر یک از توابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

الف) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$

$$\text{ب) } g(x) = -2x^2 + 3x^2 + 12x - 9$$

$$\text{پ) } h(x) = -x^2 - 3x + 2$$

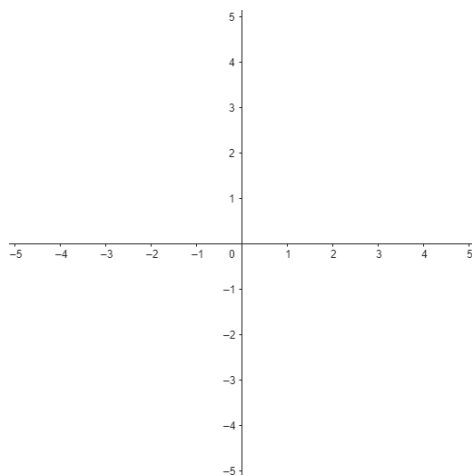
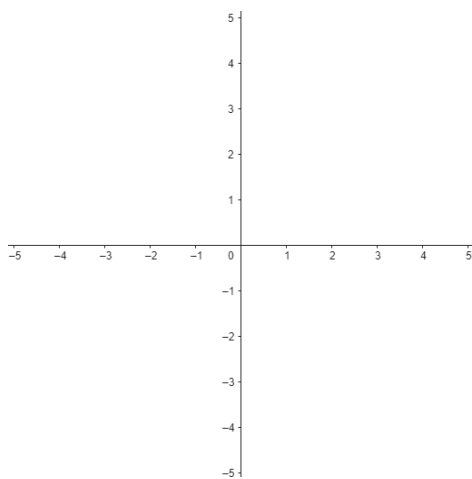
۵) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق توابع زیر را در بازه‌های مشخص شده، در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = -2x^2 + 9x - 13$; $x \in [-1, 2]$

ب) $g(x) = x^2 + 2x - 5$; $x \in [-2, 1]$

۶ اگر نقطه $(1, 2)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^2 + bx + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.

۷ نمودار تابعی مانند f با دامنه $\mathbb{R}$ را رسم کنید به طوری که هر نقطه دلخواه از D_f ، یک نقطه بحرانی f باشد. مسئله چند جواب دارد؟

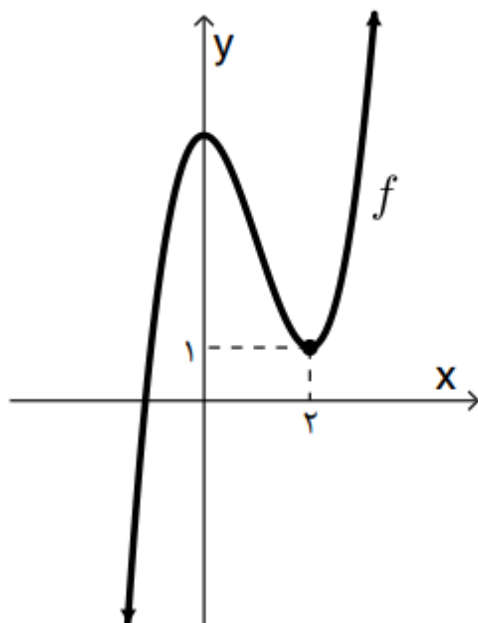


نمونه سوالات نهایی



۱- بزرگترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x) = -2x^3 + 6x + 11$ در آن صعودی اکید باشد را با استفاده از جدول تغییرات بیابید.
(خرداد ۱۴۰۲ - ۱/۵ نمره)

۲- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ به صورت مقابل رسم شده است. مقادیر b و d را بیابید.
(دی ۱۴۰۱ - ۱/۵ نمره)



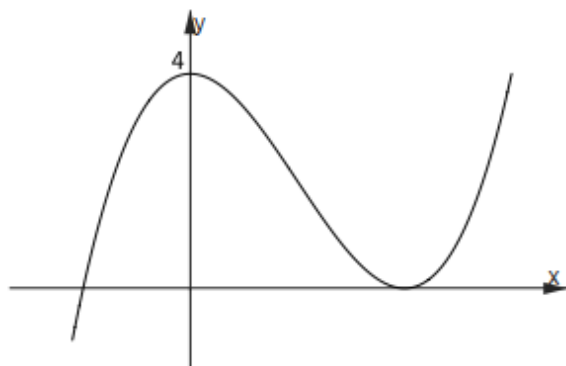
سوالات تکمیلی



مقدار مینیمم نسبی تابع $y = x^3 - 12x + 2$ ، کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۳ نوبت اول)

(۱) -۱۴ (۲) -۱۱ (۳) -۹ (۴) -۷

نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است. طول نقطه مینیمم نسبی تابع کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۱)



- (۱) $\frac{1}{2}$
 (۲) ۲
 (۳) $\frac{3}{2}$
 (۴) ۳

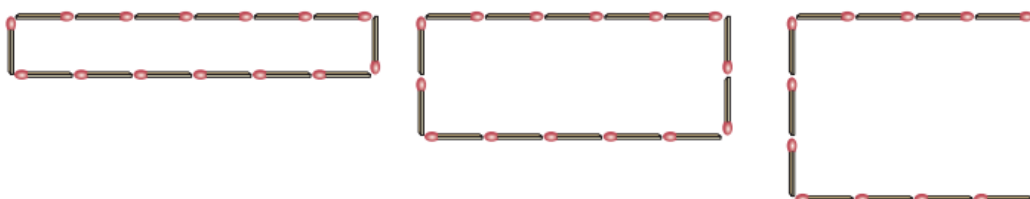
درس دوم

بهینه سازی

افراد در طول روز کارهای بسیاری انجام می دهند؛ به جاهای مختلفی می روند، از وسایل متنوعی استفاده می کنند، خرید می کنند، درس می خوانند و ... در تمام این فعالیت ها، هدف آن است که بهترین تصمیم ها اتخاذ گردند. به عنوان مثال، مدیر یک شرکت تولیدی همواره به دنبال آن است که بیشترین سود را با صرف کمترین هزینه کسب نماید. یا اینکه یک باغدار را در نظر بگیرید که با استفاده از روش های نوین کشاورزی، درصدد آن است که با صرف کمترین هزینه، بیشترین مقدار محصول را از واحد سطح برداشت کند. چنین مسئله هایی در زمره مسائل بهینه سازی هستند که برخی از آنها به کمک مشتق قابل حل اند. در اینجا مسائلی را با هدف ماکزیم کردن مساحت، حجم، سود یا مینیم کردن فاصله، زمان و هزینه بررسی خواهیم کرد.

فعالیت

۱ فرض کنید ۱۴ چوب کبریت در اختیار داشته باشیم و طول هر کدام از آنها را یک واحد در نظر بگیریم. با استفاده از همه این چوب کبریت ها، مستطیل می سازیم. نتیجه کار در سه حالت مختلف در شکل زیر آمده است:



(الف) در هر سه حالت، محیط مستطیل ها ثابت و برابر واحد است.

(ب) در این مستطیل های هم محیط، دیده می شود که مساحت ها برابر نیستند و به ترتیب برابر ۶، ۱۰ و واحد مربع هستند.

(پ) مشاهده می شود که هرچه قدر اندازه طول و عرض یک مستطیل به هم نزدیک تر می شود، مساحت آن می یابد.

۲ جدول زیر را مورد توجه قرار دهید که در آن ابعاد و مساحت چند مستطیل با محیط ۱۴ واحد آمده است.

ابعاد مستطیل	0.5×6.5	1×6	2×5	2.5×4.5	3×4	3.2×3.8	...
محیط مستطیل	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴
مساحت	$3/25$	۶	۱۰	$11/25$	۱۲	$12/16$	...

الف) در این جدول، بزرگ‌ترین عددی که برای مساحت مستطیل دیده می‌شود، $12/16$ است. اگر برای طول و عرض مستطیل تنها به اعداد طبیعی محدود نباشیم، آیا می‌توانید مستطیل دیگری با محیط ۱۴ واحد ارائه کنید که مساحت آن از عدد $12/16$ واحد مربع هم بزرگ‌تر باشد؟
 ب) برای حالتی که مساحت مستطیل بزرگ‌ترین مقدار ممکن می‌شود، چه حدسی می‌زنید؟
 درستی نتیجه‌ای را که در این فعالیت حدس زدیم، در مثال بعد با استفاده از مشتق بررسی می‌کنیم.

مثال ۱: نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم‌اندازه باشند.

حل: فرض کنیم ابعاد مستطیل x و l باشند. کمیتی که قرار است ماکزیمم شود، مساحت مستطیل است:

$$S = x \cdot l \quad (1)$$

برای آنکه S به صورت تابعی از x بیان شود، می‌توانیم l را برحسب x به دست آوریم:

$$P = 14: \text{ محیط مستطیل}$$

$$2(x + l) = 14 \Rightarrow x + l = 7 \Rightarrow l = 7 - x \quad (2)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در (۱) خواهیم داشت:

$$S(x) = x(7 - x)$$

$$S(x) = -x^2 + 7x, \quad x \in [0, 7]$$

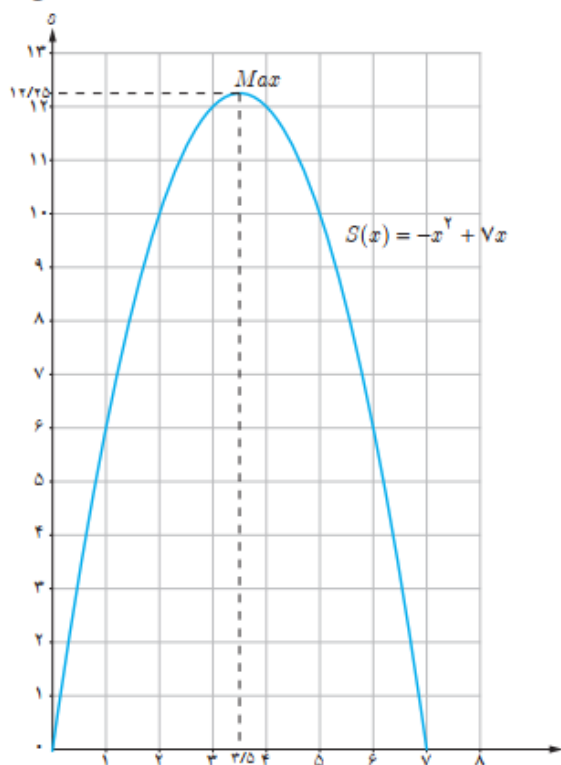
S در بازه $(0, 7)$ مشتق‌پذیر است، بنابراین برای یافتن نقاط بحرانی آن کافی است ریشه معادله $S'(x) = 0$ را بیابیم.

بنابراین نقاط به طول $3/5$, 7 , 0 ، نقاط بحرانی بازه $[0, 7]$ است.

$$S'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 7 = 0 \Rightarrow x = 3/5$$

جدول تغییرات تابع S در بازه مورد نظر به شکل زیر است :

مساحت مستطیل (سانتی متر مربع)

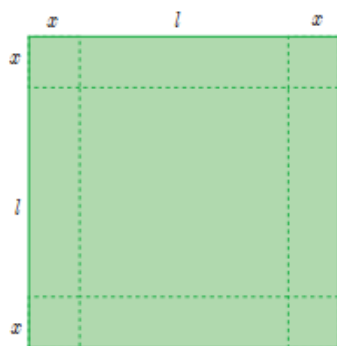


x	۰	۳/۵	۷
$S'(x) = -2x + 7$		+	-
$S(x) = -x^2 + 7x$	۰	۱۲/۲۵ ماکزیم مطلق	۰

از جدول دیده می شود که بیشترین مقدار مساحت، ۱۲/۲۵ سانتی متر مربع است و این مقدار زمانی حاصل می شود که طول و عرض مستطیل هم اندازه و مساوی ۳/۵ سانتی متر باشند؛ یعنی یک مربع به ضلع ۳/۵ سانتی متر داشته باشیم. نمودار تابع S نیز رسم شده است. به نقطه ماکزیم S در نمودار آن توجه کنید.

تذکر : در مثال قبل، تابعی که به دنبال مقدار اکسترمم مطلق آن بودیم، یک تابع درجه ۲ بود. از پایه های قبل هم می دانستیم که نقطه

نقطه اکسترمم تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ را به دست می دهد. اما همیشه تابع های مورد نظر، درجه ۲ نیستند. با این حال، مراحل کار مشابه مثال قبل خواهد بود. مثال های بعد را مورد توجه قرار دهید.



مثال ۲: ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع 30 cm را در نظر بگیرید. مطابق شکل می‌خواهیم از چهار گوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط چین‌های مشخص شده در شکل، یک جعبه دریا باز بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟

حل: ارتفاع مکعب حاصل مساوی x است. طول و عرض قاعده آن را با l نمایش می‌دهیم. آنچه قرار است ماکزیم شود، مقدار حجم مکعب مستطیل است:

$$V = x \cdot l^2$$

باید l را برحسب x در این رابطه قرار دهیم تا V تابعی یک متغیره از x شود.

$$2x + l = 30 \Rightarrow l = 30 - 2x \Rightarrow V = x(30 - 2x)^2$$

$$V(x) = x(900 - 120x + 4x^2) \Rightarrow V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x, \quad x \in [0, 15]$$

نقاط بحرانی تابع $V(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 240x + 900 = 0 \Rightarrow x^2 - 20x + 75 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 5)(x - 15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 15 \end{cases}$$

بنابراین نقاط به طول ۵، ۰، ۱۵، نقاط بحرانی بازه $[0, 15]$ است.

جدول تغییرات تابع V در بازه مورد نظر به صورت زیر است:

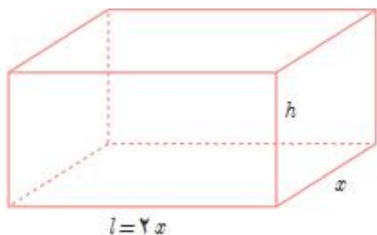
x	۰	۵	۱۵
$V'(x) = 12x^2 - 240x + 900$	۰	+	-
$V(x)$	۰	۲۰۰۰	۰

ماکزیم مطلق

با توجه به جدول، بیشترین حجم ممکن برای مکعب مستطیل مورد نظر، $2000\text{ (cm}^3\text{)}$ است که به ازای $x = 5\text{ (cm)}$ حاصل می‌شود.

مثال ۳: می‌خواهیم مخزنی به شکل مکعب مستطیل در باز بسازیم که حجم آن 10 m^3 بوده و طول کف مخزن دو برابر عرض آن باشد. قیمت مصالح مورد نیاز جهت کف این مخزن برای هر متر مربع 100 هزار تومان و این قیمت برای دیواره‌ها در هر متر مربع 60 هزار تومان است. عرض کف مخزن چقدر باشد تا هزینه مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن گردد؟

حل: لازم است هزینه مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن شود. تابع هزینه را به شکل زیر می‌توان نوشت:



$$\begin{aligned} C &= 100(x \cdot l) + 60[2xh + 2lh] \\ &= 100xl + 120h(x + l) \\ &= 100x(2x) + 120h(x + 2x) \\ C &= 200x^2 + 360xh \quad (1) \end{aligned}$$

لازم است که C را به شکل تابعی یک متغیره از x بنویسیم.

$$V = 10 (\text{m}^3) \Rightarrow x \cdot l \cdot h = 10 \Rightarrow x(2x)h = 10 \Rightarrow h = \frac{5}{x^2} \quad (2)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در (۱) خواهیم داشت:

$$C(x) = 200x^2 + 360x\left(\frac{5}{x^2}\right) \Rightarrow C(x) = 200x^2 + \frac{1800}{x} \quad x \in (0, +\infty)$$

نقطه بحرانی تابع $C(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 400x - \frac{1800}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{400x^3 - 1800}{x^2} = 0 \Rightarrow 400x^3 - 1800 = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{4/5} \approx 1/65(m) \quad (\text{نقطه بحرانی تابع } C)$$

برای رسم جدول تغییرات تابع C ، لازم است مشتق آن یعنی $C'(x) = \frac{400x^3 - 1800}{x^2}$ را تعیین علامت کنیم. علامت C' در هر بازه، همان علامت صورت مشتق یعنی $(400x^3 - 1800)$ است. چرا؟

x	0	$\sqrt[3]{4/5}$	$+\infty$
$C'(x)$		$-$	$+$
$C(x)$	$+\infty$	$\searrow \approx 1635$ مینیمم مطلق C	$\nearrow +\infty$

از جدول دیده می‌شود که اگر عرض قاعده مخزن برابر $\sqrt[3]{4/5} \approx 1/65(m)$ انتخاب شود، هزینه مصالح کمترین مقدار ممکن و حدود 1635 (برحسب هزار تومان)، یعنی $1,635,000$ تومان خواهد شد.

مثال ۴: غلظت یک داروی شیمیایی در خون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطه $C(t) = \frac{3t}{t^3 + 27}$ به دست می آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟
حل: ابتدا نقاط بحرانی تابع C را به دست می آوریم.

$$C'(t) = \frac{3(t^3 + 27) - 3t^3(3t)}{(t^3 + 27)^2}$$

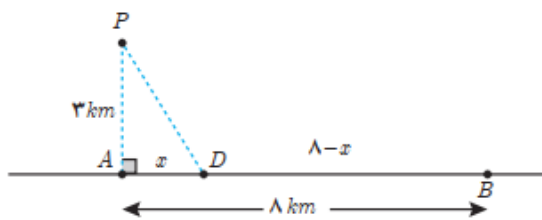
$$C'(t) = 0 \Rightarrow 3(t^3 + 27) - 9t^3 = 0 \Rightarrow (t^3 + 27) - 3t^3 = 0 \Rightarrow t^3 = \frac{27}{2}$$

$$\Rightarrow t = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \approx 2/38 \text{ (ساعت)} \quad (\text{نقطه بحرانی تابع } C)$$

در $C'(t)$ ، علامت مخارج همواره مثبت است، پس علامت $C'(t)$ در واقع همان علامت صورت مشتق خواهد بود. بنابراین، جدول تغییرات تابع C به شکل زیر است:

t	0	$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	$+\infty$
$C'(t)$	$+$	0	$-$
$C(t)$	0	$\approx 0/18$ ماکزیمم مطلق C	0

با توجه به جدول، دیده می شود که $\frac{3}{\sqrt[3]{2}} \approx 2/38$ ساعت پس از تزریق، میزان غلظت دارو در خون، حداکثر میزان ممکن خواهد بود.



مثال ۵: آرتا درون قایقی در نقطه P قرار دارد که فاصله آن از نزدیک ترین نقطه ساحل یعنی نقطه A ، معادل ۳ کیلومتر است. او می خواهد به نقطه B در ساحل برسد که در ۸ کیلومتری A قرار دارد. فرض کنید سرعت حرکت قایق ۲ km/h و سرعت پیاده روی آرتا در ساحل ۴ km/h باشد. اگر او بخواهد در کوتاهترین زمان ممکن به B برسد، در چه نقطه ای از ساحل باید پیاده شده و به سوی B پیاده روی کند؟

حل: نقطه ای از ساحل را که آرتا پیاده می شود، D می نامیم. می دانیم اگر x مسافت طی شده با سرعت ثابت v در مدت زمان t باشد، رابطه $x = vt$ یا معادل آن $t = \frac{x}{v}$ برقرار است. بنابراین:

$$t_1 = \frac{PD}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 9} \quad \text{زمان پارو زدن مسیر } P \text{ تا } D$$

$$t_2 = \frac{DB}{4} = \frac{8-x}{4} = 2 - \frac{1}{4}x \quad \text{زمان پیاده روی مسیر } D \text{ تا } B$$

$$t = t_1 + t_2 \quad \text{زمان کل رسیدن از } P \text{ به } B$$

$$t(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 9} + \left(2 - \frac{1}{4}x\right) \quad x \in [0, 8]$$

به دنبال یافتن مقدار مینیمم مطلق t هستیم. نقطه بحرانی t را به دست می آوریم.

$$t'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{4} = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 9}}{4\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$t'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \sqrt{x^2 + 9} = 0 \Rightarrow 4x^2 = x^2 + 9 \Rightarrow x = \sqrt{3} \approx 1.73 \text{ (km)}$$

بنابراین نقاط به طول $\sqrt{3}$, 0 , 8 , نقاط بحرانی بازه $[0, 8]$ است.

جدول تغییرات $t(x)$ به صورت زیر است:

x	0	$\sqrt{3}$	8
$t'(x)$	-	0	+
$t(x)$ بر حسب ساعت	3/5	$\frac{8+3\sqrt{3}}{4} \approx 3/3$ مینیمم مطلق t	$\frac{\sqrt{73}}{2} \approx 4.27$

از جدول ملاحظه می شود که اگر x یعنی فاصله D از A ، برابر $\sqrt{3} \approx 1.73$ کیلومتر انتخاب شود، زمان رسیدن آرتا از P به B کمترین زمان ممکن یعنی تقریباً $3/3$ ساعت معادل سه ساعت و ۱۸ دقیقه خواهد بود.

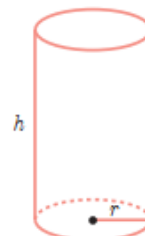
کار در کلاس

۱ می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود.
حل: باید مساحت کل استوانه کمترین مقدار ممکن گردد.

$$\text{حجم استوانه } 1 \text{ (lit)} = 1000 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow \pi r^2 h = 1000 \text{ (cm}^3) \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

سطح جانبی + مساحت قاعده S : مساحت کل استوانه



$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r h \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

با یافتن نقطه بحرانی S و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص کنید که به ازای چه مقداری از r ، مقدار $S(r)$ مینیمم می‌گردد.

۲ هزینه سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت v کیلومتر بر ساعت، برابر $۳۲۰v^۲$ تومان است. همچنین سایر هزینه‌ها برای هر ساعت، صرف‌نظر از سرعت قطار، برابر ۸۰۰۰۰۰ تومان می‌باشد. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه آن در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن باشد.

حل: اگر قطار با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت حرکت کند، داریم:

$$\text{هزینه } t \text{ ساعت حرکت: } C = ۸۰۰۰۰۰t + (۳۲۰v^۲)t$$

$$\text{هزینه } x \text{ کیلومتر حرکت: } C = ۸۰۰۰۰۰\left(\frac{x}{v}\right) + (۳۲۰v^۲)\left(\frac{x}{v}\right)$$

$$\text{هزینه } ۱ \text{ کیلومتر حرکت: } C(v) = \frac{۸۰۰۰۰۰}{v} + ۳۲۰v$$

نقطه بحرانی تابع C را بیابید و با تشکیل جدول تغییرات آن، سرعت بهینه را پیدا کنید.

۳ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

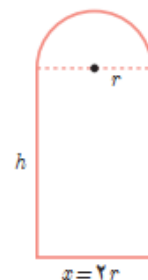
۴ در برخی بناهای تاریخی کشورمان پنجره‌هایی وجود دارد که به شکل یک مستطیل و نیم دایره‌ای بر روی آن می‌باشد به طوری که قطر نیم دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط یک چنین پنجره‌ای ۴/۵ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد. حل: باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد.

$$\text{محیط} = 4/5 \Rightarrow 2h + x + \frac{1}{2}(2\pi r) = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow 2h + 2r + \pi r = \frac{9}{2} \rightarrow h = \frac{9}{4} - r - \frac{\pi r}{2}$$

مساحت نیم دایره + مساحت مستطیل $S =$: مساحت پنجره

$$S = xh + \frac{1}{2}(\pi r^2) \Rightarrow S(r) = 2r\left(\frac{9}{4} - r - \frac{\pi r}{2}\right) + \frac{1}{2}\pi r^2 \Rightarrow S(r) = -\left(\frac{\pi+4}{2}\right)r^2 + \frac{9}{2}r$$



با پیدا کردن نقطه بحرانی S و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص کنید که به ازای چه مقداری از r ، مقدار $S(r)$ بیشترین مقدار ممکن می‌شود.

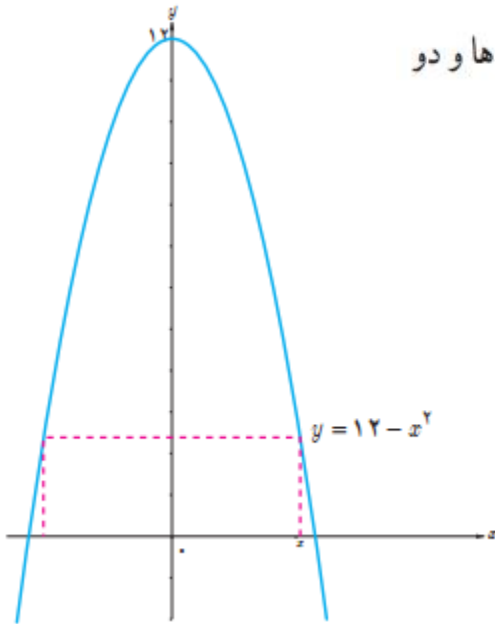
تمرین

- ۱ کشاورزی می خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ثابت 10000 متر مربع را دیوارکشی کند. هزینه هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی 2 میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی 8 میلیون تومان است.
- الف) هزینه مورد نیاز برای انجام این کار را به صورت یک تابع بنویسید.
- ب) ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟

۲ الف) می‌خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی‌الساقین را نرده‌کشی کنیم به طوری که قاعدهٔ مثلث منطبق بر رودخانه باشد. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟

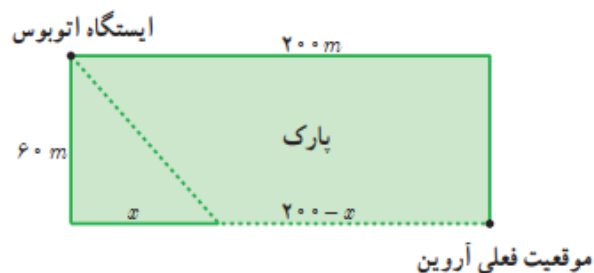
ب) بدون استفاده از مشتق نیز، این مسئله را حل کنید.

۳ ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور x ها و دو رأس دیگرش بالای محور x ها و روی سهمی $y = 12 - x^2$ باشند.



۴ هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت 32 cm^2 خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایینی هر صفحه 2 cm و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتی متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

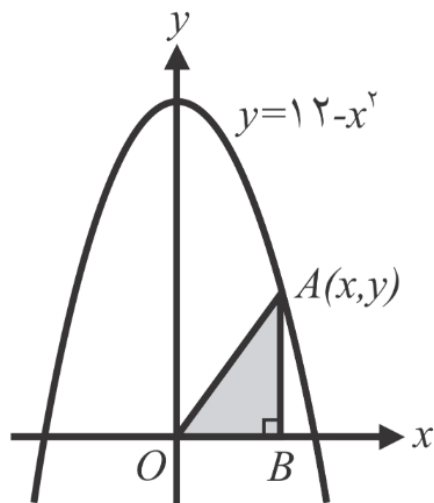
۵ آروین می‌خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در 200 متری غرب و 60 متری شمال موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد. او می‌تواند با سرعت 3 متر بر ثانیه از پیاده‌رو کنار پارک به سمت غرب برود. همچنین، می‌تواند از درون پارک و تنها با سرعت 2 m/s عبور کند. با توجه به شکل، مقدار x را طوری تعیین کنید که او در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.



نمونه سوالات نهایی



مطابق شکل زیر ، نقطه A در ناحیه اول دستگاه مختصات روی منحنی $y = 12 - x^2$ قرار دارد. با استفاده از جدول تغییرات ، مختصات نقطه A را چنان بیابید که مساحت مثلث قائم الزاویه OAB بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. (خرداد ۱۴۰۳ - ۱/۷۵ نمره)



سوالات تکمیلی



اگر مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی که دو رأس آن بر محور x ها و دو رأس دیگر آن، یکی بر $y = \sqrt{x}$ و دیگری بر

$y = \sqrt{a-x}$ واقع است برابر $\sqrt{2}$ باشد، مقدار a کدام است؟

(سراسری تجربی ۱۴۰۳ نوبت دوم)

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

هندسه



فصل

تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

درس اول

درس دوم

دایره

تهیه کننده : رقیه پیله ور - دبیر ریاضی ناحیه دو اردبیل



برای تماشای ویدیوهای آموزشی ریاضی ۳ تجربی (همین جزوه) می توانید به سایت
 math-pilevar.ir یا math-pilevar.com مراجعه کنید.

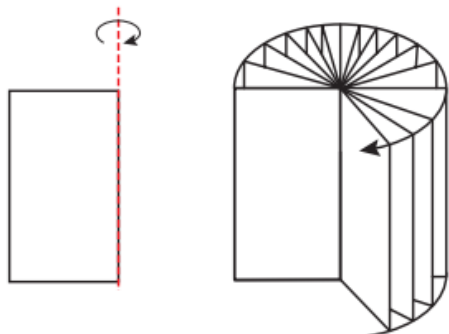


256

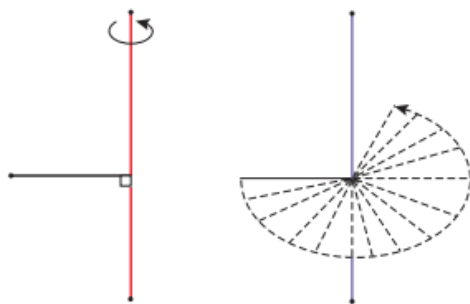
وقتی شکل‌های هندسی متفاوت حول یک محور دوران داده شود، جسم‌های مختلف هندسی ساخته می‌شود. در فعالیت زیر نمونه‌هایی از این مفهوم ارائه شده است. در هر مورد، شکل حاصل از دوران حول محور را مشخص کنید.

فعالیت

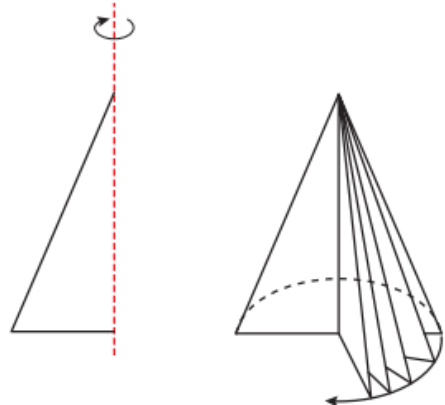
الف) شکل حاصل از دوران یک مستطیل، حول طول یا عرض آن :



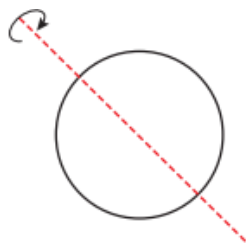
ب) شکل حاصل از دوران یک پاره خط، حول پاره خط دیگری که بر آن عمود است :



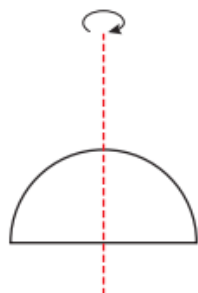
پ) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمه :



ت) شکل حاصل از دوران یک دایره، حول یکی از قطرهای آن :



ث) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن :



برش

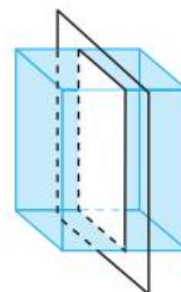
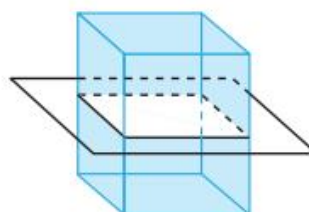
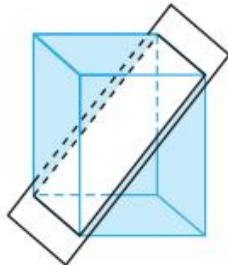
در فعالیت قبل، از دوران شکل حول یک محور، یک جسم دو بعدی یا سه بعدی تشکیل شد. حال فرض کنید می خواهیم اجسام سه بعدی را برش بزنیم و تغییرات آن را بعد از برش تجسم کنیم. در زندگی روزمره بارها با برش اجسام مختلف هندسی مواجه بوده اید. این اجسام می توانند توپیر یا توخالی باشند.



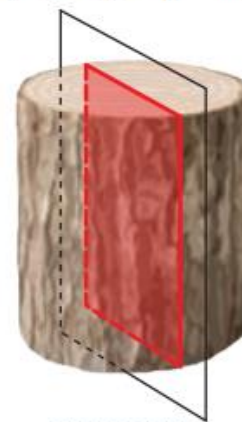
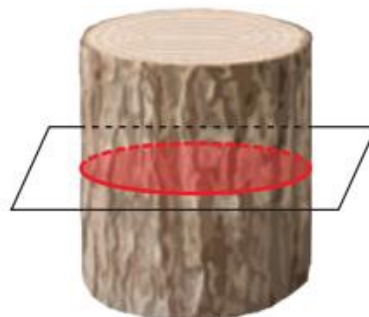
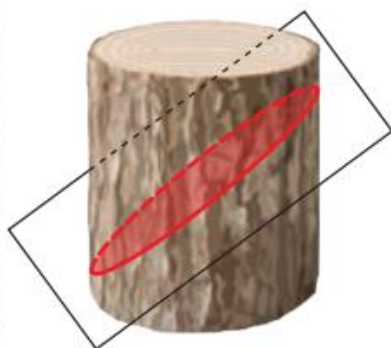
شکلی که از برخورد یک صفحه^۱ با یک جسم هندسی حاصل می شود، سطح مقطع آن نامیده می شود.

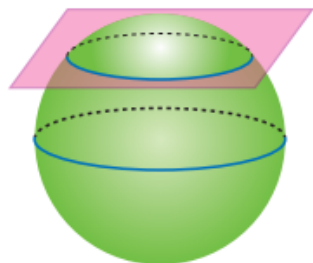
فعالیت

الف) بعضی از حالت های برخورد یک صفحه با یک مکعب مستطیل توخالی با قاعده مربع شکل، در زیر نمایش داده شده است. در هر یک از حالت ها سطح مقطع را مشخص کنید.



ب) سطح مقطع استوانه با صفحه های عمودی، افقی و صفحه مایلی که با قاعده های استوانه متقاطع نباشد، به چه شکل است؟





پ) سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟
در چه حالتی این سطح مقطع، بیشترین مساحت ممکن را دارد؟

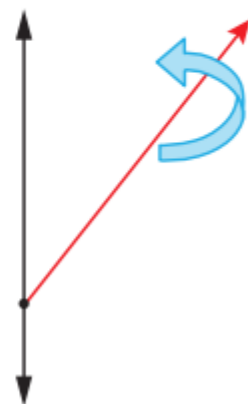
کار در کلاس

۱) شکل حاصل از دوران حول محور را در حالت‌های زیر مشخص کنید و آنها را با هم مقایسه کنید :

ب) شکل حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول محور



الف) شکل حاصل از دوران نیم خط حول محور

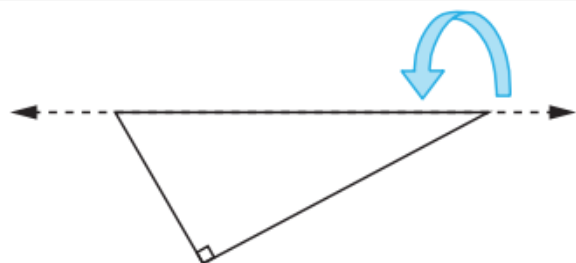


۲) مستطیلی را حول عرض آن دوران داده‌ایم.
الف) شکل حاصل را رسم کنید.

ب) سطح مقطع حاصل از برخورد این استوانه و یک صفحه در چه حالتی یک مربع است؟

پ) اگر ابعاد مستطیل، ۳ و ۴ باشد، مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه موازی با قاعده این استوانه چقدر است؟

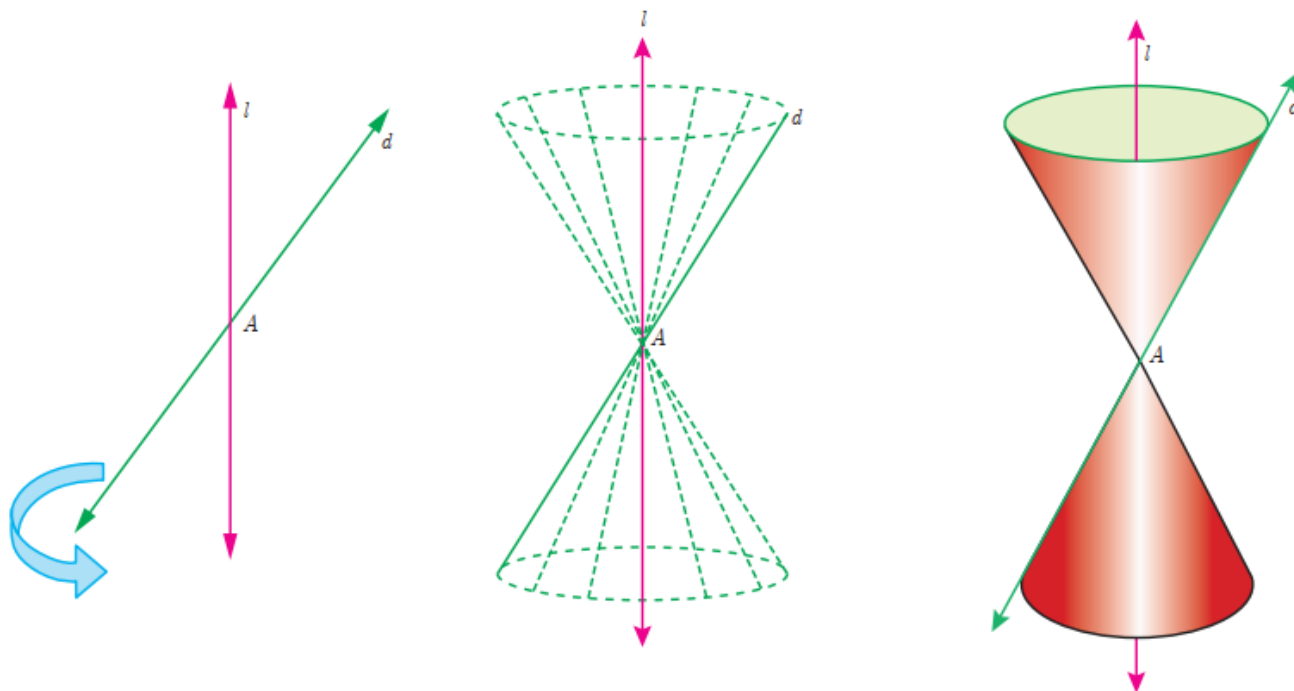
ت) در حالت پ، اگر صفحه‌ای عمود بر قاعده استوانه آن را قطع کند، بیشترین مساحت ممکن برای سطح مقطع حاصل چقدر است؟



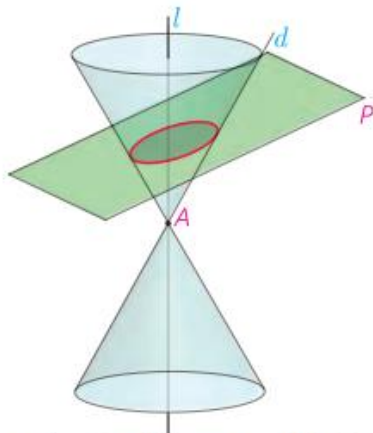
۳ شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وتر آن چیست؟

آشنایی با مقاطع مخروطی

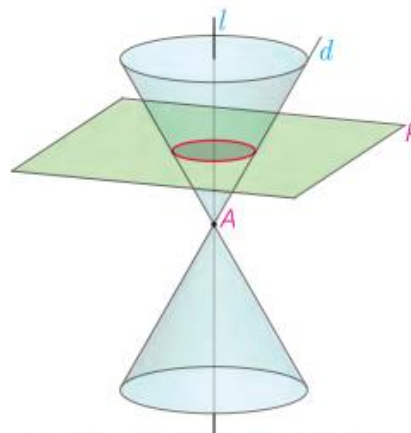
دو خط d و l در نقطه‌ای مثل A متقاطع‌اند. اگر خط d را حول خط l دوران کامل دهیم، شکل حاصل یک **سطح مخروطی** نامیده می‌شود. در این حالت خط l **محور**، نقطه A **رأس** و خط d **مولد** این سطح مخروطی است.



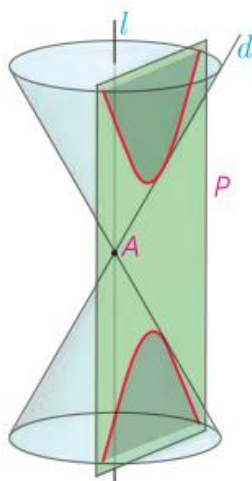
وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه برش داده می‌شود، معمولاً سطح مقطع، یک منحنی است. از آنجا که این منحنی‌ها، حاصل تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی هستند، **مقاطع مخروطی** نامیده می‌شوند. در ادامه با انواع مقاطع مخروطی آشنا خواهیم شد.



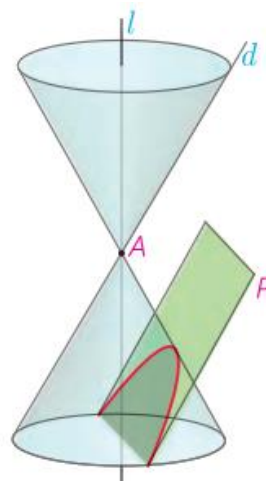
(ب) اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد، شکل حاصل **بیضی** خواهد بود.



(الف) اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل **دایره** است.



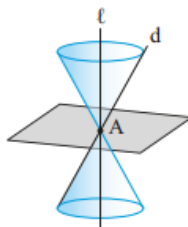
(ت) اگر صفحه P سطح مخروطی را، هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل را **هذلولی** می‌نامیم.



(پ) اگر صفحه P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک **سهمی** است.

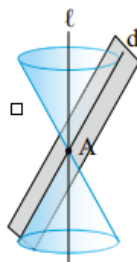
● نقطه

در حالتی که صفحه فقط از نقطه A بگذرد، تنها یک نقطه پدید می‌آید.



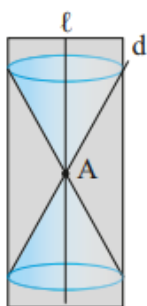
● یک خط

در حالتی که صفحه را مولد موازی بوده و از رأس A نیز بگذرد، یک خط حاصل می‌شود (صفحه شامل یکی از مولدها است).

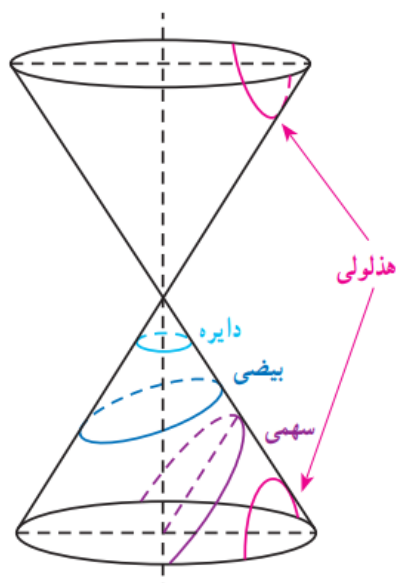


● دو خط متقاطع

در حالتی که صفحه شامل محور l باشد، دو خط متقاطع حاصل می‌شود



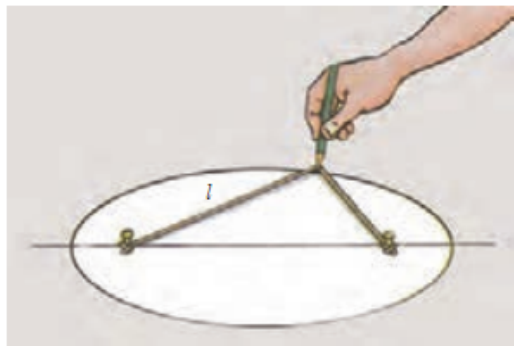
بدین ترتیب مقاطع مخروطی عبارت‌اند از دایره، بیضی، سهمی و هذلولی. در ادامه این درس قصد داریم بیضی و ویژگی‌های آن را بدون معرفی معادله آن، مورد بررسی قرار دهیم.



بیضی

حتماً می دانید که به کمک یک تکه نخ چگونه می توان یک دایره رسم کرد. در این فعالیت می خواهیم ببینیم طریقه رسم بیضی به کمک یک تکه نخ چگونه است و حین انجام این فعالیت، ویژگی های بیضی را بهتر بشناسیم.

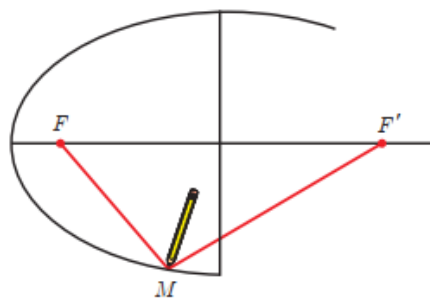
فعالیت



مانند شکل دو سر نخ به طول l را روی یک صفحه ثابت کنید. دقت داشته باشید که برای رسم بیضی لازم است که طول نخ از فاصله بین دو میخ، بیشتر باشد. حالا مطابق شکل، مدادتان را در حالتی که تکه نخ از دو طرف کاملاً کشیده شده است، روی صفحه حرکت دهید.

شکل حاصل منحنی بسته ای است که به آن **بیضی** می گویم.

همان طور که دیدید دو میخ در واقع نشان دهنده دو نقطه ثابت در بیضی هستند. این دو نقطه را **کانون های بیضی** می نامند.

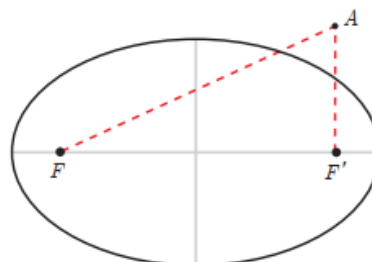
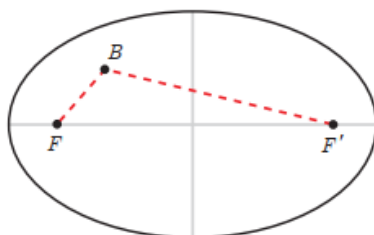


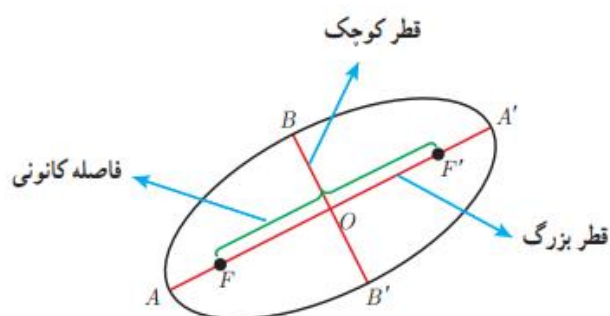
اگر کانون های بیضی را با F و F' نمایش دهیم و نقطه ای مثل M یک نقطه دلخواه از بیضی باشد، مجموع فواصل این نقطه از نقاط F و F' یعنی $MF + MF'$ برابر با چیست؟

بدین ترتیب :

بیضی، مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت واقع در صفحه، برابر با مقداری ثابت است.^۱

می توان نشان داد که اگر نقطه دلخواه A بیرون بیضی باشد، مجموع فواصل آن از نقاط F و F' بیشتر از l و اگر نقطه دلخواه B ، داخل بیضی باشد، مجموع فاصله آن از دو نقطه F و F' کمتر از l خواهد بود.





بیضی مقابل را در نظر بگیرید.

در این بیضی کانون ها را F و F' نامیده ایم.

در هر بیضی اندازه FF' ، **فاصله کانونی** بیضی نامیده می شود.

نقطه میانی پاره خط FF' ، **مرکز بیضی** است که آن را نقطه O نامیده ایم.

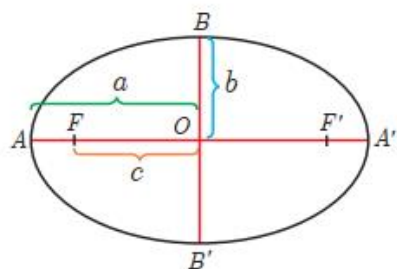
پاره خطی که از کانون های بیضی می گذرد یعنی AA' ، **قطر بزرگ** یا **قطر**

کانونی بیضی است. پاره خطی که در مرکز بیضی بر قطر بزرگ بیضی

عمود است، یعنی قطر BB' ، **قطر کوچک** بیضی نامیده می شود.

اگر قطر بزرگ بیضی افقی باشد، آن بیضی را **بیضی افقی** و اگر قطر بزرگ عمودی باشد، بیضی را **بیضی قائم** می نامیم.

فعالیت



بیضی مقابل را در نظر بگیرید. اندازه پاره خط های OA ، OB و OF را به ترتیب با a ، b و c

نمایش داده ایم. می دانیم که مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون بیضی مقداری

ثابت است.

۱ می خواهیم نشان دهیم قطر بزرگ بیضی طولی برابر با همین مقدار ثابت دارد.

در رسم بیضی، حالتی را در نظر بگیرید که نوک مداد روی نقطه A قرار دارد. در این صورت :

$$\text{مقدار ثابت} = AF + AF' = AF + (AF + FF') = 2AF + FF' \quad (1)$$

به همین ترتیب فرض کنید نوک مداد روی نقطه A' قرار دارد. در این صورت داریم :

$$\text{مقدار ثابت} = A'F' + A'F = \dots \dots \dots (2)$$

از مقایسه رابطه (۱) و (۲) و برابری سمت چپ دو رابطه داریم : $AF = \dots$

پس :

$$\text{مقدار ثابت} = AF + AF' = \dots \dots \dots + AF' = \dots \dots \dots$$

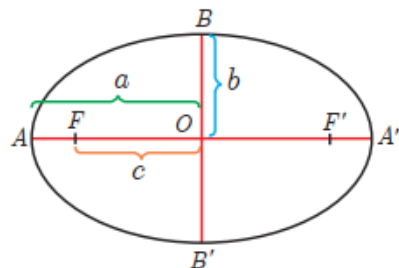
مثال :

در یک بیضی با کانون‌های $F(3, -1)$ و $F'(3, 5)$ که قطر بزرگ آن ۸ است، وضعیت قرارگیری نقطه‌ی $M(1, 1)$ را نسبت به بیضی مشخص کنید.

بنابراین :

مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

سؤال : با توجه به تساوی $AF = A'F'$ نشان دهید که مرکز بیضی قطر بزرگ آن را نصف می‌کند و از آن نتیجه بگیرید طول قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ است.



۲ حال قصد داریم رابطه بین a ، b و c را پیدا کنیم.

الف) نقطه B را مطابق شکل روی بیضی در نظر بگیرید. می دانیم این نقطه روی عمود منصف پاره خط FF' است. (چرا؟)

ب) به کمک قسمت قبلی فعالیت، اندازه BF' را پیدا کنید.

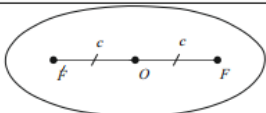
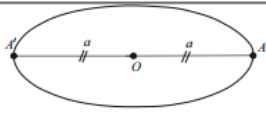
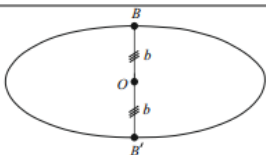
پ) چه رابطه ای بین a ، b و c وجود دارد؟

ت) آیا مرکز بیضی قطر کوچک را هم نصف می کند؟ چرا؟

اگر در یک بیضی، اندازه نیم قطر بزرگ را a ، اندازه نیم قطر کوچک را b و نصف فاصله کانونی بیضی را c بنامیم، آنگاه

♦ پارامترهای بیضی

هر بیضی با سه پارامتر مثبت a ، b و c معرفی و شناخته می‌شود. در این قسمت مفهوم $2a$ ، $2b$ و $2c$ را معرفی می‌کنیم:

مرکز بیضی	شکل	اسم فارسی	اندازه	فاصله ی ...	
$o = \frac{F + F'}{2}$		فاصله ی کانونی	$FF' = 2c$	دو کانون	۱
$O = \frac{A + A'}{2}$		قطر بزرگ (قطر کانونی)	$AA' = 2a$	دو رأس کانونی	۲
$O = \frac{B + B'}{2}$		قطر کوچک (قطر ناکانونی)	$BB' = 2b$	دو رأس ناکانونی	۳

♦ محاورهای تقارن بیضی

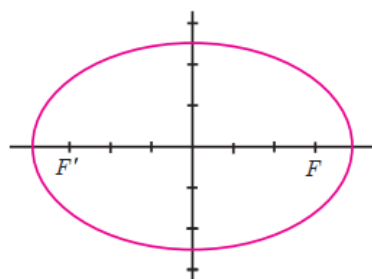
۱) اگر محاورهای بیضی موازی محاورهای مختصات باشند و $O(\alpha, \beta)$ مرکز بیضی، آن وقت معادله ی محاورهای تقارن می‌شود: $x = \alpha$ و $y = \beta$

۲) محاورهای تقارن بیضی همیشه در نقطه ی O متقاطع و بر هم عمودند.

مثال :

اگر در یک بیضی $c=3$ و $a=4$ باشد، اندازه قطر کوچک بیضی چقدر است؟

حل :

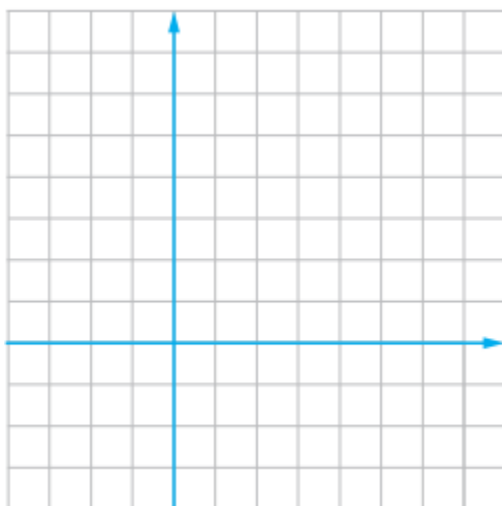


$$b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow b = \sqrt{7}$$

و بنابراین اندازه قطر کوچک برابر است با $2\sqrt{7}$.

کار در کلاس

۱ اگر در یک بیضی داشته باشیم $a=5$ و $b=3$ ، در این صورت اندازه فاصله کانونی را محاسبه کنید.



۲ در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است.

اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات $(4, 5)$ باشد:

الف) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و همچنین کانون‌های بیضی را بنویسید.

خروج از مرکز

همان‌طور که دیدید اندازه قطر بزرگ، قطر کوچک و فاصله کانونی یک بیضی مقادیری به هم وابسته‌اند. بدیهی است که همیشه مقدار a از مقدار b و c بیشتر است (چرا؟).

اندازه‌های a ، b و c بر شکل بیضی تأثیرگذار است و همواره $\frac{c}{a}$ مقداری بین ۰ و ۱ است. (چرا؟). هر چه نسبت $\frac{c}{a}$ ، بزرگ‌تر و به ۱ نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی کشیده‌تر می‌شود و هر چه مقدار $\frac{c}{a}$ کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی به شکل دایره نزدیک‌تر خواهد شد.

مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامند و معمولاً آن را با حرف e نمایش می‌دهند.

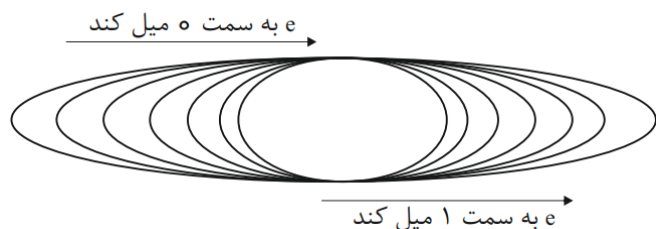
نکته :



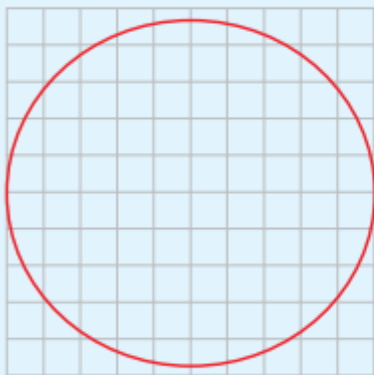
$$0 < e < 1$$

۱ در بیضی، خروج از مرکز همیشه عددی بین صفر و ۱ است:

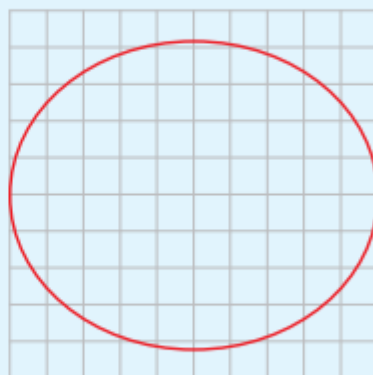
۲ خروج از مرکز در بیضی میزان کشیدگی بیضی را نشان می‌دهد؛ هر قدر e به سمت صفر نزدیک‌تر باشد، بیضی تپل‌تر است و به دایره شبیه‌تر! و هر قدر e به سمت ۱ نزدیک‌تر شود، بیضی کشیده‌تر خواهد بود.



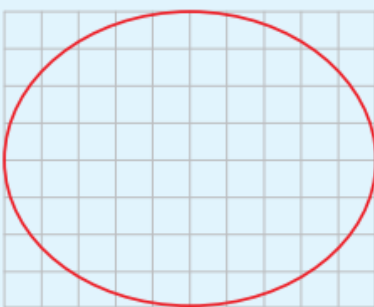
در ادامه چند بیضی با مقادیر مختلف e رسم شده است. تأثیر اندازه خروج از مرکز را بر شکل بیضی بررسی کنید.



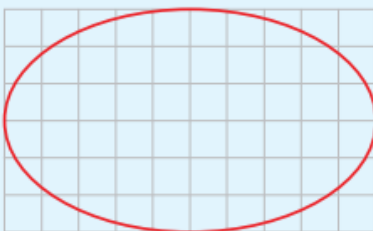
$$\frac{c}{a} = 0/2$$



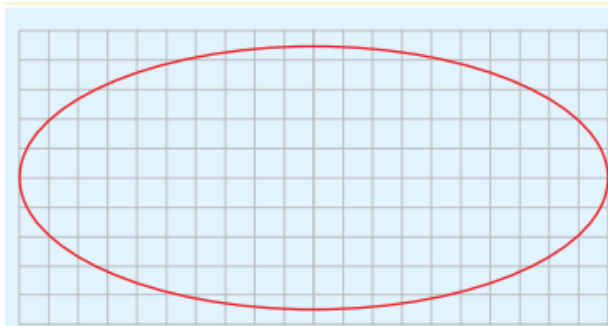
$$\frac{c}{a} = 0/4$$



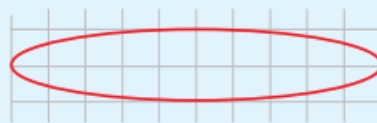
$$\frac{c}{a} = 0/6$$



$$\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

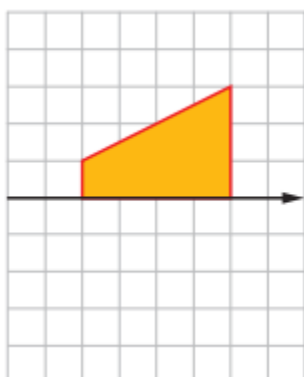


$$\frac{c}{a} = 0.75$$



$$\frac{c}{a} = 0.98$$

تمرین

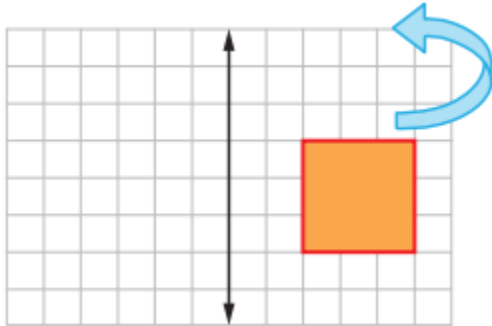


۱ در شکل روبه‌رو می‌خواهیم دوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم.
الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟

۲ مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل روبه‌رو در فاصله ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد.

الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید.

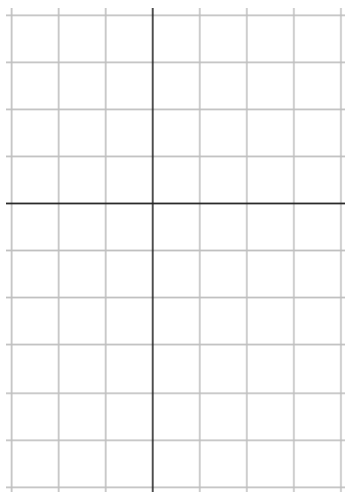


ب) سطح مقطع این شکل را در برخورد با صفحه‌ای موازی با قاعده آن توصیف کنید.

۳ اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟

۴) کانون‌های یک بیضی نقاط $(1, 3)$ و $(1, -5)$ است.

الف) فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.



ب) اگر $a=6$ باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید

۵) خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن $(-4, -1)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است. الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون‌های بیضی را پیدا کنید.



نمونه سوالات نهایی 

سوال ۱: در یک بیضی فاصله کانونی با قطر کوچک آن برابر است. خروج از مرکز بیضی را بیابید.
(خرداد ۱۴۰۳ - ۱/۲۵ نمره)

سوال ۲: معادله قطر کانونی یک بیضی، $y = -1$ و معادله قطر کوچک، $x = 2$ است اگر طول قطرهای بزرگ و کوچک به ترتیب ۱۲ و ۸ واحد باشند، مرکز بیضی و فاصله کانونی را به دست آورید.
(دی ۱۴۰۲ - ۱/۷۵ نمره)

درس دوم

دایره



زیربنای برج میلاد با نقشه دایره ای شکل به قطر ۶۶ متر



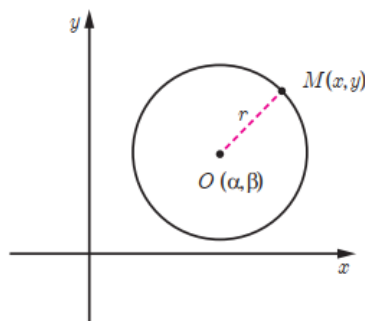
زیربنای دایره ای شکل مجموعه تئاتر شهر، تهران

دایره یکی از شکل های مهم هندسی است که با تعریف و برخی ویژگی های آن در سال های قبل آشنا شده اید. می دانیم دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آنها از نقطه ثابتی در همان صفحه، مقداری ثابت و مثبت باشد. این نقطه ثابت را مرکز دایره و مقدار ثابت را اندازه شعاع دایره می نامیم. دایره C را به مرکز O و شعاع r معمولاً با نماد $C(O, r)$ نمایش می دهیم.

در این درس به تحلیل برخی از ویژگی های دایره در دستگاه مختصات خواهیم پرداخت.

دایره $C(O, r)$ را به گونه ای در نظر بگیرید که مرکز آن نقطه $O(\alpha, \beta)$ و نقطه $M(x, y)$ نقطه دلخواهی روی آن باشد. می دانیم که فاصله مرکز دایره از تمام نقاط روی آن برابر با مقدار ثابت r است.

بنابراین به کمک رابطه فاصله دو نقطه که در سال های گذشته با آن آشنا شدیم، داریم:



$$OM = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}$$

$$OM = r \text{ از طرفی}$$

$$\Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

رابطه $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ معادله دایره ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r در صفحه مختصات است که به آن معادله استاندارد دایره می گوئیم.

برای مثال : معادله دایره ای به مرکز $(-2, 1)$ و شعاع $\sqrt{2}$ برابر است با :

برای مثال : معادله دایره ای به مرکز مبدا و شعاع ۳ برابر است با :

برای مثال : مختصات مرکز و اندازه مساحت دایره ی $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 6$ را تعیین کنید.

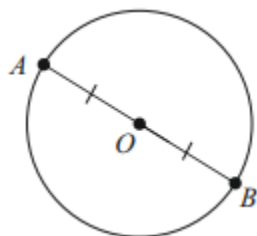
نوشتن معادله دایره با اطلاعاتی به جز مرکز و شعاع



حالت اول: مرکز دایره و نقطه‌ای روی دایره داده شده است.

برای مثال: دایره‌ای که از نقطه $(1, -3)$ بگذرد و مرکز آن $(2, -1)$ باشد.

حالت دوم: مختصات دو سر قطری از دایره داده شده است.



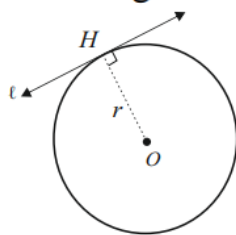
۱) برای محاسبه شعاع دایره فاصله‌ی این دو نقطه را پیدا کنید و نصف آن را حساب کنید.

۲) برای محاسبه مرکز دایره مختصات وسط این دو نقطه را محاسبه کنید.

برای مثال: دایره‌ای که نقاط $(0, 3)$ و $(-4, -1)$ دو سری یکی از قطرهای آن باشند.

حالت سوم: معادله‌ی خطی که بر دایره مماس است به همراه مختصات مرکز داده شده است.

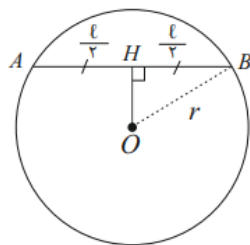
برای محاسبه شعاع دایره فاصله‌ی مرکز را تا آن خط مماس حساب کنید. اگر فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس را پیدا کنید، انگار شعاع دایره را به دست آورده‌اید...



$$O(\alpha, \beta) \quad , \quad \underbrace{ax + by + c = 0}_{\text{معادله‌ی خط مماس}} \Rightarrow r = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

برای مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که بر $3x + 4y - 1 = 0$ مماس بوده و مرکز آن $c(1, 2)$ باشد.

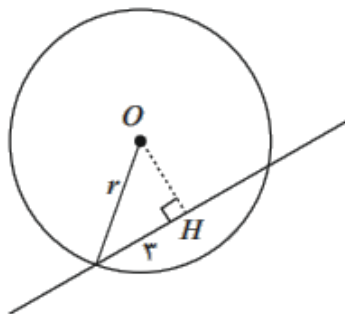
حالت چهارم: مختصات مرکز به همراه اندازه و معادله‌ی وترى که خط متقاطع با دایره، روی دایره ایجاد می‌کند، داده شده است.



۱) برای محاسبه OH فاصله‌ی O را تا خط داده شده بدست آورید.

۲) اگر طول وتر، l باشد، با استفاده از قضیه فیثاغورث، شعاع را بدست بیاورید.

برای مثال: مرکز دایره‌ای، نقطه $O(2, -3)$ است. این دایره روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادله این دایره را بنویسید.



فعالیت

می‌توان دید که :

الف) اگر نقطه‌ای مثل B روی دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است، یعنی

$$OB = r$$

ب) اگر نقطه‌ای مثل A درون دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره شعاع دایره

است، یعنی $OA < r$

پ) اگر نقطه‌ای مثل C بیرون دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره شعاع دایره

است، یعنی $OC > r$

بدین ترتیب اگر معادله دایره $C(O, r)$ به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r در دستگاه مختصات داده شده باشد، می‌توان وضعیت نقاط مختلف صفحه را نسبت به دایره بررسی کرد :

نقاطی که در معادله $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ صدق کنند، نقاطی از صفحه هستند که روی دایره قرار دارند.

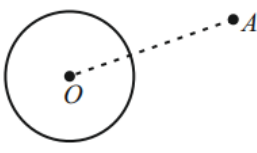
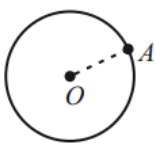
مجموعه جواب نامعادله $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 < r^2$ نقاطی از صفحه را مشخص

می‌کند که

مجموعه جواب نامعادله $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 > r^2$ نقاطی از صفحه را مشخص

می‌کند که

جمع بندی :

A درون دایره	A بیرون دایره	A روی دایره	$A(x_0, y_0)$
			شکل
$OA < r$	$OA > r$	$OA = r$	شرط هندسی
با جایگذاری مختصات A در معادله دایره داریم: $(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 < r^2$	با جایگذاری مختصات A در معادله دایره داریم: $(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 > r^2$	با جایگذاری مختصات A در معادله دایره داریم: $(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 = r^2$	وقتی معادله استاندارد دایره را دارید: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$

مثال : نقطه‌ی $A(1, -2)$ نسبت به دایره‌ای با معادله‌ی $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ چه وضعی دارد؟

روش اول :

روش دوم :

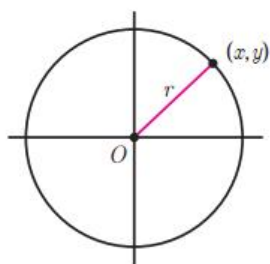
کار در کلاس

۱ در حالت‌های زیر، معادله دایره را بنویسید :

الف) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲.

ب) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳.

پ) دایره‌ای که از نقطه $(۱, -۳)$ بگذرد و مرکز آن $(۲, -۱)$ باشد.



۲ با تکمیل جدول، وضعیت هر نقطه را نسبت به دایره مشخص کنید :

معادله دایره	شعاع و مختصات مرکز دایره	نقاط		
		$A(۱, ۱)$	$B(۰, ۳)$	$C(-۲, ۴)$
$(x+۲)^2 + (y-۳)^2 = ۴$				
.....	دایره به مرکز $(۱, -۲)$ و شعاع ۳		بیرون دایره	

۳ اگر معادله دایره‌ای به شکل $x^2 + y^2 = 4$ باشد :

الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بنویسید.

ب) مختصات نقاط تقاطع این دایره را با محورهای مختصات پیدا کنید.

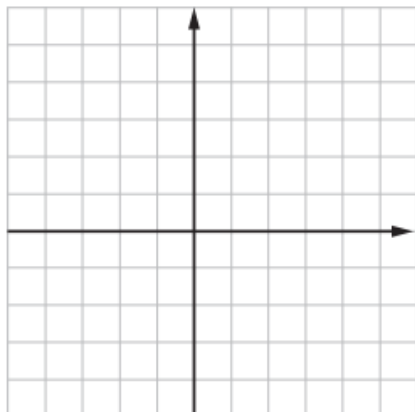
نکته : نقاط برخورد دایره با محورهای مختصات



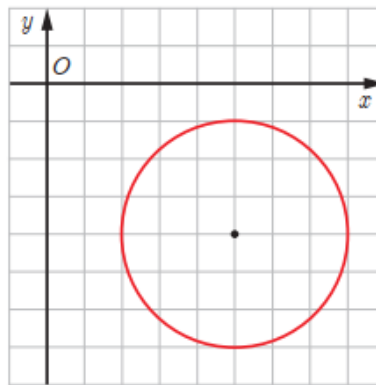
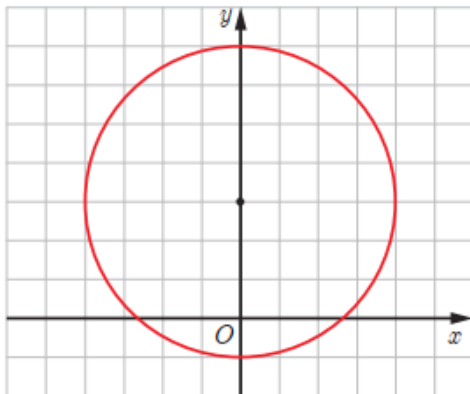
۱ برای پیدا کردن نقاط برخورد دایره با محور x ها کافی است $y = 0$ قرار دهید.

۲ برای پیدا کردن نقاط برخورد دایره با محور y ها کافی است $x = 0$ قرار دهید.

پ) شکل این دایره را رسم کنید و صحت پاسخ‌های خود را به کمک شکل بررسی کنید.



۴ معادله دایره‌های زیر را بنویسید:

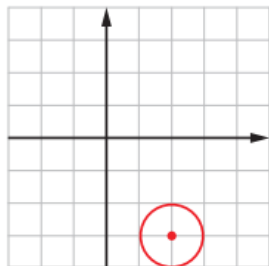


معادله گسترده یک دایره

معادله دایره $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$ را در نظر بگیرید.

این معادله را به کمک اتحادها می‌توان به شکل زیر ساده کرد:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 &= 1 \\ \rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 &= 0 \end{aligned}$$

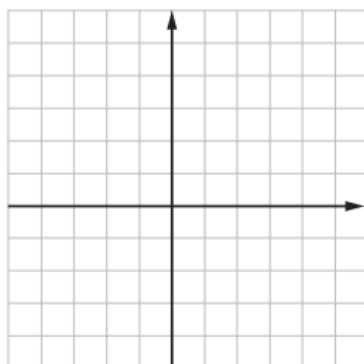


این رابطه را **معادله گسترده دایره** یا معادله ضمنی دایره می‌نامیم.

بدیهی است که معادله استاندارد دایره و معادله گسترده آن به یکدیگر قابل تبدیل‌اند.

مثال: فرض کنید معادله گسترده یک دایره به شکل $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ باشد. با استفاده از مربع کامل کردن، سعی می‌کنیم معادله گسترده را به معادله استاندارد تبدیل کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 &= 0 \\ \rightarrow (x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) + 6 &= 0 \\ \rightarrow (x-3)^2 - 9 + (y+1)^2 - 1 + 6 &= 0 \\ \rightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 &= 4 \end{aligned}$$



مختصات مرکز و شعاع این دایره را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

نکته :

♦ آنچه درباره‌ی معادله‌ی گسترده‌ی دایره، باید بدانید:

۱) فرم کلی معادله‌ی گسترده‌ی دایره، به این صورت است:

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$$

۲) راه تبدیل معادله‌ی استاندارد دایره به معادله‌ی گسترده: اتحادها را باز کنید و همه‌ی جمله‌ها را به سمت چپ بیاورید و ساده کنید...

۳) آماده کردن معادله‌ی گسترده‌ی دایره: به ضریب x^2 و y^2 نگاه می‌کنیم، اگر هر دو ۱ بودند، معادله‌ی گسترده را آماده می‌گوییم وگرنه باید کل جمله‌های موجود را بر ضریب x^2 و y^2 تقسیم کنید تا ضریب x^2 و y^2 برابر ۱ گردد و در واقع معادله‌ی گسترده، آماده شود.

برای مثال :

$$4x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 1 = 0$$

برای مثال: معادله دایره $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$ را در نظر بگیرید.

مثال ۱۱ : معادله دایره ای به صورت $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ است ، معادله استاندارد دایره را بنویسید.

معادله گسترده یک دایره را به شکل $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در نظر می گیریم. با تبدیل $x^2 + ax$ و $y^2 + by$ به دو مربع کامل داریم:

$$(x^2 + ax) + (y^2 + by) + c = 0$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

بدین ترتیب :

اگر $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله گسترده یک دایره باشد، مختصات مرکز این دایره $O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ است. شعاع این دایره برابر است با: $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$

برای مثال :

معادله گسترده یک دایره به شکل $x^2 + y^2 + 2y + 2x - 8 = 0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بیابید.

(دی ۱۴۰۱ - ۱ نمره)

بدیهی است که با توجه به مثبت بودن r ، معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله یک دایره است اگر و تنها اگر رابطه $a^2 + b^2 > 4c$ برقرار باشد. (چرا؟)

برای مثال :

$$x^2 + y^2 + 2y + \frac{3}{2} = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2y - \frac{3}{2} = 0$$

تذکره: اگر در فرم آماده‌ی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ عبارت زیر رادیکال شعاع، صفر شود، این معادله، دایره نیست و فقط نمایش یک نقطه است؛ همان نقطه‌ی $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$.

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$$

برای مثال :

$$a^2 + b^2 - 4c > 0 \rightarrow$$

$$a^2 + b^2 - 4c = 0 \rightarrow$$

$$a^2 + b^2 - 4c < 0 \rightarrow$$

جمع بندی :

نکته :



محاسبه شعاع و مرکز دایره از معادله‌ی گسترده‌ی دایره: معادله‌ی دایره را گسترده آماده می‌کنید.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$O\left(\frac{a}{-2}, \frac{b}{-2}\right)$$

مرکز دایره

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$$

شعاع دایره

کار در کلاس

معادله گسترده دایره‌ای به شکل $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ است. مختصات مرکز این دایره و شعاع آن را پیدا کنید و معادله دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

نمونه سوال نهایی



(خرداد ۱۴۰۳ - ۱ نمره)

اگر مرکز دایره $x^2 + y^2 + ax - 4y - 4 = 0$ ، نقطه $O(1, 2)$ باشد.

الف) مقدار a را بیابید.

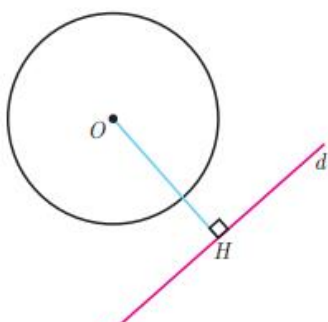
ب) شعاع دایره را محاسبه کنید.

اوضاع نسبی خط و دایره

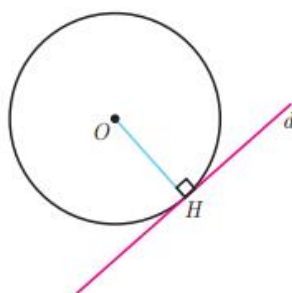
در سال‌های گذشته به طور شهودی با اوضاع نسبی خط و دایره آشنا شده‌اید. در این فعالیت قصد داریم به کمک معادله دایره و خط، این مفاهیم را مرور کنیم.

دایره $C(O, r)$ را در صفحه در نظر بگیرید. با توجه به شکل، به سادگی می‌توان دید که خط و دایره می‌توانند یک، یا دو نقطه اشتراک داشته، یا هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشند.

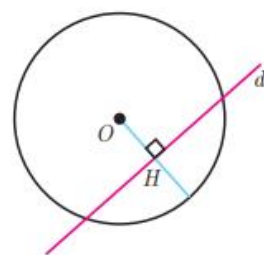
اگر خط d ، دایره را قطع نکند،
است $OH > r$.



اگر خط d بر دایره مماس باشد،
است $OH = r$.



اگر خط d با دایره متقاطع باشد،
است $OH < r$.



یادآوری

۱- خط مماس در نقطه تماس با دایره، بر شعاع آن دایره عمود است.

۲- فاصله نقطه $A(x, y)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

در حالتی که معادله دایره $C(O, r)$ به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r در دستگاه مختصات داده شده باشد، می‌توان وضعیت خطوط مختلف صفحه را نسبت به دایره بررسی کرد.

مثال:

وضعیت خط $x + y = 3$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ مشخص کنید.

حل:

کافی است فاصله مرکز دایره را از خط داده شده حساب کرده و اندازه آن را با اندازه شعاع دایره مقایسه کنیم.

مرکز دایره از رابطه $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ ، نقطه $(1, 0)$ و شعاع دایره از رابطه $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ برابر است با ۲.

از طرفی فاصله مرکز دایره از خط داده شده برابر است با $d = \frac{|1(1) + 1(0) - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ و از آنجا که این مقدار از شعاع دایره کمتر

است، پس می‌توان چنین نتیجه گرفت که خط داده شده با دایره متقاطع است.

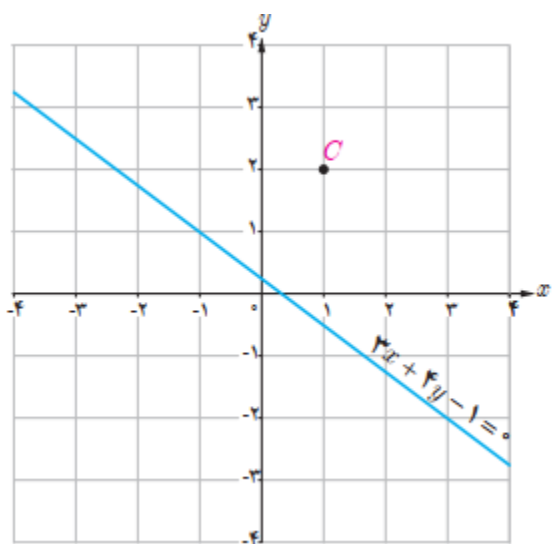
کار در کلاس

۱ در موارد زیر وضعیت خط و دایره را نسبت به هم مشخص کنید.

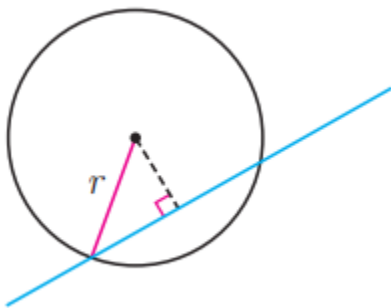
الف) دایره $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$ و خط $x + y = 1$

ب) دایره $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ و خط $y = -1$

۲ معادله دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x + 4y - 1 = 0$ مماس بوده و مرکز آن $C(1, 2)$ باشد.



۳ مرکز دایره‌ای، نقطه $O(2, -3)$ است. این دایره روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ وترى به طول ۶ جدا می‌کند. معادله این دایره را بنویسید.

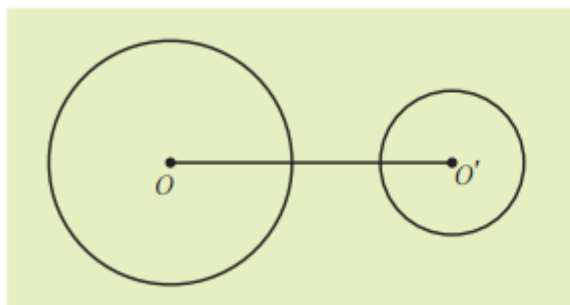


اوضاع نسبی دو دایره

نظیر آنچه برای اوضاع نسبی نقطه و دایره و همین‌طور خط و دایره دیدید، قصد داریم ابتدا به‌طور شهودی وضعیت‌های مختلفی را که دو دایره دلخواه می‌توانند نسبت به هم داشته باشند، مشخص کنیم و سپس وضعیت دو دایره را نسبت به یکدیگر، در صفحه مختصات و با داشتن معادله دو دایره بررسی کنیم.

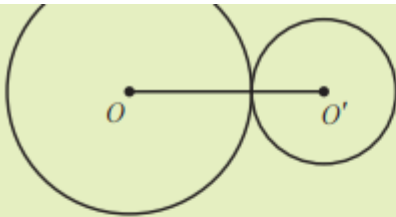
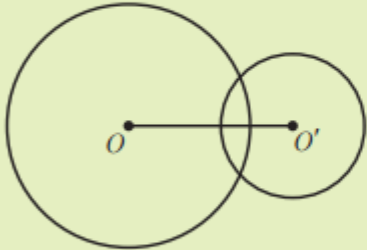
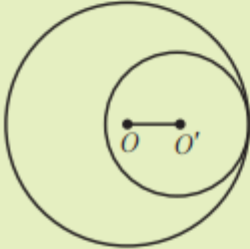
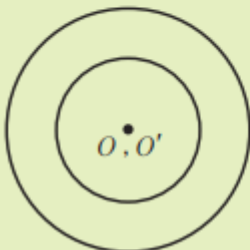


دو دایره دلخواه $C(O, r)$ و $C'(O', r')$ را با فرض $r > r'$ در نظر بگیرید. در جدول زیر حالت‌های مختلف دو دایره نسبت به هم داده شده و در هر مورد، رابطه بین اندازه شعاع‌های دو دایره با اندازه فاصله بین مرکزهای دو دایره بیان شده است. پاره خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کند، **خط‌المركزين** نامیده می‌شود. در اینجا اندازه خط‌المركزين را با d نمایش داده‌ایم.



$$d > r + r'$$

دو دایره بیرون هم (متخارج)

	$d = r + r'$	دو دایره مماس بیرون
	$r - r' < d < r + r'$	دو دایره متقاطع
	$d = r - r'$	دو دایره مماس درون
	$d < r - r'$	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دو دایره هم مرکز

در حالتی که معادله دو دایره را داشته باشیم، بدون رسم دو دایره می‌توانیم وضعیت آنها را نسبت به هم مشخص کنیم.
 مثال: وضعیت دو دایره $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید و سپس نمودار دو دایره را رسم کنید.

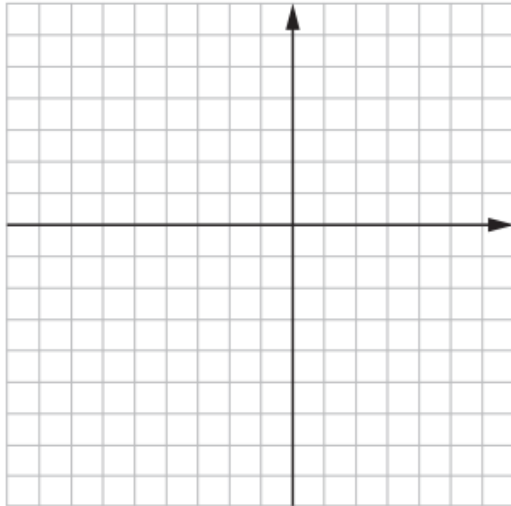
حل : به کمک آنچه دیدیم، ابتدا مختصات مرکز و طول شعاع هر دایره را پیدا می کنیم و سپس با مقایسه مقادیر مجموع و تفاضل دو شعاع با طول خط‌المركزین، وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص می کنیم.

در دایره $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ با پیدا کردن مرکز دایره و اندازه شعاع داریم : مرکز دایره نقطه $O(-3, -4)$ و اندازه شعاع برابر ۵ است.

به روش مشابه در دایره $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ ، مرکز دایره نقطه $O'(2, -3)$ و اندازه شعاع $r' = 1$ است.

از طرفی طول خط‌المركزین برابر است با : $OO' = \sqrt{(-3-2)^2 + (-4+3)^2} = \sqrt{26}$ بنابراین از آنجا که داریم : $5-1 < \sqrt{26} < 5+1$ یعنی $r - r' < d < r + r'$ پس دایره‌های فوق، متقاطع هستند.

رسم دو دایره و بررسی صحت پاسخ به کمک شکل، به دانش آموزان واگذار شده است.



کار در کلاس

۱ با انجام مراحل زیر، معادله دایره‌ای را بنویسید که بر دایره $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ مماس بیرون و مرکز آن نقطه $O(2, -2)$ باشد :

— مختصات نقطه O' ، مرکز دایره داده شده عبارت است از :

— اندازه r' یعنی شعاع دایره داده شده برابر است با :

— طول OO' برابر است با :

— شرط اینکه دو دایره مماس بیرونی باشند این است که : پس شعاع r باید برابر باشد.

— معادله دایره مطلوب را با معلوم بودن اندازه شعاع و مختصات مرکز آن بنویسید :

۲ برای حالت‌های زیر معادله دو دایره را بنویسید و پاسخ خود را با دوستانان مقایسه کنید.
الف) دو دایره هم‌مرکز باشند.

ب) دو دایره بیرون هم باشند.

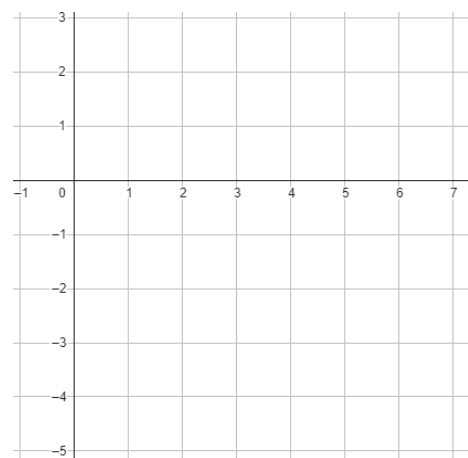
۳ برای موارد زیر وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص کنید :
الف) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

ب) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ و $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$

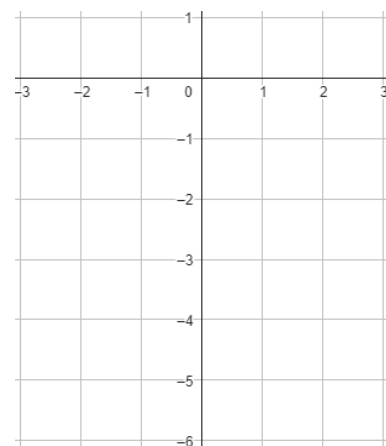
تمرین

۱ در هر دایره مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع آن را پیدا کنید، محل تقاطع هر دایره را با محورهای مختصات، در صورت وجود مشخص کنید و درستی پاسخ خود را به کمک رسم دایره بررسی کنید.

الف) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$



ب) $x^2 + (y + 3)^2 - 4 = 0$



۲ در حالت‌های زیر معادله دایره را بنویسید :

الف) دایره‌ای که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $C(2, -1)$ باشد.

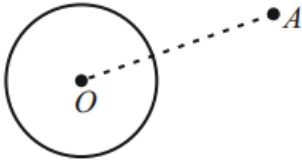
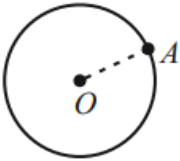
ب) دایره‌ای که مرکز آن $(2, 3)$ و نقطه $(-3, -9)$ نقطه‌ای روی آن باشد.

پ) دایره‌ای که نقاط $(0, 3)$ و $(-4, -1)$ دو سریکی از قطرهای آن باشند.

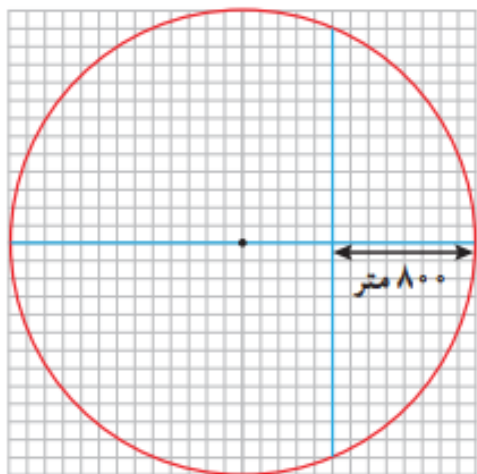
۳ وضعیت نقاط $(1, 0)$ ، $(0, -1)$ ، $(-1, -2)$ و $(0, 0)$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ مشخص کنید.

نکته:



A درون دایره	A بیرون دایره	A روی دایره
		
با جایگذاری مختصات A در معادله‌ی دایره داریم: $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c < 0$	با جایگذاری مختصات A در معادله‌ی دایره داریم: $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c > 0$	با جایگذاری مختصات A در معادله‌ی دایره داریم: $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c = 0$

۴ شهرداری قصد دارد در یک فضای سبز دایره‌ای شکل به شعاع ۱۳۰۰ متر، دو مسیر پیاده‌روی مطابق شکل بسازد. اگر مختصات مرکز دایره $(۱۳, ۱۳)$ و هر واحد برابر ۱۰۰ متر باشد: الف) معادله این دایره چیست؟



ب) مختصات نقاط برخورد دو مسیر را با دایره پیدا کنید.

پ) دو مسیر در چه نقطه‌ای با یکدیگر متقاطع‌اند؟

ت) طول مسیر عمودی چقدر است؟

۵ معادله گسترده یک دایره به شکل $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع آن را پیدا کنید و معادله آن را به شکل استاندارد بنویسید.

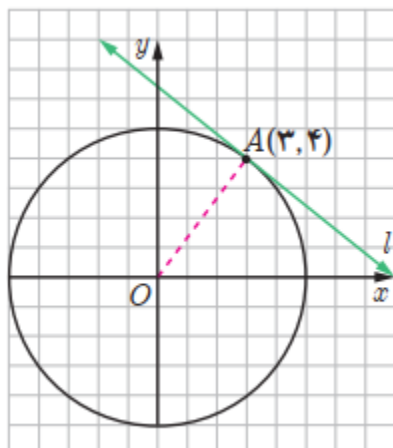
۶ وضع خط‌های زیر را نسبت به دایره مشخص کنید.

الف) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ و $6x + 4y = 0$

ب) $x^2 + y^2 = 2$ و $y = -x - 2$

۷ اگر بدانیم خط l در نقطه $(3, 4)$ بر دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات مماس است، معادله خط

مماس چیست؟



۸ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن، نقطه $(0, 3)$ و بر خط $3x - 4y = 3$ مماس باشد.

۹ مشخص کنید در حالت‌های زیر دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

الف $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ و $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 9$

$$x^2 + (y-5)^2 = 5 \quad \text{و} \quad (x-2)^2 + (y+3)^2 = 7 \quad \text{ب)}$$

۱۰ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-1, -1)$ و با دایره $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ مماس درون باشد.

احتمال

فصل

قانون احتمال کل

قانون احتمال کل

تهیه کننده : رقیه پيله ور - دبیر ریاضی ناحیه دو اردبیل

برای تماشای ویدیوهای آموزشی ریاضی ۳ تجربی (همین جزوه) می توانید به سایت

math-pilevar.ir یا math-pilevar.com مراجعه کنید.



یادآوری

در پایه‌های قبل با مفهوم احتمال و برخی تعاریف مرتبط با آن آشنا شده‌اید. در زیر خلاصه‌ای از این مطالب آورده شده است.

۱- پدیده تصادفی: پدیده یا آزمایشی است که نتیجه آن را نتوان قبل از انجام، به طور قطعی پیش‌بینی کرد.

۲- فضای نمونه: مجموعه تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه آن پدیده می‌نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهیم.

۳- پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

۴- پیشامدها و اعمال روی آنها: فرض کنیم A و B پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند.

الف) اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

ب) اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

پ) تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A - B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ ندهد.

ت) متمم یک پیشامد: پیشامد A' (یا A^c) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.

$$P(A') = 1 - P(A)$$

۵- رابطه محاسبه احتمال وقوع یک پیشامد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت‌های ممکن}}$$

۶- رابطه محاسبه احتمال اجتماع دو پیشامد A و B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

۷- پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه A و B با هم رخ ندهند؛ به بیان دیگر $A \cap B = \emptyset$ در این صورت داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

۸- تعمیم پیشامدهای ناسازگار: پیشامدهای A_1 و A_2 و $\dots$ و A_n را دو به دو ناسازگار می‌گوییم، هرگاه هیچ دوتایی از آنها نتوانند با هم رخ دهند. در این صورت داریم:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

۹- احتمال شرطی: منظور از «احتمال A به شرط B » که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است و داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (P(B) \neq 0)$$

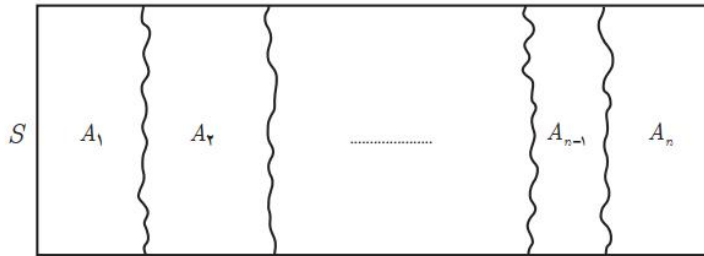
۱۰- پیشامدهای مستقل: دو پیشامد A و B از هم مستقل اند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. مستقل بودن دو پیشامد A و B معادل است با اینکه $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

قانون احتمال کل

— افراز^۱ فرض کنیم A_1 و A_2 و $\dots$ و A_n زیر مجموعه‌هایی ناتهی از مجموعه S باشند، به گونه‌ای که اجتماع همه آنها برابر S ، و اشتراک هر دو تای آنها برابر $\emptyset$ باشد، در این صورت می‌گوییم این مجموعه‌ها یک افراز روی S درست کرده‌اند. به عبارتی داریم:

$$1) A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S \quad \left(\bigcup_{i=1}^n A_i = S \right)$$

$$2) A_1 \cap A_2 = \emptyset, A_1 \cap A_3 = \emptyset, \dots, A_{n-1} \cap A_n = \emptyset \quad (A_i \cap A_j = \emptyset, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j)$$



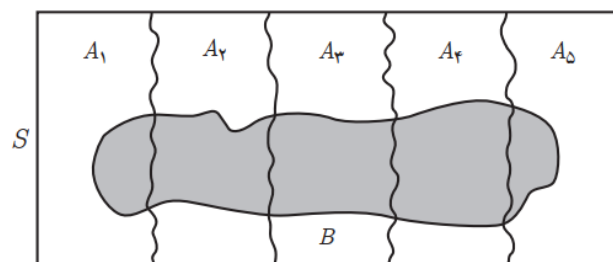
مثال: کشور ایران به ۳۱ استان افراز شده است.

مثال: اگر A مجموعه اعداد طبیعی اول و B مجموعه اعداد طبیعی مرکب و $C = \{1\}$ باشند، در این صورت A, B, C یک افراز روی مجموعه اعداد طبیعی هستند.

مثال: اگر A مجموعه اعداد طبیعی اول و B مجموعه اعداد طبیعی مرکب و $C = \{1\}$ باشند، در این صورت A, B, C یک افراز روی مجموعه اعداد طبیعی هستند.

مثال: مجموعه اعداد گویا و مجموعه اعداد اصم یک افراز روی مجموعه اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.

سؤال: اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی باشد و $A_1, A_2, \dots, A_n$ مانند آنچه گفته شد یک افراز روی S درست کنند. آیا پیشامدهای $A_1, A_2, \dots, A_n$ دو به دو ناسازگاراند؟ چرا؟ آیا امکان دارد هیچ کدام از پیشامدهای $A_1, A_2, \dots, A_n$ اتفاق نیفتند؟



فرض کنید پیشامدهای A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 مانند شکل مقابل یک افراز روی فضای نمونه‌ای S درست کرده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد. در این صورت داریم:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup (B \cap A_4) \cup (B \cap A_5)$$

که در آن $B \cap A_i$ و $B \cap A_j$ برای هر $i \neq j$ ناسازگاراند. چرا؟

بنابراین داریم^۲:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + P(B \cap A_4) + P(B \cap A_5) = \sum_{i=1}^5 P(B \cap A_i)$$

اما از آنچه در احتمال شرطی مشاهده کردیم داریم :

$$P(B|A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \Rightarrow P(B \cap A_i) = P(A_i)P(B|A_i)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^5 P(A_i)P(B|A_i)$$

و بنابراین رابطه پرکاربرد زیر حاصل خواهد شد :

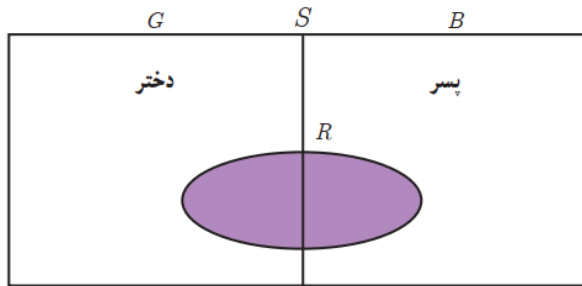
حال اگر فرض کنیم در حالت کلی $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن **قانون احتمال کل** می‌گوییم :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

مثال : اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر 8% و نوزاد دختر 3% باشد و خانواده‌ای قصد بچه‌دار شدن داشته باشد، به چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟
قبل از اینکه مسئله فوق را حل کنیم فرض کنید یکی از اعداد زیر جواب مسئله فوق است. حدس بزنید کدام عدد می‌تواند جواب باشد؟
برای رد کردن گزینه‌هایی که فکر می‌کنید نادرست‌اند، دلیل بیاورید.

۱ 9% 8% 55% 3% 1% 0

حل :



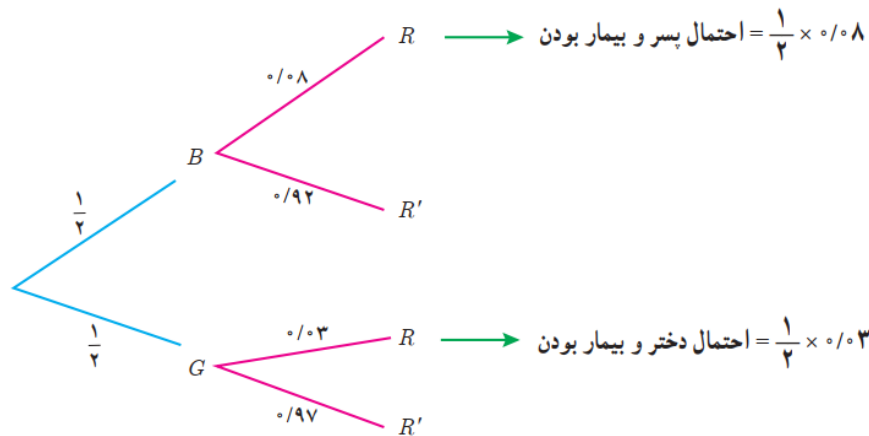
از آنجا که در ابتدا نسبت نوزادان بیمار به کل نوزادان را نداریم، لذا نمی‌توانیم به‌طور مستقیم احتمال مورد نظر را محاسبه نماییم. اما می‌دانیم نسبت نوزادان پسر بیمار به کل نوزادان پسر برابر $\frac{8}{100}$ و همین نسبت برای نوزادان دختر $\frac{3}{100}$ است و احتمال پسر (دختر) بودن نوزاد نیز $\frac{1}{2}$ است. بنابراین با توجه به قانون احتمال کل خواهیم داشت :

$$P(\text{دختر بودن} | \text{بیمار بودن}) = P(\text{دختر بودن}) \cdot P(\text{پسر بودن} | \text{بیمار بودن}) + P(\text{پسر بودن} | \text{بیمار بودن}) \cdot P(\text{دختر بودن} | \text{بیمار بودن})$$

و اگر پیشامد پسر بودن را با B و دختر بودن را با G و بیمار بودن را با R نمایش دهیم داریم :

$$P(R) = P(B)P(R|B) + P(G)P(R|G) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{100} = \frac{11}{200}$$

برای حل این مثال می‌توان از نمودار درختی نیز استفاده کرد. به نمودار درختی زیر دقت کنید و علت نوشتن هر عدد و راه حل ارائه شده را شرح دهید.



$$\Rightarrow \text{احتمال بیمار بودن} = \frac{1}{2} \times \frac{8}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{100}$$

مثال: ۴ ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۴ مهره قرار دارد که ۴ تای آنها قرمز است. در ظرف دوم همه مهره ها قرمزند. در ظرف سوم ۸ مهره قرار دارد که ۶ تای آنها قرمزند و در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می آوریم. احتمال اینکه مهره انتخابی قرمز باشد چقدر است؟

حل: پیشامد انتخاب ظرف ها را به ترتیب با A_1, A_2, A_3 و A_4 و پیشامد خارج شدن مهره قرمز را با B نمایش می دهیم. بنابراین به دنبال یافتن $P(B)$ هستیم و داریم:

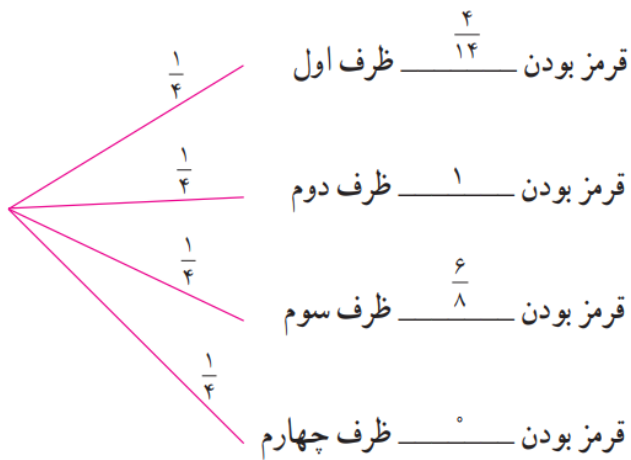
$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{4}$$

$$P(B|A_1) = \frac{4}{14} \quad P(B|A_2) = 1 \quad P(B|A_3) = \frac{6}{8} \quad P(B|A_4) = 0$$

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) + P(A_4)P(B|A_4)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{4}{14} + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{6}{8} + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{57}{112}$$

با نمودار درختی به صورت زیر می توان مسئله را حل کرد:

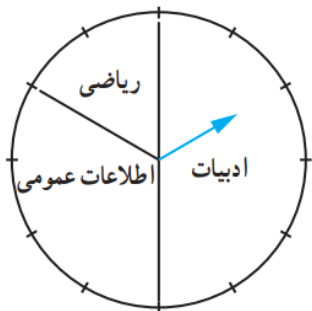


احتمال اینکه مهره قرمز خارج شود و از ظرف اول باشد $\frac{1}{4} \times \frac{4}{14}$

احتمال اینکه مهره قرمز خارج شود و از ظرف دوم باشد $\frac{1}{4} \times 1$

احتمال اینکه مهره قرمز خارج شود و از ظرف سوم باشد $\frac{1}{4} \times \frac{6}{8}$

احتمال اینکه مهره قرمز خارج شود و از ظرف چهارم باشد $\frac{1}{4} \times 0$



مثال: سامان در یک مسابقه شرکت کرده است. سه بسته سؤال که یکی شامل سؤال‌های ادبیات، یکی ریاضی و یکی اطلاعات عمومی است، وجود دارد. اگر بسته سؤال‌های ادبیات را به او بدهند، به احتمال ۹۰ درصد برنده خواهد شد. اگر بسته سؤال‌های ریاضی را به او بدهند، به احتمال ۶۰ درصد و اگر بسته سؤال‌های اطلاعات عمومی را به او بدهند، به احتمال ۸۵ درصد برنده خواهد شد. در صورتی که با چرخاندن عقربه چرخان در شکل مقابل نوع سؤال‌هایی که به او داده می‌شود مشخص شود تعیین کنید او به چه احتمالی برنده خواهد شد؟

حل : اگر انتخاب ادبیات، ریاضی و اطلاعات عمومی را به ترتیب با A_1 , A_2 و A_3 و برنده شدن سامان را با B نمایش دهیم، خواهیم داشت :

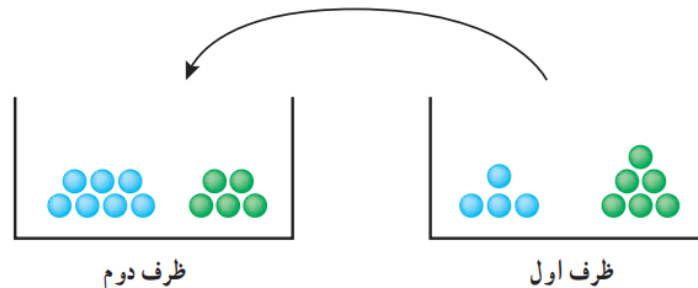
$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{90}{100} + \frac{1}{6} \times \frac{60}{100} + \frac{1}{3} \times \frac{85}{100} = \frac{5}{6}$$

مثال : دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟

حل: مهره انتخاب شده از ظرف اول یا سبز است و یا آبی. اگر این پیشامدها را به ترتیب با G و B و پیشامد انتخاب مهره سبز از ظرف دوم را با A نمایش دهیم خواهیم داشت: $P(B) = \frac{4}{10}$ و $P(G) = \frac{6}{10}$ و $P(A|G) = \frac{6}{13}$ (چرا؟) و $P(A|B) = \frac{5}{13}$ (چرا؟). در این صورت داریم:

$$P(A) = P(G)P(A|G) + P(B)P(A|B) = \frac{6}{10} \times \frac{6}{13} + \frac{4}{10} \times \frac{5}{13} = \frac{56}{130}$$



تمرین‌ها

۱ دو جعبه داریم. درون یکی از آنها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آنها معیوب است و درون جعبه دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب‌اند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟

۲ فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟

۳ یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟

۴ در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A ، ۲ تا از نوع B و ۱۵ تا از نوع C وجود دارد و احتمال اینکه عمر آنها از ۱۰ سال بیشتر باشد برای نوع A ، $\frac{4}{5}$ ، برای نوع B ، $\frac{9}{10}$ و برای نوع C ، $\frac{1}{4}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟

۵ مینا در انتخاب رشته خود برای تحصیل در دبیرستان بین سه رشته ریاضی، تجربی و انسانی مردد است. اگر او رشته ریاضی را انتخاب کند، به احتمال 0.45 ، اگر تجربی را انتخاب کند به احتمال 0.1 و اگر انسانی را انتخاب کند به احتمال 0.3 در آزمون ورودی دانشگاه پذیرفته خواهد شد. اگر احتمال اینکه او رشته ریاضی را انتخاب کند 0.1 ، احتمال اینکه رشته تجربی را انتخاب کند 0.6 و احتمال اینکه رشته انسانی را انتخاب کند 0.3 باشد، با چه احتمالی در دانشگاه پذیرفته خواهد شد؟

۶ مدرسه A سه برابر مدرسه B دانش آموز دارد. ۲۵ درصد دانش آموزان مدرسه A و ۱۵ درصد دانش آموزان مدرسه B معدلی بالای ۱۸ دارند. اگر همه دانش آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم:

الف) با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسه A و با چه احتمالی از مدرسه B است؟ ب) با چه احتمالی فرد انتخابی معدلی بالای ۱۸ دارد؟