

حل تمرینات کتاب درسی

ریاضی و آمار (۳)

رشته‌های ادبیات و علوم انسانی - علوم و معارف اسلامی

این جزوه شامل حل کامل و تشریحی تمام تمرین‌های کتاب درسی ریاضی و آمار ۳ است.

- ✓ آموزش مفهومی همراه با هر تمرین
- ✓ مناسب برای مرور سریع قبل از امتحان نهایی
- ✓ پاسخ‌ها به زبان ساده و روان
- ✓ منطبق با آخرین ویرایش کتاب درسی
- ✓ بدون هیچ نکته اضافه یا خارج از کتاب - دقیقاً آنچه برای نمره ۲۰ لازم است

تهیه کننده: رقيه پيله ور - دبیر ریاضی ناحیه دو اردبیل



برای تماشای ویدیوهای آموزشی حل تمرینات ریاضی و آمار ۳ (همین جزوه) می‌توانید

به یکی از لینک‌های صفحه بعد مراجعه کنید. (ویدیوها رایگان می‌باشد).





سایت

www.math-pilevar.com/htra3

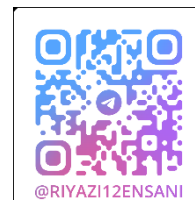
اپلیکیشن pimath

دانلود اپلیکیشن



کانال تلگرام

کانال ویژه ریاضی و آمار ۳



لینک ویدیوها در آپارات

درس ۱ (شمارش)	حل تمرین صفحه ۱۰	https://aparat.com/v/qzsjh2c	فصل ۱
درس ۲ (احتمال)	حل تمرین صفحه ۲۵	https://www.aparat.com/v/pgp9yrd	
درس ۳ (چرخه آمار در حل مسائل)	حل تمرین صفحه ۳۹	https://aparat.com/v/muvdp3b	
درس ۱ (مدل سازی و دنباله)	حل تمرین صفحه ۵۷	https://aparat.com/v/awllgx4	فصل ۲
درس ۲ (دنباله های حسابی)	حل تمرین صفحه ۷۱	https://aparat.com/v/wtjvcis	
درس ۱ (دنباله هندسی)	حل تمرین صفحه ۸۳	https://aparat.com/v/silpnob	فصل ۳
درس ۲ (ریشه نام و توان گویا)	حل تمرین صفحه ۹۳	https://aparat.com/v/jns^tj9	
درس ۳ (تابع نمایی)	حل تمرین صفحه ۱۰۱	https://aparat.com/v/ejo99a6	
درس ۳ (رشد و زوال نمایی)	حل تمرین صفحه ۱۰۴	https://www.aparat.com/v/kflkhbu	

این ویدیوهای آموزشی رو با یک آرزو ساختم:

" اینکه برای همه شما فرصت برابر بسازه و پله‌ای باشه برای رسیدن به موفقیت و نمره‌های عالی."

با احترام، دبیری ریاضی که به عشق درس می‌ده و انگیزه‌اش، دیدن موفقیت شماست.

فصل ۱ - آمار و احتمال

درس ۱: شمارش

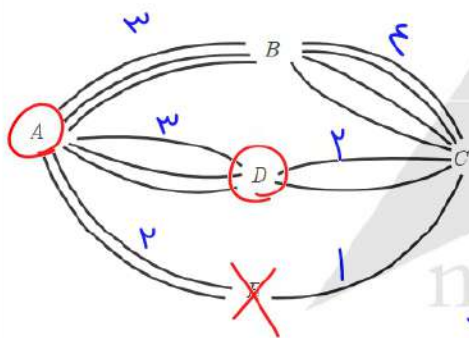
حل تمرینات صفحه ۱۰ کتاب درسی

تمرین

۱. می‌خواهیم از بین ۱۰ دانش‌آموز کلاس دهم و ۱۱ دانش‌آموز کلاس یازدهم و ۱۲ دانش‌آموز کلاس دوازدهم یک دانش‌آموز انتخاب کنیم؛ به چند طریق می‌توانیم این دانش‌آموز را انتخاب کنیم؟

$$10 + 11 + 12 = 33$$

۲. بین پنج شهر A, B, C, D, E مطابق شکل زیر راه‌هایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان: الف) از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟



$$(3 \times 4) + (3 \times 2) + (2 \times 1) = 12 + 6 + 2 = 20$$

ب) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟
 رفت: $3 \times 4 = 12$ برگشت: $4 \times 3 = 12$
 $\rightarrow 12 \times 12 = 144$

$$D \rightarrow A : 3$$

$$\Rightarrow 24 + 3 = 27$$

$$D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A : 2 \times 4 \times 3 = 24$$

پ) از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟

۳. با حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف: (با معنی یا بی معنی)

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{ یا } 5!$$

الف) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت؟

$$\frac{1 \times 4 \times 3}{5} = 12$$

ب) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟

پ) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟

$$\frac{1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1}{9} = 6$$

۴. یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم فوتبال، به صورت رفت و برگشت انجام می شود. اگر همه تیم ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟



$$\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45 \quad \rightarrow \quad 45 \times 2 = 90$$

۵. یک کارخانه خودروسازی خودروهایی در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟

$$7 \times 2 \times 3 = 42$$

$$\binom{7}{1} \binom{2}{1} \binom{3}{1} = 7 \times 2 \times 3 = 42$$

۶. مجموعه $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است؛

الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می توان ساخت؟ $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

ب) چند عدد ۵ رقمی و بزرگ تر از ۸۰۰۰۰ می توان نوشت؟ $2 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 2048$ فقط ۱ و ۹

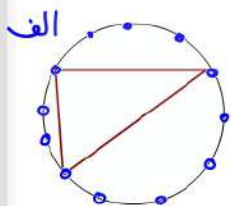
$$\binom{4}{3} = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 4$$

ب) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟

ت) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟
با استفاده از فرمول: $\binom{4-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$
یا $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

۷. روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید: الف) با این دوازده نقطه، چه تعداد مثلث می توان تشکیل داد؟

ب) چه تعداد وتر می توان تشکیل داد؟



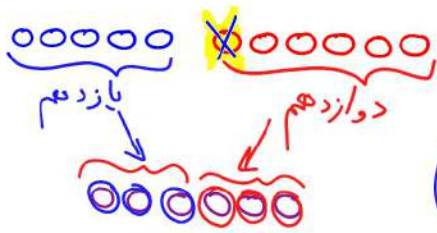
$$\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$



$$\binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2 \times 1} = 66$$

۸. می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز پایه یازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره و الیال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می‌توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم:

(الف) به تعداد مساوی دانش‌آموز پایه یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.



$$\binom{5}{3} \binom{6}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 10 \times 20 = 200$$

(ب) کاپیتان تیم فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشد.



$$\binom{10}{5} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252$$

$$\binom{11-1}{6-1} = \binom{10}{5} = 252$$

(پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش‌آموز پایه دوازدهم باشند.

$$\binom{4}{4} \binom{5}{1} + \binom{4}{3} \binom{5}{2} + \binom{4}{2} \binom{5}{3} = 1 \times 5 + 4 \times 10 + 6 \times 10 = 5 + 40 + 60 = 105$$

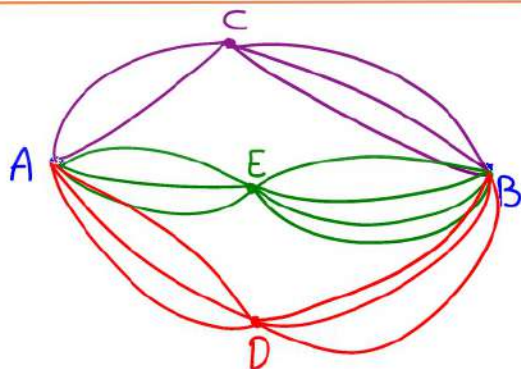
$$= 15 \times 10 + 4 \times 10 + 1 \times 1 = 150 + 40 + 1 = 191$$

$$4 \rightarrow 4 \text{ دوازدهم}$$

$$5 \rightarrow 2 \text{ دوازدهم}$$

$$\binom{4}{4} \binom{5}{1} = 1 \times 5 = 5$$

(ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه یازدهم باشند.



۹. مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $(2 \times 3 + 3 \times 4 + 3^2)$ باشد.

$$(2 \times 3) + (3 \times 4) + (3 \times 3)$$

مسئله: بین شهرهای A, B, C, D, E مطابق شکل راه‌های وجود دارد. به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر B رفت.

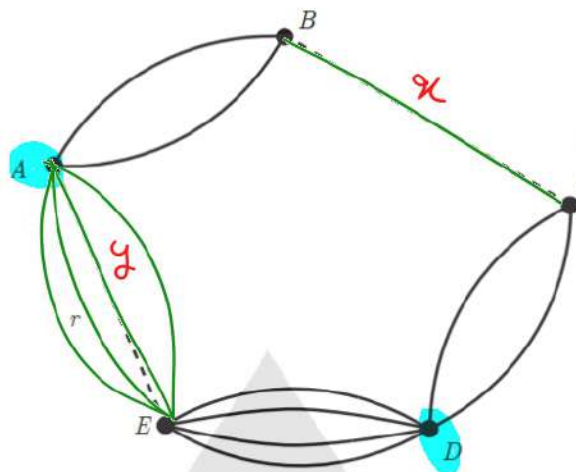
۱۰. تعداد راه‌ها یا جاده‌ها از شهر B به C و از شهر A به E را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۰ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.

$$2 \times 2 \times 2 + y \times 4 = 20$$

$$\div 4 \rightarrow \frac{4x + 4y = 20}{4} \rightarrow x + y = 5$$

$$x + y = 5$$

۱	۴
۲	۱
۳	۲
۴	۱



$$4x + 4y = 20$$

$$4(1) + 4(4) = 20$$

$$4 \times 4 + 4 \times 1 = 20$$

$$4 \times 2 + 4 \times 3 = 20$$

$$4 \times 3 + 4 \times 2 = 20$$

حل تمرینات صفحه ۲۵ کتاب درسی

درس ۲: احتمال

تمرین

۱. کدام یک از پدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدام یک آزمایش قطعی است؟

الف) نام ۲۰ دانش‌آموز را روی ۲۰ کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به طور تصادفی یک کارت بیرون می‌کشیم تا نام یکی از دانش‌آموزها استخراج شود. **تصادفی**

ب) مقداری آب را حرارت می‌دهیم تا به بخار تبدیل شود. **قطعی**

پ) نتیجه یک آزمون چهارجوابی، که نیمی از سؤالات آن را شانس پاسخ داده‌ایم. **تصادفی**

ت) در یک بازی ساده دو نفره، یکی از دو نفر مراحل زیر را انجام می‌دهد. **قطعی، چون جواب همیشه ۱۲ است**

$$\frac{(x+2) \times 2 - 2}{2} - x = \frac{2x+4-2}{2} - x =$$

$$\frac{2x+4}{2} - x = \frac{2x+4}{2} - x = x+2-x = 2$$

— عددی را انتخاب می‌کند.

— سه واحد به آن عدد می‌افزاید.

— سپس حاصل را دو برابر می‌کند.

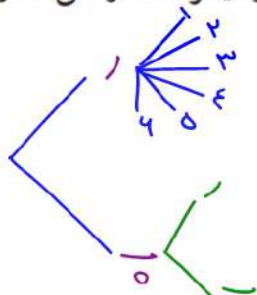
— از عدد حاصل ۲ واحد کم می‌کند.

— نتیجه به دست آمده را نصف می‌کند.

— از حاصل به دست آمده، عدد اولیه را کم می‌کند.

— در مرحله آخر، فرد دوم به جای شخص محاسبه‌کننده پاسخ را اعلام می‌کند.

۲. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد، آن گاه تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم. (الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.



$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2)\}$$

(ب) پیشامد A را که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید.

$$A = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,2)\}$$

۳. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به‌طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین:

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$$

(الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی

$$A = \{3, 9, 15\}$$

(ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

$$B = \{1, 9\}$$

(پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مجذور کامل باشد.

$$A \cap B = \{9\}$$

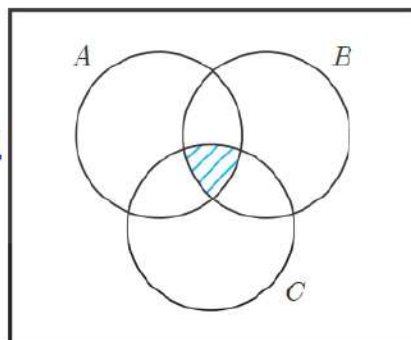
$$A - B = \{3, 15\}$$

(ت) پیشامدهای $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا مشخص کنید.

۴. برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.

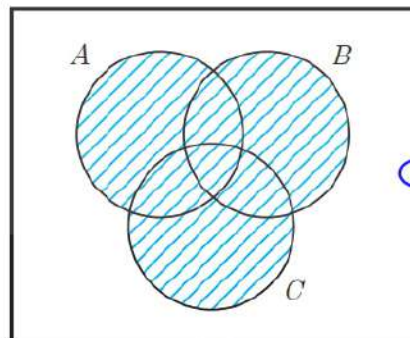
$$A \cap B \cap C$$

پیشامدهای A ، B و C با هم
رخ دهند.



(الف)

$$S$$



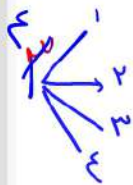
(ب)

$$A \cup B \cup C$$

حداکثر یکی از
پیشامدهای A یا B یا C
رخ دهند.

$$n(S) = 4 \times 4 = 16$$

۵. هر یک از اعداد دورقمی را که با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ می توان نوشت، روی کارت هایی می نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت ها یک کارت را به طور تصادفی خارج می کنیم. الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.



$$S = \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$$

$$A = \{12, 24, 42\}$$

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد.

$$B = \{11, 13, 23, 31, 41, 43\}$$

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.

۶. خانواده ای دارای ۳ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

$$S = \{(\text{پسر}, \text{دختر}, \text{دختر}), (\text{دختر}, \text{دختر}, \text{دختر}), (\text{پسر}, \text{دختر}, \text{پسر}), (\text{دختر}, \text{دختر}, \text{پسر}), (\text{پسر}, \text{پسر}, \text{دختر}), (\text{دختر}, \text{پسر}, \text{دختر}), (\text{پسر}, \text{پسر}, \text{پسر}), (\text{دختر}, \text{پسر}, \text{پسر})\}$$

$$A = \{(\text{دختر}, \text{دختر}, \text{دختر}), (\text{پسر}, \text{پسر}, \text{پسر})\}$$

ب) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند.

$$B = \{(\text{دختر}, \text{دختر}, \text{پسر}), (\text{پسر}, \text{دختر}, \text{دختر}), (\text{دختر}, \text{پسر}, \text{دختر})\}$$

پ) پیشامد B که در آن فقط یک فرزند دختر باشد.

$$C = \{(\text{پسر}, \text{پسر}, \text{دختر}), (\text{پسر}, \text{دختر}, \text{پسر}), (\text{دختر}, \text{پسر}, \text{پسر}), (\text{دختر}, \text{دختر}, \text{پسر})\}$$

ت) پیشامد C که در آن حداقل ۲ فرزند پسر باشند.

$$D = \{(\text{دختر}, \text{دختر}, \text{دختر}), (\text{دختر}, \text{دختر}, \text{پسر}), (\text{دختر}, \text{پسر}, \text{دختر}), (\text{پسر}, \text{دختر}, \text{دختر})\}$$

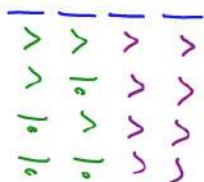
ث) پیشامد D که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد.

$$n(S) = 2^3 = 2^4 = 16$$

۷. خانواده ای دارای ۴ فرزند است.

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟



$$A = \{(\text{دختر}, \text{دختر}, \text{دختر}, \text{دختر}), (\text{دختر}, \text{دختر}, \text{پسر}, \text{پسر}), (\text{دختر}, \text{پسر}, \text{دختر}, \text{دختر}), (\text{پسر}, \text{دختر}, \text{دختر}, \text{دختر})\}$$

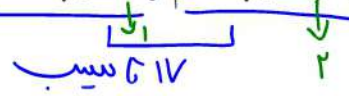
ب) پیشامد A را مشخص کنید؛ طوری که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

پ) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد. (ت) آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

$$C = \{(\text{دختر}, \text{دختر}, \text{دختر}, \text{دختر}), (\text{دختر}, \text{دختر}, \text{دختر}, \text{پسر}), (\text{دختر}, \text{دختر}, \text{پسر}, \text{دختر}), (\text{دختر}, \text{پسر}, \text{دختر}, \text{دختر}), (\text{پسر}, \text{دختر}, \text{دختر}, \text{دختر})\}$$

$$A \cap C \neq \emptyset \quad \text{ت: خیر چون}$$

۸. از جعبه‌ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب را به طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:



$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{17}{3}} = \frac{220}{618} = \frac{11}{309}$$

الف) هر سه سیب سالم باشند.

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

$$\binom{17}{3} = \frac{17 \times 16 \times 15}{3 \times 2 \times 1} = 618$$

ب) دو سیب سالم و یک سیب لکه‌دار باشد.

$$\binom{12}{2} \times \binom{5}{1} = \frac{12 \times 11}{2 \times 1} \times 5 = 66 \times 5 = 330$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{1} \binom{12}{2}}{\binom{17}{3}} = \frac{5 \times 66}{618} = \frac{330}{618} = \frac{55}{103}$$

پ) تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های لکه‌دار بیشتر باشد.

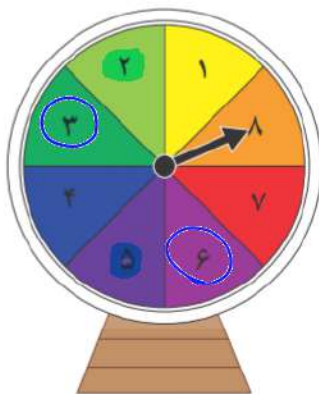
۲ سالم و ۱ لکه‌دار

۳ سالم و ۰ لکه‌دار

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{\binom{12}{2} \binom{5}{1} + \binom{12}{3} \binom{5}{0}}{\binom{17}{3}} = \frac{66 \times 5 + 220 \times 1}{618} = \frac{330 + 220}{618} = \frac{550}{618} = \frac{275}{309}$$

math-pilevar.ir

۹. عقربه دستگاه چرخنده زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد که:



$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

الف) عقربه روی یک عدد اول بایستد.

{۲, ۳, ۵, ۷}

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{8}$$

ب) عقربه یک عدد اول یا فرد را نشان دهد.

{۱, ۲, ۳, ۵, ۷, ۶, ۴}

پ) عقربه روی یک عدد مضرب ۳ بایستد.

{۳, ۶}

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

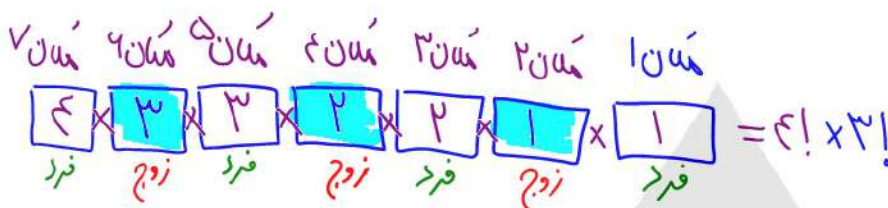
۱۰. ۷ پرچم مختلف را به هفت میلهٔ پرچم نصب کرده‌ایم و روی میله‌ها شماره‌های ۱ تا ۷ را حک کرده‌ایم. چنانچه این پرچم‌ها به‌طور تصادفی کنار هم قرار گیرند، مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه پرچم‌ها با شماره‌های غیر اول در مکان‌های زوج باشند.

۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷

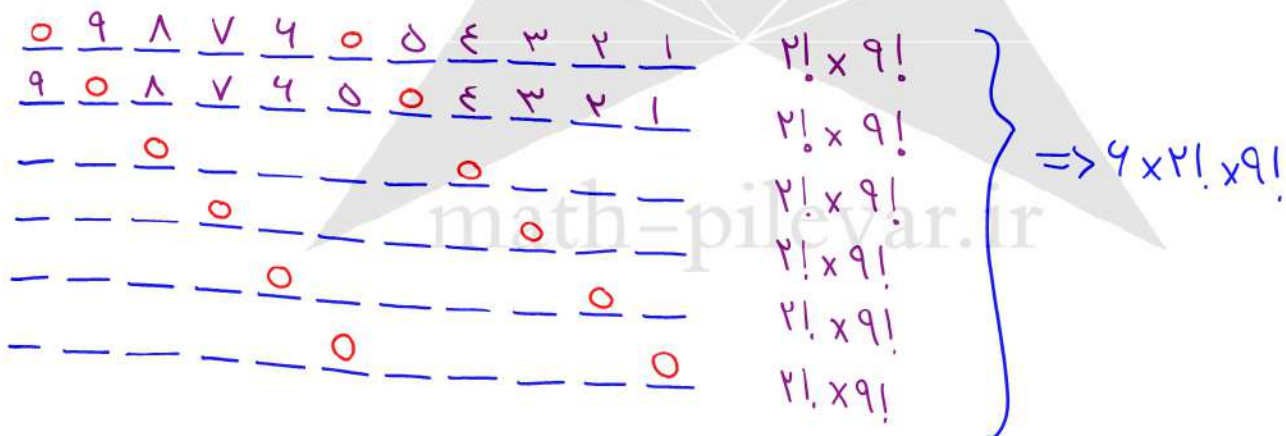
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4! \times 3!}{7!} = \frac{4! \times 3!}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{35}$$

✓ {۱, ۴, ۶} : پرچم با شماره غیر اول

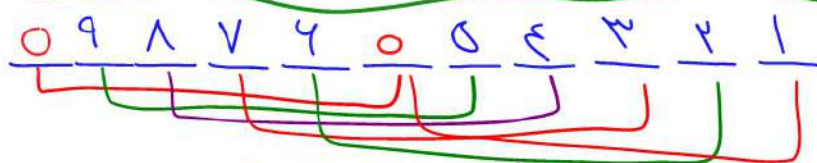
{۲, ۳, ۵, ۷} : اول



۱۱. یازده بازیکن فوتبال تیم مدرسهٔ شما به‌طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می‌گیرند تا عکسی یادگاری بیندازند. چنانچه دروازه‌بان و کاپیتان تیم دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه در عکس دقیقاً ۴ نفر بین دروازه‌بان و کاپیتان حضور داشته باشند؟



$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4 \times 2! \times 9!}{11!}$$



$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4 \times 2! \times 9!}{11!}$$

روش دوم:

۱۲. در یک پارک جنگلی حفاظت شده، ۲۰ قوچ وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آنها را می گیرند و پس از نشان دار کردن، رهایشان می کنند. بعد از مدتی، محیط بانان به طور تصادفی ۷ تا از آنها را می گیرند و می خواهند تعداد قوچ های نشان دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه حداکثر ۲ قوچ نشان دار باشند.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{2}\binom{15}{5} + \binom{5}{1}\binom{15}{6} + \binom{5}{0}\binom{15}{7}}{\binom{20}{7}} =$$

$$\frac{10 \times 3003 + 5 \times 5005 + 1 \times 6435}{77520} = \frac{4149}{7752}$$

$$\binom{15}{5} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 3003 \quad \left| \quad \binom{15}{6} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5005 \quad \right| \quad \binom{15}{7} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 6435$$

۲ نشان دار و ۵ بی نشان

۱ نشان دار و ۶ بی نشان

۰ نشان دار و ۷ بی نشان

$$\binom{15}{7} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 6435$$

۱۳. انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد. به یک برنامه خاص، ۵ نفر رأی موافق، ۳ نفر رأی مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده اند. از بین آنها به طور تصادفی ۳ نفر انتخاب می کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

۵ موافق

۳ مخالف
۲ ممتنع

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1} + \binom{5}{3}\binom{5}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{10 \times 5 + 10 \times 1}{120} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

۲ موافق و ۱ بقیه

۳ موافق و ۰ بقیه

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

(ب) نظر هیچ دو نفری از آنها مانند هم نباشد.

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5 \times 3 \times 2}{120} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$

تمرین

۱. به نظر می‌رسد کودکانی که زبان مادری‌شان فارسی نیست، در دوره دبستان مشکلات بیشتری برای یادگیری مفاهیم درسی دارند. با انتخاب یک جامعه آماری محدود (از نظر پایه تحصیلی، جنسیت، منطقه، زبان مادری و...) و انتخاب متغیر مناسب، این مسئله را به صورت دقیق و شفاف بیان کنید.

بررسی معدل دانش‌آموزان ششم ابتدایی مدرسه شاهد در شهر اردبیل و بررسی ارتباط میزان یادگیری با زبان مادری دانش‌آموزان

۲. با توجه به تأثیر شیوه‌های مختلف حمل و نقل بر محیط زیست، می‌خواهیم در یک کلاس ۲۸ نفره با انتخاب تصادفی ۹ نفر از دانش‌آموزان، از آنها پرسیم در هفته گذشته، بیشتر به کدام یک از شیوه‌های زیر به مدرسه آمده‌اند؟

● ۱- پیاده یا با دوچرخه

○ ۲- با وسایل حمل و نقل عمومی

● ۳- با سرویس مدرسه یا خودروی شخصی.

الف) در این مطالعه، جامعه آماری، نمونه آماری، اندازه جامعه و اندازه نمونه را مشخص کنید.

جامعه آماری: دانش‌آموزان یک کلاس ۲۸ نفره
نمونه آماری: ۹ نفر از دانش‌آموزان کلاس
اندازه جامعه: ۲۸ نفر
اندازه نمونه: ۹ نفر

ب) داده‌های این مطالعه را با چه روشی می‌توان گردآوری کرد؟ چه مشکلاتی ممکن است در گردآوری این داده‌ها رخ دهد؟ پرسش شفاهی (چون تعداد نمونه کم است). ممکن است دانش‌آموزان در کل فصل‌های سال باروش ثابت به مدرسه نیایند. مانند زمان امتحان یا برای سرویس مدرسه مشکل پیش آمده باشد.

پ) متغیر تصادفی مورد بررسی این مطالعه چیست؟ نوع متغیر (کمی/کیفی) و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای/نسبتی - اسمی/ترتیبی) آن را مشخص کنید.

متغیر تصادفی: شیوه‌های مختلف حمل و نقل - متغیر کیفی اسمی

ت) چه نمودارها و آماره‌هایی برای گزارش نتایج این مطالعه مناسب‌اند؟ نمودارهای دایره‌ای و میله‌ای

ث) آیا می توانیم این نتایج را به شیوه رفت و آمد دانش آموزان این کلاس در کل سال تحصیلی تعمیم دهیم (مثلاً به فصل های مختلف یا زمان برگزاری آزمون های پایان نیم سال)؟ توضیح دهید. **خیر، زیرا در مقاطع مختلف از سال تحصیلی و فصل های مختلف بنا بر شرایط جوی و اهمیت حضور به موقع و یا ایام امتحانات شرایط متفاوت پیش می آید.**

ج) اگر ۹ نفر دیگر از این کلاس را به طور تصادفی انتخاب می کردیم، آیا دقیقاً همین نتایج حاصل می شد یا امکان داشت حداقل نتایج کمی تغییر کند؟ توضیح دهید.

خیر، نتایج بدست آمده منحصر به نمونه ای است که مورد مطالعه قرار گرفته است و نتایج ممکن است قدری تغییر کند.

۳. در هریک از موارد زیر، علت عدم تناسب جامعه آماری با نمونه های انتخاب شده را توضیح دهید. برای بهبود نمونه گیری چه پیشنهادی دارید؟ انتخاب نادرست نمونه در هریک از موارد چگونه بر نتایج تأثیر می گذارد؟

الف) مسئله: بررسی میزان رضایت شغلی در کارمندان یک کارگاه شبانه روزی

نمونه: انتخاب تصادفی تعدادی از مدیران ارشد شیفت روز

چون مدیران شیفت روز انتخاب شده اند، قطعاً میزان رضایت بالا خواهد بود. (شیفت روز مشکلات کمتری نسبت به شب دارند)

برای نتیجه واقعی تر: مدیران نمی توانند نماینده کل کارمندان محسوب شوند پیشنهاد می شود نمونه گیری از هر دو شیفت به تناسب و از تمامی کارمندان صورت گیرد.

ب) مسئله: نظرسنجی از مادران یک شهر درباره میزان رضایتشان از برنامه های کودک تلویزیون

نمونه: انتخاب تصادفی برخی منازل از تمامی مناطق شهر و مراجعه به آنها بین ساعت ۸ تا ۱۰ صبح

چون در این ساعت ممکن است برنامه کودک پخش نشود، به صورت نادرست میزان رضایتی بالا باشد (یا برعکس)

یا ممکن است برخی از مادران در این ساعت سرکار رفته باشند و اطلاعات از آنها دریافت نمی شود

برای نتیجه واقعی تر: مدت مراجعه را تغییر یا افزایش دهیم.

پ) مسئله: نظرسنجی از دانش آموزان پایه دوازدهم منطقه ۲ بوشهر درباره اینکه به طور متوسط چند ساعت از روز را به انجام دادن تکالیف مدرسه اختصاص می دهند.

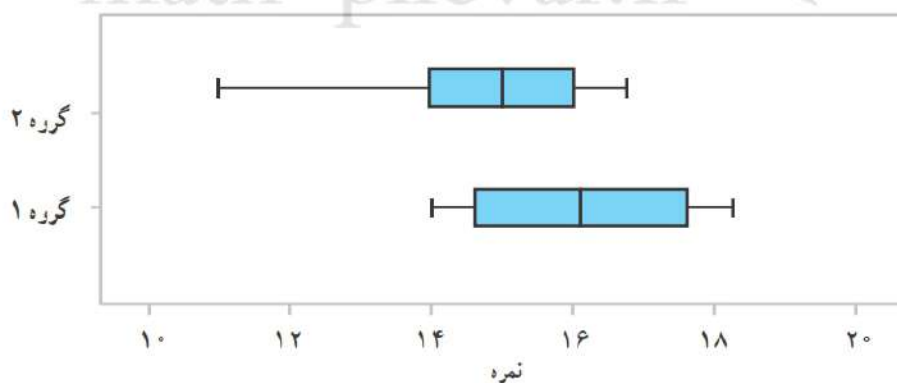
نمونه: دختران پایه دوازدهم یک مدرسه از این منطقه که به صورت داوطلبانه در این مطالعه مشارکت کرده اند.

۱- دانش آموزان پسر از این مطالعه حذف شده اند. ۱۰۲ امکان دارد افرادی که در این مطالعه شرکت کرده اند دانش آموزان درس خوان (با بررسی) باشند که در این صورت نتایج غیر واقعی خواهد بود.

برای نتیجه واقعی تر: نمونه تصادفی و به تناسب دانش آموزان انتخاب شود.

۴. «مطالعات دانشمندان علوم اعصاب نشان می دهد که مغز انسان برای انجام دادن هم زمان چند فعالیت ساخته شده است و هر بار که ما گمان می کنیم مشغول انجام دادن چند کار به صورت هم زمان هستیم، در واقع مغزمان دارد با سرعت از کاری به کار دیگر می پرد. مغز انسان تشنه خبرها و اتفاقات جدید است. وقتی مشغول مطالعه و یادگیری هستیم و ناگهان صدای دریافت یک پیام را از تلفن همراه خود می شنویم، مغز ما، که بی تابانه منتظر کشف آن اطلاع جدید است، دیگر روی یک کار متمرکز نیست. این مطالعات نشان می دهد که مثلاً اگر دانش آموزی هنگام مطالعه و یادگیری، هم زمان تلویزیون تماشا کند با گفت و گویی را در یک شبکه اجتماعی دنبال کند، مطالب درسی به جای اینکه به قسمت حقایق و ایده ها برود، به قسمت مهارت ها فرستاده می شود.»

سعید و سهراب پس از خواندن این مطلب در نشریه مدرسه تصمیم گرفتند نمره عملکرد تحصیلی ۲۵ دانش آموز پایه دوازدهم مدرسه را که هنگام مطالعه، تلفن همراه خود را در حالت بی صدا قرار می دهند (گروه یک)، با ۲۵ دانش آموز پایه دوازدهم دیگر که این کار را انجام نمی دهند (گروه دو) مقایسه کنند. نتایج این مطالعه به این شرح است:



الف) از مقایسه میانه گروه یک با چارک سوم گروه دو چه نتیجه ای می گیرید؟ تفسیر با مساری اند. ۵۰ درصد دانش آموزان هر دو گروه یک ، نمره بالاتری از ۷۵ درصد دانش آموزان گروه دوم دارند. (گروه اول نتیجه بهتری دارد).

ب) پراکندگی دو گروه را با استفاده از دامنه تغییرات و دامنه میان چارکی مقایسه کنید. دامنه تغییرات گروه دوم بیشتر است.

دامنه میان چارکی گروه اول بیشتر است (نمرات گروه دوم حول میانه متمرکزتر است).

دامنه تغییرات	دامنه میان چارکی	
گروه ۱	$17.5 - 14.5 = 3$	$18.5 - 14 = 4.5$
گروه ۲	$16 - 14 = 2$	$17.5 - 11 = 6.5$

۱۴ است.

پ) از مقایسه کمینه گروه یک با چارک اول گروه دوم چه نتیجه ای می گیرید؟ با هم برابرند. یعنی ۲۵ در صد دانش آموزان گروه دوم، کمتر از کمترین نمره دانش آموزان گروه یک است.

ت) در کدام گروه گزارش میانگین و انحراف معیار می تواند گمراه کننده باشد؟ گروه دوم، چون داده ها خیلی پراکنده تر است (داده دور افتاده دارد).

ث) در کدام گروه مقدار میانگین و میانه به هم نزدیک ترند؟ گروه اول، نمودار متقارن است و داده دور افتاده نداریم.

ج) نتایج این مطالعه را به چه جامعه ای می توان تعمیم داد؟ به کل دانش آموزان پایه دوازدهم همان مدرسه.

۵. در یک نظرسنجی، از ۱۵ دانش آموز علوم انسانی پایه یازدهم یک مدرسه پرسیده ایم که به نظر آنها چند ساعت آموزشی در ماه برای برگزاری جلسات نقد کتاب یا فیلم مناسب است. داده های گردآوری شده به این شرح است:

۱۶ ۱۰ ۱۲ ۱۰ ۱۲ ۱۳ ۶ ۴ ۰ ۲۰ ۱۸ ۲۲ ۲۰ ۱۴ ۱۲

الف) این داده ها را طوری تغییر دهید که میانگین و انحراف معیار بیشتر شود اما میانه و چارک اول و چارک سوم تغییر نکند.

۵ ۴ ۶ ۱۰ ۱۰ ۱۲ ۱۲ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۴ ۱۸ ۲۰ ۲۰ ۲۲
 Q_1 Q_2 Q_3 $\cancel{50}$

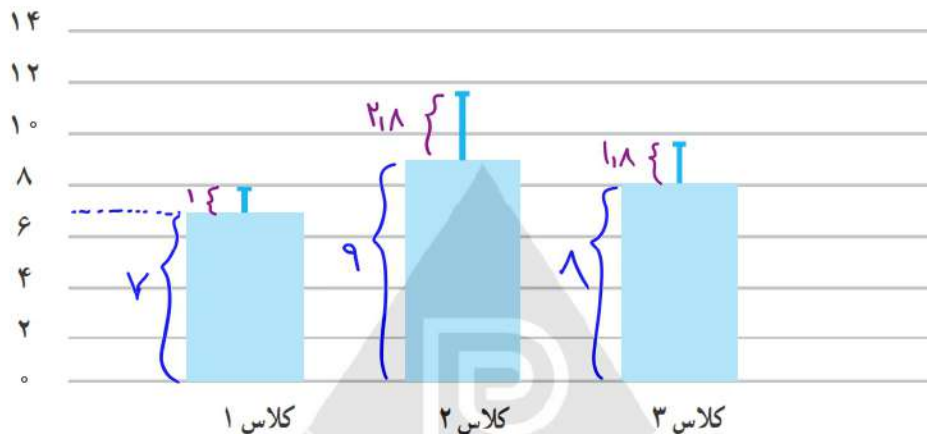
ب) فرض کنید می خواهیم دو نفر دیگر به این نمونه اضافه کنیم. داده های این دو نفر را طوری انتخاب کنید که میانگین و میانه تغییر نکند.

۵ ۴ ۶ ۱۰ ۱۰ ۱۲ ۱۲ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۴ ۱۸ ۲۰ ۲۰ ۲۲
 Q_1 Q_2 Q_3

$$\bar{x} = \frac{0+4+6+10+10+12+12+12+13+14+14+18+20+20+22}{15} = \frac{189}{15} = 12.6$$

$$\begin{array}{r} 12.6 \rightarrow 10.6 \\ 12.6 \rightarrow 14.6 \\ \hline 25.2 \\ \hline x+y=25.2 \\ \hline 12.6 \rightarrow 7.2 \\ 12.6 \rightarrow 17.4 \end{array}$$

۶. با توجه به تأثیر کمیت و کیفیت خواب بر یادگیری، ندا و آوا در مطالعه‌ای با بررسی تمامی دانش‌آموزان سه کلاس پایه دهم، میانگین میزان خواب این دانش‌آموزان را در هفته گذشته برحسب ساعت پرسیدند و ثبت کردند. آنها پس از گردآوری داده‌ها و بررسی درستی آن را به صورت نمودارهای زیر نمایش دادند. (در این نمودارها بلندی مستطیل، نشان‌دهنده میانگین و میله خط نشان‌دهنده انحراف معیار است.)



الف) چه عواملی ممکن است هنگام گردآوری داده‌ها نتایج را از واقعیت دور کند؟ (هنگامی که از دانش‌آموزان راجع به میانگین ساعت خوابشان در هفته گذشته می‌پرسیم آیا آنها می‌توانند به درستی به یاد آورند که هر شب چند ساعت خوابیده‌اند تا بتوانند میانگین را به درستی اعلام کنند؟ برای حل این مشکل چه راهکاری پیشنهاد می‌کنید؟)

۱- ممکن است بعضی از دانش‌آموزان با توجه به بی‌توجهی بدن کمبود خواب در نتایج آنها تأثیر نداشته باشد.

۲- اطلاعات جمع‌آوری شده فقط در مورد کمیت خواب است در مورد کیفیت خواب بحث نشده است.

۳- برخی از دانش‌آموزان ممکن است اطلاعات نادرستی به ما دهند.

۴- ممکن است یادگیری نامناسب برخی دانش‌آموزان به خاطر مشکلات خانوادگی یا بیماری خاص باشد نه کمبود خواب.

ب) نوع (کمی/کیفی) و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای/نسبتی - اسمی/ترتیبی) متغیر مورد بررسی در این مطالعه را مشخص کنید.

کمی نسبتی

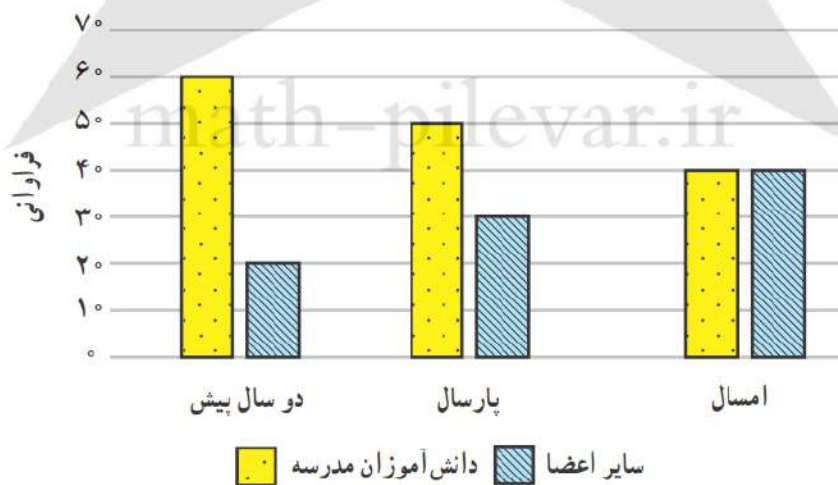
پ) با استفاده از اطلاعات نمودارها، نتایج را به صورت تقریبی در جدول زیر بنویسید.

	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳
میانگین	۷	۹	۸
انحراف معیار	۱	۲۱۸	۱۱۸

ت) چه کسانی می توانند در اجرای بهتر این مطالعه به ما کمک کنند؟ چگونه؟

والدین دانش آموزان خود بهتر از دانش آموزان از میزان ساعت خواب فرزندان خود و تأثیر آن به یادگیری آگاهند.
و کیفیت

۷. مدرسه ای برای ترویج فرهنگ کتابخوانی، از دو سال پیش به غیر از دانش آموزان مدرسه، از خارج از مدرسه نیز عضو می پذیرد. نمودار میله ای زیر نشان دهنده روند تغییرات فراوانی اعضای جدید کتابخانه در دو گروه مذکور است.



الف) سال گذشته چند نفر از خارج مدرسه عضو کتابخانه شده اند؟ ۳۰ نفر

ب) با توجه به روند این تغییرات، پیش بینی می کنید سال آینده چه تعداد از دانش آموزان این مدرسه عضو کتابخانه شوند؟ ۳۰ نفر

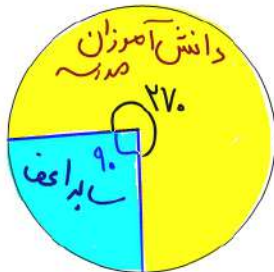
پ) با استفاده از نمودارهای میله‌ای داده شده، برای هر یک از این سه سال یک نمودار دایره‌ای جداگانه رسم کنید.

سال گذشته:

$$\text{کل} = 40 + 20 = 60$$

$$\alpha = \frac{40}{60} \times 360 = 240^\circ$$

$$\alpha = \frac{20}{60} \times 360 = 120^\circ$$

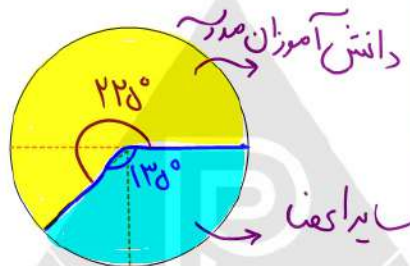


پارسال:

$$\text{کل} = 50 + 30 = 80$$

$$\alpha = \frac{50}{80} \times 360 = 225^\circ$$

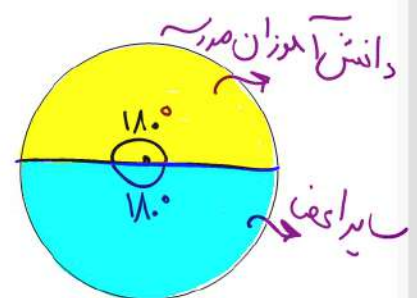
$$\alpha = \frac{30}{80} \times 360 = 135^\circ$$



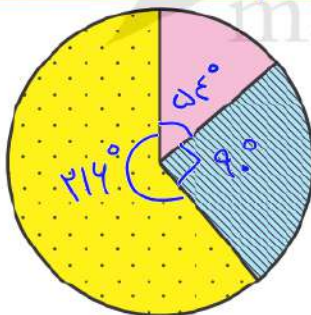
امسال:

$$60 + 40 = 100$$

$$\alpha = \frac{60}{100} \times 360 = 216^\circ$$



ت) به نظر شما چه عواملی موجب این روند تغییرات شده است؟
عواملی مانند مدیریت، تبلیغات، اوقات فراغت، هزینه... تناسبی که برای ایجاد موجود با این اعضا ممکن است آنرا گذار باشد.
ممکن است عملکرد خوب سایر اعضا باعث شده باشد مدرسه تصمیم بگیرد تا هر سال همه سایر اعضا بیشتر نشود.
ممکن است ورود سایر اعضا موجب مزاحمت برای دانش آموزان مدرسه شده و تصمیم به خروج از آنجا گرفته باشد.



کمتر از ۲۰ سال ۵۴° ۲۰ تا ۴۰ سال ۹° ۴۰ تا ۶۰ سال ۲۱۴°

۸. فراوانی بازدیدکنندگان از یک سالن نمایش در گروه‌های سنی مختلف در نمودار دایره‌ای روبه‌رو نمایش داده شده است. (در این نمودار، ۵۴ درجه مربوط به گروه سنی کمتر از ۲۰ سال، ۹ درجه مربوط به گروه سنی ۲۰ تا ۴۰ سال و بقیه مربوط به گروه سنی ۴۰ تا ۶۰ سال است.)

الف) با توجه به این نمودار، چند درصد افراد بازدیدکننده بین ۴۰ تا ۶۰ سال سن دارند؟

$$360 - (54 + 9) = 214$$

$$\frac{100}{360} = \frac{x}{214} \Rightarrow x = \frac{214 \times 100}{360} = 59.44\%$$

- ب) مسئول فروش بلیت این سالن نمایش پس از مشاهده نتایج، آن را غیر واقعی دانست و گفت: «بیشتر بازدیدکنندگان این سالن کمتر از ۴۰ سال دارند.» از موارد زیر کدام می‌توانند نتایج این مطالعه را بدین شکل از واقعیت دور کرده باشد؟ توضیح دهید.
- بسیاری از افراد کمتر از چهل سال تمایلی به پاسخ‌گویی به سؤالات پرسشگر نداشته‌اند.
 - می‌توانند تأثیرگذار باشند. چون با ثبت می‌شود تا تعداد افراد زیر ۴۰ سال کمتر حساب شود.
 - گردآوری داده‌ها در ساعات اداری انجام شده است و بازنشستگان بیشتری در نمونه قرار گرفته‌اند.
 - می‌توانند تأثیرگذار باشند. چون در ساعت اداری بیشتر افراد زیر ۴۰ سال در اداره بودند و نتوانستند به سالن نمایش بروند.
 - هنگام گردآوری داده‌ها، دانش‌آموزان بسیاری از طرف مدرسه برای بازدید حضور داشته‌اند.
 - نمی‌توانند تأثیرگذار باشند. چون اگر تعداد دانش‌آموزان یعنی افراد زیر ۲۰ سال زیاد باشد نتایج به واقعیت نزدیک‌تر می‌شود.

۹. جدول زیر نشان‌دهنده تعداد تصادف خودروها و سرعت حرکت آنها در زمان تصادف است.

سرعت (کیلومتر در ساعت)	۰-۱۰	۱۰-۲۰	۲۰-۳۰	۳۰-۴۰	۴۰-۵۰	۵۰-۶۰	۶۰-۷۰	۷۰-۸۰	۸۰-۹۰	۹۰-۱۰۰	۱۰۰-۱۱۰	۱۱۰-۱۲۰
تعداد خودروهای تصادف کرده	۴۰	۱۳۰	۲۱۰	۲۵۰	۳۵۰	۲۴۰	۱۵۰	۷۰	۴۰	۲۰	۲۰	۱۰

همان‌طور که دیده می‌شود، تعداد تصادف خودروهایی که سرعتشان بیش از ۹۰ کیلومتر در ساعت بوده، کمتر است. پس:

«هرچه سریع‌تر بروید، مطمئن‌تر و امن‌تر است.»

نتیجه‌گیری بالا چه اشکالی دارد؟ چرا این تصور ایجاد شده است؟

۱- تعداد کمتری از رانندگان خودرو ممکن است با سرعت بالای ۹۰ رانندگی کنند که این مورد کاغذ نشده است.

۲- تعداد کم جهت مقایسه بهتر در اختیار نیست.

۳- شرایط، مکان و زمان در اختیار نیست. مثلاً اگر در شهر با سرعت بالای ۹۰ رانندگی کنیم خطر تصادف خیلی زیاد می‌شود و اگر در اتوبان با سرعت ۵۰ رانندگی کنیم خطر تصادف بالای دود.

۴- از مهارت افراد در رانندگی و کیفیت ماشین‌ها اطلاعی نداریم.

فصل ۲ - الگوهای خطی

حل تمرینات صفحه ۵۷ کتاب درسی

درس ۱: مدل سازی و دنباله

تمرین

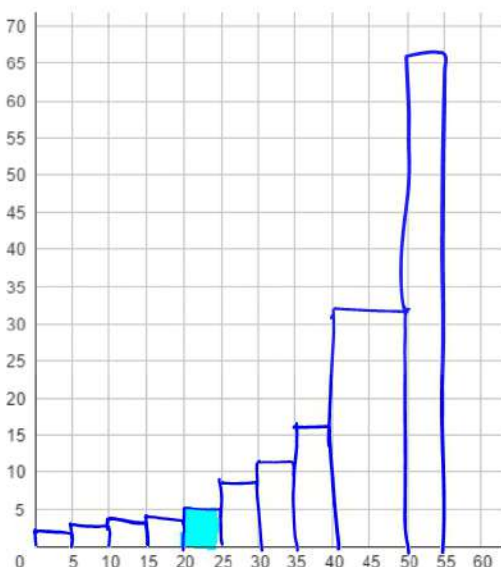
۱. برای محاسبه قبض آب^۱ (آب بها) هر واحد مسکونی در شهر تهران ابتدا میانگین مصرف هر واحد مسکونی محاسبه می شود و بر اساس آن «طبقه مصرفی» واحد مسکونی با توجه به «جدول ۱» تعیین می گردد. آنگاه به کمک رابطه زیر، آب بها محاسبه می شود:

هزینه هر متر مکعب با توجه به طبقه مصرف $\times$ میانگین مصرف = آب بها^۱

جدول ۱. محاسبه آب بها بر اساس طبقات مصرف در استان تهران

هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)	هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)
۸/۴۹۶	$25 \leq x < 30$	۱/۴۱۹	$0 \leq x < 5$
۱۱/۵۸۰	$30 \leq x < 35$	۲/۱۲۳	$5 \leq x < 10$
۱۵/۴۴۴	$35 \leq x < 40$	۲/۸۲۷	$10 \leq x < 15$
۳۳/۴۶۲	$40 \leq x < 50$	۳/۷۰۳	$15 \leq x < 20$
۶۶/۹۲۴	$x \geq 50$	۵/۴۰۰	$20 \leq x < 25$

الف) نمودار «طبقه مصرف - آب بها» جدول بالا را رسم کنید و ضابطه و دامنه و برد تابع را به دست آورید.



$$f(x) = \begin{cases} 1,419 & 0 \leq x < 5 \\ 2,123 & 5 \leq x < 10 \\ 2,827 & 10 \leq x < 15 \\ 3,703 & 15 \leq x < 20 \\ 5,400 & 20 \leq x < 25 \\ 8,496 & 25 \leq x < 30 \\ 11,580 & 30 \leq x < 35 \\ 15,444 & 35 \leq x < 40 \\ 33,462 & 40 \leq x < 50 \\ 66,924 & x \geq 50 \end{cases}$$

$$D = [0, +\infty)$$

$$R = [0, +\infty)$$

ب) اگر میانگین مصرف یک واحد مسکونی^۲ در تهران در یک ماه $20/49 m^3$ باشد، سطح زیر منحنی نمودار چه تابعی، آب بها را

مشخص می کند؟

$$\text{میزان آب بها} = 20.49 \times 5,400 = 110,164.2$$

سطح زیر منحنی پنجم نمودار، میزان آب بها را مشخص می کند.

۲. اگر تابع f مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از آنها را مشخص کنید.

☐ N ☒ R

الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین تا ارتفاع ۱۵ کیلومتر

☐ N ☒ R

ب) میزان استفاده دانش آموزان یک مدرسه از اینترنت در هر ساعت

☐ N ☒ R

ج) حجم مکعبی به ضلع x

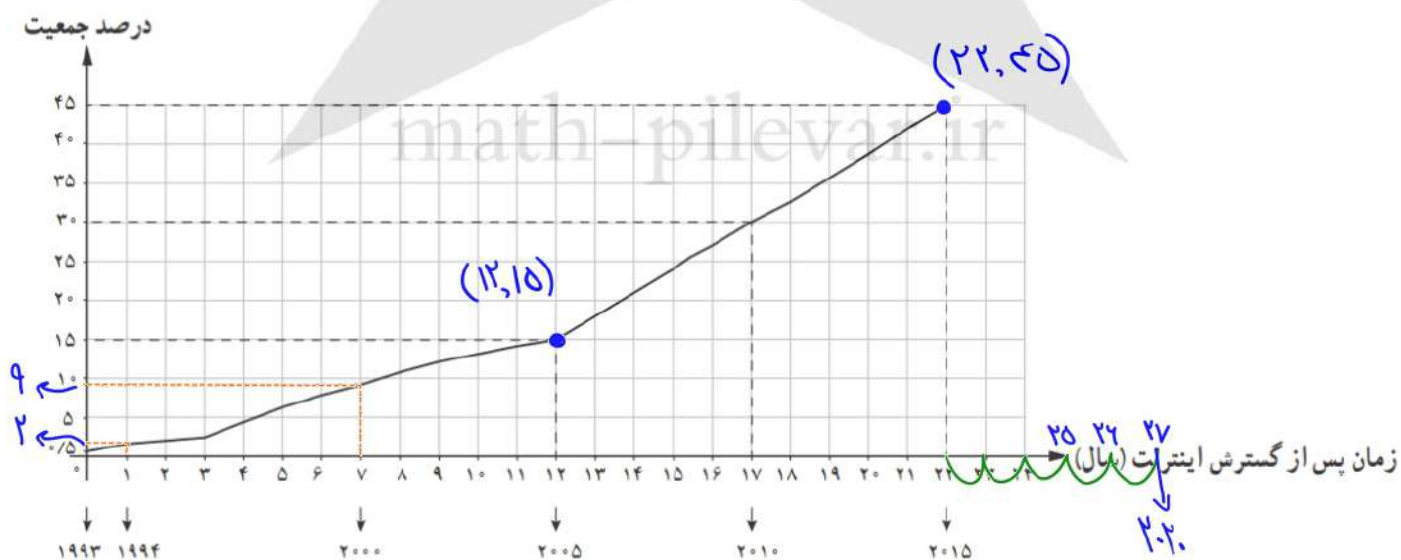
☐ N ☒ R

د) تغییرات سطح دریاچه ارومیه در بیست سال اخیر

☐ N ☒ R

ه) میزان مصرف ماهیانه آب در یک واحد مسکونی

۳. نمودار زیر درصد جمعیتی از سراسر جهان را نشان می دهد که از ۱۹۹۳ که سال گسترش اینترنت در دنیاست، از اینترنت استفاده کرده اند^۱:



الف) اگر $f(n)$ درصد استفاده کنندگان از اینترنت در جهان، n سال پس از گسترش اینترنت باشد، به کمک نمودار داده شده مقادیر

$$f(1) = 2$$

$$f(7) = 9$$

$f(7)$ و $f(1)$ را مشخص کنید و معنای آن را توضیح دهید.

$f(1) = 2$ یعنی ۱ سال پس از گسترش اینترنت، ۲ درصد جمعیت جهان از اینترنت استفاده کرده اند.

$f(7) = 9$ یعنی ۷ سال پس از گسترش اینترنت، ۹ درصد جمعیت جهان از اینترنت استفاده کرده اند.

ب) با توجه به مدل خطی استفاده کنندگان از اینترنت از سال ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۵، با به دست آوردن ضابطه تابع خطی، در سال ۲۰۲۰ درصد استفاده کنندگان از اینترنت در جهان چقدر خواهد بود؟

$$\begin{matrix} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ \uparrow \\ m \end{matrix} \rightarrow m = \frac{9 - 2}{22 - 12} = \frac{7}{10} = 0.7$$

✓ $(12, 2)$
 $(22, 9)$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = 0.7(x - 12) \Rightarrow y = 0.7x - 8.4 + 2 \Rightarrow y = 0.7x - 6.4$$

$$x = 27 \Rightarrow y = 0.7 \times 27 - 6.4 = 18.9 - 6.4 = 12.5$$

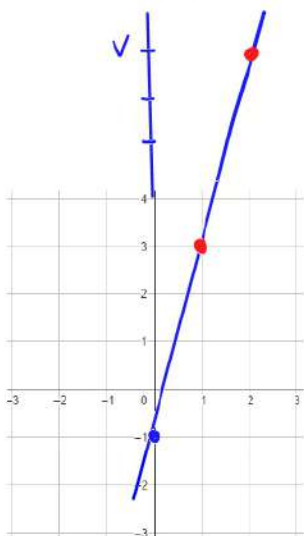
سال ۲۰۲۰

۴. اگر جملات یک دنباله از قانون تابع خطی $y = 4x - 1$ پیروی کنند، با توجه به دامنه دنباله:

الف) نمودار تابع را رسم کنید و نمودار دنباله را روی نمودار تابع مشخص کنید.

ب) نمایش تابعی دنباله و نیز رابطه بازگشتی دنباله را بنویسید. شیب خط چه ارتباطی با رابطه بازگشتی دنباله دارد؟

شیب خط همان فاصله یا اختلاف مشترک جملات است.



x	1	2	3
y	3	7	11

$$\begin{aligned} 4 \times 1 - 1 &= 3 \\ 4 \times 2 - 1 &= 7 \\ 4 \times 3 - 1 &= 11 \end{aligned}$$

$$x = 1 \Rightarrow 3$$

$$x = 2 \Rightarrow 7$$

$$x = 3 \Rightarrow 11$$

$$3, 7, 11, \dots$$

↑ +4 ↑ +4

$$a_{n+1} = a_n + 4$$

$$a_n = 4n - 1$$

۵. با توجه به دنباله های $a_n = 3^n$ ، $b_n = (-\frac{1}{2})^{n+1}$ ، $c_n = \frac{1}{3n-1}$ ، $d_n = n^2 - 1$ ، حاصل عبارت های خواسته شده را به دست آورید.

الف) $a_4 + b_1 = \frac{9 \times 4}{1 \times 4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{36+1}{4} = \frac{37}{4}$

$a_2 = 3^2 = 9$ ، $b_1 = (-\frac{1}{2})^{1+1} = (-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

ب) $c_2 - d_1 = \frac{1}{3 \times 2 - 1} - 0 = \frac{1}{5}$

$c_2 = \frac{1}{3 \times 2 - 1} = \frac{1}{5}$ ، $d_1 = 1^2 - 1 = 0$

ج) $b_4 + d_2 = -\frac{1}{32} + \frac{3 \times 2}{1 \times 32} = \frac{-1+6}{32} = \frac{5}{32}$ | $b_4 = (-\frac{1}{2})^{4+1} = (-\frac{1}{2})^5 = -\frac{1}{32}$
 $d_2 = 2^2 - 1 = 3$

۶. جمله پنجم دنباله های بازگشتی زیر را مشخص کنید.

الف) $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ ، $a_1 = -2$

-2 ، $-\frac{2}{3}$ ، $-\frac{2}{9}$ ، $-\frac{2}{27}$ ، $-\frac{2}{81}$

ب) $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ ، $a_1 = 1$

$a_1 = 1$

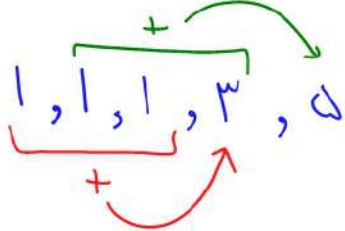
$a_2 = \frac{1}{1+a_1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$a_3 = \frac{1}{1+a_2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

$a_4 = \frac{1}{1+a_3} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$

$a_5 = \frac{1}{1+a_4} = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8}$

ج) $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$



د) $a_{n+1} = a_n + (-1)^n$, $a_1 = 1$

$n=1 \Rightarrow a_2 = a_1 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$

$n=4 \Rightarrow a_5 = a_4 + (-1)^4 = 0 + 1 = 1$

$n=2 \Rightarrow a_3 = a_2 + (-1)^2 = 0 + 1 = 1$

$1, 0, 1, 0, 1$

$n=3 \Rightarrow a_4 = a_3 + (-1)^3 = 1 - 1 = 0$

۷. جدول زیر را کامل کنید.

جملات دنباله	رابطه بازگشتی	ضابطه دنباله	دنباله دو ضابطه ای
5, 8, 11, 14, 17, ... $+3, +3, +3, +3$	$a_{n+1} = a_n + 3$	$a_n = 3n + 2$	
① 2, 3, 4, 5, 6 4, 1, 4, 1, 4, 1, ... $-3, +3, -3, +3, -3$	$a_{n+1} = a_n + 3 \times (-1)^n$		$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ زوج} \\ 4 & n \text{ فرد} \end{cases}$
1, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{4}$, 5, $\frac{1}{6}$, ...			$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ زوج} \\ n & n \text{ فرد} \end{cases}$
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$		$a_n = \frac{n}{n+1}$	

۸. شش جمله اول دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{زوج } n \\ 3a_n + 1 & \text{فرد } n \end{cases}$ را برای هر کدام از حالت های زیر بنویسید.

الف) $a_1 = 11$

$$\text{فرد } n=1 \Rightarrow a_2 = 3a_1 + 1 = 3 \times 11 + 1 = 34$$

$$\text{زوج } n=2 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2} \times 34 = 17$$

$$\text{زوج } n=2 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2} \times 34 = 17$$

$$\text{فرد } n=3 \Rightarrow a_4 = 3a_3 + 1 = 3 \times 17 + 1 = 52$$

$$\text{فرد } n=3 \Rightarrow a_4 = 3a_3 + 1 = 3 \times 17 + 1 = 52$$

ب) $a_1 = 25$

$$\text{فرد } n=1 \Rightarrow a_2 = 3a_1 + 1 = 3 \times 25 + 1 = 76$$

$$\text{زوج } n=2 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2} \times 76 = 38$$

$$\text{زوج } n=2 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2} \times 76 = 38$$

$$\text{فرد } n=3 \Rightarrow a_4 = 3a_3 + 1 = 3 \times 38 + 1 = 115$$

$$\text{فرد } n=3 \Rightarrow a_4 = 3a_3 + 1 = 3 \times 38 + 1 = 115$$

۹. نمودار دنباله های زیر را برای $n \leq 5$ رسم کنید.

الف) $a_n = -\frac{1}{2}n + 3$

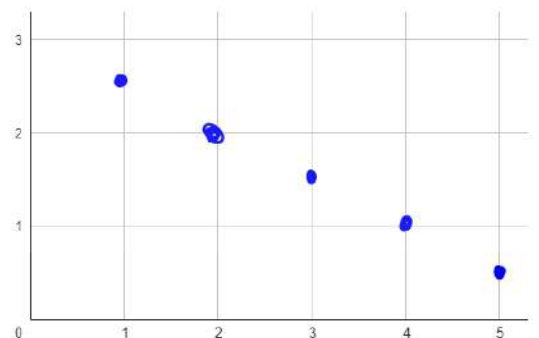
$$n=1 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2} \times 1 + 3 = -\frac{1}{2} + \frac{6}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{2} \times 2 + 3 = -1 + 3 = 2$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{2} \times 3 + 3 = -\frac{3}{2} + \frac{6}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$n=4 \Rightarrow a_4 = -\frac{1}{2} \times 4 + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$n=5 \Rightarrow a_5 = -\frac{1}{2} \times 5 + 3 = -\frac{5}{2} + \frac{6}{2} = \frac{1}{2}$$



ب) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

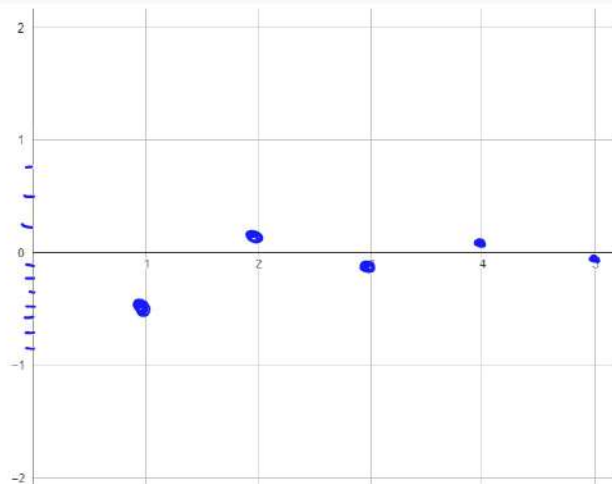
$a_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2}$

$a_4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

$a_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

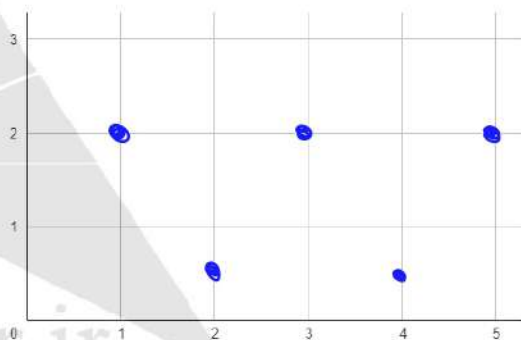
$a_5 = \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$

$a_3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$



ج) $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ $a_1 = 2$

$2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2$



د) $a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ زوج} \\ \frac{1}{n} & n \text{ فرد} \end{cases}$

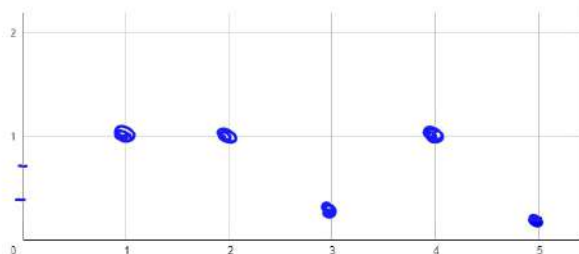
فرد $n=1 \rightarrow a_1=1$

زوج $n=2 \rightarrow a_2=1$

فرد $n=3 \rightarrow a_3=\frac{1}{3}$

زوج $n=4 \rightarrow a_4=1$

فرد $n=5 \rightarrow a_5=\frac{1}{5}$



۱۰. محاسبه جذر اعداد در تمدن بابل - با نوشتن جملات دنباله بازگشتی زیر می توانیم به طرز شگفت انگیزی به جذر عدد k یعنی $\sqrt{k}$ نزدیک شویم.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{k}{a_n} \right) \quad a_1 = k$$

این روش منسوب به تمدن بابل (واقع در شرق ایران و در بین النهرین) است.

به کمک دنباله بازگشتی بالا، اگر a_3 را تقریبی برای $\sqrt{k}$ در نظر بگیریم، حاصل اعداد زیر را مشخص کنید.

الف) $\sqrt{2}$

ب) $\sqrt{3}$

ج) $\sqrt{5}$

آیا این روش مزیتی بر استفاده از ماشین حساب دارد؟ چرا؟

الف: $k=2 \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) \quad a_1 = 2$

$$n=1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{2}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{2} \right) = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

$$n=2 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{2}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{17}{6} = \frac{17}{12} \approx 1.416$$

ب: $k=3 \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right) \quad a_1 = 3$

$$n=1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{3}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{3}{3} \right) = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

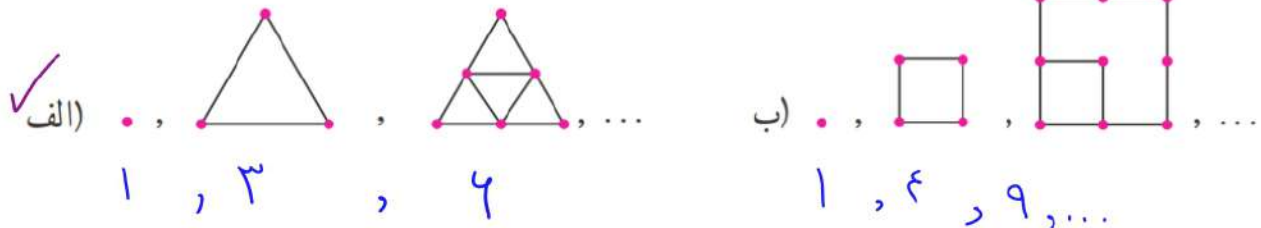
$$n=2 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{3}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{2} \right) = \frac{7}{4} = 1.75$$

ج: $k=5 \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{5}{a_n} \right) \quad a_1 = 5$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{5}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{5}{5} \right) = \frac{1}{2} (5+1) = 3$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{5}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{5}{3} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{14}{3} = \frac{7}{3} \approx 2.33$$

۱۱. جملات دنباله بازگشتی $a_{n+1} = a_n + (n+1)$ ، $a_1 = 1$ رأس کدام یک از الگوهای زیر را مشخص می کنند؟



$$a_1 = 1$$

$$n=1 \Rightarrow a_2 = a_1 + (1+1) = 1+2 = 3$$

$$n=2 \Rightarrow a_3 = a_2 + (2+1) = 3+3 = 6$$

۱۲. مطابق گزارش سازمان محیط زیست، به دلیل ورود پَس مانده های صنعتی کارخانه ها به یک دریاچه، ۲۵٪ تن فاضلاب صنعتی به این دریاچه وارد شده است. محیط زیست دریاچه سالیانه ۱۰٪ فاضلاب صنعتی را به صورت طبیعی خنثی و بی اثر می کند. سازمان محیط زیست با وضع قوانین جدید میزان ورودی فاضلاب صنعتی به دریاچه را به ۱۵٪ تن در سال کاهش داده است.

اگر $P_1 = 250$ میزان آلودگی فعلی دریاچه باشد، با نوشتن یک رابطه بازگشتی، میزان مواد آلوده صنعتی را بعد از دو سال و پنج سال محاسبه کنید. اگر هدرصد فاضلاب صنعتی خنثی شود، ۹۰٪ هدرصد آن باقی می ماند.

$$\frac{100}{100} - \frac{10}{100} = \frac{90}{100}$$

$$P_{n+1} = \frac{90}{100} P_n + 15, \quad P_1 = 250$$

$$n=1 \Rightarrow P_2 = \frac{90}{100} P_1 + 15 = \frac{9}{10} \times 250 + 15 = 240$$

$$n=2 \Rightarrow P_3 = \frac{90}{100} P_2 + 15 = \frac{9}{10} \times 240 + 15 = 231$$

$$n=3 \Rightarrow P_4 = \frac{90}{100} P_3 + 15 = \frac{9}{10} \times 231 + 15 = 222.9$$

$$n=4 \Rightarrow P_5 = \frac{90}{100} P_4 + 15 = \frac{9}{10} \times 222.9 + 15 = 215.61$$

$$n=5 \Rightarrow P_6 = \frac{90}{100} P_5 + 15 = \frac{9}{10} \times 215.61 + 15 = 209.049$$

بعد از دو سال

بعد از ۵ سال

حل تمرینات صفحه ۷۱ کتاب درسی

درس ۲: دنباله های حسابی

تمرین

۱. با نوشتن جملات رابطه های بازگشتی، مشخص کنید کدام یک دنباله حسابی است.

الف) $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ $a_1 = 2$

ب) $a_{n+1} = a_n + 5$ $a_1 = -1$

$2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \dots$

دنباله حسابی نیست

$-1, 4, 9, \dots$
 $+5, +5$

دنباله حسابی است

ج) $a_{n+1} = 5a_n + 1$ $a_1 = -1$

$a_1 = -1$

$a_2 = 5a_1 + 1 = 5(-1) + 1 = -4$

$a_3 = 5a_2 + 1 = 5(-4) + 1 = -19$

$-1, -4, -19, \dots$ دنباله حسابی نیست

د) $a_{n+1} - a_n = n$

دنباله حسابی نیست

$n=1 \Rightarrow a_2 - a_1 = 1$

$n=2 \Rightarrow a_3 - a_2 = 2$

$n=3 \Rightarrow a_4 - a_3 = 3$

۲. در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۵- و اختلاف مشترک برابر ۸ است. کدام جمله دنباله برابر ۵۵۵ است؟

$d = 8$

$a = -5$

ردش دوم:

$a_n = a + (n-1)d$ *ردش اول:*

$555 = -5 + (n-1) \times 8$

$555 + 5 = 8n - 8$

$560 + 8 = 8n$

$568 = 8n \Rightarrow n = \frac{568}{8} = 71$

$-5, 3, 11, 19, \dots, 555$
 $+8, +8, +8$

$n = \frac{\text{جمله اول} - \text{جمله آخر}}{\text{فاصله}} + 1 = \frac{555 - (-5)}{8} + 1 = \frac{560}{8} + 1 = 71$

۳. یازدهمین جمله یک دنباله حسابی ۵۲ و جمله نوزدهم آن ۹۲ است. جمله سی‌ام این دنباله را مشخص کنید.

$$a_{11} = 52$$

$$a_{19} = 92$$

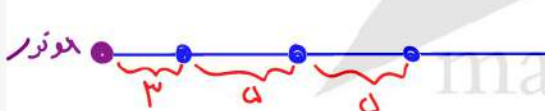
$$d = \frac{a_{19} - a_{11}}{19 - 11} = \frac{92 - 52}{8} = \frac{40}{8} = 5$$

$$\begin{cases} a_{11} = 52 \\ a + 10d = 52 \\ a + 10 \times 5 = 52 \\ a = 52 - 50 = 2 \end{cases}$$

$$a_{30} = a + 29d = 2 + 29 \times 5 = 2 + 145 = 147$$



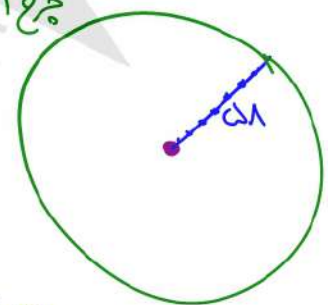
۴. برای کاهش مصرف آب در کشاورزی یک منطقه، از آبیاری قطره‌ای استفاده می‌شود؛ به این صورت که یک میله که در آن سوراخ‌هایی برای بخش آب تعبیه شده است، به کمک چرخ‌هایی (مطابق شکل مقابل) حول یک محور می‌چرخد. اگر فاصله اولین چرخ تا موتور ۳ متر و بعد از آن، فاصله هر چرخ تا چرخ بعدی ۵ متر باشد و در کل، ۱۲ چرخ روی میله قرار داشته باشد، با این وسیله چه مساحتی آبیاری می‌شود؟ (آخرین چرخ دقیقاً در انتهای میله قرار دارد.)



$$a = 3$$

$$d = 5$$

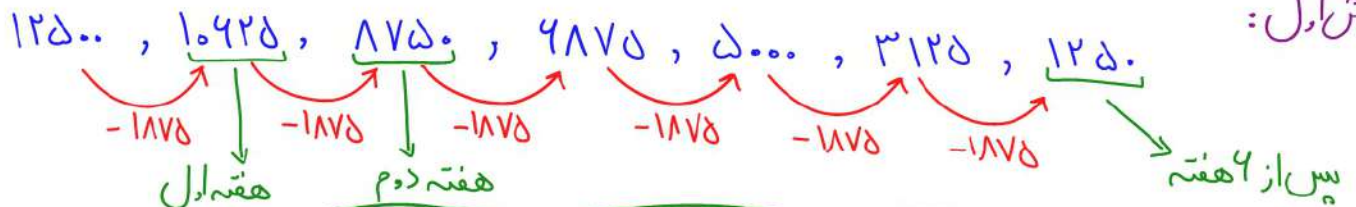
$$a_{12} = a + 11d = 3 + 11 \times 5 = 3 + 55 = 58$$



$$S = \pi r^2 = 3.14 \times 58^2 = 3.14 \times 3364 = 10562.96$$

۵. در یک کارخانه سنگبری برای صیقل دادن سنگها از یک صفحه به وزن ۱۲۵۰۰ گرم استفاده می شود. اگر با توجه به مصرف هفتگی به طور میانگین ۱۸۷۵ گرم از وزن صفحه کم شود، پس از شش هفته استفاده مداوم وزن صفحه چقدر است؟

روش اول:



$$a_1 = 12500 \quad d = -1875$$

روش دوم: پس از ۶ هفته یعنی ۶ تا ۱۸۷۵ کم می شود (۶d)

پس باید $a_7 = a + 6d$ را حساب کنیم.

$$a_7 = a + 6d = 12500 + 6(-1875) = 12500 - 11250 = 1250$$

۶. میان دو عدد a و b ، n عدد را به گونه ای قرار می دهیم که جملات دنباله از a تا b یک دنباله حسابی تشکیل دهند. ثابت کنید

اختلاف مشترک جملات دنباله از رابطه $d = \frac{b-a}{n+1}$ به دست می آید. (توجه داشته باشید که تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است.)

$$a, \dots, b \Rightarrow \text{جمله } n+2$$

$$a_{n+2} = b$$

$$a_n = a + (n-1)d \Rightarrow a_{n+2} = a + (n+2-1)d \Rightarrow b = a + (n+1)d \Rightarrow b-a = (n+1)d$$

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

۷. براساس رابطه به دست آمده در مسئله ۶، سه عدد را به گونه ای میان اعداد ۱۰ و ۱۸ قرار دهید که یک دنباله حسابی تشکیل دهند.

روش دوم:

$$10, 12, 14, 16, 18$$

$$10, 12, 14, 16, 18$$

$$d = \frac{18-10}{4+1} = \frac{8}{5} = 1.6$$

$$d = \frac{a_5 - a_1}{5-1} = \frac{18-10}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

۸. مجموع عددهای زیر را به دست آورید.

۴۰۱ و و ۹ و ۵ و ۱ (الف)

روش اول:

$$n = \frac{\text{جمله اول} - \text{جمله آخر}}{\text{فاصله}} + 1 = \frac{۴۰۱ - ۱}{۴} + 1 = ۱۰۱$$

$$S_{۱۰۱} = \frac{۱۰۱}{۲} [1 + ۴۰۱] = \frac{۱۰۱}{۲} \times \frac{۴۰۲}{۱} = ۲۰۳۰۱$$

$$\text{روش دوم: } S_{۱۰۱} = \frac{۱۰۱}{۲} [2 \times 1 + (101 - 1) \times 4] = \frac{۱۰۱}{۲} [2 + ۴۰۰] = \frac{۱۰۱}{۲} \times \frac{۴۰۲}{۱} = ۲۰۳۰۱$$

۱۳ و و ۸۱ و ۸۵ و ۸۹ (ب)

$$\text{روش اول: } n = \frac{\text{جمله اول} - \text{جمله آخر}}{\text{فاصله}} + 1 = \frac{۱۳ - ۸۹}{-۴} + 1 = \frac{-۷۶}{-۴} + 1 = ۱۹ + 1 = ۲۰$$

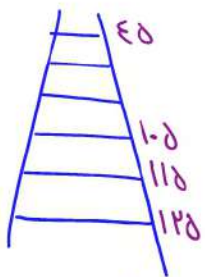
$$S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲} (a_1 + a_{۲۰}) = ۱۰ (۸۹ + ۱۳) = ۱۰ \times ۱۰۲ = ۱۰۲۰$$

$$\begin{aligned} \text{روش دوم: } S_{۲۰} &= \frac{۲۰}{۲} [2a + (20 - 1)d] = ۱۰ [2 \times ۸۹ + ۱۹ \times (-۴)] \\ &= ۱۰ [۱۷۸ - ۷۶] = ۱۰ \times ۱۰۲ = ۱۰۲۰ \end{aligned}$$



۹. باغداران برای چیدن میوه‌ها از نردبان‌هایی استفاده می‌کنند که بخشی از آنها که روی زمین قرار می‌گیرد، برای تعادل بیشتر، عرض بیشتری دارد و انتهای نردبان که به درخت تکیه داده می‌شود، برای جابه‌جایی آسان‌تر و تکیه‌گاه بهتر، عرض کمتری دارد.

اگر عرض نخستین پله این نردبان ۱۲۵ سانتی‌متر و عرض آخرین پله آن ۴۵ سانتی‌متر در نظر گرفته شود و هر پله ۱۰ سانتی‌متر کوتاه‌تر از پله پیشین باشد، این نردبان چند پله خواهد داشت؟ برای ساخت پله‌ها به چند متر چوب احتیاج خواهیم داشت؟



۱۲۵, ۱۱۵, ۱۰۵, ۹۵, ۸۵, ۷۵, ۶۵, ۵۵, ۴۵

روش اول:

$$n = \frac{\text{جمله اول} - \text{جمله آخر}}{\text{فاصله}} + 1 = \frac{125 - 45}{-10} + 1 = \frac{-80}{-10} + 1 = 8 + 1 = 9$$

$$a_n = a + (n-1)d \Rightarrow 45 = 125 + (n-1) \times (-10)$$

روش دوم:

$$S_9 = \frac{n}{2} (a_1 + a_9) = \frac{9}{2} (125 + 45) \quad 45 - 125 = -10n + 10$$

$$= \frac{9}{2} \times 170 = 765 \text{ متر چوب} \quad -10 - 10 = -10n \Rightarrow -90 = -10n \Rightarrow n = \frac{-90}{-10} = 9$$

۱۰. ارزش امروزی قنات زارچ، طولانی‌ترین قنات ایران - عمق مادرچاه قنات زارچ ۸۴/۶ متر است که از آن سه شاخه قنات خارج شده است. اگر تعداد میله‌های هر سه شاخه قنات برابر و عمق پنجاه و ششمین چاه (میله ۱۵۵م) ۷۸ متر باشد، با فرض اینکه شیب زمین ثابت و فاصله میان هر دو میله یکسان باشد و عمق آخرین چاه قنات (میله) ۱۲۰ سانتی‌متر در نظر گرفته شود:

$$12m$$

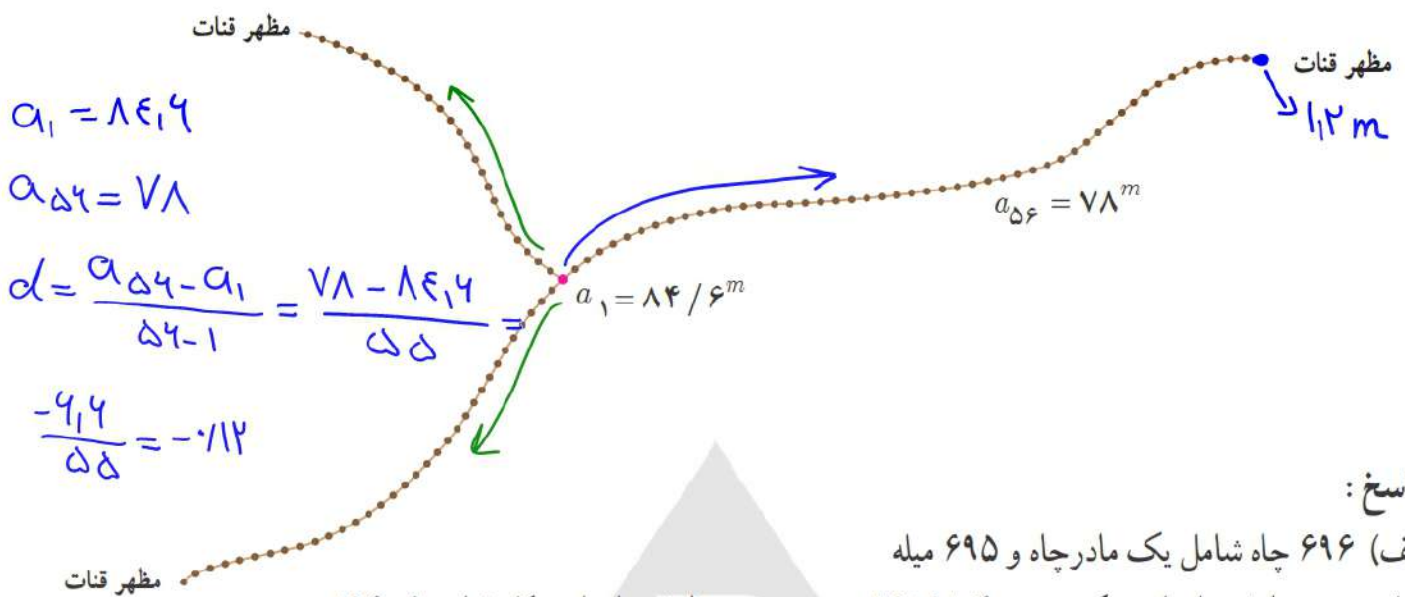
الف) هر شاخه قنات دارای چند میله است؟

ب) مجموع طول چاه‌های حفر شده در این مسیر چقدر است؟ مجموع طول چاه‌های حفر شده در کل قنات چقدر است؟

ج) اگر میانگین هزینه حفر یک متر چاه (شامل حفر، مصالح و دیوارچینی) ۲۵۰ هزار تومان باشد، هزینه حفر چاه‌های قنات در حال حاضر چقدر است؟

$$71000 \text{ متر}$$

د) طبق محاسبات مهندسی، در قنات زارچ در مجموع طول کل کانال قنات ۷۱ کیلومتر است. با توجه به میانگین هزینه ۳۵۰ هزار تومان برای حفر کانال قنات، ارزش کل قنات زارچ چقدر است؟ (راهنمایی: a_n را عمق چاه n ام تا کانال قنات و a_1 را عمق مادرچاه در نظر بگیرید.)



الف

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$1.2 = 184.4 + (n-1) \times (-0.17)$$

$$1.2 - 184.4 = -0.17n + 0.17$$

$$-183.2 - 0.17 = -0.17n \Rightarrow n = \frac{-183.37}{-0.17} = 1078.64 \approx 1079 \text{ چاه}$$

$$\therefore 184.4, \dots, 1.2 \quad n=1079$$

$$S_{1079} = \frac{n}{2} (a_1 + a_{1079}) = \frac{1079}{2} (184.4 + 1.2) = 98511.4$$

کل مسیر

$$98511.4 \times 3 - 2 \times 184.4 = 29851.4$$

کل مسیر

$$\therefore 29851.4 \times 250000 = 7,462,850,000$$

$$\begin{aligned} & 71000 \times 350000 = 24,850,000,000 \quad \text{هزینه حفرتانال} \\ & 29851.4 \times 250000 = 7,462,850,000 \quad \text{هزینه حفرتانال} \end{aligned} \quad \oplus \rightarrow 24,850,000,000 + 7,462,850,000 = 32,312,850,000$$

هزینه حفرتانال قنات: ۴۷۲۰۱۵۰۰۰

فصل ۳ - الگوهای غیر خطی

حل تمرینات صفحه ۸۳ کتاب درسی

درس ۱: دنباله هندسی

تمرین

۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آنها یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهد.

$$۱) a_{n+1} = (a_n)^2 \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$$

توان ۲

دنباله هندسی نیست

$$\checkmark ۲) a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

توان ۲

دنباله هندسی است

$$۳) a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \quad a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{1+a_1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{1+a_2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

دنباله هندسی نیست

$$۴) a_{n+1} = 2a_n \quad a_1 = 1$$

$$1, 2, 4, 8, \dots$$

توان ۲

دنباله هندسی است

۲. با توجه به مفهوم دنباله هندسی و نسبت مشترک جملات دنباله هندسی ثابت کنید هرگاه a و b و c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه $a \times c = b^2$. (b را واسطه هندسی میان a و c می‌نامند.)

$$a, b, c$$

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{b}{a} \\ r &= \frac{c}{b} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = c \times a$$

۳. اگر $x+3$ و $x+2$ و x سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید.

$$(x+2)^2 = x(x+3)$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 3x$$

$$4x - 3x = -4$$

$$x = -4$$

$$\begin{aligned} (x+2)^2 &= (x+2)(x+2) \\ x^2 + 2x + 2x + 4 \\ x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

۴. سرطان از تکثیر بیش از حد سلول‌ها در بدن ایجاد می‌شود. در فردی که به سرطان سینه مبتلاست، از روش‌های مختلفی از جمله شیمی درمانی برای از بین بردن سلول‌های سرطانی استفاده می‌شود. در این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجویز می‌شود و هر بار درصدی از سلول‌های سرطانی از بین می‌رود.

الف) اگر داروی شیمی درمانی هر بار ۴٪ سلول‌های سرطانی فردی را از بین ببرد و اگر توده سرطانی او در ابتدا 10^{12} سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می‌ماند؟

$$\text{اگر } 4\% \text{ از بین برود } 96\% \text{ باقی می‌ماند. } \frac{100}{100} - \frac{4}{100} = \frac{96}{100} = \frac{24}{25} = 0.96$$

$$\begin{aligned} 10^{12} &\xrightarrow{\times 0.96} 10^{12} \times 0.96 \xrightarrow{\times 0.96} 10^{12} \times (0.96)^2 \xrightarrow{\times 0.96} 10^{12} \times (0.96)^3 \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ &\text{درین نوبت درمانی} \quad \text{دومین نوبت درمانی} \quad \text{سومین نوبت درمانی} \end{aligned}$$

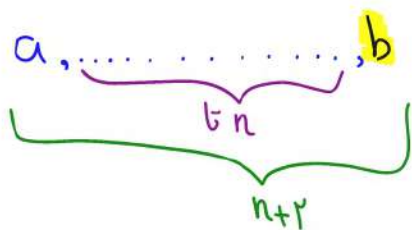
ب) فرض کنید پس از اولین شیمی درمانی، رشد توده سرطانی متوقف شده است. برای اینکه این شخص به طور کامل درمان شود، ابتدا باید تعداد سلول‌های سرطانی‌اش به کمک شیمی درمانی کمتر از $10^6 \times 7$ سلول شود و سپس با کوچک شدن توده سرطانی به کمک جراحی، باقی‌مانده سلول‌های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی درمانی شود؟

$$10^{12} \times (0.96)^n < 7 \times 10^6$$

$$10^4 \times 10^8 \times (0.96)^n < 7 \times 10^4$$

$$10^4 \times (0.96)^n < 7 \Rightarrow n \geq 13$$

۵. میان دو عدد a و b عدد n را طوری قرار می دهیم که جملات دنباله شروع از a و ختم به b یک دنباله هندسی تشکیل دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله های هندسی از رابطه $r^{n+1} = \frac{b}{a}$ به دست می آید. (راهنمایی: تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است).



$$\begin{aligned} a_{n+2} &= ar^{n+1} \Rightarrow a_{n+2} = ar^{n+1} \\ a_{n+2} &= b \end{aligned} \Rightarrow ar^{n+1} = b \Rightarrow r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

۶. جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جمله هفتم این دنباله هندسی را به دست آورید.

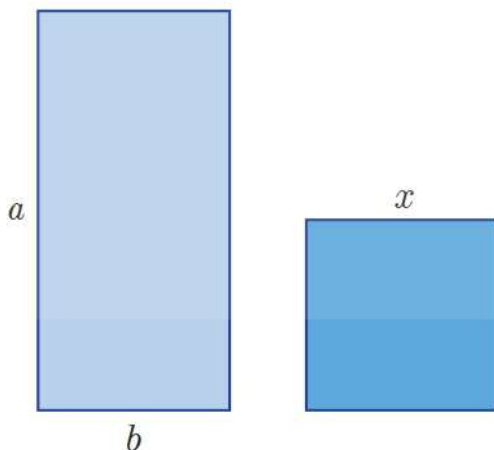
$$\begin{aligned} a_3 &= 27 \\ a_5 &= 243 \end{aligned} \Rightarrow r^{5-3} = \frac{a_5}{a_3} \Rightarrow r^2 = \frac{243}{27} = 9 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = \pm 3$$

$$a_7 = ar^6 = 3 \times (\pm 3)^6 = 3^7$$

روش اول: $\frac{27}{3} = 9$ $\frac{243}{9} = 27$ $\frac{243}{27} = 9$ $\frac{243}{9} = 27$ $\frac{243}{27} = 9$ $\frac{243}{9} = 27$

روش دوم: $a_3 = 27 \Rightarrow ar^2 = 27$
 $a(\pm 3)^2 = 27 \Rightarrow 9a = 27 \Rightarrow a = \frac{27}{9} = 3$

۷. مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است. اگر مربعی به ضلع x هم مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله های زیر تشکیل یک دنباله هندسی می دهند؟



مساحت مربع = مساحت مستطیل

$$a \times b = x^2$$

$$a, x, b \text{ یا } b, x, a$$

الف) x و b و a

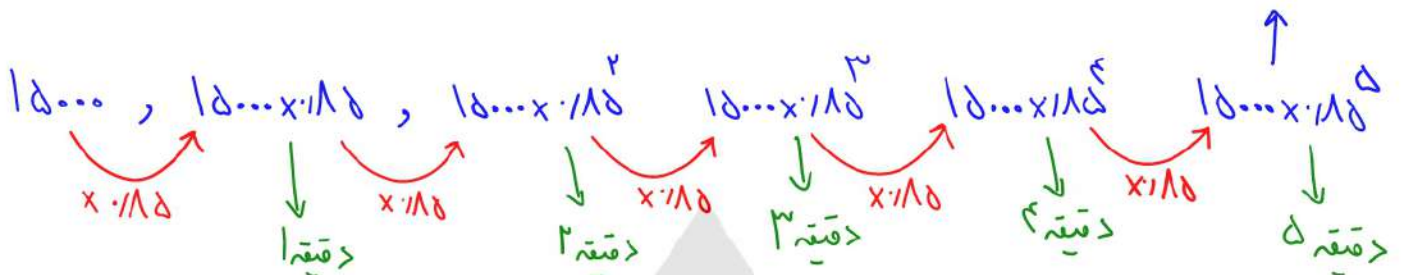
ب) b و x و a ✓

پ) x و a و b

۸. یک شهاب سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جو زمین، در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می‌رود. پس از گذشت پنج دقیقه از ورود این شهاب سنگ به جو زمین، چقدر از وزن آن باقی می‌ماند؟

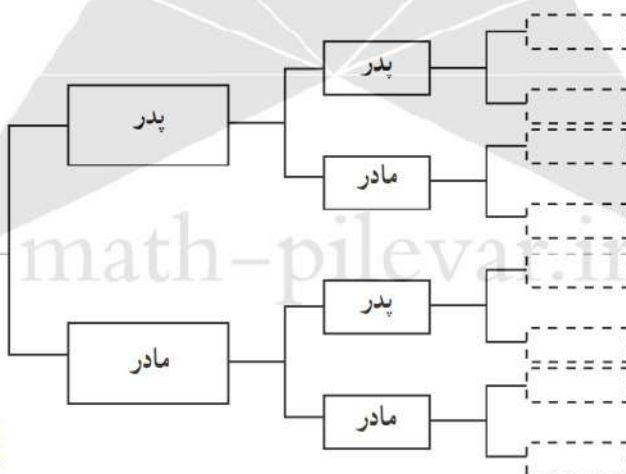
اگر ۱۵٪ از این برود ۸۵٪ باقی می‌ماند. ۴۴۵۵۱۵۸

$$\frac{100}{100} - \frac{15}{100} = \frac{85}{100} = 0.85$$



۹. شخصی پدر و مادر، دو پدر بزرگ و دو مادر بزرگ، چهار پدر پدر بزرگ و چهار مادر مادر بزرگ و ... دارد. الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی چند نفر بوده‌اند؟ (نخستین نسل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید.) ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (یعنی پدر و مادر شخص) چند نفرند؟

۱ نسل : ۲
۲ نسل : ۴ = ۲²
۳ نسل : ۸ = ۲³
۴ نسل : ۱۶ = ۲⁴
⋮
۱۰ نسل : ۲¹⁰ = ۱۰۲۴



۲, ۴, ۸, ۱۶, ..., $n=10$

$$S_n = a \times \frac{1 - r^n}{1 - r} \Rightarrow S_{10} = 2 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 2 \times \frac{1 - 1024}{-1} = 2 \times \frac{1023}{1} = 2046$$

۱۰. مجموع‌های زیر را به دست آورید.

الف) $1 + 4 + 16 + \dots + 4096$ روش اول: $r^{n-1} = \frac{4096}{1} \Rightarrow 4^{n-1} = 4^4 \Rightarrow n-1=4 \Rightarrow n=5$

$$S_5 = a \times \frac{1-r^5}{1-r} = 1 \times \frac{1-4^5}{1-4} = \frac{1-1024}{-3} = \frac{1023}{3} = 341$$

روش دوم: $S_5 = \frac{a - r a_n}{1-r} = \frac{1 - 4 \times 4096}{1-4} = \frac{1-16384}{-3} = \frac{16383}{3} = 5461$

ب) $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{640}$ روش اول: $\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1} = \frac{1}{640} = \frac{1}{128} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \Rightarrow n-1=7 \Rightarrow n=8$

$$S_8 = a \times \frac{1-r^8}{1-r} = \frac{1}{5} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} \times \frac{1-\frac{1}{256}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} \times \frac{\frac{255}{256}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} \times \frac{255 \times 2}{256} = \frac{51}{128}$$

روش دوم: $S_8 = \frac{a - r a_n}{1-r} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{640}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{1280}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{256}{1280} - \frac{1}{1280}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{255}{1280}}{\frac{1}{2}} = \frac{255 \times 2}{1280} = \frac{51}{128}$

۱۱. نخستین جمله یک دنباله هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنباله هندسی $\frac{1}{4}$ است. کدام جمله دنباله برابر ۶ است؟ مجموع جملات این دنباله از ۱۵۳۶ تا عدد ۶ را به دست آورید.

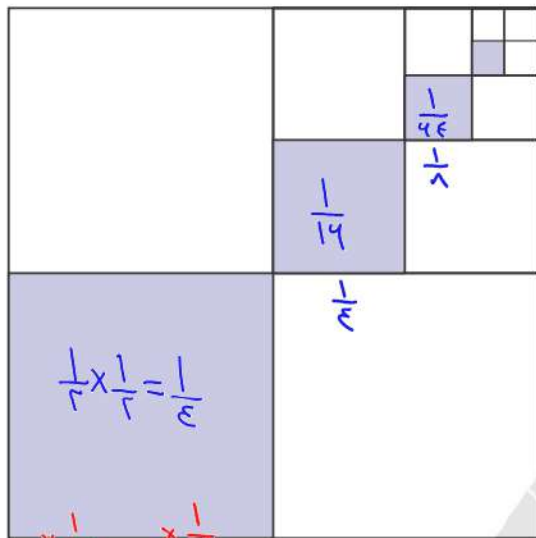
$1536, 384, 96, \dots, 6$

$\times \frac{1}{4}$ $\times \frac{1}{4}$ $\times \frac{1}{4}$

$r^{n-1} = \frac{\text{جمله آخر}}{\text{جمله اول}} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{6}{1536} = \frac{1}{256} = \left(\frac{1}{4}\right)^8 \Rightarrow n-1=8 \Rightarrow n=9$

$$S_9 = a \times \frac{1-r^9}{1-r} = 1536 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^9}{1-\frac{1}{4}} = 1536 \times \frac{1-\frac{1}{262144}}{\frac{3}{4}} = 1536 \times \frac{\frac{262143}{262144}}{\frac{3}{4}} = \frac{1536 \times 262143 \times 4}{262144 \times 3} = 3044$$

۱۲. پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آنها را رنگ می‌کنیم. از مربع‌های باقی‌مانده، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می‌کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده در یک رأس مشترک است، رنگ‌آمیزی می‌کنیم و همین روند را مطابق شکل ادامه می‌دهیم.



الف) چرا دنباله مساحت‌های مربع‌های رنگی، یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهد؟

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$$

ب) اگر روند رنگ‌آمیزی گفته شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت‌های مربع‌های رنگی از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

پ) پس از شش مرحله رنگ‌آمیزی مربع به روش بالا، چه مساحتی از مربع رنگ می‌شود؟

$$b) \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}$$

$$S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow \frac{1}{4} \times \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} \times (1-(\frac{1}{4})^n) = \frac{1}{3} (1-(\frac{1}{4})^n)$$

$$n \text{ (بزرگ عدد صفتی بزرگ)} \Rightarrow S_n = \frac{1}{4} \times \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\infty} = \frac{1}{\infty}$$

$$S_n = a \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

$$S_4 = \frac{1}{4} \times \frac{1-(\frac{1}{4})^4}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{1-\frac{1}{256}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{\frac{255}{256}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{255}{256} \times \frac{4}{3} = \frac{255}{256} \times \frac{1}{3} = 0.33$$

تمرین

$$\sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{1}{4} \times 3}$$

$$\sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}}$$

۱. با استفاده از تعریف توان های گویا نشان دهید که $\sqrt{5}$ ، $\sqrt[4]{5^2}$ ، $\sqrt[4]{5^3}$ با هم برابرند.

۲. حاصل هر یک از عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید. (a ، m و n اعداد حقیقی مثبت اند.)

$$3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1 \times 2 + 1 \times 1}{3 \times 2}} = 3^{\frac{2+1}{6}} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$5^{\frac{1}{4}} \times 5^{(-\frac{1}{4})} = 5^0 = 1$$

$$8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = (8 \times 2)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$$

$$(2^6)^{\frac{1}{3}} = 2^2 = 4$$

$$\frac{4}{1} \times \frac{1}{2} = 2$$

$$\left(\frac{3^4}{2^6}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$$

$$\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}}\right)^{-4} = \frac{a^2}{a^1} = a^1 = a$$

$$3^{-0.26} \times 3^{-0.74} = 3^{-(0.26+0.74)} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$(m^{\frac{2}{3}} \cdot n^{\frac{1}{2}})^2 (m^2 n^3)^{\frac{1}{2}} = m^{\frac{4}{3}} \times n^1 \times m^1 \times n^{\frac{3}{2}} = m^{\frac{4}{3}+1} \times n^{\frac{3}{2}+1} = m^{\frac{7}{3}} \times n^{\frac{5}{2}} = (mn)^{\frac{7}{6}}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1 \times 2}{1 \times 2} = \frac{5}{2}$$

۳. در هر یک از تساوی های زیر، مقدار x را مشخص کنید.

$$8^x \times 9^5 = 72^5 \quad (8 \times 9)^5 = 72^5$$

$x = 5$

$$(0.36)^4 \times (0.36)^x \times (0.36)^{-6} = (0.36)^7$$

$$4 + x - 6 = 7 \Rightarrow x - 2 = 7$$

$x = 9$

$$(3^x)^6 = \frac{1}{3^2} \Rightarrow 3^{4x} = 3^{-2} \Rightarrow 4x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x^5 \times 15^3}{3^2 \times 3^5 \times 3^1} = 5^1 \Rightarrow \frac{x^5 \times 15^3}{3^8} = 5^1 \Rightarrow \frac{15^5 \times 15^3}{3^8} = \frac{15^1}{3^1} = \left(\frac{15}{3}\right)^1 = 5^1$$

$$x = 15$$

۴. همان طور که می دانید، حجم کره ای به شعاع r با استفاده از فرمول $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (حجم کره) به دست می آید.

الف) توضیح دهید که چگونه می توان با استفاده از مفهوم ریشه گیری و توان های گویا، شعاع کره ای به حجم V را از فرمول زیر به دست آورد.

$$r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ب) شعاع این تانکر کره ای شکل را که حجم آن $\frac{32\pi}{3}$ است، به دست آورید.

$$\frac{V}{r} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{r}$$

$$\frac{3}{4}\pi \times \frac{V}{r} = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \frac{3}{4}\pi \Rightarrow r^3 = \frac{3}{4}\pi \times \frac{V}{r}$$

$$\left(r^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$



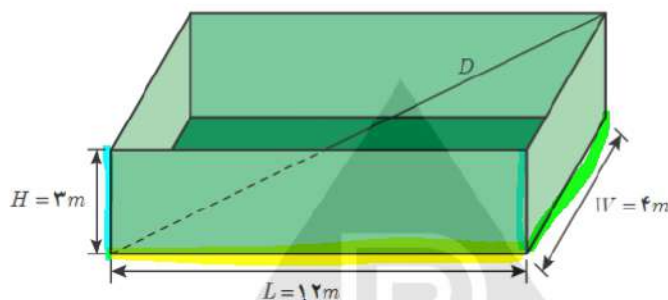
ریشه اول: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{32\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow 8 = r^3 \Rightarrow r = 2$

ریشه دوم: $r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow r = \left(\frac{3 \times \frac{32\pi}{3}}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$

۵. اگر D قطر جعبه زیر باشد، اندازه آن از طریق تابع $D = (L^2 + W^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}$ (طول، W عرض و H ارتفاع جعبه) به دست می آید.

الف) با توجه به شکل، اندازه D را به دست آورید.

ب) اگر اندازه $L=W=H=1\text{ m}$ باشد، اندازه D را به دست آورید.



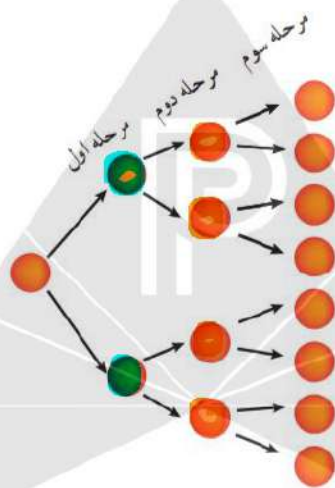
$$D = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2} = \sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{144 + 16 + 9} = \sqrt{169} = 13$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 طول عرض ارتفاع

$$\therefore D = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

تمرین

۱. در پژوهشکدهٔ رویان وابسته به جهاد دانشگاهی، سلول‌های بنیادی جنین انسان تولید می‌شود. این سلول‌ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می‌توانند تمام انواع سلول‌های بدن نظیر عصب و ماهیچهٔ قلب را به وجود آورند. در شکل زیر، روند تکثیر سلول بنیادی جنین در سه مرحله نشان داده شده است.



$$\begin{aligned} \text{مرحله اول: } & 2^1 \\ \text{مرحله دوم: } & 2^2 = 4 \\ \text{مرحله سوم: } & 2^3 = 8 \\ & \vdots \\ \text{مرحله } n: & 2^n \end{aligned}$$

اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنین مانند شکل بالا، ادامه پیدا کند:
الف) پس از چند مرحله، تعداد سلول‌های تکثیر شده ۲۰۴۸ سلول خواهد شد؟

$$2^n = 2048 \Rightarrow n = 11$$

$$\begin{aligned} 2^{10} &= 1024 \\ 2^{11} &= 2048 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{تعداد مرحله} & n \\ 2 &= 2^1 = 2^1 = 256 \end{aligned}$$

ب) در مرحلهٔ هشتم، چه تعداد سلول تکثیر شده است؟

$$2^n = \text{تکثیر سلول‌ها در } n \text{ مرحله}$$

پ) آیا می‌توانید الگویی برای تکثیر سلول‌ها مشخص کنید؟

۲. یک نمونه واقعی (شبیه به تمرین یک) بیان کنید که از الگوی تابع نمایی پیروی کند.

۱- تقسیم درتایی بآلندی ها

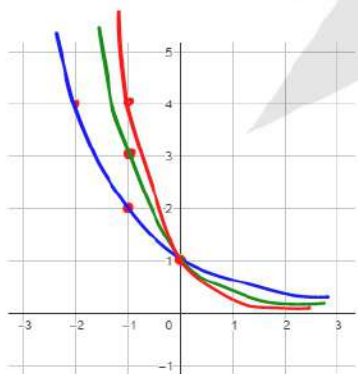
۲- افزایش قیمت هر انسان یا صوان

۳- رشد مخمر

۳. در شکل صفحه بعد، نمودار دو تابع $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ و $y = 4^x$ رسم شده است. مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است.



۴. نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ را در یک دستگاه (صفحه مختصات) رسم کنید و تفاوت ها و شباهت های آنها را برشمرید.



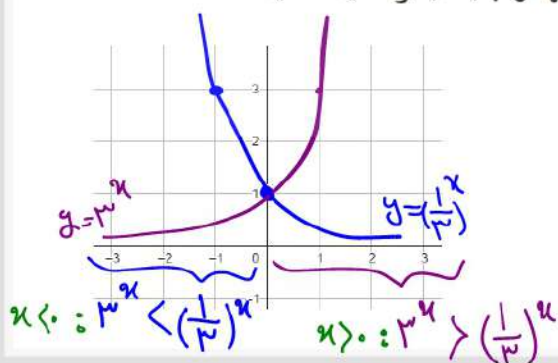
شباهت ها: ۱- از نقطه (۰، ۱) می گذرنند.

۲- دامنه آنها $\mathbb{R}$ و برد برابر $(0, +\infty)$ است.

۳- کاهش هستند.

تفاوت ها: هر چه عدد پایه کوچکتر شود لبه بالایی نمودار به محور y ها نزدیکتر ($x < 0$)
لبه پایینی نمودار به محور x ها نزدیک می شود ($x > 0$)

۵. نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = 3^x$ را در یک دستگاه رسم کنید و سپس، آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.



۱- هر دو دامنه $\mathbb{R}$ و بردشان برابر $(0, +\infty)$ است.

۲- هر دو از نقطه (۰، ۱) می گذرنند.

۳- نمودار $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ کاهش است اما نمودار $y = 3^x$ افزایشی است.

حل تمرینات صفحه ۱۰۴ کتاب

درس ۳: رشد و زوال نمایی

تمرین

۱. در یکی از فعالیت‌های بخش اول این درس، به یک شرکت تولیدکننده محصولات فرهنگی اشاره کردیم. اگر یکی از سهام‌داران این شرکت، در سال ۱۳۹۷ مبلغ **چهل میلیون تومان** در این شرکت سرمایه‌گذاری کند، پس از **ده سال** چه مبلغی به سرمایه این سهام‌دار اضافه خواهد شد؟

$$C = 40,000,000$$

$$t = 10$$

$$r = 0.14$$

$$f(t) = C(1+r)^t$$

$$\begin{aligned} f(10) &= 40,000,000 (1 + 0.14)^{10} \\ &= 40,000,000 (1.14)^{10} = 141,211,182,56 \end{aligned}$$

۲. جمعیت شهری **یک میلیون نفر** است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت **۶ درصد** در سال باشد، جمعیت این شهر پس از ده سال چند نفر خواهد شد؟

$$r = 0.06$$

$$t = 10$$

$$C = 1,000,000$$

$$f(t) = C(1+r)^t$$

$$f(10) = 1,000,000 (1 + 0.06)^{10}$$

$$= 1,000,000 (1.06)^{10} = 1,790,847,49$$

۳. جزیره‌ای پر از موش شده بود. مسئولان تصمیم گرفتند به کمک گربه‌ها با موش‌ها مقابله کنند. در آن سال، جمعیت موش‌ها ۲۳۵۷۴ بود که پس از مبارزه با آنها، این تعداد با نرخ ۲/۵ درصد در سال رو به کاهش گذاشت. در همان سال، جمعیت گربه‌ها ۱۵۷۸۶ بود که با نرخ ۱/۸ درصد در سال رو به افزایش گذاشت.

الف) در یک جدول، جمعیت موش‌ها را در ۱۰ سال متوالی به دست آورید.

موش > گربه

ب) همین کار را برای جمعیت گربه‌ها طی ۱۰ سال متوالی انجام دهید.

پ) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت گربه‌ها بیشتر از موش‌ها می‌شود؟ بعد از ۱۰ سال $g(10) > f(10)$

ت) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت موش‌ها و گربه‌ها با یکدیگر برابر می‌شود؟ بین ۹ سال و ۱۰ سال

ث) اگر همین روند ادامه پیدا کند، برای جمعیت گربه‌ها و موش‌ها چه اتفاقی می‌افتد؟

جمعیت گربه‌ها دائماً در حال افزایش است و جمعیت موش‌ها کم‌کم رو به صفر نزدیک می‌شود. اما هیچ وقت صفر نمی‌شود.

$$f(t) = c(1-r)^t = 23574 \times (1-0.025)^t$$

$$g(t) = 15786(1+0.018)^t = 15786 \times (1.018)^t$$

جمعیت موش‌ها	
۱ سال بعد	$f(1) = 23574 \times (0.975)^1 = 22984$
۲ سال بعد	$f(2) = 23574 \times (0.975)^2 = 22411$
۳ سال بعد	$f(3) = 23574 \times (0.975)^3 = 21851$
۴ سال بعد	$f(4) = 23574 \times (0.975)^4 = 21305$
۵ سال بعد	$f(5) = 23574 \times (0.975)^5 = 20772$
۶ سال بعد	$f(6) = 23574 \times (0.975)^6 = 20253$
۷ سال بعد	$f(7) = 23574 \times (0.975)^7 = 19747$
۸ سال بعد	$f(8) = 23574 \times (0.975)^8 = 19253$
۹ سال بعد	$f(9) = 23574 \times (0.975)^9 = 18772$
۱۰ سال بعد	$f(10) = 23574 \times (0.975)^{10} = 18302$

جمعیت گربه‌ها	
۱ سال بعد	$g(1) = 15786 \times (1.018)^1 = 16070$
۲ سال بعد	$g(2) = 15786 \times (1.018)^2 = 16359$
۳ سال بعد	$g(3) = 15786 \times (1.018)^3 = 16653$
۴ سال بعد	$g(4) = 15786 \times (1.018)^4 = 16953$
۵ سال بعد	$g(5) = 15786 \times (1.018)^5 = 17258$
۶ سال بعد	$g(6) = 15786 \times (1.018)^6 = 17569$
۷ سال بعد	$g(7) = 15786 \times (1.018)^7 = 17885$
۸ سال بعد	$g(8) = 15786 \times (1.018)^8 = 18207$
۹ سال بعد	$g(9) = 15786 \times (1.018)^9 = 18535$
۱۰ سال بعد	$g(10) = 15786 \times (1.018)^{10} = 18869$