

ریاضی و آمار (۳)

رشته‌های ادبیات و علوم انسانی - علوم و معارف اسلامی

پایه دوازدهم

مطابق با کتاب درسی و سطح امتحانات نهایی

دوره دوم متوسطه

ویژه آمادگی کامل برای امتحان نهایی

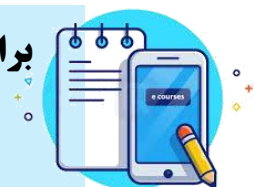
- ✓ آموزش مفهومی گام به گام تمام فصل‌های کتاب
- ✓ پاسخ تشریحی همه تمرین‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی
- ✓ حل نمونه سوالات پرتکرار امتحانات نهایی
- ✓ زبان ساده و قابل فهم برای همه دانش‌آموزان
- ✓ کاملاً کتاب‌محور و منطبق با آخرین تغییرات آموزشی

تهیه کننده: رقیه پيله ور - دبیر ریاضی ناحیه دو اردبیل



برای تماشای ویدیوهای آموزشی ریاضی و آمار ۳ (همین جزوه) می‌توانید به سایت

math-pilevar.ir بخش دوره‌ها مراجعه کنید.



فصل ۱ - آمار و احتمال

درس ۱: شمارش

اصل جمع و اصل ضرب

پژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. لیست گل فروشی و شیرینی فروشی به صورت مقابل است.

لیست گل ها	لیست شیرینی ها
مریم	گردویی
زنبق	نارگیلی
رز	

دو جمله زیر را بخوانید و حواستان به حروف ربط "یا" و "و" در آن ها باشد.

۱- پژمان می خواهد " یک نوع گل " یا " یک نوع شیرینی " سفارش دهد. در این حالات پژمان چند انتخاب دارد؟

$$3 + 2 = 5$$

۲- پژمان می خواهد " یک نوع گل " و " یک نوع شیرینی " سفارش دهد. در این حالات پژمان چند انتخاب دارد؟

لیست گل ها	لیست شیرینی ها
مریم	گردویی
زنبق	نارگیلی
رز	

$$3 \times 2 = 6$$

اصل جمع

اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد، و این دو عمل را با هم انجام داد، در این صورت به $(m+n)$ طریق می توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد. (اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است.)

اصل ضرب

اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد، طوری که در مرحله اول به m طریق «و» در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشند، در کل آن عمل به $m \times n$ طریق انجام پذیر است. (اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله است.)

لیست گل ها
مریم
زنبق
رز

لیست شیرینی ها
گردویی
نارنگیلی

لیست آبمیوه ها
هویج
سیب
پرتقال

پژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. لیست گل فروشی، شیرینی فروشی و آبمیوه فروشی به صورت مقابل است.

۱- پژمان می خواهد "یک نوع گل" یا "یک نوع شیرینی" یا "یک نوع آبمیوه" سفارش دهد. در این حالات پژمان چند انتخاب دارد؟

$$3 + 2 + 3 = 8$$

۲- پژمان می خواهد "یک گل" و "یک شیرینی" و "یک آبمیوه" سفارش دهد. در این حالات پژمان چند انتخاب دارد؟

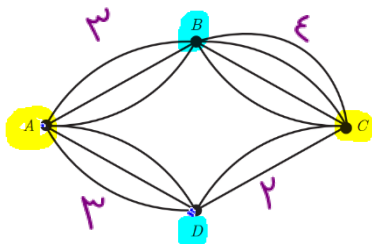
$$3 \times 2 \times 3 = 18$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



ترکیب اصل جمع و اصل ضرب

۳- مطابق شکل روبرو، میان چهار شهر A, B, C, D راه هایی وجود دارد. مشخص کنید که به چند طریق می توان:



الف: از شهر A به شهر C سفر کرد؟

$$\left. \begin{aligned} A \rightarrow B \rightarrow C &\Rightarrow 3 \times 4 = 12 \\ A \rightarrow D \rightarrow C &\Rightarrow 3 \times 2 = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 12 + 6 = 18$$

ب: از شهر B به شهر D سفر کرد؟

$$\left. \begin{aligned} B \rightarrow C \rightarrow D &\Rightarrow 4 \times 2 = 8 \\ B \rightarrow A \rightarrow D &\Rightarrow 3 \times 3 = 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 8 + 9 = 17$$

پ: از شهر A به شهر C و از طریق شهر D سفر کرد؟

$$3 \times 2 = 6$$

ت: از شهر A به شهر C و از طریق شهر D مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟

$$\left. \begin{aligned} \text{رفت } 3 \times 2 &= 6 \\ \text{برگشت } 2 \times 3 &= 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 6 + 6 = 12$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



نماد فاکتوریل !

حاصل ضرب اعداد طبیعی از 1 تا n را با $n!$ نشان می دهیم

و آن را " n فاکتوریل" می خوانیم: $(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = n!)$

قرارداد: $1! = 1$, $0! = 1$

$$3! = 3 \times 2 \times 1$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5 \times 4!$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \times 5 \times 4! = 6 \times 5 \times 4 \times 3! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \times 5 \times 4! = 6 \times 120 = 720$$

این عملیات ها را با نماد فاکتوریل نمی توانیم انجام بدهیم!

$$2! \times 3! \neq 4!$$

$$2! + 3! \neq 5!$$

$$(2 \times 1) + (3 \times 2 \times 1) = 2 + 6 = 8$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$\frac{4!}{2!} \neq 3!$$

$$(3!)^2 \neq 6!$$

$$1! - 2! \neq 4!$$

۴- حاصل هریک را به ساده ترین صورت بنویسید.

الف) $4! \times 2 = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 2 = 24 \times 2 = 48$

ب) $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3 \times 2 \times 1}}{\cancel{3 \times 2 \times 1}} = 20$

ج) $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$

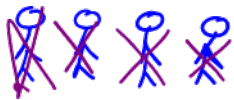
پ) $\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$

$$\text{ت) } \frac{3! \times 5! \times 1!}{7! \times 1!} = \frac{3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{7}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



جایگشت



۵- به چند حالت مختلف ۴ نفر، در یک ردیف کنار هم می توانند بنشینند؟

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4!} = 24$$

هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن n شیء می نامیم، و تعداد این جایگشت ها برابر است با $n!$.

س م ل و پ

۶- با حروف کلمه "سمانه" و بدون تکرار حروف چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟

$$\underline{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5! \quad 120 \text{ یا}$$

$$\underline{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 4!$$

۷- با حروف کلمه "flower" چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟

f l o w e r

۸- با حروف کلمه "flower" چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت؟

$$\underline{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 24$$

۹- با حروف کلمه "flower" چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت؟

$$\underline{3 \times 2 \times 1} = 6$$

ممکنه سوال رو به این صورت مطرح کنه :

تعداد جایگشت های ۳ حرفی از حروف کلمه "flower" را بنویسید.

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



جایگشت های مشروط

۱- فلان چیزها در فلان جا باشد یا نباشد.

~~a~~ ~~b~~ ~~c~~ d۱۰- فرض کنید می خواهیم با حروف d, c, b, a یک کلمه چهار حرفی بنویسیم به طوری که حرف a اول باشد.

$$\frac{1 \times 3 \times 2 \times 1}{*} = 6$$

الگوریتم حل: در این تیپ سوالات، ترتیب پر کردن خانه ها به صورت زیر است:

خانه هایی که باید فلان
شی در آن ها باشدخانه هایی که باید فلان
شی در آن ها نباشد

خانه های بدون شرط

~~a~~ ~~b~~ ~~c~~ w e r

۱۱- با حروف کلمه "answer" و بدون تکرار حروف:

$$\frac{1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{*} = 24$$

الف: چند کلمه ۵ حرفی می توان ساخت که با a شروع و به r ختم شوند؟

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{*} = 24$$

ب: چند کلمه ۴ حرفی می توان ساخت که به a ختم شود و حرف w حرف دوم نباشد؟

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



۲- یک در میان قرار گرفتن اعضای دو گروه

* حالتی که تعداد اعضای یکی از گروه ها، یک عضو بیشتر از گروه دیگر است.

۱۲- به چند طریق می توان ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۳ دانش آموز پایه دهم را یکی در میان کنار هم قرار داد؟

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{*} \times \frac{3 \times 2 \times 1}{*} = 4! \times 3!$$

X

* حالتی که تعداد اعضای دو گروه باهم برابر است.

۱۳- به چند طریق می توان ۳ دانش آموز پایه دوازدهم و ۳ دانش آموز پایه دهم را یکی در میان کنار هم قرار داد؟

$$\frac{3 \times 2 \times 1}{3!} \times \frac{3 \times 2 \times 1}{3!} = 3! \times 3! \rightarrow 2 \times 3! \times 3!$$

دوازدهم ← دهم

$$\frac{3 \times 2 \times 1}{3!} \times \frac{3 \times 2 \times 1}{3!} = 3! \times 3!$$

۳- فلان چیزها در کنار هم باشند.

۱۳- ۳ کتاب ریاضی و ۲ کتاب فلسفه متفاوت را می خواهیم در یک قفسه کنار هم قرار دهیم در چند حالت کتابهای فلسفه کنار هم هستند؟

$$\frac{2 \times 1}{2!} \times \frac{3 \times 2 \times 1}{3!} = 2! \times 3!$$

$$\frac{3 \times 2 \times 1}{3!} \times \frac{2 \times 1}{2!} = 3! \times 2!$$

$$\frac{3 \times 2}{2!} \times \frac{1}{1!} = 3! \times 1!$$

$$\frac{3}{1!} \times \frac{2}{1!} = 3! \times 2!$$

$$\Rightarrow 4 \times 2! \times 3!$$

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4!} = 4! \times 3!$$

روش دوم:

$4 \times 2! \times 3! = 4! \times 3! = 4!$

۱۴- ۳ کتاب زبان، ۲ کتاب فلسفه و ۳ کتاب منطق متفاوت را می خواهیم در یک قفسه کنار هم قرار دهیم در چند حالت کتابهای هم موضوع کنار هم هستند؟

$$\frac{3 \times 2 \times 1}{3!} \times \frac{2 \times 1}{2!} \times \frac{3 \times 2 \times 1}{3!} = 3! \times 2! \times 3! \times 3!$$

۱۵- با حروف کلمه "answer" و بدون تکرار حروف چند کلمه ۶ حرفی می توان ساخت که حروفات "ans" کنارهم باشند؟

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4!} = 4! \times 3!$$



تبدیل r شی از n شی یا جایگشت r شی از n شی

تعداد انتخاب های r شی از بین n شی (که جابجایی یا ترتیب انتخاب مهم باشد) را با نماد $P(n, r)$ نشان می دهیم و بنابر دستور زیر محاسبه می کنیم:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P(5, 2) = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$

$$P(7, 3) = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210$$

نوشتن کلمات
نوشتن اعداد

۱۶- با ارقام ۱، ۲، ۴، ۶، ۸، ۹، چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟ (بدون تکرار)

$$P(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210$$

$$7 \times 6 \times 5 = 210$$

توجه: تمام سوالات مربوط به تبدیل را می توانید با اصل ضرب حل کنید نیازی به فرمول نیست. مگر اینکه سوال مستقیماً محاسبه یک عبارت به شکل $P(n, r)$ را بخواهد.

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



اصل ضرب در عدد نویسی

۱۶- با ارقام ۱ و ۴ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

$$\underline{3} \times \underline{3} \times \underline{3} = 27$$

الف: تکرار ارقام مجاز باشد.

$$\underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 6$$

ب: تکرار ارقام مجاز نباشد.

۴، ۲، ۱

۴۴۴ ۲۲۱، ۲۱۲
۴۴۱ ۲۲۲

۲۴۱
۱۲۴
۲۱۴

۱۷- ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را در نظر بگیرید:

$$\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 5!$$

الف: چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

$$\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} = 120$$

ب: چند عدد ۴ رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

~~۱~~، ~~۲~~، ~~۳~~، ۴، ۵، ۶، ۷

۱۸- با ارقام ۱ تا ۷ چند عدد ۴ رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

$$\underline{7} \times \underline{6} \times \underline{5} \times \underline{4} = 840 = 42 \times 20$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



نکات ساختن اعداد

مثل زوج بودن، فرد بودن، کوچکتر یا بزرگتر از یک عدد خاص بودن و غیره.

برای حل سوالات به نکات زیر توجه کنید:

۱- عددی زوج است که یکان آن (رقم سمت راست آن) زوج باشد یعنی ۰ یا ۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸ باشد.

۲- عددی فرد است که یکان آن، فرد باشد. یعنی: ۱ یا ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹ باشد.

۳- عددی مضرب ۵ است که یکان آن **صفر** یا ۵ باشد.

۴- در ساختن اعداد، اولین رقم سمت چپ نمی تواند صفر باشد ولی ساختن رمز گاو صندوق می شود از صفر هم در اولین رقم سمت چپ استفاده کرد.

۵۲۱۳ ۲۰۱۳

۵- اعداد اول ...، ۱۷، ۱۳، ۱۱، ۷، ۵، ۳، ۲ را به خاطر بسپارید، گاهی در سوالات مطرح می شود.

۱۹- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ بدون تکرار ارقام:

$$\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 5!$$

الف: چند عدد ۵ رقمی می توان ساخت؟

$$\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 120$$

ب: چند عدد ۴ رقمی زوج می توان ساخت؟

$$\underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 24$$

پ: چند عدد ۴ رقمی **فرد** می توان ساخت؟

۲۰- با ارقام ۹، ۸، ۷، ۶ و بدون تکرار ارقام:

$$\frac{4 \times 3 \times 2}{1} = 24$$

الف: چند عدد ۳ رقمی زوج می توان نوشت؟

$$\frac{4 \times 3 \times 2}{1} = 24$$

ب: چند عدد ۳ رقمی فرد می توان نوشت؟

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



۲۱- با ارقام ۵، ۴، ۳ و بدون تکرار ارقام:

$$\frac{3 \times 2 \times 1}{1} = 6$$

الف: چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۴۰۰ می توان ساخت؟

$$\frac{2 \times 1 \times 1}{1} = 2$$

ب: چند عدد سه رقمی کوچکتر از ۴۰۰ می توان ساخت؟

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 24$$

پ: چند عدد ۴ رقمی می توان ساخت که یکان آن، عددی اول باشد؟

$$2, 3, 5, 7, 11, \dots$$

۲۲- با ارقام ۴، ۳، ۲، ۱ و بدون تکرار ارقام چند عدد ۵ رقمی می توان نوشت؟

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 24$$

۲۳- با ارقام ۶، ۵، ۴ و بدون تکرار ارقام چند عدد ۳ رقمی می توان نوشت؟

$$\frac{3 \times 2 \times 1}{1} = 6$$

تذکر: در مسایل عدد نویسی (بدون تکرار ارقام) اگر شرط سوال " زوج بودن " یا " مضرب ۵ بودن " باشد. در دو حالت زیر حساب

می کنیم.

۲- یکان صفر نباشد.

۱- یکان صفر باشد.

۲۳- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد ۴ رقمی بخش پذیر بر ۵ می توان نوشت؟

حالت اول: رقم یکان صفر باشد

$$\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{1} = 40$$
 فقط ۵

$$\Rightarrow 40 + 48 = 88$$

حالت دوم: رقم یکان ۵ باشد

$$\underline{4} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{1} = 48$$
 فقط ۵

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



۲۲- ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ مفروض اند، بدون تکرار ارقام چند عدد ۵ رقمی و زوج می توان نوشت؟

حالت اول: رقم یکان صفر باشد

$$\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 120$$
 فقط ۵ صفر

$$\Rightarrow 120 + 192 = 312$$

حالت دوم: رقم یکان ۵ باشد

$$\underline{4} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{2} = 192$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



اصل متمم

کل حالت ها

حالت های نامطلوب

حالت هایی که به دنبالش هستیم

۲۳- ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ مفروض اند، بدون تکرار ارقام چند عدد ۵ رقمی و زوج می توان نوشت؟

اعداد زوج = اعداد فرد - کل اعداد

کل اعداد: $\underline{5} \times \underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} = 400$

اعداد فرد: $\underline{4} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{3} = 288$

اعداد زوج $\Rightarrow 400 - 288 = 112$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



ترکیب

ترکیب انتخاب از اشیا است که در آن ترتیب مهم نیست.

تعداد راه های ترکیب (انتخاب) r شی از بین n شی متمایز که ترتیب قرار گرفتن آن ها مهم نیست را فرمول زیر حساب می کنیم.

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! 3!} = \frac{5 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{2} \times 1 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 10 \quad \left| \quad \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

$$\binom{1}{3} = \frac{1!}{3! 0!} = \frac{1 \times \cancel{0} \times \cancel{0} \times \cancel{0}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1} \times \cancel{0}} = 1 \quad \left| \quad \binom{1}{3} = \frac{1 \times \cancel{0} \times \cancel{0}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 1$$

۲۴- به چند طریق می توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{6! 3!} = \frac{\cancel{9} \times \cancel{8} \times \cancel{7} \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4}}{\cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 84 \quad \left\{ \quad \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84 \right.$$

۲۵- مجموعه ۸ عضوی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ چند زیر مجموعه ۳ عضوی دارد؟

$$\binom{1}{3} = \frac{1 \times \cancel{0} \times \cancel{0}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 1$$

$\{a, b, c\}$ — برابرند
 $\{b, a, c\}$ — ترتیب مهم نیست

روابطی که محاسبات ترکیب را سریع می کند.

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{5}{1} = 5$$

$$\binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{4}{0} = 1$$

$$\binom{4}{3} = 4$$

$$\binom{9}{4} = \binom{9}{5}$$

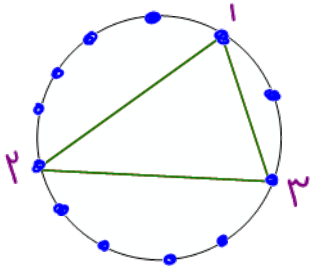
$$\frac{5!}{1! 4!} = \frac{5 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 5$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

۲۶- روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید.

الف: با این ۱۲ نقطه چه تعداد مثلث می توان تشکیل داد؟



$$\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

۳ نقطه

ب: چه تعداد چهار ضلعی می توان تشکیل داد؟

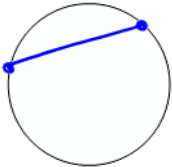
$$\binom{12}{4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

۴ نقطه

پ: چه تعداد وتر می توان تشکیل داد؟

$$\binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2 \times 1} = 66$$

۲ نقطه



بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



چند انتخاب در یک سوال

۲۷- از بین ۶ دانش آموز دوازدهمی و ۵ دانش آموز یازدهمی می خواهیم یک گروه ۴ نفری تشکیل دهیم به طوری که یک نفر از پایه دوازدهم

و ۳ نفر از پایه یازدهم باشد. به چند طریق این کار می توان انجام داد؟

۱ → ۴ دوازدهم

۳ → ۵ یازدهم

$$\binom{4}{1} \binom{5}{3} = 4 \times 10 = 40$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10 \quad \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

۲۸- در جعبه ای ۶ مهره قرمز و ۴ مهره آبی وجود دارد. به چند طریق می توان ۳ مهره از این خارج کرد به طوری که ۲ مهره آبی و یک مهره

قرمز باشد؟

۱ → ۴ قرمز
۲ → ۴ آبی

$$\binom{4}{1} \binom{4}{2} = 4 \times 6 = 24$$

$$\frac{4 \times 3}{2} = 6$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



روش حل سوالاتی که کلمات فلان شی باشد یا نباشد... را دارند.

۲۹- از یک تیم ۷ نفره می خواهیم یک گروه ۴ نفره انتخاب کنیم به طوری که علی در این گروه نباشد. این کار را به چند طریق می توانیم انجام

دهیم؟

روش دوم: $\left\{ \begin{array}{l} \binom{7-1}{4} = \binom{6}{4} \\ \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \end{array} \right.$

علی ~~○~~ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

۳۰- به چند طریق می توانیم از بین ۷ نفر یک تیم ۴ نفره تشکیل دهیم به طوری که علی حتما در این تیم باشد؟

روش دوم (با استفاده از فرمول) $\left\{ \begin{array}{l} \binom{7-1}{4-1} = \binom{6}{3} \\ \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20 \end{array} \right.$

علی ~~○~~ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

علی _____

۳۱- به چند طریق می توانیم از بین ۷ نفر یک تیم ۴ نفره تشکیل دهیم به طوری که علی حتما در این تیم باشد ولی بهزاد در آن نباشد؟

روش دوم (با استفاده از فرمول) $\left\{ \begin{array}{l} \binom{7-1-1}{4-1} = \binom{5}{3} \\ \binom{5}{3} = 10 \end{array} \right.$

علی ~~○~~ ~~○~~ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

بهزاد ~~○~~ _____

علی _____

نکته: برای حل سوالاتی مثل سوال قبل می توان از فرمول زیر استفاده کرد:

تعداد حالت های ترکیب k از n به طوری که a در آن باشد و b در آن نباشد برابر است با:

$$\binom{n-a-b}{k-a}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸

۳۲- مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$ چند زیر مجموعه ۳ عضوی و شامل رقم ۲ دارد؟

با استفاده از فرمول: $\left\{ \begin{array}{l} \binom{8-1}{3-1} = \binom{7}{2} \\ \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21 \end{array} \right.$

$\{ \underline{2}, \underline{\quad}, \underline{\quad} \}$

۳۳- مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ چند زیر مجموعه ۵ عضوی شامل عدد ۱ و ۳ دارد؟

با استفاده از فرمول: $\left\{ \begin{array}{l} \binom{7-2}{5-2} = \binom{5}{3} \\ \binom{5}{3} = 10 \end{array} \right.$

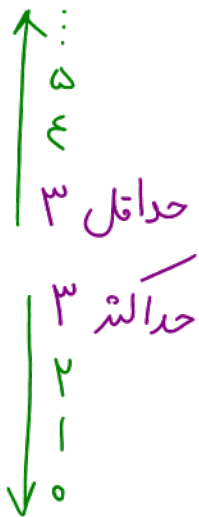
$\{ \underline{1}, \underline{3}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad} \}$

۳۴ - $\{1, 2, 4, 6, 8\}$ تعداد زیر مجموعه های ۳ عضوی که شامل ۷ و ۸ نباشد.

$$\{ \text{---} \} \quad \binom{4}{3} = 4$$

$$\left\{ \binom{4-2}{3} = \binom{2}{3} \right\}$$

با استفاده از فرمول:



روش حل سوالاتی که کلمات حداقل و حداکثر را دارند.

گروهی با حداقل k عضو: یعنی k عضو یا $k+1$ یا $k+2$ یا $k+3$...

مثال: گروهی با حداقل ۳ عضو یعنی: ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ ...

گروهی با حداکثر k عضو: یعنی k عضو یا $k-1$ یا $k-2$ یا $k-3$...

مثال: گروهی با حداکثر ۳ عضو یعنی: ۳ عضو یا ۲ عضو یا ۱ عضو یا ۰ عضو

$$\frac{4 \times 4}{2} = 10$$

$$\frac{4 \times 3}{2} = 6$$

۳۵ - به چند طریق می توان از بین ۵ مرد و ۴ زن، ۵ نفر را انتخاب کرد به طوری که:

الف: حداکثر ۳ زن باشد؟

$$\binom{4}{3} \binom{5}{0} + \binom{4}{2} \binom{5}{1} + \binom{4}{1} \binom{5}{2} + \binom{4}{0} \binom{5}{3}$$

$$4 \times 10 + 6 \times 10 + 4 \times 10 + 1 \times 1 = 40 + 60 + 40 + 1 = 141$$

۳ زن و ۲ مرد

۲ زن و ۳ مرد

۱ زن و ۴ مرد

۰ زن و ۵ مرد

ب: حداقل ۳ زن باشد.

$$\binom{4}{3} \binom{5}{3} + \binom{4}{2} \binom{5}{4} = 4 \times 10 + 1 \times 5 = 40 + 5 = 45$$

۳ زن و ۲ مرد

۴ زن و ۱ مرد

~~کتاب~~

۳۶- می خواهیم از بین ۴ دانش آموز پایه دهم و ۵ دانش آموز پایه دوازدهم، یک تیم ۵ نفره فوتبال تشکیل دهیم به طوری که حداقل ۴ نفر از پایه دوازدهم باشد.

$$\binom{5}{4} \binom{4}{1} + \binom{5}{5} \binom{4}{0} = 5 \times 4 + 1 \times 1 = 21$$

۴ دوازدهم و ۱ دهم
۵ دوازدهم و ۰ دهم

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



نکاتی برای تشخیص مسایل ترکیب و جایگشت

ترتیب مهم نیست	ترتیب مهم است	
۱- ساختن یک گروه ۲- انتخاب تعدادی شی و خارج کردن آن ها ۳- تعداد زیر مجموعه	۱- چیدن تعدادی شی ۲- ساختن اعدادهای چند رقمی با کمک اعداد داده شده ۳- ساختن کلمه با حروف داده شده ۴- برداشتن اشیا به ترتیب از یک ظرف (تا تمام شود...)	کلمات کلیدی در سوال
ترکیب $\binom{n}{r}$	فاکتوریل و اصل ضرب	محاسبه کن با ...

درس ۲: احتمال

آزمایش تصادفی: به پدیده ها و آزمایش هایی که نمی توان نتیجه آن ها را پیش از وقوع، به طور قطع تعیین کرد، پدیده ها یا آزمایش های تصادفی می گوئیم.

آزمایش قطعی: به پدیده ها و آزمایش هایی که می توان نتیجه آن ها را پیش از وقوع، به طور قطع تعیین کرد، پدیده ها یا آزمایش های قطعی می گوئیم.

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



فضای نمونه

* مجموعه همه برآمدهای ممکن در یک آزمایش تصادفی، مجموعه ای را تشکیل می دهد که به آن فضای نمونه می گوئیم. و آن را با حرف **S** نمایش می دهیم.

$$S = \{ر, س\} \quad n(S) = 2$$

۳۷- فضای نمونه پرتاب یک سکه را بنویسید.

$$S = \{(\underline{ر, ر}), (\underline{ر, س}), (\underline{س, ر}), (\underline{س, س})\} \quad n(S) = 2 \times 2 = 4$$

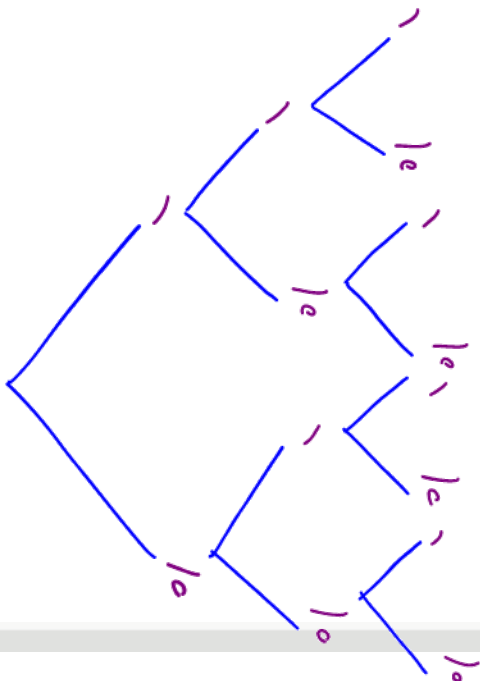
۳۸- فضای نمونه پرتاب دو سکه را بنویسید.

۳۹- فضای نمونه پرتاب سه سکه را بنویسید.

$$S = \{(\underline{ر, ر, ر}), (\underline{ر, ر, س}), (\underline{ر, س, ر}), (\underline{ر, س, س}), (\underline{س, ر, ر}), (\underline{س, ر, س}), (\underline{س, س, ر}), (\underline{س, س, س})\}$$

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8 \quad n(S) = 2^{\text{تعداد سکه}} = 2^3 = 8$$

نوشتن فضای نمونه با استفاده از روش درختی



۴۰- فضای نمونه تولد یک فرزند را بنویسید.

$$S = \{د, =\} \quad n(S) = 2 \rightarrow 2^1 = 2$$

$$S = \{(د, د), (د, =), (=, د), (=, =)\} \quad n(S) = 2 \times 2 = 4$$

۴۱- فضای نمونه تولد ۲ فرزند را بنویسید.

$$S = \{(د, د, د), (د, د, =), (د, =, د), (=, د, د), (=, =, د), (=, د, =), (=, =, =)\}$$

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8 \quad n(S) = 2^3 = 8$$

۴۲- فضای نمونه تولد ۳ فرزند را بنویسید.

۴۳- فضای نمونه پرتاب یک تاس را بنویسید.

$$n(S) = 6 \quad S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

۴۴- فضای نمونه پرتاب ۲ تاس را بنویسید.

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$$

$$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$$

$$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$$

$$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$$

$$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),$$

$$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$n(S) = 2 \times 6 = 12$$

۴۵- فضای نمونه پرتاب یک سکه و یک تاس را بنویسید.

$$S = \{(د, 1), (د, 2), (د, 3), (د, 4), (د, 5), (د, 6), (=, 1), (=, 2), (=, 3), (=, 4), (=, 5), (=, 6)\}$$

پیشامد

به هر یک از زیر مجموعه های فضای نمونه S یک پیشامد می گویند.

۴۶- مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ را در نظر بگیرید. پیشامد های خواسته شده را بنویسید.

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

الف: پیشامد آنکه اعداد اول باشد.

$$C = \{9, 10\}$$

ب: پیشامد آنکه اعداد بزرگتر از ۸ باشد.

۴۷- دو سکه را پرتاب می کنیم پیشامد آنکه هر دو سکه رو بیاید را بنویسید.

$$S = \{(\text{رو}, \text{رو}), (\text{رو}, \text{ع}), (\text{ع}, \text{رو}), (\text{ع}, \text{ع})\}$$

$$A = \{(\text{رو}, \text{رو})\}$$

۴۸- یک تاس را پرتاب می کنیم پیشامد آنکه اعداد رو شده کوچکتر از ۴ باشد را بنویسید.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow B = \{1, 2, 3\}$$

۴۹- خانواده ای دو فرزند دارد پیشامد آنکه هر دو فرزند هم جنس باشد را بنویسید.

$$S = \{(\text{د}, \text{د}), (\text{د}, \text{ع}), (\text{ع}, \text{د}), (\text{ع}, \text{ع})\} \rightarrow C = \{(\text{د}, \text{د}), (\text{ع}, \text{ع})\}$$

۵۰- دو تاس را پرتاب می کنیم پیشامد آن که مجموع اعداد رو شده برابر ۸ باشد را بنویسید.

$$D = \{(2, 6), (6, 2), (5, 3), (3, 5), (4, 4)\}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



۵۱- در یک برنامه کوهنوردی، ۵ دانش آموز سال دهم، ۶ دانش آموز سال یازدهم و ۴ دانش آموز سال دوازدهم شرکت دارند. قرار است یک گروه پیشتاز ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد عضوهای پیشامد زیر را مشخص کنید.

$$5 \text{ دهم} \rightarrow 1$$

$$4 \text{ یازدهم} \rightarrow 1$$

$$4 \text{ دوازدهم} \rightarrow 1$$

الف: سه نفر دانش آموز پیشتاز از سه پایه مختلف باشند.

$$\binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{4}{1} = 5 \times 4 \times 4 = 120$$

ب: حداقل ۲ دانش آموز در این گروه پیشتاز از دانش آموزان سال یازدهم باشند.



$$\binom{4}{2} \binom{9}{1} + \binom{4}{1} \binom{9}{2} = 15 \times 9 + 20 \times 1 = 135 + 20 = 155$$

$$2 \text{ یازدهم و ۱ بقیه}$$

$$3 \text{ یازدهم و ۰ بقیه}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



پیشامد غیرممکن (نشدنی): تهی زیر مجموعه هر مجموعه ای است. پس $\emptyset$ یک پیشامد روی S است. و آن را پیشامد غیر ممکن یا نشدنی می

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\emptyset \text{ یا } \{\}$$

گوییم.

مثال: در پرتاب یک تاس پیشامد آن که عدد رو شده بزرگتر از ۱۰ باشد یک پیشامد غیر ممکن است.

پیشامد حتمی (S): هر مجموعه ای زیر مجموعه خودش است. پس S یک پیشامد روی S است و آن را پیشامد حتمی می نامیم.

مثال: در پرتاب یک تاس، پیشامد آن که عدد رو شده کوچکتر از ۷ باشد. یک پیشامد حتمی است. (یعنی حتما رخ می دهد)

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



اعمال بر روی پیشامدها

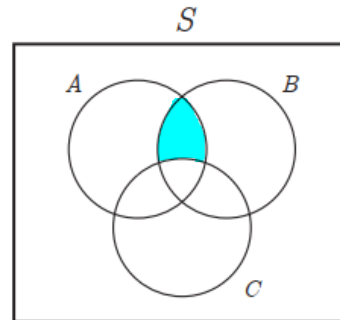
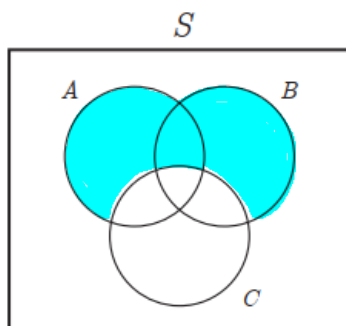
نمایش	$A \cap B =$ $\{x \in S x \in A \wedge x \in B\}$	$A \cup B =$ $\{x \in S x \in A \vee x \in B\}$	$A - B =$ $\{x \in S x \in B \wedge x \notin A\}$	$A' = \{x \in S x \notin A\}$
نام فارسی	اشتراک پیشامدها	اجتماع پیشامدها	تفاضل پیشامدها	متمم یک پیشامد
نمایش هندسی				
توصیف فارسی	پیشامد A و B همزمان رخ دهند.	حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ دهند. (A یا B یا هر دو)	پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد. فقط A رخ دهد.	پیشامد A رخ ندهد.

$$A \cap A' = \emptyset$$

۵۱- فرض کنید A و B و C سه پیشامد در فضای نمونه S باشند. هریک از پیشامدهای زیر را روی نمودار سایه بزنید.

ب: $(A \cup B) - C$

الف: A و B رخ دهند ولی C رخ ندهد.



بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{2\}$$

$$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$C = \{4, 6\}$$

$$D = \{3, 5\}$$

$$E = \{1, 4, 6\}$$

۵۲- تاسی را پرتاب می کنیم هریک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

الف: پیشامد اینکه عدد رو شده زوج و اول باشد.

اصغر

ب: پیشامد اینکه عدد رو شده زوج یا اول باشد.

اجتماع

پ: پیشامد اینکه عدد رو شده زوج باشد ولی اول نباشد.

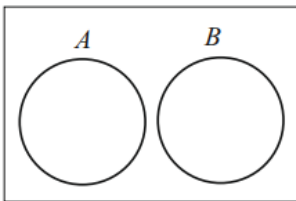
ت: پیشامد اینکه عدد رو شده اول باشد ولی زوج نباشد.

ث: پیشامد اینکه عدد رو شده اول نباشد.

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



S



پیشامدهای ناسازگار: اگر دو پیشامد هیچ عضو مشترکی نداشته باشند می گوئیم ناسازگارند.

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A - B = A$$

$$B - A = B$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



$$\frac{30}{30} = 1$$

$$\frac{5}{5} = 1$$

محاسبه احتمال یک پیشامد

در حالت کلی، احتمال وقوع یک پیشامد از رابطه زیر به دست می آید:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد عضوهای پیشامد } A}{\text{تعداد عضوهای فضای نمونه}}$$

۵۳- مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ را در نظر بگیرید. مطلوب است احتمال آنکه:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{10}$$

الف: اعداد اول باشد.

ب: اعداد بزرگتر از ۸ باشد.

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{10}$$

۵۴- دو سکه را پرتاب می کنیم احتمال آنکه هر دو سکه رو بیاید را بدست آورید.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

$$n(S) = 2 \times 2 = 4$$

$$S = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

۵۵- یک تاس را پرتاب می کنیم احتمال آنکه اعداد رو شده کوچکتر از ۴ باشد را بنویسید.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

۵۶- خانواده ای دو فرزند دارد احتمال آنکه هر دو فرزند هم جنس باشد را بنویسید.

$$S = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4}$$

۵۷- در خانواده ای با ۳ فرزند با چه احتمالی فرزند اول و آخر هم جنس هستند؟

$$S = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)\}$$

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

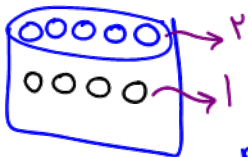
بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



مسایلی که با انتخاب سر و کار دارند

۵۸- در جعبه ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه یکسان قرار دارد. به تصادف ۳ مهره خارج می کنیم. با کدام احتمال، ۲ مهره سفید و یک مهره

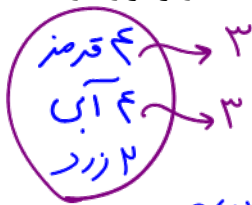
سیاه خارج می شود؟



$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{2} \binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{10 \times 4}{126} = \frac{40}{126} = \frac{10}{31}$$

۵۹- در یک فروشگاه ورزشی تعدادی پیراهن ورزشی شامل ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد در یک رخت آویز قرار دارند. شخصی در خواست می کند که فروشنده به طور تصادفی ۳ پیراهن انتخاب کند و برای بفرستد.

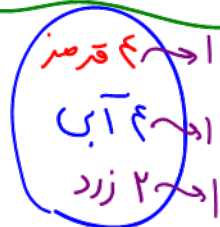
الف: احتمال این را که ۳ پیراهن از یک رنگ باشد، محاسبه کنید.



$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{3} + \binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4 + 4}{120} = \frac{1}{15}$$

۳ قرمز + ۳ آبی

ب: احتمال این را که ۳ پیراهن متفاوت باشد، محاسبه کنید.



$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{1} \binom{4}{1} \binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{4 \times 4 \times 2}{120} = \frac{32}{120}$$

پ: احتمال این را که حداقل ۲ پیراهن قرمز باشند، محاسبه کنید.



$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{2} \binom{4}{1} + \binom{4}{2} \binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} =$$

۲ قرمز و ۱ آبی
یا
۳ قرمز و ۰ آبی

$$\frac{6 \times 4 + 6 \times 1}{120} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



مسایلی که با اصل ضرب و جایگشت سر و کار دارند

○○○○×

۶۰- با ۵ نفر می خواهیم یک صف تشکیل دهیم با چه احتمالی علی در ابتدای صف قرار می گیرد؟

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{4!}{5!} = \frac{4!}{5 \times 4!} = \frac{1}{5}$$

۶۱- با ارقام ۲، ۴، ۵، ۶ و بدون تکرار ارقام عدد ۵ رقمی می سازیم با چه احتمالی این عدد فرد است؟

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{4! \times 2}{5!} = \frac{4! \times 2}{5 \times 4!} = \frac{2}{5}$$

مسائل مربوط به روز، ماه و فصل

۱۳۸۵: فروردین اسفند

۶۲- یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف: هر پنج نفر در ماه فروردین متولد شده باشند.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1}{12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12} = \frac{1}{12^5}$$

۱۲ ۱ ۱ ۱ ۱


ب: هر پنج نفر آنها در یک ماه از سال متولد شده باشند.

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1}{12^4} = \frac{1}{12^4}$$

۱۲ ۱۱ ۱ ۱ ۱


پ: تولد هیچ دو تای آنها در یک ماه نباشد.

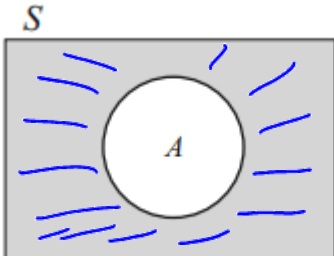
$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{11 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{12^4} = \frac{11 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{12^4}$$

۱۲ ۱۱ ۱۰ ۹ ۸


بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



احتمال پیشامد متمم

اگر $P(A)$ احتمال وقوع پیشامد A در فضای نمونه S باشد، در این صورت، احتمال واقع نشدن آن پیشامد را با $P(A')$ نمایش می دهیم.

$$P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow \begin{cases} P(A') = 1 - P(A) \\ P(A) = 1 - P(A') \end{cases}$$

۶۳- احتمال اینکه فردا بارانی باشد برابر با $\frac{1}{10}$ است. مطلوبست محاسبه احتمال اینکه فردا بارانی نباشد.

$$P(A') = 1 - P(A) = \frac{1 \times 1}{10} = \frac{9}{10}$$

۶۳- احتمال اینکه ریحانه امشب سریال شبکه یک سیما را تماشا نکند برابر با $\frac{32}{49}$ است. مطلوبست محاسبه احتمال اینکه ریحانه امشب سریال را تماشا کند.

$$p(A') = 1 - p(A) = \frac{1 \times 49}{1 \times 49} - \frac{32}{49} = \frac{17}{49}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



تذکره: کلمات لااقل، حداقل، نباشد و حداکثر نشانه متمم می‌باشد. یعنی حالت خواسته شده را حساب و از ۱ کم می‌کنیم. البته ممکن است با وجود این

نشانه‌ها باز هم حل مستقیم سوال راحت تر باشد.

۶۴- در یک فروشگاه ورزشی تعدادی پیراهن ورزشی شامل ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد در یک رخت آویز قرار دارند. شخصی در خواست می‌کند که فروشنده به طور تصادفی ۳ پیراهن انتخاب کند و برای بفرستد. احتمال اینکه رنگ سه پیراهن آبی نباشد، محاسبه کنید. **روش اول: (روش مستقیم)**

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{2} \binom{2}{1} + \binom{4}{1} \binom{2}{2} + \binom{4}{0} \binom{2}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{6 \times 2 + 4 \times 1 + 1 \times 0}{120} = \frac{14}{120}$$

$\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ $\binom{2}{1} = \frac{2 \times 1}{1} = 2$ $\binom{4}{1} = \frac{4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 1} = 4$ $\binom{2}{2} = \frac{2 \times 1}{2 \times 1} = 1$ $\binom{4}{0} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1$ $\binom{2}{3} = 0$

۲ آبی و ۲ بقیه
 ۱ آبی و ۲ بقیه
 ۰ آبی و ۳ بقیه

روش دوم: (با استفاده از متمم)

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1 \times 120}{1 \times 120} - \frac{4}{120} = \frac{116}{120}$$

۴ آبی ← ۳
 ۴ قرمز
 ۲ زرد

درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل

حل کردن مسئله های مرتبط با آمار به صورت چرخه ای شامل گام های: ۱. بیان مسئله ۲. طرح و برنامه ریزی ۳. گردآوری و پاک سازی داده ها، ۴. تحلیل داده ها و ۵. بحث و نتیجه گیری است.



گام اول (بیان مسئله)

طرح یک پرسش دقیق و شفاف، مهمترین گام برای رسیدن به پاسخ است.

گام دوم (طرح و برنامه ریزی)

اندازه گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده ها و بررسی تغییر مورد نظر است. در اندازه گیری، سعی می کنیم اطلاعات توصیفی (کیفی) را تا حد ممکن به اطلاعات کمی (عددی) تبدیل کنیم. انتخاب معیار اندازه گیری مناسب برای متغیرهایی مانند قد، وزن و دما آسان است؛ زیرا با ابزارهای آشنا می توانیم توصیف هایی مانند "قد بلند"، "وزن مناسب" یا "هوای گرم" را به کمیت هایی قابل فهم برای همه تبدیل کنیم. با توجه به اهمیت اندازه گیری، می توان به نقش حیاتی حضور متخصصان در گروه هدایت کننده پژوهش اشاره کرد. متخصصان، ابزارهای اندازه گیری یا پرسشنامه ها را طوری طراحی می کنند که بتوانیم متغیرهای مورد نظر را به درستی اندازه بگیریم.

*در مرحله طرح و برنامه ریزی، علاوه بر توافق درباره چگونگی اندازه گیری متغیرها، درباره اندازه نمونه، روش نمونه گیری و شیوه تحلیل داده ها نیز تصمیم گیری می شود.

- اندازه جامعه: تعداد اعضای جامعه مورد مطالعه.

- اندازه نمونه: تعداد اعضای انتخاب شده از جامعه.

* هرچه پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد، برای اطمینان از تنوع در نمونه، به اندازه نمونه بزرگتری نیاز داریم.

مثال

در کدام مورد اندازه نمونه بزرگتری لازم است؟

۱) سن دانش‌آموزان یک کلاس

۳) مدت زمان مطالعه افراد یک محله

۲) وزن بچه‌های یک مدرسه

۴) میزان آب مصرفی خانواده‌های یک کشور

قطعاً پراکندگی افراد در کل کشور و همچنین تعداد اعضای آنها بسیار بیشتر از سایر گزینه‌هاست پس برای بررسی آب مصرفی خانواده‌های کشور، نیاز به نمونه بزرگتری خواهیم داشت.

۶۵- برای بررسی وضعیت اجتماعی-اقتصادی خانوارهای یک شهر، در کدامیک از شیوه‌های نمونه‌گیری زیر، همه قشرهای جامعه شانس حضور ندارند؟ چرا؟

الف) انتخاب تصادفی خانوارها براساس **رقم اول تلفن خانه‌ها**، مناسب نیست.

ب) انتخاب تصادفی خانوارها براساس **رقم آخر تلفن خانه‌ها**، مناسب است.

گام سوم (گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها)

در هر مطالعه ممکن است در مرحله اندازه‌گیری، گردآوری یا ثبت داده‌ها، یا وارد کردن داده‌ها در نرم‌افزار اشتباهی رخ دهد. با بررسی دقیق داده‌ها می‌توان برخی از این اشتباه‌ها را تصحیح کرد.

گام چهارم (تحلیل داده‌ها)

در این مرحله، داده‌ها را تحلیل می‌کنیم و نتایج را ارائه می‌دهیم. منظور از تحلیل داده‌ها، صرفاً گزارش معیارها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج آماری است. تفسیر این نتایج و نتیجه‌گیری از آن‌ها در گام بعد انجام خواهد شد.

مثال: در کلاس دوازدهم به بررسی سن و میزان ساعت‌های تماشای تلویزیون می‌پردازیم.

الف) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی برای توصیف داده‌های متغیر «سن» مناسب‌اند؟ چرا؟

با توجه به توزیع داده‌ها، برای متغیر «سن» میانگین و انحراف استاندارد (انحراف معیار) معیارهای مناسبی هستند؛ زیرا داده‌های دورافتاده مشاهده نمی‌شود.

ب) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی برای توصیف داده‌های «ساعت‌های تماشای تلویزیون» مناسب‌اند؟ چرا؟
میانه و دامنه میان‌چارکی معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی مناسبی هستند؛ زیرا چند داده دورافتاده وجود دارد.

مثال:

الف) کدام نمودار بهتر نشان می‌دهد که داده‌ها کجا متراکم‌تر و کجا پراکنده‌ترند: نمودار نمایش‌دهنده میانگین و انحراف معیار یا نمودار جعبه‌ای؟

پاسخ: نمودار جعبه‌ای.

ب) اگر از الگوی توزیع داده‌ها و وجود داده‌های دورافتاده اطلاعی نداشته باشیم، کدام نمودار برای نمایش اطلاعات متغیرهای کمی مطمئن است؟

پاسخ: مطمئن‌ترین نمودار برای متغیر کمی، نمودار جعبه‌ای است.

کار در کلاس (صفحه ۲۵ و ۲۶ کتاب درسی)

دو مدرسه متوسطه دوم که تعداد دانش‌آموزانشان تقریباً برابر بود، در سال گذشته با تغییر برنامه‌ها و کادر آموزشی‌شان، وضعیت قبولی دانش‌آموزان خود را در دانشگاه‌های برتر کشور بهبود دادند. مدرسه اول قبولی‌هایش ۲۰ درصد افزایش داشت و مدرسه دوم ۲۰ درصد. فرض می‌کنیم اولیا برای انتخاب مدرسه فرزندان خود محدودیتی ندارند.

الف) در این مسئله، متغیر «قبولی» در ۱۵ دانشگاه برتر کشور (قبول شدن یا قبول نشدن) چه نوع متغیری است؟ کمی یا کیفی؟
پاسخ: کیفی.

$$\begin{array}{l} 3 \xrightarrow{\%20} 1 \text{ مدرسه اول} \\ 84 \xrightarrow{\%20} 70 \text{ مدرسه دوم} \end{array}$$

ب) با توجه به این اطلاعات، کدام مدرسه را به اولیا پیشنهاد می‌کنید؟

پاسخ: بدون گزارش تعداد، نمی‌توان نتیجه‌گیری کرد.

پ) فرض کنید در مدرسه اول، تعداد قبولی‌ها قبل از تغییر ۱ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی به ۳ نفر رسیده است (۲۰۰ درصد افزایش) و در مدرسه دوم، تعداد قبولی‌ها از ۷۰ نفر به ۸۴ نفر رسیده است (۲۰ درصد افزایش). اکنون کدام مدرسه را پیشنهاد می‌کنید؟
پاسخ: مدرسه دوم.

ت) در گزارش متغیرهای کیفی، با توجه به مثال، ارائه درصد بدون مشخص کردن تعداد می‌تواند گمراه‌کننده باشد.

نکته: برای توصیف داده‌های کیفی (اسمی یا ترتیبی)، گزارش درصد باید همیشه همراه با گزارش تعداد باشد.



گام پنجم (بحث و نتیجه گیری)

پس از تحلیل داده‌ها، باید بتوانیم با تفسیر نتایج، پاسخی برای مسئله اصلی پیدا کنیم. در تفسیر نتایج، توجه به محدودیت‌های مطالعه بسیار مهم است. روش کار و محدودیت‌های آن باید به صورت صادقانه گزارش شود تا اگر دیگران تصمیم به انجام مطالعه‌ای مشابه گرفتند، با مشکلاتی مشابه مواجه شوند. پیشنهادهای ما می‌تواند به این افراد کمک کند.

اگر نمونه‌گیری و تحلیل داده‌ها به درستی انجام شده باشد، در بهترین حالت می‌توانیم نتایج را فقط به جامعه آماری مورد بررسی تعمیم دهیم. توجه کنید که اگر تمام افراد جامعه را بررسی نکرده‌ایم، نتایج قطعی نیستند؛ زیرا در نمونه‌گیری دیگری از همان جامعه، افراد متفاوتی ممکن است انتخاب شوند و نتایج تغییر کند.

از جامعه‌ای با اندازه N به چند طریق می‌توانیم نمونه‌هایی با اندازه n داشته باشیم؟ پاسخ: $\binom{N}{n}$

مثال: از جامعه‌ای با اندازه ۱۸، به چند طریق می‌توان نمونه‌هایی با اندازه ۵ انتخاب کرد؟

پاسخ: $\binom{18}{5}$

یکپارچگی چرخه آمار در حل مسائل

همان‌طور که مشاهده شد، در تمام گام‌های حل مسئله آماری، شناخت دقیق مسئله، متغیرها و عوامل مرتبط با آن‌ها ضروری است. این امر بدون کار گروهی و همکاری متخصصان حوزه پژوهش ممکن نیست. برای مثال:

- اگر آمارگیران از اهداف کلی مطالعه اطلاع نداشته باشند، یا
- اگر تحلیلگر داده‌ها ویژگی‌های جامعه آماری یا موضوع مطالعه را به خوبی نشناسد، حتی با انجام دقیق تکالیف فردی، نتیجه نهایی مطلوب نخواهد بود.

نکته کلیدی:

اگر مطالعه در منطقه‌ای انجام می‌شود که ویژگی‌های آن را به خوبی نمی‌شناسیم، در تمام مراحل باید به دانش و دیدگاه اهالی منطقه اولویت دهیم.

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



جمع بندی +

ترتیب گام	نام گام	توضیح گام
۱	بیان مسئله	مسئله ای را که در دنیای واقعی وجود دارد به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می کنیم.
۲	طرح و برنامه ریزی	راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می کنیم. به نمونه گیری ، شیوه اندازه گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می اندیشیم.
۳	گردآوری و پاک سازی داده ها	داده ها را گردآوری می کنیم و تا حد ممکن از درستی آنها مطمئن می شویم.
۴	تحلیل داده ها	با استفاده از معیارها ، نمودارها و مفاهیمی که آموخته ایم ، نتایج را متناسب با هدف های کارمان ، نوع متغیرها و ویژگی های داده ها گزارش می کنیم.
۵	بحث و نتیجه گیری	نتایج به دست آمده را تفسیر می کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می کنیم.

گام اول	گام دوم	گام سوم	گام چهارم	گام پنجم
بیان مسئله	طرح و برنامه ریزی	گردآوری و پاک سازی داده ها	تحلیل داده ها	بحث و نتیجه گیری
- فهم مسئله - تعریف دقیق مسئله	- شیوه اندازه گیری - روش نمونه گیری - روش کار	- گردآوری - سازماندهی - پاک سازی	- مرتب کردن داده ها - معیارها - نمودارها و جدول ها	- تفسیر نتایج - نتیجه گیری - نقد و بررسی - ایده های جدید

واریانس و انحراف معیار

واریانس همان میانگین مجزورات اختلاف داده ها از میانگین است. واریانس به کمک رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

به جذر واریانس ، انحراف معیار گفته می شود . و با نماد σ نمایش می دهند.

۶۶- واریانس و انحراف معیار داده های ۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷ را بدست آورید.

$$\bar{x} = \frac{7+5+3+1}{4} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{(7-4)^2 + (5-4)^2 + (3-4)^2 + (1-4)^2}{4} = \frac{9+1+1+9}{4} = 5$$

واریانس

$$\sigma = \sqrt{5} \quad \text{انحراف معیار}$$

۶۷- واریانس و انحراف معیار داده های ۱۳، ۱۸، ۱۶، ۲۷، ۲۱، ۲۵ را بدست آورید.

$$\bar{x} = \frac{13+18+14+27+21+25}{6} = \frac{120}{6} = 20$$

$$s^2 = \frac{(13-20)^2 + (18-20)^2 + (14-20)^2 + (27-20)^2 + (21-20)^2 + (25-20)^2}{6} = \frac{49+4+14+49+1+25}{6} = 144$$

$$s = \sqrt{144} = 12 \quad \text{انحراف معیار}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



چارک ها و دامنه میان چارکی (IQR)

چارک ها: سه تا چارک داریم: چارک اول (Q_1)، چارک دوم (Q_2)، چارک سوم (Q_3)

چارک ها همه داده ها را به چهار قسمت تقسیم می کند. یعنی این چارک ها طوری مشخص می شوند که داده ها به چهار قسمت مساوی تقسیم شوند. چارک دوم همان میانه است.

دامنه میان چارکی: یکی از شاخص ها پراکندگی دامنه میان چارکی است. به اختلاف چارک اول و سوم، دامنه میان چارکی می گوئیم و آن را با IQR نشان می دهیم.

$$IQR = Q_3 - Q_1 \quad \text{یا} \quad \text{چارک اول} - \text{چارک سوم} = \text{دامنه میان چارکی}$$

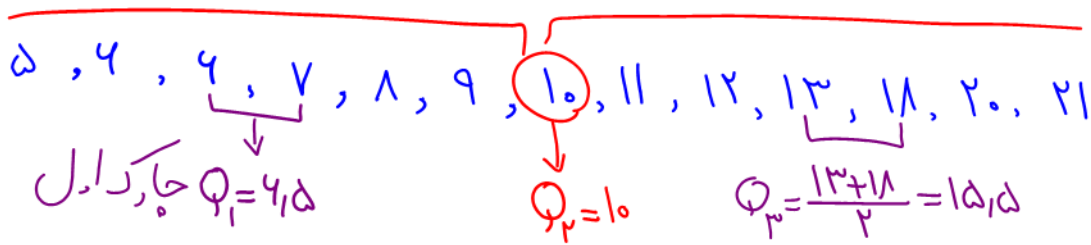
دامنه تغییرات: اختلاف بزرگترین داده با کوچکترین داده را دامنه تغییرات می گوئیم.

$$\text{کوچکترین داده} - \text{بزرگترین داده} = \text{دامنه تغییرات}$$

تذکر: برای پیدا کردن چارک ها ابتدا همه داده ها را از کوچکتر به بزرگتر مرتب می کنیم.



۶۸- دامنه تغییرات، چارک ها و دامنه میان چارکی داده های ۶، ۷، ۲۰، ۱۰، ۱۳، ۸، ۶، ۱۱، ۱۲، ۲۱، ۹، ۵، ۱۸ را مشخص کنید.

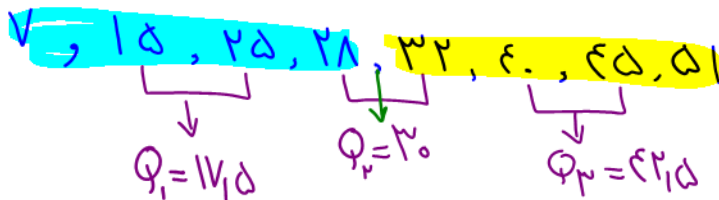


$$IQR = Q_3 - Q_1 = 15.5 - 7.5 = 8$$

دامنه تغییرات = $21 - 5 = 16$

کوچکترین داده: ۵
بزرگترین داده: ۲۱

۶۹- چارک ها و دامنه میان چارکی داده های ۷، ۲۸، ۲۵، ۱۵، ۳۲، ۴۰، ۴۵، ۵۱ را مشخص کنید.

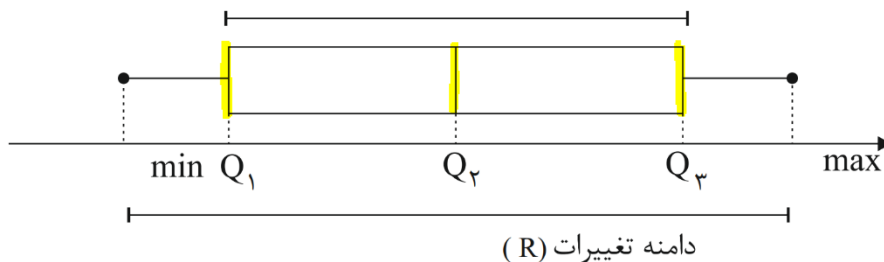


$$IQR = Q_3 - Q_1 = 42.5 - 17.5 = 25$$

نمودار جعبه ای

نمودار جعبه ای روشی سودمند برای نمایش دامنه ها (دامنه تغییرات و دامنه میان چارکی) و چارک های داده هاست. در شکل زیر محل قرار گیری چارک ها و مقادیر $\min$ و $\max$ داده ها نشان داده شده است.

طول جعبه یا دامنه میان چارکی (IQR)

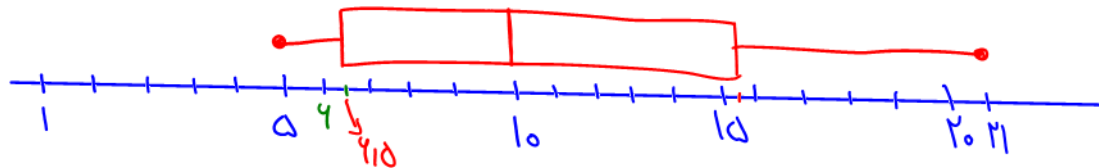


نکته: اگر داده دور افتاده باشیم بهتر است از نمودار جعبه ای استفاده کنیم.

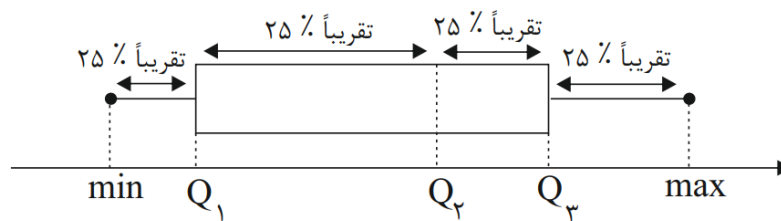
۷۰- نمودار جعبه ای ۲۱، ۲۰، ۱۸، ۱۳، ۱۲، ۱۱، ۱۰، ۹، ۸، ۷، ۶، ۶، ۵ را رسم کنید.

$$\varphi_1 = 4,5$$

$$\varphi_2 = 15,5$$



نکته: نمودار پخش داده ها در نمودار جعبه ای: نمودار جعبه ای داده ها را به ۴ قسمت تقسیم می کند که هر قسمت ۲۵ درصد داده هاست. با توجه به نمودار داده شده می توان گفت:

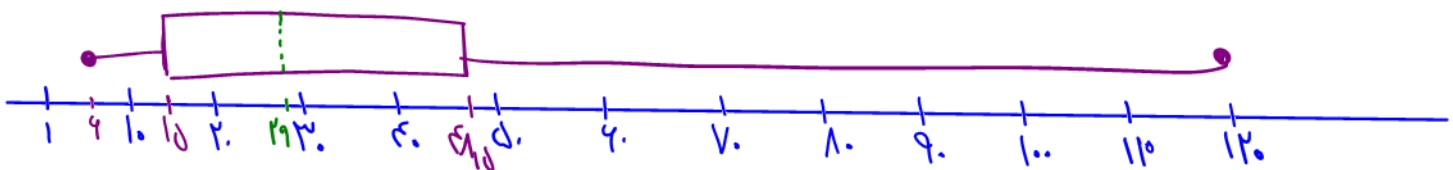


۷۱- نمودار جعبه ای داده های ۱۲۰، ۵۰، ۴۹، ۴۸، ۴۴، ۳۶، ۲۹، ۲۵، ۱۹، ۱۷، ۱۳، ۱۰، ۶ را رسم کنید.

$$\varphi_1 = 15$$

$$\varphi_2$$

$$\varphi_3 = 41,5$$



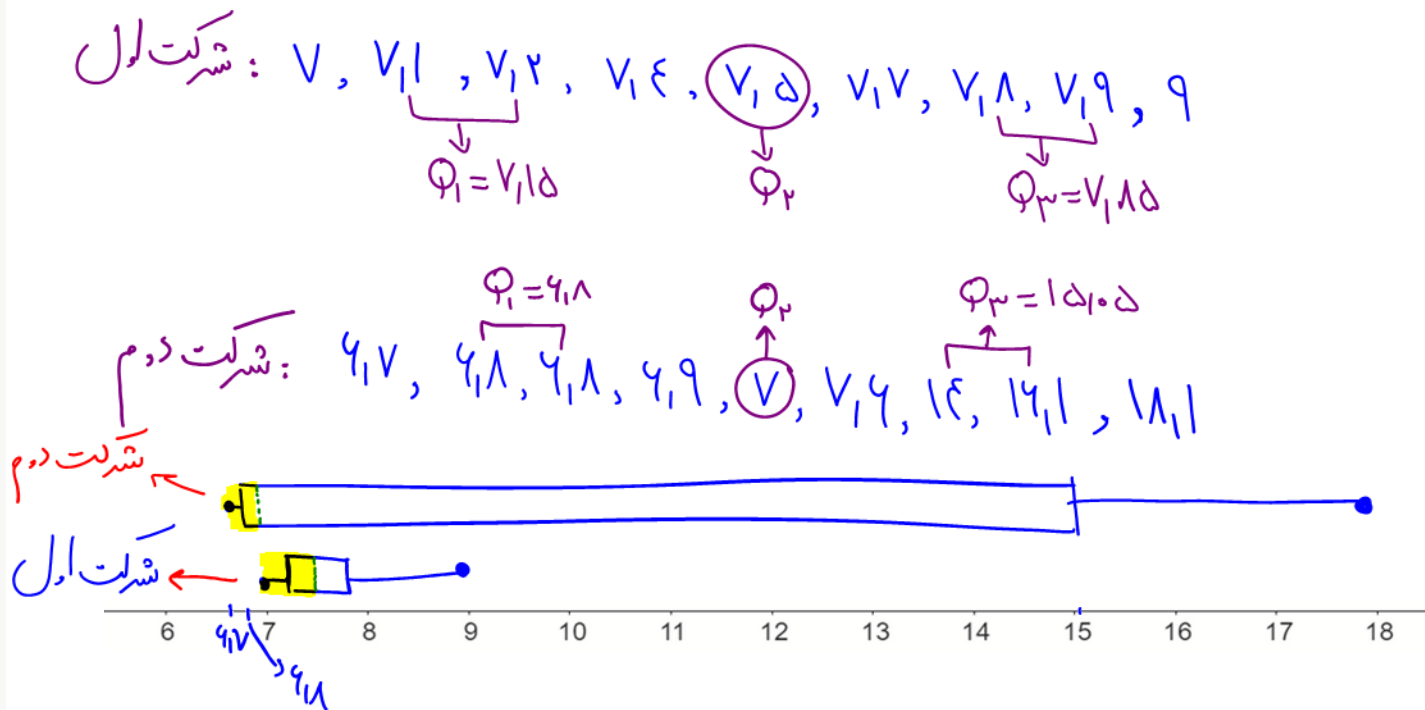
کاردر کلاس صفحه ۳۶

۷۲- دو شرکت به نرگس پیشنهاد کار داده اند که یکی از آنها ۳۰ و دیگری ۳۱ کارمند دارد. میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت اول، تقریباً $۶/۷$ میلیون تومان و میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت دوم تقریباً ۱۰ میلیون تومان است. او بهتر است کدام یک از این دو شرکت را انتخاب کند؟

حقوق چند نفر را که به صورت تصادفی انتخاب شده است به صورت زیر است.

	حقوق کارمندان								
شرکت اول	۷	$۷/۵$	$۷/۲$	$۷/۷$	$۷/۴$	$۷/۹$	۹	$۷/۱$	$۷/۸$
شرکت دوم	$۶/۷$	۷	۱۴	$۱۸/۱$	$۶/۸$	$۷/۶$	$۱۶/۱$	$۶/۹$	$۶/۸$

الف) با استفاده از داده‌های جدول بالا، نمودار جعبه‌ای حقوق ماهیانه کارمندان این دو شرکت را روی یک محور رسم کنید.



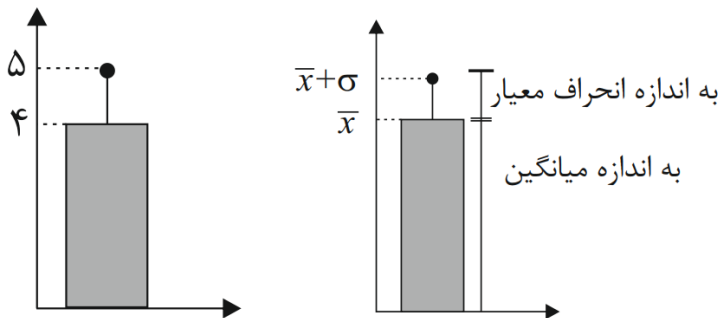
ب) با توجه به نمودارهای قسمت الف، درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.

- حقوق تقریباً ۵۰٪ کارمندان شرکت دوم کمتر از کمترین حقوق کارمندان شرکت اول است. **درست**
- اگر نرگس سطح تحصیلات و تجربه متوسطی داشته باشد و این دو شرکت افراد را براساس شایستگی‌ها نشان انتخاب کنند، شرکت اول برای او مناسب است. **درست**
- در شرکت دوم، میانگین، معیار گرایش به مرکز مناسبی است. **نادرست**

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



نمودار نمایش دهنده میانگین و انحراف معیار



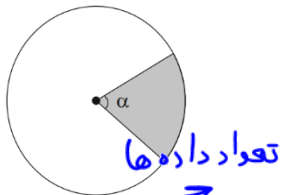
در داده هایی که میانگین و انحراف معیار شاخص های مناسبی برای توصیف هستند (هنگامی که داده دور افتاده نداشته باشیم)، می توانیم از نموداری استفاده کنیم که بلندی مستطیل آن نشان دهنده میانگین باشد و میله خطای آن ف به اندازه انحراف معیار، روی مستطیل بالا آمده باشد.

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



نمودار دایره ای

نمودارهای دایره ای یکی از پرکاربردترین نمودارها در آمار است. از این نمودار برای نمایش متغیرهای کیفی استفاده می شود. زاویه مربوط به هر دسته از رابطه زیر بدست می آید:



$$\alpha = \frac{f}{n} \times 360^\circ$$

زاویه مرکزی

$$\frac{f}{n} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

یا به این صورت هم می توان نوشت:

تعداد کل داده ها

۷۳- برای داده های جدول مقابل نمودار دایره ای رسم کنید.

گروه خونی	فراوانی
A	۱۰
B	۴
O	۱
AB	۵

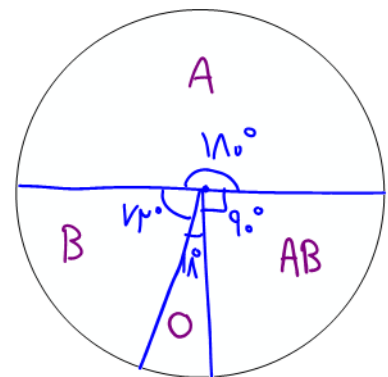
۲۰ جمع

$$\alpha = \frac{10}{20} \times 360^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = \frac{4}{20} \times 360^\circ = 72^\circ$$

$$\alpha = \frac{1}{20} \times 360^\circ = 18^\circ$$

$$\alpha = \frac{5}{20} \times 360^\circ = 90^\circ$$



۷۴- در یک نمودار دایره ای مربوط به گروه های خونی افراد ، زاویه متناظر با گروه خونی AB عدد ۷۲° را نشان می دهد اگر کل جمعیت مورد مطالعه ۸۰۰ نفر باشد، چند نفر گروه خونی AB دارند؟

$$\frac{x}{800} = \frac{72^\circ}{360^\circ} \Rightarrow x = \frac{72 \times 800}{360} = 160 \text{ نفر}$$

جمع بندی و خلاصه نکات چرخه آمار در حل مسائل

- ۱- طرح یک پرسش دقیق و شفاف ، مهمترین گام رسیدن به پاسخ است.
- ۲- اندازه گیری یا سنجش ، اولین قدم برای یافتن داده ها است.
- ۳- در اندازه گیری (گام ۲) اطلاعات کیفی (توصیفی) را به کمی (عددی) تبدیل می کنیم.
- ۴- برای توصیف داده های کیفی (اسمی یا ترتیبی) گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.
- ۵- کدام نمودار بهتر نشان می دهد که داده ها کجا متراکم تر و کجا پراکنده ترند؟ پاسخ : نمودار جعبه ای
- ۶- مطمئن ترین نمودار برای متغیر کمی، نمودار جعبه ای است.
- ۷- اگر داده دور افتاده داشته باشیم میانگین و انحراف معیار ، معیارهای مناسبی برای توصیف داده ها نخواهند بود و از بین معیارهای گرایش به مرکز باید از " میانه " و از بین معیارهای پراکندگی " دامنه های میان چارکی " استفاده کنیم. (چرا؟) پاسخ : چون گزارش میانگین ممکن است گمراه کننده باشد.
- ۸- وقتی داده دور افتاده نداریم می توانیم از نمودار نمایش دهنده میانگین و انحراف معیار (نمودار مستطیل شکل) استفاده کنیم.
- نموداری که بلندی مستطیل آن نشان دهنده میانگین است و میله خطی آن به اندازه انحراف معیار ، روی مستطیل بالا آمده است.
- ۹- اگر داده دور افتاده داشته باشیم نمودار جعبه ای مناسب است.
- ۱۰- مطمئن ترین نمودار برای متغیر کمی ، نمودار جعبه ای است.