

فصل ۳ - الگوهای غیر خطی

درس ۱: دنباله هندسی

به دنباله هایی از اعداد که هر جمله شان به جز جمله اول از ضرب یک عدد ثابت مخالف صفر در جمله پیشین به دست می آید ، دنباله هندسی گفته می شود . عدد ثابت را "نسبت مشترک" می نامند و عموماً با r نشان می دهند.

به زبان ساده : در دنباله هندسی هر جمله از ضرب یک مقدار ثابت در جمله قبلی اش به دست می آید.

مثال : به دنباله های زیر دقت کنید:

الف: $2, 6, 18, 54, \dots$

$\times 3 \quad \times 3 \quad \times 3$

جمله اول: $a = 2$

نسبت مشترک: $r = 3$

$$\frac{\text{جمله دوم}}{\text{جمله اول}} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{54}{18} = 3$$

$$\begin{cases} a_n = a r^{n-1} \\ a_n = 2 \times 3^{n-1} \end{cases}$$

ب: $3, 6, 12, 24, \dots$

$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$

$$a = 3$$

$$r = 2$$

$$a_n = a r^{n-1}$$

$$a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

پ: $1, 4, 12, 24, \dots$

$$a = 1$$

$$r = \frac{4}{1} = 4$$

$$a_n = a r^{n-1}$$

$$a_n = 1 \times 4^{n-1}$$

جمله عمومی دنباله هندسی

$$a, ar^1, ar^2, ar^3, ar^4, \dots, ar^{n-1}$$

شماره جمله

جمله عمومی دنباله هندسی: $a_n = ar^{n-1}$ نسبت مشترک دنباله هندسی: $r = \frac{\text{جمله دوم}}{\text{جمله اول}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ۱- نسبت مشترک و جمله عمومی دنباله ... $\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1$ را بنویسید.

$$r = \frac{\text{جمله دوم}}{\text{جمله اول}} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$a_n = ar^{n-1} \Rightarrow a_n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

۲- نسبت مشترک و جمله عمومی دنباله ... $\frac{25}{16}, \frac{25}{4}, 25, 100$ را بنویسید.

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$a_n = ar^{n-1} \Rightarrow a_n = 100 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



افزایشی یا کاهشی بودن جملات دنباله هندسی

به دنباله های زیر دقت کنید:

۱- اگر جمله اول مثبت و $r > 1 \Leftrightarrow$ افزایشی۲- اگر جمله اول مثبت و $0 < r < 1 \Leftrightarrow$ کاهشی۳- اگر جمله اول منفی و $r > 1 \Leftrightarrow$ کاهشی۴- اگر جمله اول منفی و $0 < r < 1 \Leftrightarrow$ افزایشی

$$2, 4, 8, 16, \dots$$

$\times 2, \times 2, \times 2$

افزایشی

$$20, 10, 5, \dots$$

$\times \frac{1}{2}, \times \frac{1}{2}$

کاهشی

$$-2, -4, -8, -16, \dots$$

$\times 2, \times 2, \times 2$

کاهشی

$$-20, -10, -5, \dots$$

$\times \frac{1}{2}, \times \frac{1}{2}$

افزایشی

$$3, 3, 3, 3, \dots$$

$x_1 \quad y_1$

ثابت

۴- اگر $r = 1 \Leftrightarrow$ دنباله ثابت

تذکر: دنباله ثابت تنها دنباله ای است که هم حسابی ($d=0$) و هم هندسی ($r=1$) است.

نکته مهم: اگر $r < 0$ باشد، چون جملات یکی در میان مثبت و منفی می شوند، دنباله نه کاهشی است و نه افزایشی.

مثال: $-40, +20, -10, 5, \dots$

$\times (-2) \quad \times (-2) \quad \times (-2)$

نوسانی

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...

رابطه بازگشتی دنباله هندسی

۳- ضابطه بازگشتی دنباله های زیر را بنویسید.

الف: $3, 6, 12, 24, \dots$

$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$

$$a_{n+1} = a_n \times 2 \rightarrow a_{n+1} = 2a_n$$

ب: $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \dots$

$\times \frac{1}{5}$

$$a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n$$

اگر r نسبت مشترک دنباله هندسی باشد، رابطه بازگشتی آن به صورت مقابل است. $a_{n+1} = r \times a_n$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...

یافتن تعداد جملات یک دنباله هندسی

$$r^{n-1} = \frac{\text{جمله آخر}}{\text{جمله اول}}$$

ساده ترین راه برای بدست آوردن n در دنباله هندسی، استفاده از فرمول مقابل است.

$3, 4, 12, 24, 48, \dots, 384$

$\times 4 \quad \times 3 \quad \times 2 \quad \times 2$

۴- کدام جمله دنباله $3, 6, 12, \dots$ برابر با ۳۸۴ است؟

روش اول:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1} \Rightarrow 3 \times 2^{n-1} = 384 \Rightarrow 2^{n-1} = \frac{384}{3} = 128 \Rightarrow 2^{n-1} = 128 = 2^7 \Rightarrow n-1=7 \Rightarrow n=8$$

$$3, 6, 12, \dots, 384$$

$\times 2 \quad \times 2$

$$a_n = ar^{n-1} \Rightarrow r^{n-1} = \frac{a_n}{a} \rightarrow \text{صیغه آخر}$$

$$\text{صیغه اول}$$

روش دوم:

$$r^{n-1} = \frac{\text{صیغه آخر}}{\text{صیغه اول}} \Rightarrow 2^{n-1} = \frac{384}{3} = 128 \Rightarrow 2^7 = 128 = 2^7 \Rightarrow n-1=7 \Rightarrow n=8$$

۵- نخستین جمله یک دنباله هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنباله هندسی $\frac{1}{2}$ است. کدام جمله دنباله برابر ۶ است؟ (تمرین کتاب)

روش اول:

$$1536, 768, 384, 192, 96, 48, 24, 12, (4) \rightarrow n=9$$

$\times \frac{1}{2} \quad \times \frac{1}{2}$

روش دوم:

$$r^{n-1} = \frac{\text{صیغه آخر}}{\text{صیغه اول}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{4}{1536} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{384} = \left(\frac{1}{2}\right)^8 \Rightarrow n-1=8 \Rightarrow n=8+1=9$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



سه جمله متوالی دنباله هندسی

سه جمله متوالی دنباله هندسی $a, b, c \rightarrow b^2 = a \times c$

مثال: $3, (4), 12 \Rightarrow 4^2 = 3 \times 12$ مثال: $5, (15), 45 \Rightarrow 15^2 = 5 \times 45$

$\times 2 \quad \times 2$

۶- اگر $x+3, x+2, x$ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را بدست آورید. (تمرین کتاب)

$$(x+2)^2 = x(x+3)$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 3x$$

$$4x - 3x = -4 \Rightarrow x = -4$$

$-4, -2, -1$

$$(x+2)^2 = (x+2)(x+2)$$

$$= x^2 + 2x + 2x + 4$$

$$= x^2 + 4x + 4$$

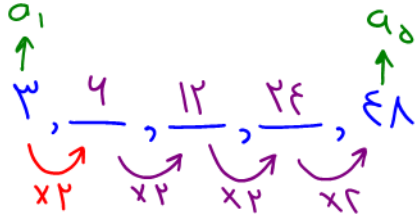
بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



کانال تلگرام <https://t.me/riyazi12ensani>

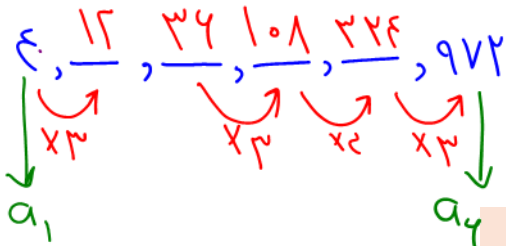
درج واسطه هندسی

منظور از درج واسطه هندسی بین دو عدد a و b این است که چند تا عدد بین دو عدد داده شده قرار دهیم به طوری که همه این اعداد باهم تشکیل یک دنباله هندسی بدهند.



۷- بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی مثبت بنویسید.

$$r^{5-1} = \frac{a_5}{a_1} \Rightarrow r^4 = \frac{48}{3} = 16 \Rightarrow r = 2$$



۸- بین ۹۷۲ و ۴ چهار واسطه هندسی مثبت بنویسید.

$$r^{4-1} = \frac{a_4}{a_1} \Rightarrow r^3 = \frac{972}{4} = 243 \Rightarrow r = 3$$

پیدا کردن ۲ به کمک دو جمله دلخواه دنباله هندسی

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$$

۹- جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جمله هفتم این دنباله هندسی را بدست آورید. (تمرین کتاب)

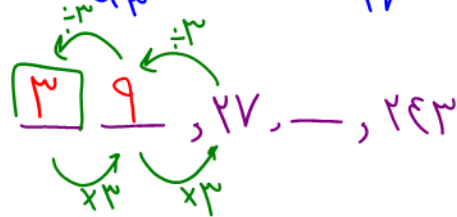
$$a_3 = 27$$

$$a_5 = 243$$

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$a_7 = ar^6 = 3^1 \times 3^6 = 3^7$$

$$r^{5-3} = \frac{a_5}{a_3} \Rightarrow r^2 = \frac{243}{27} = 9 \Rightarrow r = 3$$



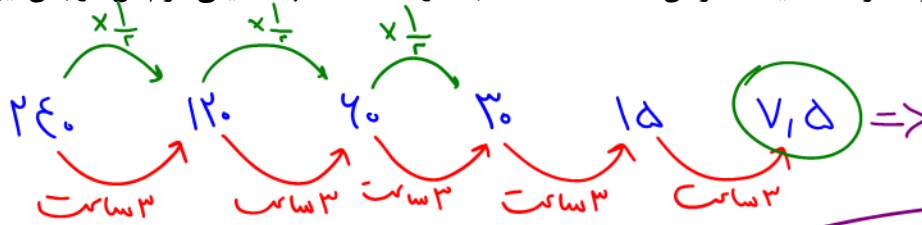
مسائل نیمه عمر

به مدت زمانی که طول می کشد تا مقدار یک دارو (یا کافتین یا ...) در خون، به نصف قبلی اش برسد، نیمه عمر می گوییم.

۱۰- شخصی ۲۴۰ میلی گرم از دارویی را مصرف کرده که نیمه عمر آن ۳ ساعت است. بعد از ۱۵ ساعت چند میلی گرم آن در بدن این شخص

باقی مانده است؟

بعد ۱۵ ساعت



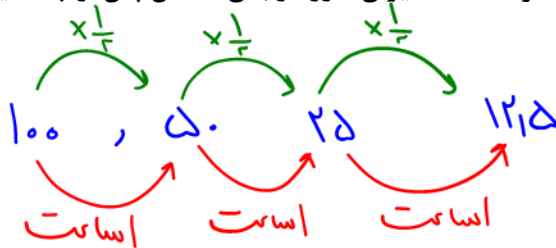
رزش دوم: $a_n = a \cdot r^{n-1}$

$$a_4 = 240 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} = 240 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{240}{8} = 30$$

$$n = \frac{\text{مدت زمان}}{\text{نیمه عمر}} = \frac{15}{3} = 5$$

۱۱- شخصی ۱۰۰ میلی گرم از دارویی که نیمه عمر آن یک ساعت است، مصرف کرده است. میزان دارو در بدن شخص پس از چند نیمه عمر،

کمتر از ۲۰ میلی گرم خواهد بود؟



۳ تا نیمه عمر

فرمول محاسبه نیمه عمر: $a_n = a \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ یا $\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \text{مقدار اولیه} = \text{مقدار باقی مانده}$

$$n = \frac{\text{زمان سپری شده}}{\text{طول یک نیمه عمر}}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



مجموع جملات دنباله هندسی

تعداد جملات $\rightarrow$ $S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r}$ یا $S_n = a \times \frac{r^n-1}{r-1}$ $\leftarrow$ نسبت متعادل

مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی از رابطه مقابل بدست می آید:۱۲- مجموع ۵ جمله اول دنباله $2, 4, 8, \dots$ را بدست آورید. $n=5$

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$$

$$S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_5 = 2 \times \frac{1-2^5}{1-2}$$

$$= 2 \times \frac{1-32}{-1} = 2 \times \frac{-31}{-1} = 2 \times 31 = 62$$

۱۳- مجموع ۵ جمله اول دنباله $\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots$ را بدست آورید. $n=5$

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} = \text{😊}$$

$$S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_5 = \frac{2}{5} \times \frac{1-(\frac{1}{5})^5}{1-\frac{1}{5}} =$$

$$S_5 = \frac{2}{5} \times \frac{1 - \frac{1}{15625}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{5} \times \left(\frac{15625 - 1}{15625} \right) \times \frac{5}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{15624}{15625} = \frac{31248}{15625}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



الف: $1 + 4 + 16 + \dots + 4096$

$$r^{n-1} = \frac{\text{صدا آخر}}{\text{صدا اول}} \Rightarrow 4^{n-1} = \frac{4096}{1} = 4096 = 4^9 \Rightarrow n-1=9 \Rightarrow n=10$$

$$S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r} = 1 \times \frac{1-4^{10}}{1-4} = \frac{1-147456}{-3} = \frac{147455}{3}$$

$$\frac{147455}{3} = 49151 \frac{2}{3}$$

۱۴- مجموع های زیر را بدست آورید.

یادآوری: یافتن تعداد جملات دنباله هندسی

$$r^{n-1} = \frac{\text{جمله آخر}}{\text{جمله اول}}$$

ب: $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{640}$

$r = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{20}} = \frac{1}{5}$

$r^{n-1} = \frac{\text{صدا آخر}}{\text{صدا اول}} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{640}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{128} = \left(\frac{1}{5}\right)^7 \Rightarrow n-1=7 \Rightarrow n=8$

$S_8 = \frac{1}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^8}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{1 - \frac{1}{3125}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{\frac{3124}{3125}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{3124}{2500} = \frac{3124}{1250} = \frac{1562}{625}$

جمع بندی فرمول های دنباله هندسی و حسابی: +

دنباله هندسی	دنباله حسابی	
$a_n = ar^{n-1}$	$a_n = a + (n-1)d$	جمله عمومی
$a_{n+1} = a_n \times r$	$a_{n+1} = a_n + d$	رابطه بازگشتی
$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$	$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$	پیدا کردن نسبت مشترک و اختلاف مشترک
$a, b, c \rightarrow b^2 = ac$	$a, b, c \rightarrow b = \frac{a+c}{2}$	سه جمله متوالی
$\checkmark S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r}$	$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$	مجموع جملات
$S_n = a \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$	$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$	

درس ۲: ریشه نام و توان گویا

یادآوری توان:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = +4$$

$$-2^2 = -(2 \times 2) = -4$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{2^2}{3} = \frac{2 \times 2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$5^0 = 1, \sqrt{1} = 1$$

$$4^1$$

یادآوری قواعد مهم توان ها:

$$1) a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$\text{مثال} \rightarrow 2^5 \times 2^3 = 2^8$$

$$2) a^n \div a^m = a^{n-m}$$

$$\text{مثال} \rightarrow 2^5 \div 2^3 = 2^2$$

$$3) a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

$$\text{مثال} \rightarrow 3^4 \times 2^4 = 6^4$$

$$4) a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\text{مثال} \rightarrow 4^4 \div 3^4 = \left(\frac{4}{3}\right)^4$$

$$14^4 \div 7^4 = 2^4$$

$$5) (a^n)^m = a^{mn}$$

$$\text{مثال} \rightarrow (a^2)^3 = a^6$$

$$a^{2^3} = a^8 \quad \leftarrow 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$6) a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\text{مثال} \rightarrow 2^{-2} = \frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{2^{-5}} = 2^5, \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^1$$

$$7) a^1 = a$$

$$\text{مثال} \rightarrow 5^1 \text{ یا } 1^1$$

$$8) a^0 = 1$$

$$\text{مثال} \rightarrow 2^0 = 1, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

الف: $\frac{4^5 \times 7^4}{2^8 \times 3^3} = \frac{2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 7^4}{2^8 \times 3^3} = \frac{2^2 \times 7^4}{3^3} = 14 \times 7 = 112$

پ: $13^0 + 3^{-2} + 5^1 = 1 + \frac{1}{9} + 5 = \frac{4 \times 9}{1 \times 9} + \frac{1}{9} = \frac{55}{9}$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



ریشه نام

ریشه دوم: اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ ریشه های دوم عدد a هستند.مثال: ریشه های دوم عدد ۴ برابر 2 و -2 مثال: ریشه های دوم عدد ۹ برابر 3 و -3 مثال: ریشه های دوم عدد ۵ برابر $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm \sqrt{4} = \pm 2$$

$$(+2)^2 = 4$$

$$(-2)^2 = 4$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm \sqrt{5}$$

اعداد منفی جذر ندارند $\sqrt{-4}$ ریشه سوم: اگر a عدد حقیقی (چه مثبت، چه منفی، چه صفر) باشد، ریشه سومش برابر $\sqrt[3]{a}$ است.مثال: ریشه سوم عدد ۸ برابر 2 ریشه سوم عدد -۸ برابر -2 مثال: ریشه سوم عدد ۱۵ برابر $\sqrt[3]{15}$ و $-\sqrt[3]{15}$

۱۵، -۱۵، ۰، ۰

$$x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$x^3 = -8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

ریشه های بالاتر:

$$-2 \leftarrow \sqrt[5]{-32}$$

۱۶- ریشه پنجم عدد ۳۲ برابر است.

۱۷- ریشه ششم عدد ۶۴ برابر است.

$$-4 \leftarrow \sqrt[4]{4^4}, \sqrt[4]{4^4}$$

زوج
لا تاریشه

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



جمع بندی درباره ریشه های n ام ($n \in \mathbb{N}$) عددی مانند a :

$$a \geq 0 \begin{cases} \xrightarrow{\text{زوج } n} \text{ریشه } n \text{ام } a: \sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a} \\ \xrightarrow{\text{فرد } n} \text{ریشه } n \text{ام } a: \sqrt[n]{a} \end{cases}$$

$$a < 0 \begin{cases} \xrightarrow{\text{زوج } n} \text{ریشه ندارد} \\ \xrightarrow{\text{فرد } n} \text{ریشه } n \text{ام } a: \sqrt[n]{a} \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & n \text{ فرد} \\ |a| & n \text{ زوج} \end{cases} \quad \text{تذکر: در محاسبه } \sqrt[n]{a^n} \text{ دقت کنید:}$$

۱۸- حاصل عبارتهای زیر را بنویسید:

الف: $\sqrt[12]{5^{12}} = 5$

ب: $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$

پ: $\sqrt[5]{\left(-\frac{8}{3}\right)^5} = -\frac{8}{3}$

ت: $\sqrt[10]{(-15)^{10}} = |-15| = 15$

توان های گویا

هرگاه $a > 0$ ، برای دو عدد طبیعی m و n ، چنین تعریف می کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

۱۹- اعداد توان دار زیر را به شکل رادیکالی بنویسید. (کاردکلاس کتاب)

الف: $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$

ب: $6^{\frac{7}{9}} = \sqrt[9]{6^7}$

پ: $-12^{-\frac{2}{11}} = \sqrt[11]{-12^{-2}}$

ت: $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{\left(2\frac{1}{3}\right)^{-4}}$

ث: $(0/001)^{\frac{14}{4}} = \sqrt[4]{0/001^{14}}$

۲۰- اعداد رایکالی زیر را به شکل توان دار بنویسید.

الف: $\sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}}$ ب: $\sqrt[3]{2/7^5} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{-\frac{5}{3}}$ پ: $\sqrt[3]{25^1} = 25^{\frac{1}{3}}$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



$$\sqrt[5]{(-1)^3} = (-1)^{\frac{3}{5}}$$

نذکر: کتاب درسی توان کسری را برای اعداد منفی تعریف نمی کند. مثال:

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



۲۱- هر یک از عبارتهای زیر را به ساده ترین شکل ممکن بنویسید. (کاردکلاس کتاب)

الف: $(2 \times 8)^{\frac{1}{4}} = 14^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{14} = 2$

پ: $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 3^1 = 3$

ب: $-4(1000)^{\frac{1}{3}} = -4 \sqrt[3]{1000} = -4 \times 10 = -40$

ت: $7^{\frac{3}{4}} \times 7^{\frac{5}{4}} = 7^{\frac{3}{4} + \frac{5}{4}} = 7^2 = 49$

ث: $125^{\frac{2}{3}} \times 125^{\frac{1}{3}} = 125$

$125^{\frac{11}{3}} = \sqrt[3]{125^{11}}$

ج: $8^{\frac{2}{7}} \times (1/5)^{\frac{2}{7}} = (8 \times 1/5)^{\frac{2}{7}} = 12^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{12^2}$

$8 \times \frac{1}{5} = \frac{8}{5} = 1.6$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



درس ۳: تابع نمایی

ضابطه تابع نمایی

هر تابع به صورت $y = a^x$ ، که یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است ، یک تابع نمایی است.

مثال:

$$y = 2x + 1$$

$$y = x^2$$

$$y = |x|$$

⋮

$$y = 2^x$$

$$y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}$$

$$y = 2 \times 5^{2x-1}$$

$$y = (-3)^x \quad \text{نمایی نیست}$$

$$y = -3^x \quad \text{نمایی است}$$

$$y = 1^x \quad \text{نمایی نیست}$$

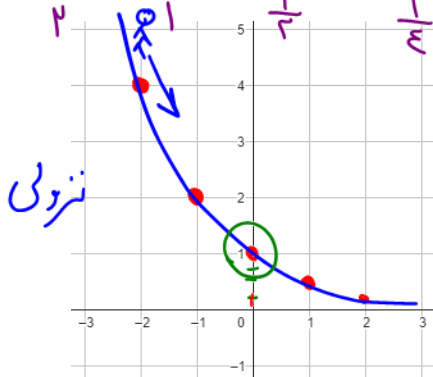
نمودار تابع نمایی

$$2^{-1} = \frac{1}{2} \quad 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

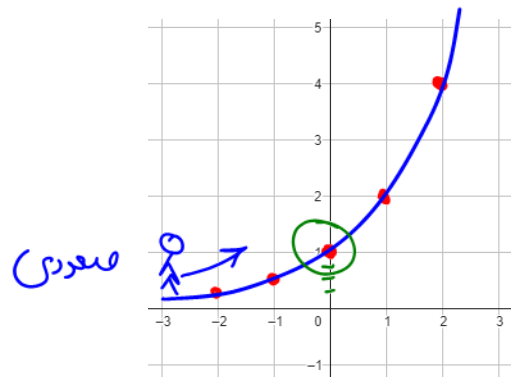
ب: نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را رسم کنید.

۲۲-الف: نمودار تابع $y = 2^x$ را رسم کنید.

x	-2	-1	0	1	2
y	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^0$	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$
	۴	۲	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



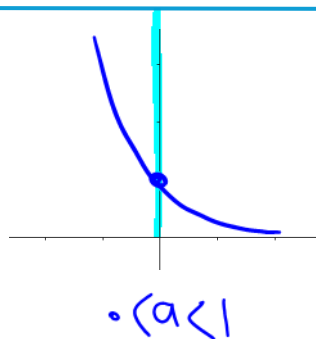
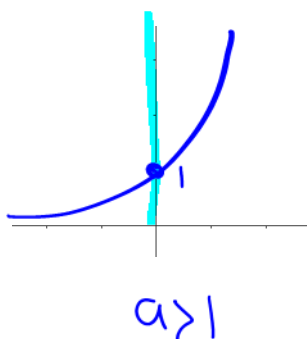
نتیجه:

دامنه:

بردار:

$$D = \mathbb{R}$$

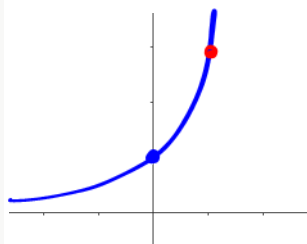
$$\mathbb{R} = (0, +\infty) \quad \text{یا} \quad \mathbb{R}^+$$



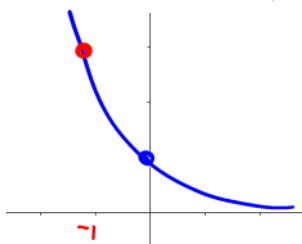
۲۳- نمودار تابع های نمایی زیر را رسم کنید.

$$3^1 = 3$$

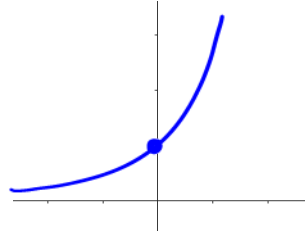
$$y = 3^x$$
 بزرگتر از یک



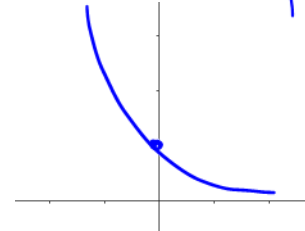
$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$
 کوچکتر از یک



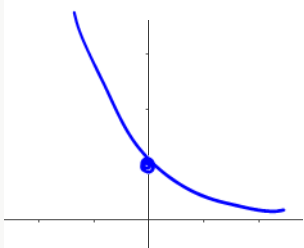
$$y = 4^x$$
 بزرگتر از یک



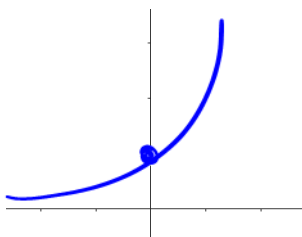
$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$
 کوچکتر از یک



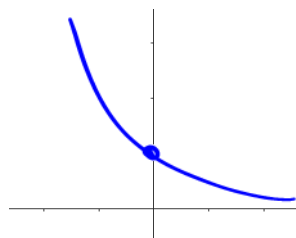
$$y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$$
 کوچکتر از یک



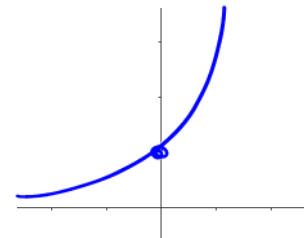
$$y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$$
 بزرگتر از یک



$$y = \left(\frac{5}{7}\right)^x$$



$$y = \left(\frac{7}{5}\right)^x$$



نکته: تشخیص بزرگتر از یک یا کوچکتر از یک بودن یک کسر

$$a > 1 \Rightarrow \text{صخرج} > \text{مورد}$$

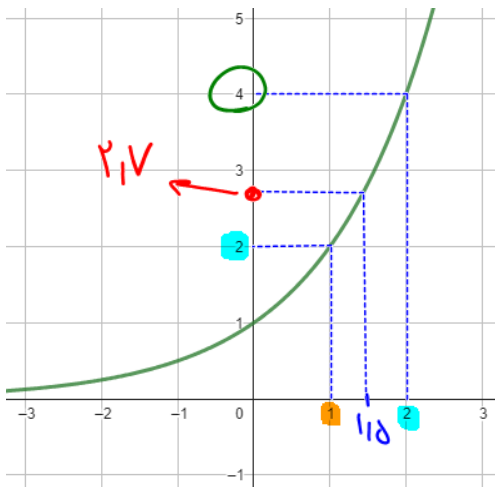
$$0 < a < 1 \Rightarrow \text{صخرج} < \text{مورد}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



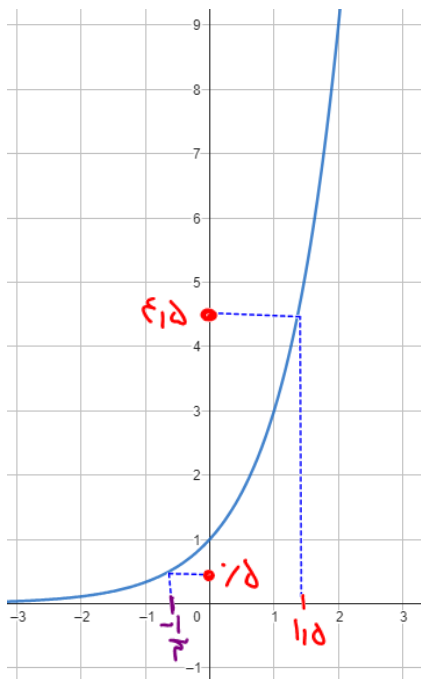
چند نکته از نمودار تابع نمایی

۱- پیدا کردن مقدار تقریبی عددی خاص با استفاده از نمودار

۲۴- با استفاده از نمودار تابع $y = 2^x$ مقدار تقریبی عدد $2^{1/5}$ را بدست آورید.

$$2^{1/5} \approx 1.15$$

$$\begin{aligned} 2^2 &= 4 \\ 2^3 &= 8 \\ 2^1 &= 2 \end{aligned}$$

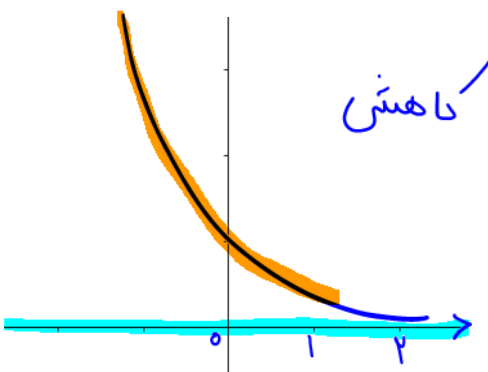
۲۵- با استفاده از نمودار تابع $y = 3^x$ مقدار تقریبی عدد $3^{-1/2}$ و $3^{1/2}$ را بدست آورید.

$$\begin{aligned} 3^{1/2} &= 1.5 \\ 3^{-1/2} &= 1/1.5 \end{aligned}$$

۲- افزایشی و کاهشی نمودار

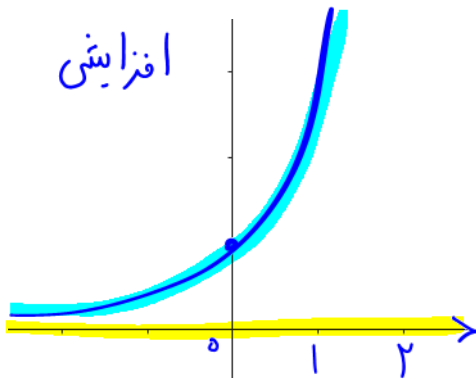
در تابع نمایی $y = a^x$ ، اگر $0 < a < 1$ باشد:

- وقتی x افزایش پیدا می کند مقدار y کاهش می یابد
- وقتی x کاهش پیدا می کند مقدار y افزایش می یابد



در تابع نمایی $y = a^x$ ، اگر $a > 1$ باشد:

افزایش

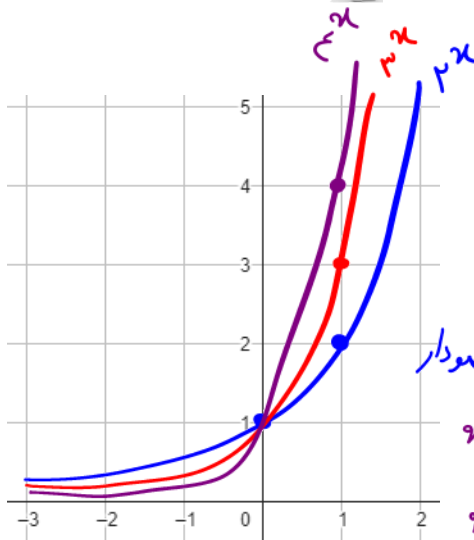


- وقتی x افزایش پیدا می کند مقدار y افزایش می یابد
- وقتی x کاهش پیدا می کند مقدار y کاهش پیدا می کند

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



۳- مقایسه چند نمودار تابع نمایی



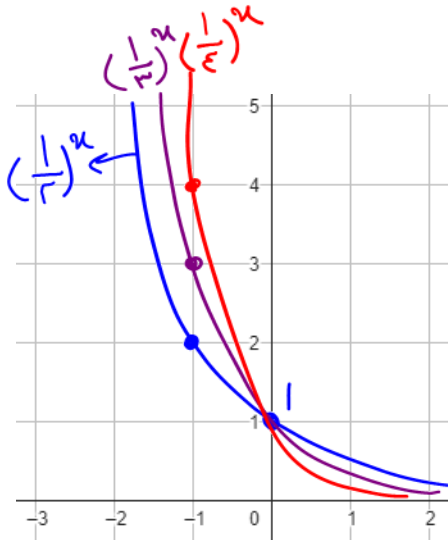
۲۶- نمودار توابع $y = 2^x$ ، $y = 3^x$ ، $y = 4^x$ را در یک دستگاه مختصات

رسم کنید و آنها را باهم مقایسه کنید.

- همه از نقطه $(0, 1)$ می گذرند.
- همه افزایش هستند.
- هر چه عدد پایه بزرگتر شود لبه بالایی نمودار به محور y ها نزدیکتر می شود ($x > 0$) و لبه پایینی نمودار به محور x ها نزدیکتر می شود ($x < 0$).

$$x = 0 \Rightarrow 4^0 = 3^0 = 2^0 = 1 \rightarrow (0, 1)$$

$$x < 0 \Rightarrow 4^x < 3^x < 2^x$$



۲۷- نمودار توابع $y = (\frac{1}{2})^x$ ، $y = (\frac{1}{3})^x$ ، $y = (\frac{1}{4})^x$ را در یک دستگاه

مختصات رسم کنید و آنها را باهم مقایسه کنید.

- همه از نقطه $(0, 1)$ می گذرند.
- همه نمودارها کاهش هستند.
- هر چه عدد پایه کوچکتر باشد لبه بالایی نمودار به محور y ها نزدیکتر می شود و لبه پایینی نمودار به محور x ها نزدیکتر می شود.

$$x > 0 \Rightarrow (\frac{1}{4})^x < (\frac{1}{3})^x < (\frac{1}{2})^x$$

$$x = 0 \Rightarrow (\frac{1}{4})^0 = (\frac{1}{3})^0 = (\frac{1}{2})^0 = 1$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



رشد و زوال نمایی

در این بخش به بررسی پدیده‌هایی در دنیای واقعی می‌پردازیم که روند افزایش یا کاهش آن‌ها مطابق با الگوهای نمایی است. موضوعاتی مانند سود بانکی، رشد جمعیت یا حتی کاهش جمعیت، از جمله مسائلی هستند که می‌توان آن‌ها را با استفاده از روابط نمایی مدل‌سازی کرد.

معادله رشد نمایی و زوال نمایی به صورت زیر است:

$$f(t) = c(1+r)^t \quad \text{رشد نمایی} \quad \begin{matrix} \text{زمان} \rightarrow t \\ \text{مقدار رشد} \rightarrow r \\ \text{مقدار اولیه} \rightarrow c \end{matrix}$$

$$f(t) = c(1-r)^t \quad \text{زوال نمایی} \quad \begin{matrix} \text{زمان} \rightarrow t \\ \text{مقدار کاهش} \rightarrow r \\ \text{مقدار اولیه} \rightarrow c \end{matrix}$$

۲۸- جمعیت یک روستا در سال ۱۳۹۶ حدود دو هزار نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این روستا با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۱۳۹۸ چند نفر خواهد بود؟

$$C = 2000$$

$$r = 0.01$$

$$t = 2$$

$$f(t) = c(1-r)^t \Rightarrow f(2) = 2000(1-0.01)^2$$

$$= 2000 \times (0.99)^2 = 2000 \times 0.9801 = 1960.2$$

۲۹- سرمایه اولیه یک شرکت ۱۰۰ میلیون تومان، سود سالانه آن ۲۰ درصد و میزان آن را در تمام مدت یکسال در نظر می‌گیریم. سرمایه شرکت پس از گذشت سه سال چقدر خواهد بود؟

$$C = 100,000,000$$

$$r = 0.20$$

$$t = 3$$

$$f(t) = c(1+r)^t$$

$$f(3) = 100,000,000(1+0.2)^3$$

$$= 100,000,000(1.2)^3 = 100,000,000 \times 1.728 = 172,800,000$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...

