

فصل ۲ - الگوهای خطی

درس ۱: مدل سازی و دنباله

به مدلی از نمایش اعداد، که تعدادی عدد به دنباله هم قرار می گیرند دنباله اعداد می گوییم.

مثال: $4, 7, 10, 13, \dots$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & \end{array}$$

هر کدام از اعداد $4, 7, 10, 13, \dots$ یک جمله هستند.

معمولا جملات یک دنباله را با $a_1, a_2, a_3, \dots$ نشان می دهند.

به a_n جمله n ام دنباله می گوییم. اسم دیگر آن جمله عمومی یا ضابطه دنباله است.

$$a_n = 3n + 1 \quad \text{جمله عمومی}$$

$$a_3 = 3 \times 3 + 1 = 10$$

$$a_{100} = 3 \times 100 + 1 = 301$$

$$a_1 = 3(1) + 1 = 4$$

:

$$a_2 = 3(2) + 1 = 7$$

تذکر: در تعیین دامنه تعریف توابعی که پاسخ آنها وابسته به بررسی مسئله در مرحله یا گام اول، دوم، ... و n ام است. از مجموعه اعداد طبیعی استفاده می کنیم.

به زبان ساده: یعنی در جمله عمومی دنباله به جای n اعداد $1, 2, 3, \dots$ قرار می دهیم.

۱- چهار جمله اول دنباله $C_n = \frac{1}{n}$ را بنویسید.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$$

۲- پنج جمله اول $b_n = 3^n$ را بنویسید.

$$3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5$$

$$3, 9, 27, 81, 243$$

$$n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{1}$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3}$$

$$n=4 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{4}$$

$$n=5 \Rightarrow a_5 = \frac{1}{5}$$

۳- پنج جمله اول $b_n = n^2 - 1$ را بنویسید.

$$n=1 \Rightarrow a_1 = 1^2 - 1 = 0$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = 2^2 - 1 = 3$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = 3^2 - 1 = 8$$

$$n=4 \Rightarrow a_4 = 4^2 - 1 = 15$$

$$n=5 \Rightarrow a_5 = 5^2 - 1 = 24$$

0, 3, 8, 15, 24

۴- پنج جمله اول $d_n = \frac{(-1)^n}{n}$ را بنویسید.

$$n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$n=4 \Rightarrow a_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}$$

$$n=5 \Rightarrow a_5 = \frac{(-1)^5}{5} = -\frac{1}{5}$$

یاد آوری: $(-1)^{\text{عدد فرد}} = -1$
 $(-1)^{\text{عدد زوج}} = +1$

-1, 1/2, -1/3, 1/4, -1/5

۵- پنج جمله اول $a_n = 2n - 1$ را بنویسید.

$$a_1 = 2(1) - 1 = 1$$

$$a_2 = 2(2) - 1 = 3$$

$$a_3 = 2(3) - 1 = 5$$

$$a_4 = 2(4) - 1 = 7$$

$$a_5 = 2(5) - 1 = 9$$

1, 3, 5, 7, 9

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...

۶- با توجه به دنباله های $a_n = 3n$ و $b_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ حاصل عبارت $a_2 + b_1$ را بدست آورید.

$$a_2 + b_1 = 9 + \frac{1}{4} = \frac{37}{4}$$

$$b_1 = \left(-\frac{1}{1}\right)^{1+1} = \left(-\frac{1}{1}\right)^2 = \frac{1}{1}$$

$$a_2 = 3^2 = 9$$

۷- با توجه به دنباله های $c_n = \frac{1}{3n-1}$, $d_n = n^2 - 1$ حاصل عبارت $d_2 - c_1$ را بدست آورید.

$$c_2 - d_1 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

$$d_1 = 1^2 - 1 = 0$$

$$c_2 = \frac{1}{3 \times 2 - 1} = \frac{1}{5}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...

پیدا کردن شماره جمله دنباله

۸- کدام جمله دنباله $a_n = 3n - 2$ برابر ۱۶ است؟

روش دوم:

$$3n - 2 = 14$$

$$3n = 14 + 2$$

$$3n = 16 \Rightarrow n = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

$$3 \times 6 - 2 = 16$$

$$3 \times 5 - 2 = 13$$

$$3 \times 4 - 2 = 10$$

$$n = 6$$

۹- کدام جمله دنباله $b_n = n^2 + 3$ برابر ۵۲ است؟

روش دوم:

$$n^2 + 3 = 52$$

$$n^2 = 52 - 3 \Rightarrow n = 7$$

$$5^2 + 3 = 28$$

$$7^2 + 3 = 52$$

$$n = 7$$

$$10^2 + 3 = 103$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...

دنباله های دو ضابطه ای

$$n = 1 \rightarrow 4 \text{ فرد}$$

$$n = 2 \rightarrow 1 \text{ زوج}$$

$$n = 3 \rightarrow 4 \text{ فرد}$$

$$n = 4 \rightarrow 1 \text{ زوج}$$

$$n = 5 \rightarrow 4 \text{ فرد}$$

۱۰- پنج جمله اول دنباله $a_n = \begin{cases} 4 & n \text{ فرد} \\ 1 & n \text{ زوج} \end{cases}$ را بنویسید.

۴, ۱, ۴, ۱, ۴, ...

۱۱- شش جمله اول دنباله $a_n = \begin{cases} n & n \text{ فرد} \\ \frac{1}{n} & n \text{ زوج} \end{cases}$ را بنویسید.

زوج $n=4 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{4}$

فرد $n=1 \Rightarrow a_1 = 1$

زوج $n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$

فرد $n=5 \Rightarrow a_5 = 5$

$1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots$

فرد $n=3 \Rightarrow a_3 = 3$

زوج $n=6 \Rightarrow a_6 = \frac{1}{6}$

۱۲- دنباله $a_n = \begin{cases} 2n+3 & n < 4 \\ n^2+1 & n \geq 4 \end{cases}$ را در نظر بگیرید و مقدار عددی a_5 و a_3 را بدست آورید.

$a_3 = 2 \times 3 + 3 = 9$ ← کوتاه‌تر از

$a_5 = 5^2 + 1 = 26$ ← بزرگ‌تر از

پیدا کردن جمله عمومی یک دنباله (الگویابی)

۱۲- ضابطه تابعی (جمله عمومی) دنباله های زیر را بنویسید.

الف: $1, 4, 7, 10, \dots$

$a_n = 3n - 2$

ب: $5, 8, 11, 14, 17, \dots$

$a_n = 3n + 2$

پ: $2, 7, 12, 17, \dots$

$a_n = 5n - 3$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



یاد آوری $2n - 1 \rightarrow 1, 3, 5, \dots$ = دنباله اعداد فرد طبیعی

$2n \rightarrow 2, 4, 6, 8, \dots$ = دنباله اعداد زوج طبیعی

$n^2 \rightarrow 1, 4, 9, 16, 25, \dots$ = مربع اعداد طبیعی

$n^3 \rightarrow 1, 8, 27, 64, 125, \dots$ = مکعب اعداد طبیعی

$1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3$

۱۳- ضابطه تابعی (جمله عمومی) دنباله های زیر را بنویسید.

الف: ۱, ۳, ۵, ۷, ...

$$a_n = 2n - 1$$

ب: ۲, ۴, ۶, ۸, ... $a_n = 2n$ پ: ۱, ۴, ۹, ۱۶, ... $a_n = n^2$
 $1^2 \quad 2^2 \quad 3^2 \quad 4^2$ ت: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ $a_n = \frac{1}{n}$ ث: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ $a_n = \frac{n}{n+1}$

۱۴- ضابطه تابعی (جمله عمومی) دنباله های زیر را بنویسید.

الف: ۱, ۳, ۵, ۷, ...

$$a_n = -(2n - 1) = -2n + 1$$

ب: ۲, ۴, ۶, ۸, ...

$$a_n = -2n$$

پ: ۱, ۴, ۹, ۱۶, ...

$$a_n = -n^2$$

ت: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

$$a_n = -\frac{1}{n}$$

ث: $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots$

$$a_n = -\frac{n}{n+1}$$

در جمله عمومی ضرب می‌کنیم	شکل دنباله
جمله عمومی را در عبارت $(-1)^{n+1}$ ضرب می‌کنیم.	$+\square, -\bigcirc, +\triangle, -\square, \dots$ جملات فرد مثبت است
جمله عمومی را در $(-1)^n$ ضرب می‌کنیم.	$-\square, +\bigcirc, -\triangle, +\square, \dots$ جملات فرد منفی است

نکته:

۱۵- ضابطه تابعی (جمله عمومی) دنباله های زیر را بنویسید.

الف: $1, 3, 5, 7, \dots$

$$a_n = (-1)^{n+1} \times (2n-1)$$

 $1, -3, 5, -7, \dots$

$$a_n = (-1)^n \times (2n-1)$$

ب: $2, -4, 6, -8, 10, \dots$

$$a_n = (-1)^n \times 2n$$

 $-2, 4, -6, 8, -10, \dots$

$$a_n = (-1)^{n+1} \times 2n$$

ت: $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{4}, \dots$

$$a_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}$$

ث: $\frac{-1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

$$a_n = (-1)^{n+1} \times \frac{n}{n+1}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



رابطه بازگشتی یک دنباله

هر جمله این رابطه با توجه به جمله قبلی نوشته می شود. حتما جمله اول در رابطه بازگشتی را باید داشته باشیم.

۱۶- رابطه بازگشتی دنباله $2, 5, 8, \dots$ را بنویسید.

$$2, 5, 8, \dots$$

$\xrightarrow{+3} \quad \xrightarrow{+3}$

$$a_{n+1} = a_n + 3, \quad a_1 = 2$$

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}$$



نکته: رایج ترین شکل رابطه بازگشتی دنباله

$$a_{n+1} = a_n + \text{●}$$

$$a_{n+1} = \text{●} \times a_n$$

$$a_n = a_{n-1} + \text{●}$$

$$a_n = \text{●} \times a_{n-1}$$

شکل های دیگر رابطه بازگشتی دنباله :

بعضی های دو جمله متوالی را a_n , a_{n-1} در نظر می گیرند.

۱۷- رابطه بازگشتی دنباله های زیر را بنویسید.

الف: $3, 6, 12, \dots$

$$a_{n+1} = 2 \times a_n, \quad a_1 = 3$$

ب: $38, 34, 30, \dots$

$$a_{n+1} = a_n - 4, \quad a_1 = 38$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



نوشتن جملات رابطه بازگشتی

اگر رابطه بازگشتی را به همراه یکی از جملات دنباله (معمولاً جمله اول را می دهند) به ما دادند و از ما دیگر جملات را خواستند. باید در رابطه بازگشتی به جای n به ترتیب اعداد ۱، ۲، ۳، ... را قرار دهیم.

$$a_1 = 2$$

$$n=1 \Rightarrow a_2 = a_1 + 5 = 2 + 5 = 7$$

$$n=2 \Rightarrow a_3 = a_2 + 5 = 7 + 5 = 12$$

$$n=3 \Rightarrow a_4 = a_3 + 5 = 12 + 5 = 17$$

روش اول:



۱۸- چهار جمله اول دنباله $a_{n+1} = a_n + 5$, $a_1 = 2$ را بنویسید.

روش اول



۱۹- جمله پنجم دنباله $a_{n+1} = 2 \times a_n$, $a_1 = 4$ را بنویسید.

روش دوم:

$$a_1 = 4$$

$$n=1 \Rightarrow a_2 = 2 \times a_1 = 2 \times 4 = 8$$

$$n=2 \Rightarrow a_3 = 2 \times a_2 = 2 \times 8 = 16$$

$$n=3 \Rightarrow a_4 = 2 \times a_3 = 2 \times 16 = 32$$

$$n=4 \Rightarrow a_5 = 2 \times a_4 = 2 \times 32 = 64$$

$$a_1 = 1$$

۲۰- چهار جمله اول دنباله $a_1 = 1$ ، $a_{n+1} = a_n + n$ را بنویسید.

$$n=1 \Rightarrow a_2 = a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$n=2 \Rightarrow a_3 = a_2 + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$1, 2, 4, 7$$

$$n=3 \Rightarrow a_4 = a_3 + 3 = 4 + 3 = 7$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



دنباله های دو ضابطه ای بازگشتی

۲۱- شش جمله اول دنباله بازگشتی

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} a_n & n \text{ زوج} \\ 3a_n + 1 & n \text{ فرد} \end{cases} \quad (a_1 = 11) \text{ را بنویسید.}$$

فرد $n=1 \Rightarrow a_2 = 3a_1 + 1 = 3 \times 11 + 1 = 34$

زوج $n=2 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2} a_2 = \frac{1}{2} \times 34 = 17$

فرد $n=3 \Rightarrow a_4 = 3a_3 + 1 = 3 \times 17 + 1 = 52$

زوج $n=4 \Rightarrow a_5 = \frac{1}{2} a_4 = \frac{1}{2} \times 52 = 26$

فرد $n=5 \Rightarrow a_6 = 3a_5 + 1 = 3 \times 26 + 1 = 79$

۲۲- جمله چهارم دنباله بازگشتی

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n & n \text{ زوج} \\ 5a_n + 2 & n \text{ فرد} \end{cases} \quad (a_1 = 4) \text{ را بنویسید.}$$

فرد $n=1 \Rightarrow a_2 = 5a_1 + 2 = 5 \times 4 + 2 = 22$

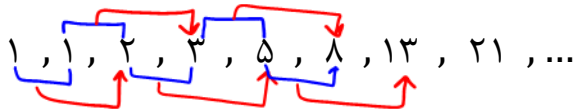
زوج $n=2 \Rightarrow a_3 = 3a_2 = 3 \times 22 = 66$

فرد $n=3 \Rightarrow a_4 = 5a_3 + 2 = 5 \times 66 + 2 = 332$

دنباله های خاص

۱- دنباله فیبوناچی: دو جمله ابتدایی این دنباله ۱ هستند سپس هر دو جمله متوالی را باهم جمع می کنیم تا جمله بعدی به دست

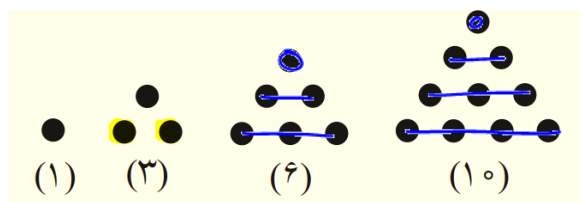
آید.



رابطه بازگشتی: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $(a_1 = a_2 = 1)$

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$$

۲- دنباله مثلثی: به الگوی مثلثی زیر دقت کنید:



$$1 \quad 1+2 \quad 1+2+3 \quad 1+2+3+4$$

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

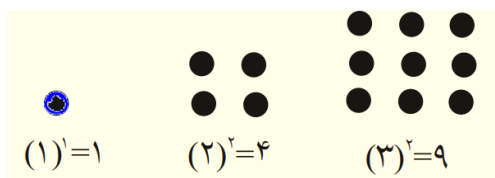
رابطه دنباله مثلثی

$$1, 3, 6, 10, \dots$$

جمله عمومی: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

رابطه بازگشتی: $a_{n+1} = a_n + (n + 1)$, $(a_1 = 1)$

۳- دنباله مربعی: به الگوی مربعی شکل زیر دقت کنید:



$$(1)^2 = 1$$

$$(2)^2 = 4$$

$$(3)^2 = 9$$

جمله عمومی: $a_n = n^2$

رابطه بازگشتی: $a_{n+1} = a_n + (2n + 1)$

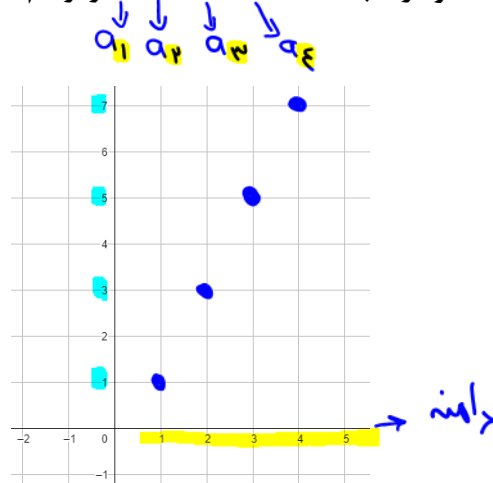
بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



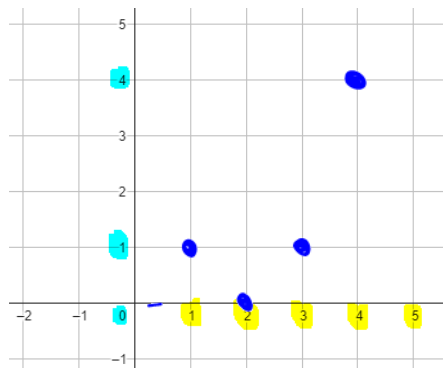
نمودار دنباله ها

با توجه به تعریف دنباله به عنوان تابعی با دامنه اعداد طبیعی ، نمودار آنها را نیز می توان رسم کرد.

۲۳- نمودار دنباله $1, 3, 5, 7, \dots$ را رسم کنید.

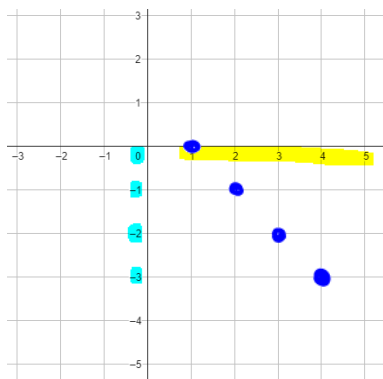


۲۴- نمودار دنباله $1, 0, 1, 4, \dots$ را رسم کنید.



۲۵- نمودار دنباله $b_n = 1 - n$ را رسم کنید.

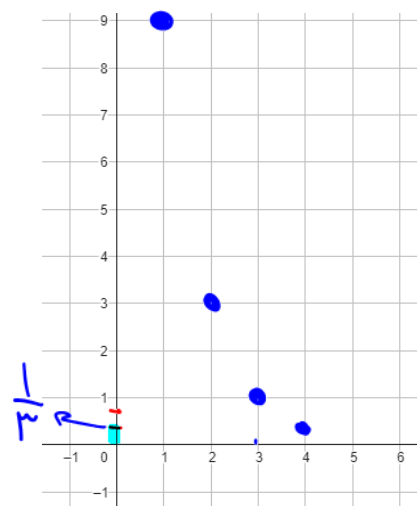
$$\begin{aligned} n=1 &\Rightarrow b_1 = 1 - 1 = 0 \\ n=2 &\Rightarrow b_2 = 1 - 2 = -1 \\ n=3 &\Rightarrow b_3 = 1 - 3 = -2 \\ n=4 &\Rightarrow b_4 = 1 - 4 = -3 \end{aligned}$$



۲۶- نمودار دنباله $b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n$, $(a_1 = 9)$ را رسم کنید.

$$\begin{aligned} 9 &\xrightarrow{\times \frac{1}{3}} 3 \\ 3 &\xrightarrow{\times \frac{1}{3}} 1 \\ 1 &\xrightarrow{\times \frac{1}{3}} \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$9 \times \frac{1}{3} = 3$$



بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



دنباله های حسابی

دنباله هایی که هر جمله آن به جز جمله اول، از اضافه شدن یک عدد ثابت به جمله پیشین به دست می آید، دنباله های "حسابی" نامیده می شوند.

الف: a_1, a_2, a_3, a_4
 $2, 5, 8, 11, 14, \dots$

$$+3 \quad +3 \quad +3$$

$$a = 2$$

$$d = 3$$

$$a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$$

$$a_3 - a_2 = 8 - 5 = 3$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$11 - 8 = 3$$

$$14 - 11 = 3$$

$$a_n = 2 + (n-1) \times 3$$

$$a_n = 2 + 3n - 3 \Rightarrow a_n = 3n - 1$$

ب: $4, 1, -2, -5, -8, \dots$

$$-3 \quad -3 \quad -3$$

$$a = 4$$

$$d = -3$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a_n = 4 + (n-1) \times (-3)$$

پ: $-3, 2, 7, 12, 17, \dots$

$$+5 \quad +5 \quad +5$$

$$a = -3, d = +5$$

$$a_n = -3 + (n-1) \times 5$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

جمله عمومی دنباله حسابی:

اختلاف مشترک
شماره جمله
جمله اول

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$$

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, a+(n-1)d$$

$$+d \quad +d \quad +d$$

$$a_{10} = a + 9d \quad | \quad a_{11} = a + 10d, \quad a_1 = a + 0d$$

۲۷- در یک دنباله حسابی جمله اول ۲ و اختلاف مشترک آن ۵ است. جمله ۳۱ ام آن را بدست آورید.

$$2, 7, 12, 17, \dots$$

+5 +5 +5

$$d=5 \quad a=2$$

$$a_n = a + (n-1)d \Rightarrow a_{31} = 2 + (31-1) \times 5 = 2 + 150 = 152$$

۲۸- کدام دنباله زیر یک دنباله حسابی است؟ در دنباله ای که حسابی است، جمله پانزدهم و جمله عمومی آن را به دست آورید.

الف: ۶، ۹، ۱۳، ۱۸، ...

$$+3 \quad +4 \quad +5$$

دنباله حسابی نیست

ب: ۷، ۱۱، ۱۵، ۱۹، ...

$$+4 \quad +4 \quad +4$$

دنباله حسابی است

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a_n = 7 + (n-1) \times 4$$

$$a_{15} = 7 + (15-1) \times 4 = 7 + 56 = 63$$

$$a=7$$

$$d=4$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



پیدا کردن شماره جمله دنباله

۲۹- در یک دنباله حسابی جمله اول ۵- و اختلاف مشترک برابر ۸ است. کدام جمله دنباله برابر ۵۵۵ است؟

$$-5, 3, 11, 19, \dots - 555$$

+8 +8 +8

روش اول:

$$a_n = a + (n-1)d \Rightarrow -5 + (n-1) \times 8 = 555$$

$$8n - 8 = 555 + 5 = 560 \Rightarrow 8n = 560 + 8 \Rightarrow 8n = 568$$

$$n = \frac{568}{8} = 71$$

روش دوم: استفاده از فرمول: (تعداد جملات یک دنباله حسابی)

$$n = \frac{555 - (-5)}{8} + 1 = \frac{560}{8} + 1 = 70 + 1 = 71$$

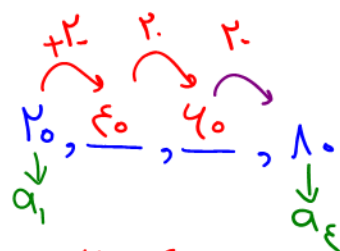
$$n = \frac{\text{جمله اول} - \text{جمله آخر}}{\text{فاصله}} + 1$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



درج واسطه حسابی

منظور از درج واسطه حسابی بین دو عدد a و b ، قرار دادن تعداد مشخصی عدد بین a و b است به طوری که کل این اعداد باهم تشکیل یک دنباله حسابی بدهند.

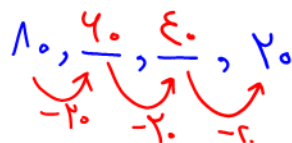


$$a_1 = 20$$

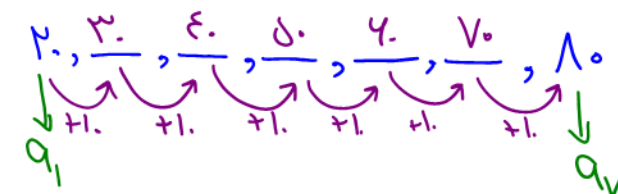
$$a_4 = 100$$

$$d = \frac{a_4 - a_1}{4 - 1} = \frac{100 - 20}{3} = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}$$

۳۰- بین ۲۰ و ۸۰ دو واسطه حسابی بنویسید.



۳۱- بین ۲۰ و ۸۰ پنج واسطه حسابی بنویسید.



$$a_1 = 20$$

$$a_{17} = 100$$

$$d = \frac{a_{17} - a_1}{17 - 1} = \frac{100 - 20}{16} = \frac{80}{16} = 5$$

نکته: یک فرمول برای پیدا کردن سریع مقدار اختلاف مشترک (d):

اگر دو جمله دلخواه a_m ، a_n از دنباله حسابی به ما داده شوند می توانیم مقدار d را به کمک فرمول زیر بدست بیاوریم.

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

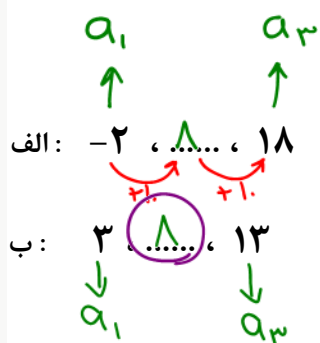
$$\frac{11 + (-2)}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

۳۲- بین دو عدد زیر یک واسطه حسابی بنویسید.

$$d = \frac{a_3 - a_1}{2} = \frac{11 - (-2)}{2} = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$$

$$d = \frac{a_3 - a_1}{2} = \frac{13 - 3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\frac{13 + 3}{2} = \frac{16}{2} = 8$$



الف: -۲ ، ، ۱۱



ب: ۳ ، ، ۱۳

نکته:

سه جمله متوالی دنباله حسابی a, b, c $\rightarrow b = \frac{a+c}{2}$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



۳۲- در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۲- و جمله ششم آن برابر ۱۸ است. جمله بیستم این دنباله را بدست آورید.

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 \\ a_6 &= 18 \\ d &= \frac{a_6 - a_1}{6 - 1} = \frac{18 - (-2)}{5} = 4 \end{aligned}$$

$$a_{20} = a + 19d = -2 + 19 \times 4 = -2 + 76 = 74$$

۳۳- یازدهمین جمله ی یک دنباله حسابی ۵۲ و جمله نوزدهم آن ۹۲ است. جمله سی ام این دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} a_{11} &= 52 \\ a_{19} &= 92 \\ d &= \frac{a_{19} - a_{11}}{19 - 11} = \frac{92 - 52}{8} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} 2 & 7 & 12 & 17 & 22 & 27 & 32 & 37 & 42 & 47 & 52 \end{array}$$

$$a_{30} = a + 29d = 2 + 29 \times 5 = 2 + 145 = 147$$

ردیف دوم:

$$a_{11} = 52$$

$$a + 10d = 52$$

$$a + 10 \times 5 = 52$$

$$a + 50 = 52$$

$$a = 52 - 50 = 2$$

ردیف اول:

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



رابطه بازگشتی دنباله حسابی

$$a_{n+1} = a_n + d \quad \text{یا} \quad a_{n+1} - a_n = d$$

رابطه بازگشتی دنباله حسابی

۳۴- رابطه بازگشتی دنباله های زیر را بنویسید.

الف: ۲، ۵، ۸، ۱۱، ...

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ +3 \quad +3 \end{array}$$

$$a_{n+1} = a_n + 3$$

ب: ۱۹، ۱۴، ۹، ...

$-5 \quad -5$

$$a_{n+1} = a_n - 5$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



صعودی و نزولی بودن دنباله حسابی

به دنباله های حسابی که اختلاف مشترکشان عددی مثبت است دنباله حسابی افزایشی می گویند.

اگر اختلاف مشترکشان عدد منفی باشد دنباله را کاهشی می گویند.

اگر اختلاف مشترک برابر صفر باشد، دنباله را ثابت می گوئیم.

-۱، ۳، ۷

$+4 \quad +4$

۱۰، ۱۶، ۲۲، ...

$+6 \quad +6$

۴، ۴، ۴، ...

$+0 \quad +0$

۲۲، ۱۴، ۱۰، ...

$-8 \quad -4$

نکته: $d > 0 \Rightarrow$ افزایشی

$d < 0 \Rightarrow$ کاهشی

$d = 0 \Rightarrow$ ثابت

مجموع جملات دنباله حسابی

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول a و اختلاف مشترک d را با S_n نشان می دهیم. برای S_n دو تا فرمول پر استفاده داریم

که با توجه به سوال از یکی از آن ها استفاده می کنیم:

تعداد جملات n $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ $\leftarrow$ جمله اول $\leftarrow$ جمله آخر

تعداد جملات n $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$ $\leftarrow$ تعداد جملات $\leftarrow$ جمله اول $\leftarrow$ تعداد جملات $\leftarrow$ افضل مشترک

$$a_n = a + (n-1)d \quad S_n = \frac{n}{2}(a + a + (n-1)d) = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

۳۵- مجموع ۲۰ جمله اول دنباله $-1, 4, 9, \dots$ را محاسبه کنید.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{20}{2}[2(-1) + (20-1) \times 5]$$

$$= 10 \times [-2 + 95] = 10 \times 93 = 930$$

$$a = -1$$

$$d = 5$$

$$n = 20$$

۳۶- مجموع ده جمله اول دنباله حسابی زیر را بدست آورید.
 $n=10$

$1, 5, 9, \dots$ $a=1, d=4, n=10$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] = \frac{10}{2} [2 \times 1 + (10-1) \times 4] = 5 [2 + 36] = 5 \times 38 = 190$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



$$a_n = a + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$\text{تعداد جملات یک دنباله حسابی} = \frac{(\text{جمله اول} - \text{جمله آخر})}{\text{اختلاف مشترک}} + 1$$

یادآوری:

$$n = \frac{95 - 10}{5} + 1 = \frac{85}{5} + 1 = 17 + 1 = 18$$

۳۷- مجموع عددهای $10, 15, 20, 25, \dots, 95$ را بدست آورید.

روش اول:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \Rightarrow S_{18} = \frac{18}{2} [10 + 95] = 9 \times 105 = 945$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \Rightarrow S_{18} = \frac{18}{2} [2 \times 10 + (18-1) \times 5] = 9 [20 + 85] = 9 \times 105 = 945$$

روش دوم:

$$n = \frac{13 - 19}{-4} + 1 = \frac{-6}{-4} + 1 = 1.5 + 1 = 2.5$$

۳۸- مجموع عددهای $13, 15, 17, \dots, 89$ را بدست آورید.

روش اول:

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n] \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2} [19 + 89] = 10 \times 108 = 1080$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2} [2 \times 19 + (20-1) \times (-4)] = 10 [38 - 76] = 10 \times (-38) = -380$$

روش دوم:

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



مسئله های دنباله حسابی

در مسئله هایی که مقداری ثابت به چیزی در حال اضافه شدن (یا کم شدن) بود، شما یک مسئله دنباله حسابی دارید. مقدار اولیه آن را a_1 و آن مقداری که اضافه (یا کم) می شود را d در نظر می گیرید.

۳۹- در یک کارخانه سنگ بری برای صیقل دادن سنگ ها از یک صفحه به وزن ۱۲۵۰۰ گرم استفاده می شود. اگر با توجه به مصرف هفتگی به طور میانگین ۱۸۷۵ گرم از وزن صفحه کم شود، پس از شش هفته استفاده مداوم وزن صفحه چقدر است؟

روش اول:

۱۲۵۰۰ ، ۱۰۶۲۵ ، ۸۷۵۰ ، ۶۸۷۵ ، ۵۰۰۰ ، ۳۱۲۵ ، ۱۲۵۰

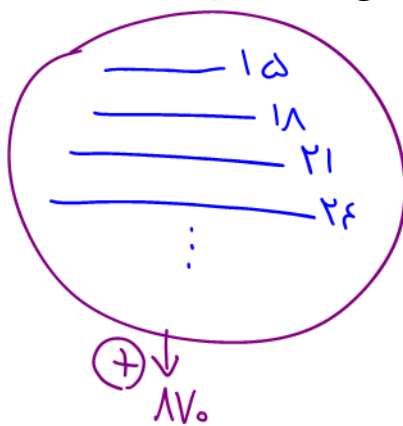
همه هفته اول -1875 ، -1875 ، -1875 ، -1875 ، -1875 ، -1875 ، -1875

پس از ۶ هفته $a_n = a + (n-1)d \rightarrow a + 4d$

روش دوم:

$$a_7 = a + 4d = 12500 + 4 \times (-1875) = 1250$$

۴۰- یک طراح برای یک سالن سینما در ردیف اول ۱۵ صندلی، در ردیف دوم ۱۸ صندلی و در ردیف سوم ۲۱ صندلی مشخص کرده است. اگر صندلی های هر ردیف با همین نظم اضافه شوند، برای داشتن سالنی با ۸۷۰ صندلی باید چند ردیف صندلی داشته باشیم؟



$$15 + 18 + 21 + 24 + \dots = 870$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$870 = \frac{n}{2} [2 \times 15 + (n-1) \times 3]$$

$$1740 = n(30 + 3n - 3) \Rightarrow n(27 + 3n) = 1740$$

$$3n^2 + 27n - 1740 = 0 \xrightarrow{\div 3} n^2 + 9n - 580 = 0$$

$$(n + 29)(n - 20) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -29 & \text{غ ق} \\ n = 20 & \text{ق ق} \end{cases}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



جمع بندی: +

$$\Rightarrow a_n = a + (n-1)d \quad \text{جمله عمومی}$$

$$\Rightarrow d = \frac{a_m - a_n}{m - n} \quad \text{اختلاف متدیر}$$

$$\rightarrow a, b, c \Rightarrow b = \frac{a+c}{2} \quad \text{واسطه حسابی}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = a_n + d \quad \text{رابطه بازگشتی}$$

$$a_1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \\ S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n] \end{cases} \quad \text{مجموع جمله‌ها}$$