

ریاضی و آمار (۳)

رشته‌های ادبیات و علوم انسانی - علوم و معارف اسلامی

پایه دوازدهم

مطابق با کتاب درسی و سطح امتحانات نهایی

دوره دوم متوسطه

ویژه آمادگی کامل برای امتحان نهایی

- ✓ آموزش مفهومی گام به گام تمام فصل‌های کتاب
- ✓ پاسخ تشریحی همه تمرین‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی
- ✓ حل نمونه سوالات پرتکرار امتحانات نهایی
- ✓ زبان ساده و قابل فهم برای همه دانش‌آموزان
- ✓ کاملاً کتاب‌محور و منطبق با آخرین تغییرات آموزشی

تهیه کننده: رقیه پيله ور - دبیر ریاضی ناحیه دو اردبیل



برای تماشای ویدیوهای آموزشی ریاضی و آمار ۳ (همین جزوه) می‌توانید به سایت

math-pilevar.ir بخش دوره‌ها مراجعه کنید.





سایت

www.math-pilevar.com/htra3


اپلیکیشن pimath

دانلود اپلیکیشن



کانال تلگرام

کانال ویژه ریاضی و آمار ۳



لینک ویدیوها در آپارات

درس ۱ (شمارش)	حل تمرین صفحه ۱۰	https://aparat.com/v/qzsjh2c
درس ۲ (احتمال)	حل تمرین صفحه ۲۵	https://www.aparat.com/v/pgp97rd
درس ۳ (چرخه آمار در حل مسائل)	حل تمرین صفحه ۳۹	https://aparat.com/v/muvdp3b
درس ۱ (مدل سازی و دنباله)	حل تمرین صفحه ۵۷	https://aparat.com/v/awllgx4
درس ۲ (دنباله های حسابی)	حل تمرین صفحه ۷۱	https://aparat.com/v/wtjvcis
درس ۱ (دنباله هندسی)	حل تمرین صفحه ۸۳	https://aparat.com/v/silpnob
درس ۲ (ریشه نام و توان گویا)	حل تمرین صفحه ۹۳	https://aparat.com/v/jns^tj9
درس ۳ (تابع نمایی)	حل تمرین صفحه ۱۰۱	https://aparat.com/v/ejo99a6
درس ۳ (رشد و زوال نمایی)	حل تمرین صفحه ۱۰۴	https://www.aparat.com/v/kflkhbu

این ویدیوهای آموزشی رو با یک آرزو ساختم:

" اینکه برای همه شما فرصت برابر بسازه و پله‌ای باشه برای رسیدن به موفقیت و نمره‌های عالی."

با احترام، دبیری ریاضی که که با عشق درس می‌ده و انگیزه‌اش، دیدن موفقیت شماست.

فصل ۱ - آمار و احتمال

درس ۱: شمارش

اصل جمع و اصل ضرب

پژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. لیست گل فروشی و شیرینی فروشی به صورت مقابل است.

لیست گل ها	لیست شیرینی ها
مریم	گردویی
زنبق	نارگیلی
رز	

دو جمله زیر را بخوانید و حواستان به حروف ربط "یا" و "و" در آن ها باشد.

۱- پژمان می خواهد " یک نوع گل " یا " یک نوع شیرینی " سفارش دهد. در این حالات پژمان چند انتخاب دارد؟

$$3 + 2 = 5$$

۲- پژمان می خواهد " یک نوع گل " و " یک نوع شیرینی " سفارش دهد. در این حالات پژمان چند انتخاب دارد؟

لیست گل ها	لیست شیرینی ها
مریم	گردویی
زنبق	نارگیلی
رز	

$$3 \times 2 = 6$$

math-pilevar.ir

اصل جمع

اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد، و این دو عمل را بتوان با هم انجام داد، در این صورت به $(m+n)$ طریق می توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد. (اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است.)

اصل ضرب

اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد، طوری که در مرحله اول به m طریق «و» در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشند، در کل آن عمل به $m \times n$ طریق انجام پذیر است. (اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله است.)

لیست گل ها
مریم
زنبق
رز

لیست شیرینی ها
گردویی
نارنگیلی

لیست آبنیوه ها
هویج
سیب
پرتقال

پژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. لیست گل فروشی، شیرینی فروشی و آبنیوه فروشی به صورت مقابل است.

۱- پژمان می خواهد "یک نوع گل" یا "یک نوع شیرینی" یا "یک نوع آبنیوه" سفارش دهد. در این حالات پژمان چند انتخاب دارد؟

$$3 + 2 + 3 = 8$$

۲- پژمان می خواهد "یک گل" و "یک شیرینی" و "یک آبنیوه" سفارش دهد. در این حالات پژمان چند انتخاب دارد؟

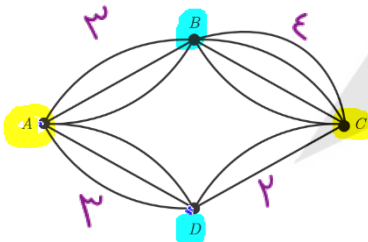
$$3 \times 2 \times 3 = 18$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



ترکیب اصل جمع و اصل ضرب

۳- مطابق شکل روبرو، میان چهار شهر A, B, C, D راه هایی وجود دارد. مشخص کنید که به چند طریق می توان:



الف: از شهر A به شهر C سفر کرد؟

$$\left. \begin{aligned} A \rightarrow B \rightarrow C &\Rightarrow 3 \times 4 = 12 \\ A \rightarrow D \rightarrow C &\Rightarrow 3 \times 2 = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 12 + 6 = 18$$

ب: از شهر B به شهر D سفر کرد؟

$$\left. \begin{aligned} B \rightarrow C \rightarrow D &\Rightarrow 4 \times 2 = 8 \\ B \rightarrow A \rightarrow D &\Rightarrow 3 \times 3 = 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 8 + 9 = 17$$

پ: از شهر A به شهر C و از طریق شهر D سفر کرد؟

$$3 \times 2 = 6$$

ت: از شهر A به شهر C و از طریق شهر D مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟

$$\left. \begin{aligned} \text{رفت } 3 \times 2 &= 6 \\ \text{برگشت } 2 \times 3 &= 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 6 + 6 = 12$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$
$$\Delta! = \Delta \times \xi \times \eta \times \eta \times \eta = \Delta \times \xi!$$

قرارداد: $! = |$, $! = |$

$$4! = 4 \times \underbrace{3 \times 2 \times 1}_{1!} = 4 \times 3! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

این عملیات ها را با نماد فاکتوریل نمی توانیم انجام بدهیم!

$$n! \times m! \neq (n+m)!$$

$$n! + m! \neq \omega!$$

$$(P_{X1}) + (P_X P_{X1}) = P + P = \lambda$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 12.$$

$$\frac{4!}{2!} \neq 3!$$

$$(7!)^2 \neq 9!$$

$$1! - 2! \neq 4!$$

$$\text{الف) } 4! \times 2 = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 2 = 24 \times 2 = 48$$

$$b) \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 20$$

$$\frac{1}{l} \frac{\Delta!}{\mu!} = \frac{\Delta \times \cancel{\epsilon} \times \cancel{\mu!}}{\cancel{\mu!}} = \mu_0$$

$$b) \frac{10!}{9!} = \frac{1 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{\cancel{9!}} = 10$$

$$\text{ت) } \frac{3! \times 5! \times 1!}{7! \times 1!} = \frac{3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{7}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



جایگشت



۵- به چند حالت مختلف ۴ نفر، در یک ردیف کنار هم می توانند بنشینند؟

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4!} = 24$$

هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن n شیء می نامیم، و تعداد این جایگشت ها برابر است با $n!$.

س م ل و ف

۶- با حروف کلمه "سمانه" و بدون تکرار حروف چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟

$$\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 5! = 120$$

$$\underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 4! = 24$$

۷- با حروف کلمه "flower" چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟

flower

۸- با حروف کلمه "flower" چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت؟

$$\underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 3 \times 2 = 6$$

۹- با حروف کلمه "flower" چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت؟

$$\underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 2$$

ممکنه سوال رو به این صورت مطرح کنه :

تعداد جایگشت های ۳ حرفی از حروف کلمه "flower" را بنویسید.

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



جایگشت های مشروط

۱- فلان چیزها در فلان جا باشد یا نباشد.

~~a~~ ~~b~~ ~~c~~ d۱۰- فرض کنید می خواهیم با حروف a, b, c, d یک کلمه چهار حرفی بنویسیم به طوری که حرف a اول باشد.

$$\frac{1 \times 3 \times 2 \times 1}{*} = 6$$

الگوریتم حل: در این تیپ سوالات، ترتیب پر کردن خانه ها به صورت زیر است:

خانه هایی که باید فلان
شی در آن ها باشدخانه هایی که باید فلان
شی در آن ها نباشد

خانه های بدون شرط

~~a~~ ~~b~~ ~~c~~ w e r

۱۱- با حروف کلمه " answer " و بدون تکرار حروف:

$$\frac{1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{*} = 24$$

الف: چند کلمه ۵ حرفی می توان ساخت که با a شروع و به r ختم شوند؟

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{*} = 24$$

ب: چند کلمه ۴ حرفی می توان ساخت که به a ختم شود و حرف w حرف دوم نباشد؟

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



۲- یک در میان قرار گرفتن اعضای دو گروه

* حالتی که تعداد اعضای یکی از گروه ها، یک عضو بیشتر از گروه دیگر است.

۱۲- به چند طریق می توان ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۳ دانش آموز پایه دهم را یکی در میان کنار هم قرار داد؟

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{*} \times \frac{3 \times 2 \times 1}{*} = 4! \times 3!$$

دوازدهم ← دهم

X — — — — —

※ حالتی که تعداد اعضای دو گروه باهم برابر است.

۱۳- به چند طریق می توان ۳ دانش آموز پایه دوازدهم و ۳ دانش آموز پایه دهم را یکی در میان کنار هم قرار داد؟

$$\frac{3 \times 2 \times 1}{3!} \times \frac{3 \times 2 \times 1}{3!} = 3! \times 3! \rightarrow 2 \times 3! \times 3!$$

دوازدهم ← دهم

$$\frac{3 \times 2 \times 1}{3!} \times \frac{3 \times 2 \times 1}{3!} = 3! \times 3!$$

۳- فلان چیزها در کنار هم باشند.

۱۳- ۳ کتاب ریاضی و ۲ کتاب فلسفه متفاوت را می خواهیم در یک قفسه کنار هم قرار دهیم در چند حالت کتابهای فلسفه کنار هم هستند؟

$$\frac{2 \times 1}{2!} \times 3 \times 2 \times 1 = 2! \times 6$$

$$\frac{3}{3} \times \frac{2 \times 1}{2!} \times 2 \times 1 = 2! \times 6$$

$$\frac{3}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1!} = 2! \times 6$$

$$\frac{3}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1!} = 2! \times 6$$

$$\Rightarrow 4 \times 2! \times 6$$

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4!} = 2! \times 4!$$

$$4 \times 2! \times 3!$$

$$4 \times 3! = 4!$$

۱۴- ۳ کتاب زبان ، ۲ کتاب فلسفه و ۳ کتاب منطق متفاوت را می خواهیم در یک قفسه کنار هم قرار دهیم در چند حالت کتابهای هم موضوع کنار هم هستند؟

$$\frac{3 \times 2 \times 1}{3!} \times \frac{2 \times 1}{2!} \times \frac{3 \times 2 \times 1}{3!} = 3! \times 2! \times 3!$$

۱۵- با حروف کلمه " answer " و بدون تکرار حروف چند کلمه ۶ حرفی می توان ساخت که حروفات " ans " کنارهم باشند؟

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4!} = 4! \times 3!$$



تبدیل r شی از n شی یا جایگشت r شی از n شی

تعداد انتخاب های r شی از بین n شی (که جایابی یا ترتیب انتخاب مهم باشد) را با نماد $P(n, r)$ نشان می دهیم و بنابر دستور زیر محاسبه می کنیم:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P(5, 2) = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$

$$P(7, 3) = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210$$

نوشتن کلمات
نوشتن اعداد

۱۶- با ارقام ۱، ۲، ۴، ۶، ۸، ۹، ۷ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟ (بدون تکرار)

$$P(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210$$

$$7 \times 6 \times 5 = 210$$

توجه: تمام سوالات مربوط به تبدیل را می توانید با اصل ضرب حل کنید نیازی به فرمول نیست. مگر اینکه سوال مستقیماً محاسبه یک عبارت به شکل $P(n, r)$ را بخواهد.

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



math-pilevar.ir

اصل ضرب در عدد نویسی

۱۶- با ارقام ۱ و ۴ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

$$\underline{3} \times \underline{3} \times \underline{3} = 27$$

$$\underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 6$$

الف: تکرار ارقام مجاز باشد.

ب: تکرار ارقام مجاز نباشد.

۴، ۲، ۱

۴۴۴ ۲۲۱، ۲۱۲

۴۴۱ ۲۲۲

۲۴۱

۱۲۴

۲۱۴

۱۷- ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را در نظر بگیرید:

$$\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 5!$$

الف: چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

$$\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} = 120$$

ب: چند عدد ۴ رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

$$\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, 4, 5, 6, 7$$

۱۸- با ارقام ۱ تا ۷ چند عدد ۴ رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

$$\underline{7} \times \underline{6} \times \underline{5} \times \underline{4} = 42 \times 20 = 840$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



نکات ساختن اعداد

مثل زوج بودن، فرد بودن، کوچکتر یا بزرگتر از یک عدد خاص بودن و غیره.

برای حل سوالات به نکات زیر توجه کنید:

۱- عددی زوج است که یکان آن (رقم سمت راست آن) زوج باشد یعنی ۰ یا ۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸ باشد.

۲- عددی فرد است که یکان آن، فرد باشد. یعنی: ۱ یا ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹ باشد.

۳- عددی مضرب ۵ است که یکان آن صفر یا ۵ باشد.

۴- در ساختن اعداد، اولین رقم سمت چپ نمی تواند صفر باشد ولی ساختن رمز گاو صندوق می شود از صفر هم در اولین رقم سمت چپ استفاده کرد.

۵- اعداد اول ...، ۱۷، ۱۳، ۱۱، ۷، ۵، ۳، ۲ را به خاطر بسپارید، گاهی در سوالات مطرح می شود.

۱۹- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ بدون تکرار ارقام:

$$\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 5!$$

الف: چند عدد ۵ رقمی می توان ساخت؟

$$\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 120$$

ب: چند عدد ۴ رقمی زوج می توان ساخت؟

$$\underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 24$$

پ: چند عدد ۴ رقمی فرد می توان ساخت؟

۲۰- با ارقام ۹، ۸، ۷، ۶ و بدون تکرار ارقام:

$$\frac{4 \times 3 \times 2}{1} = 24$$

الف: چند عدد ۳ رقمی زوج می توان نوشت؟

$$\frac{4 \times 3 \times 2}{2} = 12$$

ب: چند عدد ۳ رقمی فرد می توان نوشت؟

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



۲۱- با ارقام ۵، ۴، ۳ و بدون تکرار ارقام:

$$\frac{3 \times 2 \times 1}{1} = 6$$

الف: چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۴۰۰ می توان ساخت؟

$$\frac{2 \times 1 \times 1}{1} = 2$$

ب: چند عدد سه رقمی کوچکتر از ۴۰۰ می توان ساخت؟

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 12$$

پ: چند عدد ۴ رقمی می توان ساخت که یکان آن، عددی اول باشد؟

۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ...

۲۲- با ارقام ۴، ۳، ۲، ۱ و بدون تکرار ارقام چند عدد ۵ رقمی می توان نوشت؟

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 24$$

۲۳- با ارقام ۶، ۵، ۴ و بدون تکرار ارقام چند عدد ۳ رقمی می توان نوشت؟

$$\frac{3 \times 2 \times 1}{1} = 6$$

تذکر: در مسایل عدد نویسی (بدون تکرار ارقام) اگر شرط سوال " زوج بودن " یا " مضرب ۵ بودن " باشد. در دو حالت زیر حساب می کنیم .

۲- یکان صفر نباشد.

۱- یکان صفر باشد.

۲۳- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد ۴ رقمی بخش پذیر بر ۵ می توان نوشت؟

حالت اول: رقم یکان صفر باشد

$$\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{1} = 60$$
 یا
 حالت دوم: رقم یکان ۵ باشد

$$\underline{4} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{1} = 48$$

$$\Rightarrow 60 + 48 = 108$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



۲۲- ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ مفروض اند، بدون تکرار ارقام چند عدد ۵ رقمی و زوج می توان نوشت؟

حالت اول: رقم یکان صفر باشد

$$\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 120$$
 یا
 حالت دوم: رقم یکان ۲ باشد

$$\underline{4} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{2} = 192$$

$$\Rightarrow 120 + 192 = 312$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



اصل متمم

کل حالت ها

حالت های نامطلوب

حالت هایی که به دنبالش هستیم

۲۳- ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ مفروض اند، بدون تکرار ارقام چند عدد ۵ رقمی و زوج می توان نوشت؟

اعداد زوج = اعداد فرد - کل اعداد

$$\underline{5} \times \underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} = 600$$
 یا

$$\underline{4} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{3} = 288$$

$$\Rightarrow 600 - 288 = 312$$
 اعداد زوج

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



ترکیب

ترکیب انتخاب از اشیا است که در آن ترتیب مهم نیست.

تعداد راه های ترکیب (انتخاب) r شی از بین n شی متمایز که ترتیب قرار گرفتن آن ها مهم نیست را فرمول زیر حساب می کنیم.

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! 3!} = \frac{5 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{2} \times \cancel{1} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 10 \quad \left| \quad \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! 4!} = \frac{7 \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 35 \quad \left| \quad \binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

۲۴- به چند طریق می توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{6! 3!} = \frac{\cancel{9} \times \cancel{8} \times \cancel{7} \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4}}{\cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 84 \quad \left\{ \quad \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84 \right.$$

۲۵- مجموعه ۸ عضوی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ چند زیر مجموعه ۳ عضوی دارد؟

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

$\{a, b, c\}$ — برابرند
 $\{b, a, c\}$ — ترتیب مهم نیست

math-pilevar.ir

روابطی که محاسبات ترکیب را سریع می کند.

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{5}{1} = 5$$

$$\binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{4}{0} = 1$$

$$\binom{4}{3} = 4$$

$$\binom{9}{4} = \binom{9}{5}$$

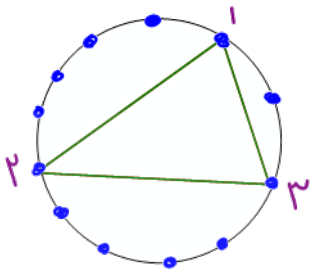
$$\frac{5!}{1! 4!} = \frac{5 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 5$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

۲۶- روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید.

الف: با این ۱۲ نقطه چه تعداد مثلث می توان تشکیل داد؟



$$\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

۳ نقطه

ب: چه تعداد چهار ضلعی می توان تشکیل داد؟

$$\binom{12}{4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 33 \times 9 = 297$$

۴ نقطه

پ: چه تعداد وتر می توان تشکیل داد؟

$$\binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2} = 66$$

۲ نقطه

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...

چند انتخاب در یک سوال

۲۷- از بین ۶ دانش آموز دوازدهمی و ۵ دانش آموز یازدهمی می خواهیم یک گروه ۴ نفری تشکیل دهیم به طوری که یک نفر از پایه دوازدهم

و ۳ نفر از پایه یازدهم باشد. به چند طریق این کار می توان انجام داد؟

① → ۴ دوازدهم
③ → ۵ یازدهم

$$\binom{4}{1} \binom{5}{3} = 4 \times 10 = 40$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10 \quad \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

۲۸- در جعبه ای ۶ مهره قرمز و ۴ مهره آبی وجود دارد. به چند طریق می توان ۳ مهره از این خارج کرد به طوری که ۲ مهره آبی و یک مهره

قرمز باشد؟

① → ۴ قرمز
② → ۴ آبی

$$\binom{4}{1} \binom{4}{2} = 4 \times 6 = 24$$

$$\frac{4 \times 3}{2} = 6$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...

روش حل سوالاتی که کلمات فلان شی باشد یا نباشد... را دارند.

۲۹- از یک تیم ۷ نفره می خواهیم یک گروه ۴ نفره انتخاب کنیم به طوری که علی در این گروه نباشد. این کار را به چند طریق می توانیم انجام



$$\binom{6}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

$$\left\{ \begin{aligned} \binom{7-1}{4} &= \binom{6}{4} \\ \binom{6}{4} &= \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15 \end{aligned} \right.$$

دهیم؟

روش دوم:



۳۰- به چند طریق می توانیم از بین ۷ نفر یک تیم ۴ نفره تشکیل دهیم به طوری که علی حتما در این تیم باشد؟

علی _____

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

$$\left\{ \begin{aligned} \binom{7-1}{4-1} &= \binom{6}{3} \\ \binom{6}{3} &= \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 120 \end{aligned} \right.$$

روش دوم (با استفاده از فرمول)

۳۱- به چند طریق می توانیم از بین ۷ نفر یک تیم ۴ نفره تشکیل دهیم به طوری که علی حتما در این تیم باشد ولی بهزاد در آن نباشد؟



علی _____

$$\binom{5}{3} = 10$$

$$\left\{ \begin{aligned} \binom{7-1-1}{4-1} &= \binom{5}{3} \\ \binom{5}{3} &= \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10 \end{aligned} \right.$$

روش دوم (با استفاده از فرمول)

نکته: برای حل سوالاتی مثل سوال قبل می توان از فرمول زیر استفاده کرد:

$$\binom{n-a-b}{k-a}$$

تعداد حالت های ترکیب k از n به طوری که a در آن باشد و b در آن نباشد برابر است با:

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸

{ ۲, —, — }

$$\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

۳۲- مجموعه {۱, ۲, ۳, ..., ۸} چند زیر مجموعه ۳ عضوی و شامل رقم ۲ دارد؟

باشد

$$\left\{ \begin{aligned} \binom{8-1}{3-1} &= \binom{7}{2} \\ \binom{7}{2} &= \binom{7}{5} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21 \end{aligned} \right.$$

با استفاده از فرمول:

۳۳- مجموعه {۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸} چند زیر مجموعه ۵ عضوی شامل عدد ۱ و ۳ دارد؟

{ ۱ ۳ — — — }

$$\binom{6}{3} = 120$$

$$\left\{ \begin{aligned} \binom{7-2}{5-2} &= \binom{5}{3} \\ \binom{5}{3} &= \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10 \end{aligned} \right.$$

با استفاده از فرمول

۳۴ - $\{1, 2, 4, 6, 8\}$ تعداد زیر مجموعه های ۳ عضوی که شامل ۷ و ۸ نباشد.

$$\{ \text{---} \} \quad \binom{4}{3} = 4$$

$$\left\{ \binom{4-2}{3} = \binom{4}{3} \right\}$$

با استفاده از فرمول:

↑
۵
۴
۳ حداقل

↓
۳ حداقل
۲
۱
۰

روش حل سوالاتی که کلمات حداقل و حداکثر را دارند.

گروهی با حداقل k عضو: یعنی k عضو یا $k+1$ یا $k+2$ و ...

مثال: گروهی با حداقل ۳ عضو یعنی: ۳ یا ۴ یا ۵ یا ...

گروهی با حداکثر k عضو: یعنی k عضو یا $k-1$ یا $k-2$ و ...

مثال: گروهی با حداکثر ۳ عضو یعنی: ۳ عضو یا ۲ عضو یا ۱ عضو یا ۰ عضو

$$\frac{5 \times 4}{2} = 10$$

$$\frac{4 \times 3}{2} = 6$$

۳۵ - به چند طریق می توان از بین ۵ مرد و ۴ زن، ۵ نفر را انتخاب کرد به طوری که:

الف: حداکثر ۳ زن باشد؟

$$\binom{4}{3} \binom{5}{2} + \binom{4}{2} \binom{5}{3} + \binom{4}{1} \binom{5}{4} + \binom{4}{0} \binom{5}{5}$$

$$4 \times 10 + 6 \times 10 + 4 \times 5 + 1 \times 1 = 40 + 60 + 20 + 1 = 121$$

۳ زن و ۲ مرد

۲ زن و ۳ مرد

۱ زن و ۴ مرد

۰ زن و ۵ مرد

ب: حداقل ۳ زن باشد.

$$\binom{4}{3} \binom{5}{2} + \binom{4}{2} \binom{5}{3} = 4 \times 10 + 1 \times 5 = 40 + 5 = 45$$

۳ زن و ۲ مرد

۴ زن و ۱ مرد

~~کتاب~~

۳۶- می خواهیم از بین ۴ دانش آموز پایه دهم و ۵ دانش آموز پایه دوازدهم، یک تیم ۵ نفره فوتبال تشکیل دهیم به طوری که حداقل ۴ نفر از پایه دوازدهم باشد.

$$\binom{5}{4} \binom{4}{1} + \binom{5}{5} \binom{4}{0} = 5 \times 4 + 1 \times 1 = 21$$

۴ دوازدهم و ۱ دهم
۵ دوازدهم و ۰ دهم

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



نکاتی برای تشخیص مسایل ترکیب و جایگشت

ترتیب مهم نیست	ترتیب مهم است	
۱- ساختن یک گروه ۲- انتخاب تعدادی شی و خارج کردن آن ها ۳- تعداد زیر مجموعه	۱- چیدن تعدادی شی ۲- ساختن اعدادهای چند رقمی با کمک اعداد داده شده ۳- ساختن کلمه با حروف داده شده ۴- برداشتن اشیا به ترتیب از یک ظرف (تا تمام شود...)	کلمات کلیدی در سوال
محاسبه کن با ...	ترکیب $\binom{n}{r}$	فاکتوریل و اصل ضرب

درس ۲: احتمال

آزمایش تصادفی: به پدیده ها و آزمایش هایی که نمی توان نتیجه آن ها را پیش از وقوع، به طور قطع تعیین کرد، پدیده ها یا آزمایش های تصادفی می گوئیم.

آزمایش قطعی: به پدیده ها و آزمایش هایی که می توان نتیجه آن ها را پیش از وقوع، به طور قطع تعیین کرد، پدیده ها یا آزمایش های قطعی می گوئیم.

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



فضای نمونه

* مجموعه همه برآمدهای ممکن در یک آزمایش تصادفی، مجموعه ای را تشکیل می دهد که به آن فضای نمونه می گوئیم. و آن را با حرف **S** نمایش می دهیم.

$$S = \{ر, \bar{ر}\} \quad n(S) = 2$$

۳۷- فضای نمونه پرتاب یک سکه را بنویسید.

$$S = \{(\bar{ر}, \bar{ر}), (\bar{ر}, ر), (ر, \bar{ر}), (ر, ر)\} \quad n(S) = \frac{2 \times 2}{1} = 4$$

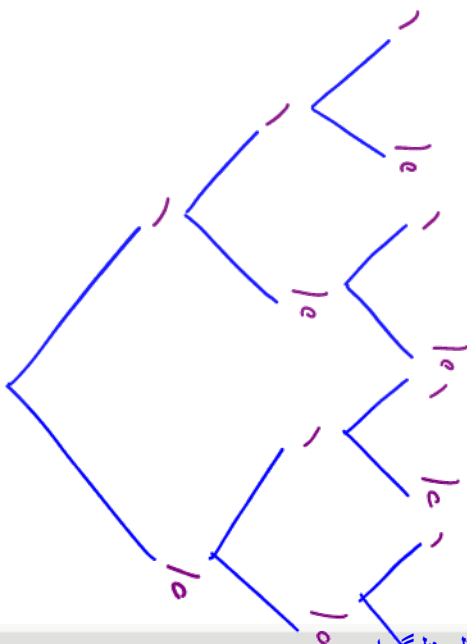
۳۸- فضای نمونه پرتاب دو سکه را بنویسید.

۳۹- فضای نمونه پرتاب سه سکه را بنویسید.

$$S = \{(\bar{ر}, \bar{ر}, \bar{ر}), (\bar{ر}, \bar{ر}, ر), (\bar{ر}, ر, \bar{ر}), (\bar{ر}, ر, ر), (ر, \bar{ر}, \bar{ر}), (ر, \bar{ر}, ر), (ر, ر, \bar{ر}), (ر, ر, ر)\}$$

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8 \quad n(S) = 2^3 = 8$$

نوشتن فضای نمونه با استفاده از روش درختی



$$S = \{+, -\} \quad n(S) = 2 \rightarrow 2^1 = 2$$

۴۰- فضای نمونه تولد یک فرزند را بنویسید.

$$S = \{(+, +), (+, -), (-, +), (-, -)\} \quad n(S) = 2 \times 2 = 4$$

۴۱- فضای نمونه تولد ۲ فرزند را بنویسید.

$$S = \{(+, +, +), (+, +, -), (+, -, +), (+, -, -), (-, +, +), (-, +, -), (-, -, +), (-, -, -)\}$$

۴۲- فضای نمونه تولد ۳ فرزند را بنویسید.

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8 \quad n(S) = 2^3 = 8$$

۴۳- فضای نمونه پرتاب یک تاس را بنویسید.

$$n(S) = 6 \quad S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

۴۴- فضای نمونه پرتاب ۲ تاس را بنویسید.

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$$

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$$

$$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$$

$$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$$

$$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),$$

$$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

۴۵- فضای نمونه پرتاب یک سکه و یک تاس را بنویسید.

$$S = \{(+, 1), (+, 2), (+, 3), (+, 4), (+, 5), (+, 6), (-, 1), (-, 2), (-, 3), (-, 4), (-, 5), (-, 6)\}$$

پیشامد

به هر یک از زیر مجموعه های فضای نمونه S یک پیشامد می گویند.

۴۶- مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ را در نظر بگیرید. پیشامد های خواسته شده را بنویسید.

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

الف: پیشامد آنکه اعداد اول باشد.

$$C = \{9, 10\}$$

ب: پیشامد آنکه اعداد بزرگتر از ۸ باشد.

$$S = \{(\underline{1,1}), (\underline{1,2}), (\underline{1,3}), (\underline{2,1}), (\underline{2,2}), (\underline{2,3}), (\underline{3,1}), (\underline{3,2}), (\underline{3,3})\}$$

۴۷- دو سکه را پرتاب می کنیم پیشامد آنکه هر دو سکه رو بیاید را بنویسید.

$$A = \{(1,1)\}$$

۴۸- یک تاس را پرتاب می کنیم پیشامد آنکه اعداد رو شده کوچکتر از ۴ باشد را بنویسید.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow B = \{1, 2, 3\}$$

۴۹- خانواده ای دو فرزند دارد پیشامد آنکه هر دو فرزند هم جنس باشد را بنویسید.

$$S = \{(\underline{1,1}), (\underline{1,2}), (\underline{1,3}), (\underline{1,4}), (\underline{1,5}), (\underline{1,6}), (\underline{2,1}), (\underline{2,2}), (\underline{2,3}), (\underline{2,4}), (\underline{2,5}), (\underline{2,6}), (\underline{3,1}), (\underline{3,2}), (\underline{3,3}), (\underline{3,4}), (\underline{3,5}), (\underline{3,6}), (\underline{4,1}), (\underline{4,2}), (\underline{4,3}), (\underline{4,4}), (\underline{4,5}), (\underline{4,6}), (\underline{5,1}), (\underline{5,2}), (\underline{5,3}), (\underline{5,4}), (\underline{5,5}), (\underline{5,6}), (\underline{6,1}), (\underline{6,2}), (\underline{6,3}), (\underline{6,4}), (\underline{6,5}), (\underline{6,6})\}$$

$$C = \{(\underline{1,1}), (\underline{1,2}), (\underline{1,3}), (\underline{1,4}), (\underline{1,5}), (\underline{1,6}), (\underline{2,1}), (\underline{2,2}), (\underline{2,3}), (\underline{2,4}), (\underline{2,5}), (\underline{2,6}), (\underline{3,1}), (\underline{3,2}), (\underline{3,3}), (\underline{3,4}), (\underline{3,5}), (\underline{3,6}), (\underline{4,1}), (\underline{4,2}), (\underline{4,3}), (\underline{4,4}), (\underline{4,5}), (\underline{4,6}), (\underline{5,1}), (\underline{5,2}), (\underline{5,3}), (\underline{5,4}), (\underline{5,5}), (\underline{5,6}), (\underline{6,1}), (\underline{6,2}), (\underline{6,3}), (\underline{6,4}), (\underline{6,5}), (\underline{6,6})\}$$

۵۰- دو تاس را پرتاب می کنیم پیشامد آن که مجموع اعداد رو شده برابر ۸ باشد را بنویسید.

$$D = \{(2,6), (6,2), (5,3), (3,5), (4,4)\}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



۵۱- در یک برنامه کوهنوردی، ۵ دانش آموز سال دهم، ۶ دانش آموز سال یازدهم و ۴ دانش آموز سال دوازدهم شرکت دارند. قرار است یک گروه پیشتاز ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد عضوهای پیشامد زیر را مشخص کنید.

الف: سه نفر دانش آموز پیشتاز از سه پایه مختلف باشند.

$$5 \rightarrow 1$$

$$4 \rightarrow 1$$

$$4 \rightarrow 1$$

$$\binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{4}{1} = 5 \times 4 \times 4 = 120$$

ب: حداقل ۲ دانش آموز در این گروه پیشتاز از دانش آموزان سال یازدهم باشند.

$$\begin{matrix} 4 \rightarrow 1 \\ 5 \rightarrow 1 \\ 4 \rightarrow 1 \end{matrix}$$

$$\binom{4}{2} \binom{5}{1} + \binom{4}{1} \binom{5}{2} = 15 \times 5 + 4 \times 10 = 75 + 40 = 115$$

$$\begin{matrix} 4 \rightarrow 1 \\ 5 \rightarrow 1 \\ 4 \rightarrow 1 \end{matrix}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



پیشامد غیرممکن (نشدنی): تهی زیر مجموعه هر مجموعه ای است. پس $\emptyset$ یک پیشامد روی S است. و آن را پیشامد غیر ممکن یا نشدنی می

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\emptyset \text{ یا } \{\}$$

گوییم.

مثال: در پرتاب یک تاس پیشامد آن که عدد رو شده بزرگتر از ۱۰ باشد یک پیشامد غیر ممکن است.

پیشامد حتمی (S): هر مجموعه ای زیر مجموعه خودش است. پس S یک پیشامد روی S است و آن را پیشامد حتمی می نامیم.

مثال: در پرتاب یک تاس، پیشامد آن که عدد رو شده کوچکتر از ۷ باشد. یک پیشامد حتمی است. (یعنی حتما رخ می دهد)

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



اعمال بر روی پیشامدها

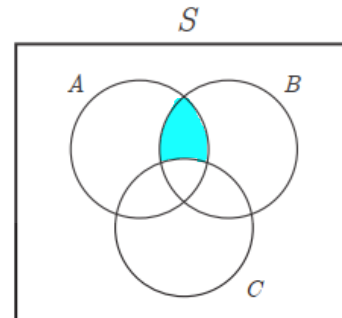
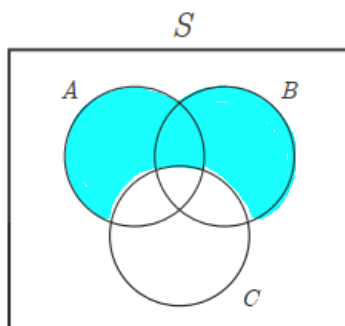
نمایش	$A \cap B =$ $\{x \in S x \in A \wedge x \in B\}$	$A \cup B =$ $\{x \in S x \in A \vee x \in B\}$	$A - B =$ $\{x \in S x \in B \wedge x \notin A\}$	$A' = \{x \in S x \notin A\}$
نام فارسی	اشتراک پیشامدها	اجتماع پیشامدها	تفاضل پیشامدها	متمم یک پیشامد
نمایش هندسی				
توصیف فارسی	پیشامد A و B همزمان رخ دهند.	حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ دهند. (A یا B یا هر دو)	پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد. فقط A رخ دهد.	پیشامد A رخ ندهد.

$$A \cap A' = \emptyset$$

۵۱- فرض کنید A و B و C سه پیشامد در فضای نمونه S باشند. هریک از پیشامدهای زیر را روی نمودار سایه بزنید.

ب: $(A \cup B) - C$

الف: A و B رخ دهند ولی C رخ ندهد.



بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{2\}$$

$$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$C = \{4, 6\}$$

$$D = \{3, 5\}$$

$$E = \{1, 4, 6\}$$

۵۲- تاسی را پرتاب می کنیم هریک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

الف: پیشامد اینکه عدد رو شده زوج و اول باشد.

اصغر

ب: پیشامد اینکه عدد رو شده زوج یا اول باشد.

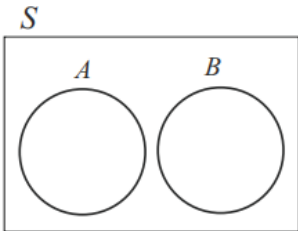
اجتماع

پ: پیشامد اینکه عدد رو شده زوج باشد ولی اول نباشد.

ت: پیشامد اینکه عدد رو شده اول باشد ولی زوج نباشد.

ث: پیشامد اینکه عدد رو شده اول نباشد.

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



پیشامدهای ناسازگار: اگر دو پیشامد هیچ عضو مشترکی نداشته باشند می گوییم ناسازگارند.

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A - B = A$$

$$B - A = B$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



$$\frac{3}{10}$$

$$\frac{5}{10}$$

محاسبه احتمال یک پیشامد

در حالت کلی، احتمال وقوع یک پیشامد از رابطه زیر به دست می آید:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد عضوهای پیشامد } A}{\text{تعداد عضوهای فضای نمونه}}$$

۵۳- مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ را در نظر بگیرید. مطلوب است احتمال آنکه:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{10}$$

الف: اعداد اول باشد.

ب: اعداد بزرگتر از ۸ باشد.

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{10}$$

۵۴- دو سکه را پرتاب می کنیم احتمال آنکه هر دو سکه رو بیاید را بدست آورید.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

$$n(S) = 2 \times 2 = 4$$

$$S = \{(ر,ر), (ر,ب), (ب,ر), (ب,ب)\}$$

۵۵- یک تاس را پرتاب می کنیم احتمال آنکه اعداد رو شده کوچکتر از ۴ باشد را بنویسید.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

۵۶- خانواده ای دو فرزند دارد احتمال آنکه هر دو فرزند هم جنس باشد را بنویسید.

$$S = \{(ر,ر), (ر,ب), (ب,ر), (ب,ب)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4}$$

۵۷- در خانواده ای با ۳ فرزند با چه احتمالی فرزند اول و آخر هم جنس هستند؟

$$S = \{(ر,ر,ر), (ر,ر,ب), (ر,ب,ر), (ر,ب,ب), (ب,ر,ر), (ب,ر,ب), (ب,ب,ر), (ب,ب,ب)\}$$

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

math-pilevar.ir

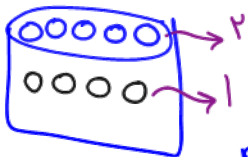
بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



مسایلی که با انتخاب سر و کار دارند

۵۸- در جعبه ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه یکسان قرار دارد. به تصادف ۳ مهره خارج می کنیم. با کدام احتمال، ۲ مهره سفید و یک مهره

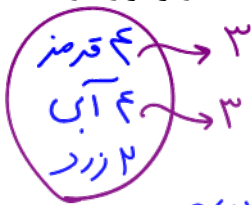
سیاه خارج می شود؟



$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{2} \binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{10 \times 4}{126} = \frac{40}{126} = \frac{10}{31}$$

۵۹- در یک فروشگاه ورزشی تعدادی پیراهن ورزشی شامل ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد در یک رخت آویز قرار دارند. شخصی در خواست می کند که فروشنده به طور تصادفی ۳ پیراهن انتخاب کند و برای بفرستد.

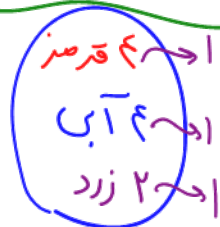
الف: احتمال این را که ۳ پیراهن از یک رنگ باشد، محاسبه کنید.



$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{3} + \binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4 + 4}{120} = \frac{1}{15}$$

۳ قرمز یا ۳ آبی +

ب: احتمال این را که ۳ پیراهن متفاوت باشد، محاسبه کنید.



$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{1} \binom{4}{1} \binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{4 \times 4 \times 2}{120} = \frac{32}{120}$$

پ: احتمال این را که حداقل ۲ پیراهن قرمز باشند، محاسبه کنید.



$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{2} \binom{4}{1} + \binom{4}{3} \binom{2}{0}}{\binom{10}{3}} =$$

۲ قرمز و ۱ آبی یا ۳ قرمز و ۰ بقیه

$$\frac{6 \times 4 + 4 \times 1}{120} = \frac{28}{120} = \frac{7}{30}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



مسایلی که با اصل ضرب و جایگشت سر و کار دارند

○○○○×

۶۰- با ۵ نفر می خواهیم یک صف تشکیل دهیم با چه احتمالی علی در ابتدای صف قرار می گیرد؟

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{4!}{5!} = \frac{4!}{5 \times 4!} = \frac{1}{5}$$

۶۱- با ارقام ۲، ۴، ۵، ۶ و بدون تکرار ارقام عدد ۵ رقمی می سازیم با چه احتمالی این عدد فرد است؟

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{4} \times \cancel{5} \times \cancel{6} \times 1 \times 2}{5 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1} \times 1} = \frac{4! \times 2}{5!} = \frac{\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 2}{5 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2}} = \frac{2}{5}$$

مسائل مربوط به روز، ماه و فصل

۱۳۵۶: فروردین اسفند

۶۲- یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه :

الف : هر پنج نفر در ماه فروردین متولد شده باشند.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1}{12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12} = \frac{1}{12^5}$$


ب: هر پنج نفر آنها در یک ماه از سال متولد شده باشند.

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1}{12^4} = \frac{1}{12^4}$$


پ : تولد هیچ دو تای آنها در یک ماه نباشد.

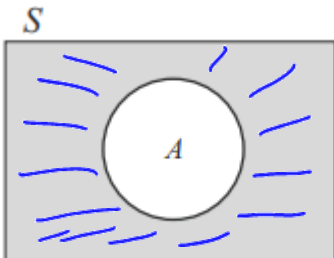
$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{11 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{12^5} = \frac{11 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{12^5}$$


بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



math-pilevar.ir

احتمال پیشامد متمم

اگر $P(A)$ احتمال وقوع پیشامد A در فضای نمونه S باشد، در این صورت، احتمال واقع نشدن آن پیشامد را با $P(A')$ نمایش می دهیم.

$$P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow \begin{cases} P(A') = 1 - P(A) \\ P(A) = 1 - P(A') \end{cases}$$

۶۳- احتمال اینکه فردا بارانی باشد برابر با $\frac{1}{10}$ است. مطلوبست محاسبه احتمال اینکه فردا بارانی نباشد.

$$P(A') = 1 - P(A) = \frac{10 - 1}{10} = \frac{9}{10}$$

۶۳- احتمال اینکه ریحانه امشب سریال شبکه یک سیما را تماشا نکند برابر با $\frac{32}{49}$ است. مطلوبست محاسبه احتمال اینکه ریحانه امشب سریال را تماشا کند.

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{17}{49} = \frac{32}{49}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



تذکر: کلمات لااقل، حداقل، نباشد و حداکثر نشانه متمم مجموعه است. یعنی حالت خواسته شده را حساب و از ۱ کم می کنیم. البته ممکن است با وجود این

نشانه ها باز هم حل مستقیم سوال راحت تر باشد.

۶۴- در یک فروشگاه ورزشی تعدادی پیراهن ورزشی شامل ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد در یک رخت آویز قرار دارند. شخصی در خواست می کند که فروشنده به طور تصادفی ۳ پیراهن انتخاب کند و برای بفرستد. احتمال اینکه رنگ سه پیراهن آبی نباشد، محاسبه کنید. **روش اول: (روش مستقیم)**

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1} + \binom{4}{1}\binom{2}{2} + \binom{4}{0}\binom{2}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{6 \times 2 + 4 \times 1 + 1 \times 0}{120} = \frac{11}{120}$$

$\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$
 $\binom{2}{1} = \frac{2 \times 1}{1} = 2$
 $\binom{4}{1} = \frac{4 \times 1}{1} = 4$
 $\binom{2}{2} = \frac{2 \times 1}{2 \times 1} = 1$
 $\binom{4}{0} = 1$
 $\binom{2}{3} = 0$

۲ آبی و ۲ بقیه
 ۱ آبی و ۲ بقیه
 ۰ آبی و ۳ بقیه

روش دوم: (با استفاده از متمم)

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{4}{120} = \frac{116}{120}$$

۴ آبی ← ۳
 ۴ قرمز
 ۲ زرد

درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل

حل کردن مسئله های مرتبط با آمار به صورت چرخه ای شامل گام های ۱: بیان مسئله ۲: طرح و برنامه ریزی ۳: گردآوری و پاک سازی داده ها، ۴: تحلیل داده ها و ۵: بحث و نتیجه گیری است.



گام اول (بیان مسئله)

طرح یک پرسش دقیق و شفاف، مهمترین گام برای رسیدن به پاسخ است.

گام دوم (طرح و برنامه ریزی)

اندازه گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده ها و بررسی تغییر مورد نظر است. در اندازه گیری، سعی می کنیم اطلاعات توصیفی (کیفی) را تا حد ممکن به اطلاعات کمی (عددی) تبدیل کنیم. انتخاب معیار اندازه گیری مناسب برای متغیرهایی مانند قد، وزن و دما آسان است؛ زیرا با ابزارهای آشنا می توانیم توصیف هایی مانند "قد بلند"، "وزن مناسب" یا "هوای گرم" را به کمیت هایی قابل فهم برای همه تبدیل کنیم. با توجه به اهمیت اندازه گیری، می توان به نقش حیاتی حضور متخصصان در گروه هدایت کننده پژوهش اشاره کرد. متخصصان، ابزارهای اندازه گیری یا پرسشنامه ها را طوری طراحی می کنند که بتوانیم متغیرهای مورد نظر را به درستی اندازه بگیریم.

*در مرحله طرح و برنامه ریزی، علاوه بر توافق درباره چگونگی اندازه گیری متغیرها، درباره اندازه نمونه، روش نمونه گیری و شیوه تحلیل داده ها نیز تصمیم گیری می شود.

• اندازه جامعه: تعداد اعضای جامعه مورد مطالعه.

• اندازه نمونه: تعداد اعضای انتخاب شده از جامعه.

* هرچه پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد، برای اطمینان از تنوع در نمونه، به اندازه نمونه بزرگتری نیاز داریم.

مثال

در کدام مورد اندازه نمونه بزرگتری لازم است؟

۱) سن دانش آموزان یک کلاس

۳) مدت زمان مطالعه افراد یک محله

۲) وزن بچه‌های یک مدرسه

۴) میزان آب مصرفی خانواده‌های یک کشور ✓

قطعاً پراکندگی افراد در کل کشور و همچنین تعداد اعضای آنها بسیار بیشتر از سایر گزینه‌هاست پس برای بررسی آب مصرفی خانواده‌های کشور، نیاز به نمونه بزرگتری خواهیم داشت.

۶۵- برای بررسی وضعیت اجتماعی-اقتصادی خانوارهای یک شهر، در کدامیک از شیوه‌های نمونه‌گیری زیر، همه قشرهای جامعه شانس حضور ندارند؟ چرا؟

الف) انتخاب تصادفی خانوارها براساس رقم اول تلفن خانه‌ها، مناسب نیست.

ب) انتخاب تصادفی خانوارها براساس رقم آخر تلفن خانه‌ها، مناسب است.

گام سوم (گردآوری و پاک سازی داده‌ها)

در هر مطالعه ممکن است در مرحله اندازه‌گیری، گردآوری یا ثبت داده‌ها، یا وارد کردن داده‌ها در نرم افزار اشتباهی رخ دهد. با بررسی دقیق داده‌ها می‌توان برخی از این اشتباه‌ها را تصحیح کرد.

گام چهارم (تحلیل داده‌ها)

در این مرحله، داده‌ها را تحلیل می‌کنیم و نتایج را ارائه می‌دهیم. منظور از تحلیل داده‌ها، صرفاً گزارش معیارها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج آماری است. تفسیر این نتایج و نتیجه‌گیری از آن‌ها در گام بعد انجام خواهد شد.

مثال: در کلاس دوازدهم به بررسی سن و میزان ساعت‌های تماشای تلویزیون می‌پردازیم.

الف) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی برای توصیف داده‌های متغیر «سن» مناسب‌اند؟ چرا؟

با توجه به توزیع داده‌ها، برای متغیر «سن» میانگین و انحراف استاندارد (انحراف معیار) معیارهای مناسبی هستند؛ زیرا داده‌های دورافتاده مشاهده نمی‌شود.

ب) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی برای توصیف داده‌های «ساعت‌های تماشای تلویزیون» مناسب‌اند؟ چرا؟
میانه و دامنه میان‌چارکی معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی مناسبی هستند؛ زیرا چند داده دورافتاده وجود دارد.

مثال:

الف) کدام نمودار بهتر نشان می‌دهد که داده‌ها کجا متراکم‌تر و کجا پراکنده‌ترند: نمودار نمایش‌دهنده میانگین و انحراف معیار یا نمودار جعبه‌ای؟

پاسخ: نمودار جعبه‌ای.

ب) اگر از الگوی توزیع داده‌ها و وجود داده‌های دورافتاده اطلاعی نداشته باشیم، کدام نمودار برای نمایش اطلاعات متغیرهای کمی مطمئن است؟

پاسخ: مطمئن‌ترین نمودار برای متغیر کمی، نمودار جعبه‌ای است.

کار در کلاس (صفحه ۲۵ و ۲۶ کتاب درسی)

دو مدرسه متوسطه دوم که تعداد دانش‌آموزانشان تقریباً برابر بود، در سال گذشته با تغییر برنامه‌ها و کادر آموزشی‌شان، وضعیت قبولی دانش‌آموزان خود را در دانشگاه‌های برتر کشور بهبود دادند. مدرسه اول قبولی‌هایش ۲۰۰ درصد افزایش داشت و مدرسه دوم ۲۰ درصد. فرض می‌کنیم اولیا برای انتخاب مدرسه فرزندان خود محدودیتی ندارند.

الف) در این مسئله، متغیر «قبولی» در ۱۵ دانشگاه برتر کشور (قبول شدن یا قبول نشدن) چه نوع متغیری است؟ کمی یا کیفی؟
پاسخ: کیفی.

$$\begin{array}{l} ۳ \xrightarrow{۲۰۰\%} ۱ \text{ مدرسه اول} \\ ۸۴ \xrightarrow{۲۰\%} ۷۰ \text{ مدرسه دوم} \end{array}$$

ب) با توجه به این اطلاعات، کدام مدرسه را به اولیا پیشنهاد می‌کنید؟

پاسخ: بدون گزارش تعداد، نمی‌توان نتیجه‌گیری کرد.

پ) فرض کنید در مدرسه اول، تعداد قبولی‌ها قبل از تغییر ۱ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی به ۳ نفر رسیده است (۲۰۰ درصد افزایش) و در مدرسه دوم، تعداد قبولی‌ها از ۷۰ نفر به ۸۴ نفر رسیده است (۲۰ درصد افزایش). اکنون کدام مدرسه را پیشنهاد می‌کنید؟
پاسخ: مدرسه دوم.

ت) در گزارش متغیرهای کیفی، با توجه به مثال، ارائه درصد بدون مشخص کردن تعداد می‌تواند گمراه‌کننده باشد.

نکته: برای توصیف داده‌های کیفی (اسمی یا ترتیبی)، گزارش درصد باید همیشه همراه با گزارش تعداد باشد.



گام پنجم (بحث و نتیجه گیری)

پس از تحلیل داده‌ها، باید بتوانیم با تفسیر نتایج، پاسخی برای مسئله اصلی پیدا کنیم. در تفسیر نتایج، توجه به محدودیت‌های مطالعه بسیار مهم است. روش کار و محدودیت‌های آن باید به صورت صادقانه گزارش شود تا اگر دیگران تصمیم به انجام مطالعه‌ای مشابه گرفتند، با مشکلاتی مشابه مواجه شوند. پیشنهادهای ما می‌تواند به این افراد کمک کند.

اگر نمونه‌گیری و تحلیل داده‌ها به درستی انجام شده باشد، در بهترین حالت می‌توانیم نتایج را فقط به جامعه آماری مورد بررسی تعمیم دهیم. توجه کنید که اگر تمام افراد جامعه را بررسی نکرده‌ایم، نتایج قطعی نیستند؛ زیرا در نمونه‌گیری دیگری از همان جامعه، افراد متفاوتی ممکن است انتخاب شوند و نتایج تغییر کند.

از جامعه‌ای با اندازه N به چند طریق می‌توانیم نمونه‌هایی با اندازه n داشته باشیم؟ پاسخ: $\binom{N}{n}$

مثال: از جامعه‌ای با اندازه ۱۸، به چند طریق می‌توان نمونه‌هایی با اندازه ۵ انتخاب کرد؟

پاسخ: $\binom{18}{5}$

یکپارچگی چرخه آمار در حل مسائل

همان‌طور که مشاهده شد، در تمام گام‌های حل مسئله آماری، شناخت دقیق مسئله، متغیرها و عوامل مرتبط با آن‌ها ضروری است. این امر بدون کار گروهی و همکاری متخصصان حوزه پژوهش ممکن نیست. برای مثال:

- اگر آمارگیران از اهداف کلی مطالعه اطلاع نداشته باشند، یا
- اگر تحلیلگر داده‌ها ویژگی‌های جامعه آماری یا موضوع مطالعه را به خوبی نشناسد،

حتی با انجام دقیق تکالیف فردی، نتیجه نهایی مطلوب نخواهد بود.

نکته کلیدی:

اگر مطالعه در منطقه‌ای انجام می‌شود که ویژگی‌های آن را به خوبی نمی‌شناسیم، در تمام مراحل باید به دانش و دیدگاه اهالی منطقه اولویت دهیم.

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



جمع بندی: +

ترتیب گام	نام گام	توضیح گام
۱	بیان مسئله	مسئله ای را که در دنیای واقعی وجود دارد به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می کنیم.
۲	طرح و برنامه ریزی	راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می کنیم. به نمونه گیری ، شیوه اندازه گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می اندیشیم.
۳	گردآوری و پاک سازی داده ها	داده ها را گردآوری می کنیم و تا حد ممکن از درستی آنها مطمئن می شویم.
۴	تحلیل داده ها	با استفاده از معیارها ، نمودارها و مفاهیمی که آموخته ایم ، نتایج را متناسب با هدف های کارمان ، نوع متغیرها و ویژگی های داده ها گزارش می کنیم.
۵	بحث و نتیجه گیری	نتایج به دست آمده را تفسیر می کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می کنیم.

گام اول	گام دوم	گام سوم	گام چهارم	گام پنجم
بیان مسئله	طرح و برنامه ریزی	گردآوری و پاک سازی داده ها	تحلیل داده ها	بحث و نتیجه گیری
- فهم مسئله - تعریف دقیق مسئله	- شیوه اندازه گیری - روش نمونه گیری - روش کار	- گردآوری - سازماندهی - پاک سازی	- مرتب کردن داده ها - معیارها - نمودارها و جدول ها	- تفسیر نتایج - نتیجه گیری - نقد و بررسی - ایده های جدید

واریانس و انحراف معیار

واریانس همان میانگین مجزورات اختلاف داده ها از میانگین است. واریانس به کمک رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

به جذر واریانس ، انحراف معیار گفته می شود . و با نماد σ نمایش می دهند.

۶۶- واریانس و انحراف معیار داده های ۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷ را بدست آورید.

$$\bar{x} = \frac{7+5+3+1}{4} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{(7-4)^2 + (5-4)^2 + (3-4)^2 + (1-4)^2}{4} = \frac{9+1+1+9}{4} = 5$$

واریانس

$$\sigma = \sqrt{5} \quad \text{انحراف معیار}$$

۶۷- واریانس و انحراف معیار داده های ۱۳، ۱۸، ۱۶، ۲۷، ۲۱، ۲۵ را بدست آورید.

$$\bar{x} = \frac{13 + 18 + 16 + 27 + 21 + 25}{6} = \frac{120}{6} = 20$$

$$s^2 = \frac{(13-20)^2 + (18-20)^2 + (16-20)^2 + (27-20)^2 + (21-20)^2 + (25-20)^2}{6} = \frac{49 + 4 + 16 + 49 + 1 + 25}{6} = 144$$

$$s = \sqrt{144} = 12 \quad \text{انحراف معیار}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



چارک ها و دامنه میان چارکی (IQR)

چارک ها: سه تا چارک داریم: چارک اول (Q_1)، چارک دوم (Q_2)، چارک سوم (Q_3)

چارک ها همه داده ها را به چهار قسمت تقسیم می کند. یعنی این چارک ها طوری مشخص می شوند که داده ها به چهار قسمت مساوی تقسیم شوند. چارک دوم همان میانه است.

دامنه میان چارکی: یکی از شاخص ها پراکندگی دامنه میان چارکی است. به اختلاف چارک اول و سوم، دامنه میان چارکی می گوئیم و آن را با IQR نشان می دهیم.

$$IQR = Q_3 - Q_1 \quad \text{یا} \quad \text{چارک اول} - \text{چارک سوم} = \text{دامنه میان چارکی}$$

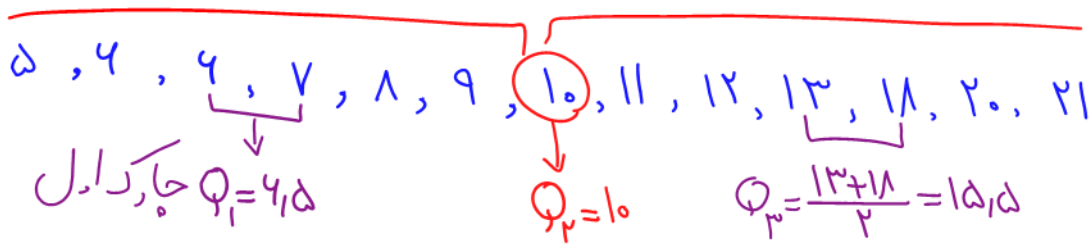
دامنه تغییرات: اختلاف بزرگترین داده با کوچکترین داده را دامنه تغییرات می گوئیم.

$$\text{کوچکترین داده} - \text{بزرگترین داده} = \text{دامنه تغییرات}$$

تذکر: برای پیدا کردن چارک ها ابتدا همه داده ها را از کوچکتر به بزرگتر مرتب می کنیم.



۶۸- دامنه تغییرات، چارک ها و دامنه میان چارکی داده های ۶، ۷، ۲۰، ۱۰، ۱۳، ۸، ۶، ۱۱، ۱۲، ۲۱، ۹، ۵، ۱۸ را مشخص کنید.

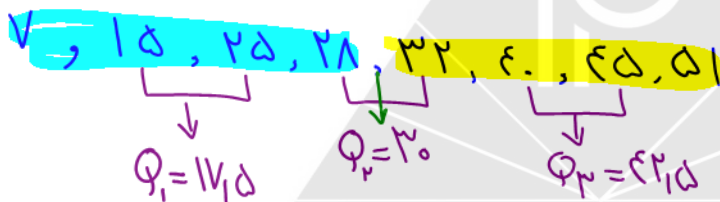


$$IQR = Q_3 - Q_1 = 15.5 - 7.5 = 8$$

دامنه تغییرات = $21 - 5 = 16$

کوچکترین داده → بزرگترین داده

۶۹- چارک ها و دامنه میان چارکی داده های ۷، ۲۸، ۲۵، ۱۵، ۳۲، ۴۰، ۴۵، ۵۱ را مشخص کنید.

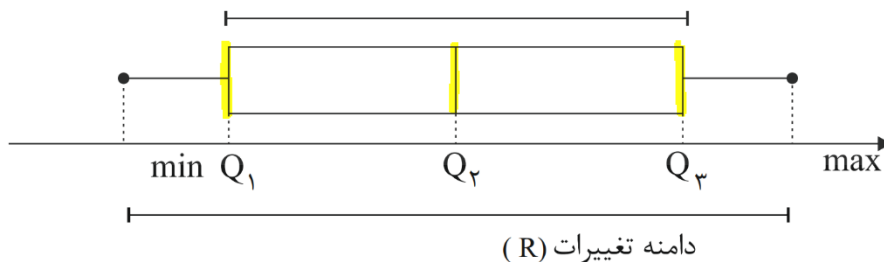


$$IQR = Q_3 - Q_1 = 42.5 - 17.5 = 25$$

نمودار جعبه ای

نمودار جعبه ای روشی سودمند برای نمایش دامنه ها (دامنه تغییرات و دامنه میان چارکی) و چارک های داده هاست. در شکل زیر محل قرار گیری چارک ها و مقادیر max و min داده ها نشان داده شده است.

طول جعبه یا دامنه میان چارکی (IQR)

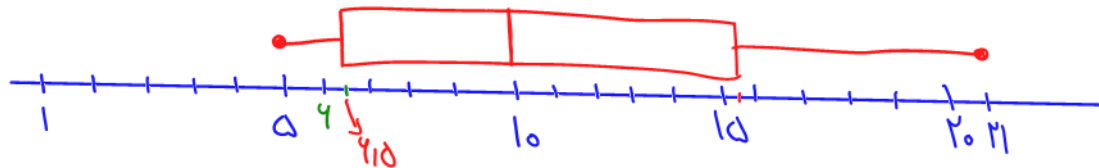


نکته: اگر داده دور افتاده باشیم بهتر است از نمودار جعبه ای استفاده کنیم.

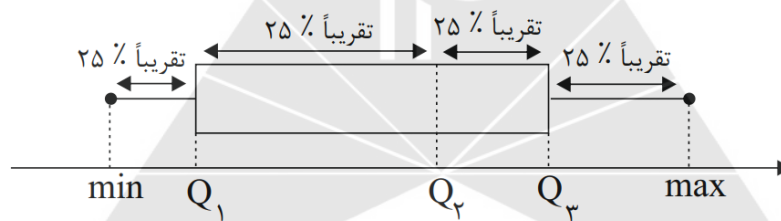
۷۰- نمودار جعبه ای ۵، ۶، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۸، ۲۰، ۲۱ را رسم کنید.

$$Q_1 = 6.5$$

$$Q_2 = 15.5$$



نکته: نمودار پخش داده ها در نمودار جعبه ای: نمودار جعبه ای داده ها را به ۴ قسمت تقسیم می کند که هر قسمت ۲۵ درصد داده هاست. با توجه به نمودار داده شده می توان گفت:

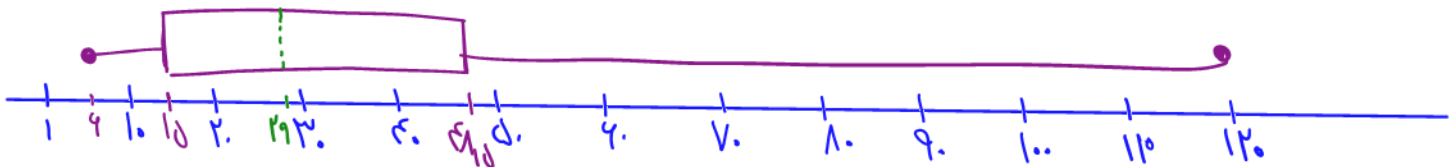


۷۱- نمودار جعبه ای داده های ۶، ۱۰، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۵، ۲۹، ۳۶، ۴۴، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۱۲۰ را رسم کنید.

$$Q_1 = 15$$

$$Q_2$$

$$Q_3 = 41.5$$



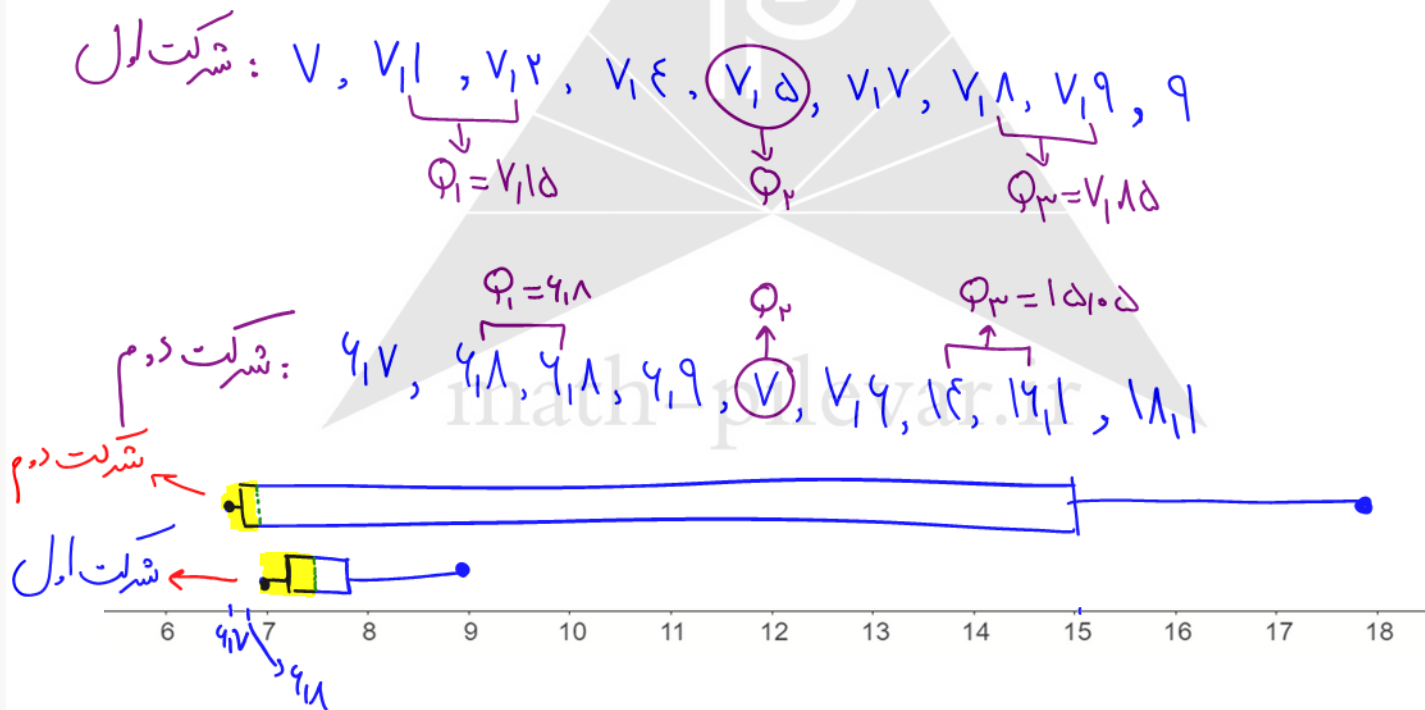
کاردر کلاس صفحه ۳۶

۷۲- دو شرکت به نرگس پیشنهاد کار داده اند که یکی از آنها ۳۰ و دیگری ۳۱ کارمند دارد. میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت اول، تقریباً $۶/۷$ میلیون تومان و میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت دوم تقریباً ۱۰ میلیون تومان است. او بهتر است کدام یک از این دو شرکت را انتخاب کند؟

حقوق چند نفر را که به صورت تصادفی انتخاب شده است به صورت زیر است.

	حقوق کارمندان								
شرکت اول	۷	$۷/۵$	$۷/۲$	$۷/۷$	$۷/۴$	$۷/۹$	۹	$۷/۱$	$۷/۸$
شرکت دوم	$۶/۷$	۷	۱۴	۱۸/۱	$۶/۸$	$۷/۶$	$۱۶/۱$	$۶/۹$	$۶/۸$

الف) با استفاده از داده‌های جدول بالا، نمودار جعبه‌ای حقوق ماهیانه کارمندان این دو شرکت را روی یک محور رسم کنید.



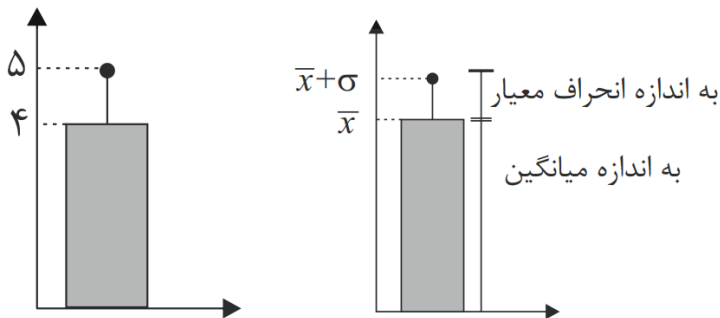
ب) با توجه به نمودارهای قسمت الف، درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.

- حقوق تقریباً ۵۰٪ کارمندان شرکت دوم کمتر از کمترین حقوق کارمندان شرکت اول است. **درست**
- اگر نرگس سطح تحصیلات و تجربه متوسطی داشته باشد و این دو شرکت افراد را براساس شایستگی‌ها نشان انتخاب کنند، شرکت اول برای او مناسب است. **درست**
- در شرکت دوم، میانگین، معیار گرایش به مرکز مناسبی است. **نادرست**

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



نمودار نمایش دهنده میانگین و انحراف معیار



در داده هایی که میانگین و انحراف معیار شاخص های مناسبی برای توصیف هستند (هنگامی که داده دور افتاده نداشته باشیم)، می توانیم از نموداری استفاده کنیم که بلندی مستطیل آن نشان دهنده میانگین باشد و میله خطای آن ف به اندازه انحراف معیار، روی مستطیل بالا آمده باشد.

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



نمودار دایره ای

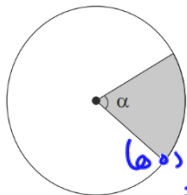
نمودارهای دایره ای یکی از پرکاربردترین نمودارها در آمار است. از این نمودار برای نمایش متغیرهای کیفی استفاده می شود. زاویه مربوط به هر دسته از رابطه زیر بدست می آید:

یا به این صورت هم می توان نوشت:

$$\frac{f}{n} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

$$\alpha = \frac{f}{n} \times 360^\circ$$

زاویه مرکزی



تعداد داده ها

تعداد کل داده ها

۷۳- برای داده های جدول مقابل نمودار دایره ای رسم کنید.

گروه خونی	فراوانی
A	۱۰
B	۴
O	۱
AB	۵

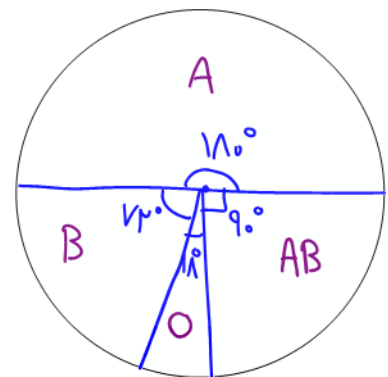
۲۰٪

$$\alpha = \frac{10}{20} \times 360^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = \frac{4}{20} \times 360^\circ = 72^\circ$$

$$\alpha = \frac{1}{20} \times 360^\circ = 18^\circ$$

$$\alpha = \frac{5}{20} \times 360^\circ = 90^\circ$$



۷۴- در یک نمودار دایره ای مربوط به گروه های خونی افراد ، زاویه متناظر با گروه خونی AB عدد ۷۲° را نشان می دهد اگر کل جمعیت مورد مطالعه ۸۰۰ نفر باشد، چند نفر گروه خونی AB دارند؟

$$\frac{x}{800} = \frac{72^\circ}{360^\circ} \Rightarrow x = \frac{72 \times 800}{360} = 160 \text{ نفر}$$

جمع بندی و خلاصه نکات چرخه آمار در حل مسائل

- ۱- طرح یک پرسش دقیق و شفاف ، مهمترین گام رسیدن به پاسخ است.
- ۲- اندازه گیری یا سنجش ، اولین قدم برای یافتن داده ها است.
- ۳- در اندازه گیری (گام ۲) اطلاعات کیفی (توصیفی) را به کمی (عددی) تبدیل می کنیم.
- ۴- برای توصیف داده های کیفی (اسمی یا ترتیبی) گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.
- ۵- کدام نمودار بهتر نشان می دهد که داده ها کجا متراکم تر و کجا پراکنده ترند؟ پاسخ : نمودار جعبه ای
- ۶- مطمئن ترین نمودار برای متغیر کمی، نمودار جعبه ای است.
- ۷- اگر داده دور افتاده داشته باشیم میانگین و انحراف معیار ، معیارهای مناسبی برای توصیف داده ها نخواهند بود و از بین معیارهای گرایش به مرکز باید از " میانه " و از بین معیارهای پراکندگی " دامنه های میان چارکی " استفاده کنیم. (چرا؟) پاسخ : چون گزارش میانگین ممکن است گمراه کننده باشد.
- ۸- وقتی داده دور افتاده نداریم می توانیم از نمودار نمایش دهنده میانگین و انحراف معیار (نمودار مستطیل شکل) استفاده کنیم.
- نموداری که بلندی مستطیل آن نشان دهنده میانگین است و میله خطی آن به اندازه انحراف معیار ، روی مستطیل بالا آمده است.
- ۹- اگر داده دور افتاده داشته باشیم نمودار جعبه ای مناسب است.
- ۱۰- مطمئن ترین نمودار برای متغیر کمی ، نمودار جعبه ای است.

فصل ۲- الگوهای خطی

درس ۱: مدل سازی و دنباله

به مدلی از نمایش اعداد، که تعدادی عدد به دنباله هم قرار می گیرند دنباله اعداد می گوییم.

مثال: $4, 7, 10, 13, \dots$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & \end{array}$$

هر کدام از اعداد $4, 7, 10, 13, \dots$ یک جمله هستند.

معمولا جملات یک دنباله را با $a_1, a_2, a_3, \dots$ نشان می دهند.

به a_n جمله n ام دنباله می گوییم. اسم دیگر آن جمله عمومی یا ضابطه دنباله است.

$$a_n = 3n + 1 \quad \text{جمله عمومی}$$

$$a_3 = 3 \times 3 + 1 = 10$$

$$a_{10} = 3 \times 10 + 1 = 31$$

$$a_1 = 3(1) + 1 = 4$$

$$a_2 = 3(2) + 1 = 7$$

تذکر: در تعیین دامنه تعریف توابعی که پاسخ آنها وابسته به بررسی مسئله در مرحله یا گام اول، دوم، ... و n ام است. از مجموعه اعداد طبیعی استفاده می کنیم.

به زبان ساده: یعنی در جمله عمومی دنباله به جای n اعداد $1, 2, 3, \dots$ قرار می دهیم.

۱- چهار جمله اول دنباله $C_n = \frac{1}{n}$ را بنویسید.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$$

۲- پنج جمله اول $b_n = 3^n$ را بنویسید.

$$3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5$$

$$3, 9, 27, 81, 243$$

$$n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{1}$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3}$$

$$n=4 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{4}$$

$$n=5 \Rightarrow a_5 = \frac{1}{5}$$

۳- پنج جمله اول $b_n = n^2 - 1$ را بنویسید.

$$n=1 \Rightarrow a_1 = 1^2 - 1 = 0$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = 2^2 - 1 = 3$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = 3^2 - 1 = 8$$

$$n=4 \Rightarrow a_4 = 4^2 - 1 = 15$$

$$n=5 \Rightarrow a_5 = 5^2 - 1 = 24$$

0, 3, 8, 15, 24

۴- پنج جمله اول $d_n = \frac{(-1)^n}{n}$ را بنویسید.

$$n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$n=4 \Rightarrow a_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}$$

$$n=5 \Rightarrow a_5 = \frac{(-1)^5}{5} = -\frac{1}{5}$$

یاد آوری: $(-1)^{\text{عدد فرد}} = -1$ $(-1)^{\text{عدد زوج}} = +1$

-1, 1/2, -1/3, 1/4, -1/5

۵- پنج جمله اول $a_n = 2n - 1$ را بنویسید.

$$a_1 = 2(1) - 1 = 1$$

$$a_2 = 2(2) - 1 = 3$$

$$a_3 = 2(3) - 1 = 5$$

$$a_4 = 2(4) - 1 = 7$$

$$a_5 = 2(5) - 1 = 9$$

1, 3, 5, 7, 9

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...

۶- با توجه به دنباله های $a_n = 3n$ و $b_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ حاصل عبارت $a_2 + b_1$ را بدست آورید.

$$a_2 + b_1 = 9 + \frac{1}{4} = \frac{37}{4}$$

$$b_1 = \left(-\frac{1}{1}\right)^{1+1} = \left(-\frac{1}{1}\right)^2 = \frac{1}{1}$$

$$a_2 = 3^2 = 9$$

۷- با توجه به دنباله های $c_n = \frac{1}{3n-1}$ ، $d_n = n^2 - 1$ حاصل عبارت $c_2 - d_1$ را بدست آورید.

$$c_2 - d_1 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

$$d_1 = 1^2 - 1 = 0$$

$$c_2 = \frac{1}{3 \times 2 - 1} = \frac{1}{5}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...

پیدا کردن شماره جمله دنباله

۸- کدام جمله دنباله $a_n = 3n - 2$ برابر ۱۶ است؟

روش دوم:

$$3n - 2 = 14$$

$$3n = 14 + 2$$

$$3n = 16 \Rightarrow n = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

$$3 \times 4 - 2 = 10$$

$$3 \times 5 - 2 = 13$$

$$3 \times 6 - 2 = 16$$

$$n = 6$$

$$n^2 + 3 = 52$$

$$n^2 = 49 \Rightarrow n = 7$$

۹- کدام جمله دنباله $b_n = n^2 + 3$ برابر ۵۲ است؟

روش دوم:

$$5^2 + 3 = 28$$

$$7^2 + 3 = 52$$

$$n = 7$$

$$7^2 + 3 = 52$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...

دنباله های دو ضابطه ای

$$n = 1 \rightarrow 4 \text{ فرد}$$

$$n = 2 \rightarrow 1 \text{ زوج}$$

$$n = 3 \rightarrow 4 \text{ فرد}$$

$$n = 4 \rightarrow 1 \text{ زوج}$$

$$n = 5 \rightarrow 4 \text{ فرد}$$

۱۰- پنج جمله اول دنباله $a_n = \begin{cases} 4 & n \text{ فرد} \\ 1 & n \text{ زوج} \end{cases}$ را بنویسید.

۴, ۱, ۴, ۱, ۴, ...

۱۱- شش جمله اول دنباله $a_n = \begin{cases} n & n \text{ فرد} \\ \frac{1}{n} & n \text{ زوج} \end{cases}$ را بنویسید.

فرد $n=1 \Rightarrow a_1=1$ زوج $n=2 \Rightarrow a_2=\frac{1}{2}$

فرد $n=3 \Rightarrow a_3=3$ زوج $n=4 \Rightarrow a_4=\frac{1}{4}$

... $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{4}, 1$

۱۲- دنباله $a_n = \begin{cases} 2n+3 & n < 4 \\ n^2+1 & n \geq 4 \end{cases}$ را در نظر بگیرید و مقدار عددی a_5 و a_3 را بدست آورید.

$a_3 = 2 \times 3 + 3 = 9$ ← کوتاه از

$a_5 = 5^2 + 1 = 26$ ← بلندتر از

پیدا کردن جمله عمومی یک دنباله (الگویابی)

۱۲- ضابطه تابعی (جمله عمومی) دنباله های زیر را بنویسید.

الف: ۱, ۴, ۷, ۱۰, ...

$a_n = 3n - 2$

ب: ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ...

$a_n = 3n + 2$

پ: ۲, ۷, ۱۲, ۱۷, ...

$a_n = 5n - 3$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



یاد آوری $2n - 1 \rightarrow 1, 3, 5, \dots$ دنباله اعداد فرد طبیعی

$2n \rightarrow 2, 4, 6, 8, \dots$ دنباله اعداد زوج طبیعی

$n^2 \rightarrow 1, 4, 9, 16, 25, \dots$ مربع اعداد طبیعی

$n^3 \rightarrow 1, 8, 27, 64, 125, \dots$ مکعب اعداد طبیعی

$1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3$

۱۳- ضابطه تابعی (جمله عمومی) دنباله های زیر را بنویسید.

الف: ۱, ۳, ۵, ۷, ...

ب: ۲, ۴, ۶, ۸, ... $a_n = 2n$

$$a_n = 2n - 1$$

پ: ۱, ۴, ۹, ۱۶, ... $a_n = n^2$
 $1^2 \quad 2^2 \quad 3^2 \quad 4^2$

ت: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ $a_n = \frac{1}{n}$

ث: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ $a_n = \frac{n}{n+1}$

۱۴- ضابطه تابعی (جمله عمومی) دنباله های زیر را بنویسید.

الف: ۱, ۳, ۵, ۷, ...

$$a_n = -(2n - 1) = -2n + 1$$

ب: ۲, ۴, ۶, ۸, ...

$$a_n = -2n$$

پ: ۱, ۴, ۹, ۱۶, ...

$$a_n = -n^2$$

ت: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

$$a_n = -\frac{1}{n}$$

ث: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

$$a_n = -\frac{n}{n+1}$$

در جمله عمومی ضرب می‌کنیم	شکل دنباله
جمله عمومی را در عبارت $(-1)^{n+1}$ ضرب می‌کنیم.	$+\square, -\bigcirc, +\triangle, -\square, \dots$ جملات فرد مثبت است
جمله عمومی را در $(-1)^n$ ضرب می‌کنیم.	$-\square, +\bigcirc, -\triangle, +\square, \dots$ جملات فرد منفی است

نکته:

۱۵- ضابطه تابعی (جمله عمومی) دنباله های زیر را بنویسید.

الف: $1, 3, 5, 7, \dots$

$$a_n = (-1)^{n+1} \times (2n-1)$$

 $1, -3, 5, -7, \dots$

$$a_n = (-1)^n \times (2n-1)$$

ب: $2, -4, 6, -8, 10, \dots$

$$a_n = (-1)^n \times 2n$$

 $-2, 4, -6, 8, -10, \dots$

$$a_n = (-1)^{n+1} \times 2n$$

ت: $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{4}, \dots$

$$a_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}$$

ث: $\frac{-1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

$$a_n = (-1)^{n+1} \times \frac{n}{n+1}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



math-pilevar.ir

رابطه بازگشتی یک دنباله

هر جمله این رابطه با توجه به جمله قبلی نوشته می شود. حتما جمله اول در رابطه بازگشتی را باید داشته باشیم.

۱۶- رابطه بازگشتی دنباله $2, 5, 8, \dots$ را بنویسید.

$$2, 5, 8, \dots$$

$\xrightarrow{+3} \quad \xrightarrow{+3}$

$$a_{n+1} = a_n + 3, \quad a_1 = 2$$

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}$$



نکته: رایج ترین شکل رابطه بازگشتی دنباله

$$a_{n+1} = a_n + \text{●}$$

$$a_{n+1} = \text{●} \times a_n$$

$$a_n = a_{n-1} + \text{●}$$

$$a_n = \text{●} \times a_{n-1}$$

شکل های دیگر رابطه بازگشتی دنباله :

بعضی های دو جمله متوالی را a_n , a_{n-1} در نظر می گیرند.

۱۷- رابطه بازگشتی دنباله های زیر را بنویسید.

الف: $3, 6, 12, \dots$

$$a_{n+1} = 2 \times a_n, \quad a_1 = 3$$

ب: $38, 34, 30, \dots$

$$a_{n+1} = a_n - 4, \quad a_1 = 38$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...

**نوشتن جملات رابطه بازگشتی**اگر رابطه بازگشتی را به همراه یکی از جملات دنباله (معمولا جمله اول را می دهند) به ما دادند و از ما دیگر جملات را خواستند. باید در رابطه بازگشتی به جای n به ترتیب اعداد ۱، ۲، ۳، ... را قرار دهیم.

$$a_1 = 2$$

$$n=1 \Rightarrow a_2 = a_1 + 5 = 2 + 5 = 7$$

$$n=2 \Rightarrow a_3 = a_2 + 5 = 7 + 5 = 12$$

$$n=3 \Rightarrow a_4 = a_3 + 5 = 12 + 5 = 17$$

روش اول:

$$2, 7, 12, 17$$

 $+5, +5, +5$

۱۸- چهار جمله اول دنباله $a_{n+1} = a_n + 5$ را بنویسید.

$$a_1 = 4$$

$$n=1 \Rightarrow a_2 = 2 \times a_1 = 2 \times 4 = 8$$

$$n=2 \Rightarrow a_3 = 2 \times a_2 = 2 \times 8 = 16$$

$$n=3 \Rightarrow a_4 = 2 \times a_3 = 2 \times 16 = 32$$

$$n=4 \Rightarrow a_5 = 2 \times a_4 = 2 \times 32 = 64$$

روش دوم:

$$4, 8, 16, 32, 64$$

 $\times 2, \times 2, \times 2, \times 2$

روش اول

۱۹- جمله پنجم دنباله $a_{n+1} = 2a_n$ را بنویسید.

$$a_1 = 1$$

۲۰- چهار جمله اول دنباله $a_1 = 1$ ، $a_{n+1} = a_n + n$ را بنویسید.

$$n=1 \Rightarrow a_2 = a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$n=2 \Rightarrow a_3 = a_2 + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$1, 2, 4, 7$$

$$n=3 \Rightarrow a_4 = a_3 + 3 = 4 + 3 = 7$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



دنباله های دو ضابطه ای بازگشتی

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} a_n & n \text{ زوج} \\ 3a_n + 1 & n \text{ فرد} \end{cases} \quad (a_1 = 11) \text{ را بنویسید.}$$

۲۱- شش جمله اول دنباله بازگشتی

$$\text{فرد } n=1 \Rightarrow a_2 = 3a_1 + 1 = 3 \times 11 + 1 = 34$$

$$\text{زوج } n=2 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2} a_2 = \frac{1}{2} \times 34 = 17$$

$$\text{فرد } n=3 \Rightarrow a_4 = 3a_3 + 1 = 3 \times 17 + 1 = 52$$

$$\text{زوج } n=4 \Rightarrow a_5 = \frac{1}{2} a_4 = \frac{1}{2} \times 52 = 26$$

$$\text{فرد } n=5 \Rightarrow a_6 = 3a_5 + 1 = 3 \times 26 + 1 = 79$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n & n \text{ زوج} \\ 5a_n + 2 & n \text{ فرد} \end{cases} \quad (a_1 = 4) \text{ را بنویسید.}$$

۲۲- جمله چهارم دنباله بازگشتی

$$\text{فرد } n=1 \Rightarrow a_2 = 5a_1 + 2 = 5 \times 4 + 2 = 22$$

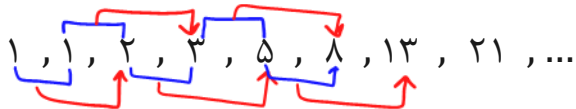
$$\text{زوج } n=2 \Rightarrow a_3 = 3a_2 = 3 \times 22 = 66$$

$$\text{فرد } n=3 \Rightarrow a_4 = 5a_3 + 2 = 5 \times 66 + 2 = 332$$

دنباله های خاص

۱- دنباله فیبوناچی: دو جمله ابتدایی این دنباله ۱ هستند سپس هر دو جمله متوالی را باهم جمع می کنیم تا جمله بعدی به دست

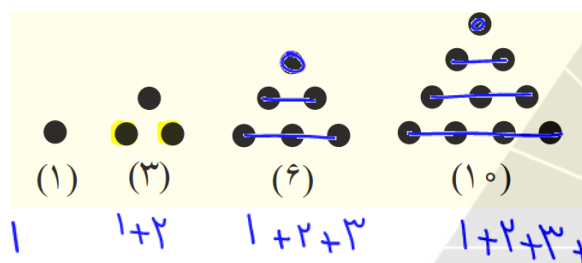
آید.



۲- دنباله مثلثی: به الگوی مثلثی زیر دقت کنید:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$$

↑ ↑
+ +



$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

فصله دنباله مثلثی

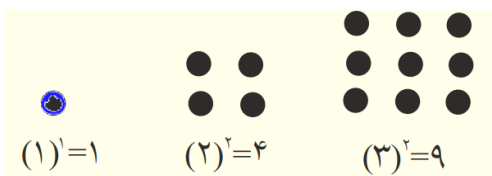
$$1, 3, 6, 10, \dots$$

جمله عمومی: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

math-pilevar.ir

رابطه بازگشتی: $a_{n+1} = a_n + (n + 1)$, $(a_1 = 1)$

۳- دنباله مربعی: به الگوی مربعی شکل زیر دقت کنید:



جمله عمومی: $a_n = n^2$

رابطه بازگشتی: $a_{n+1} = a_n + (2n + 1)$

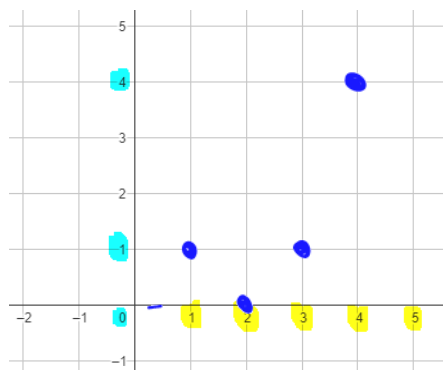
بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



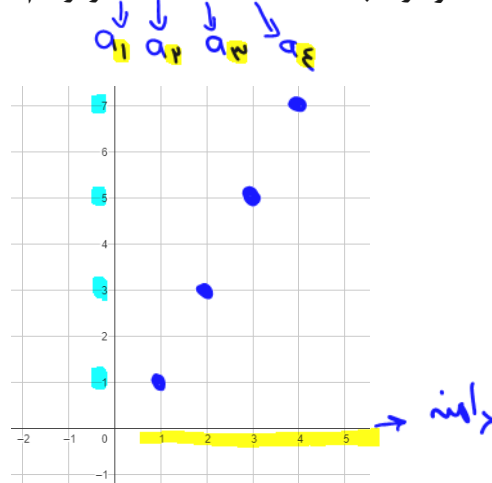
نمودار دنباله ها

با توجه به تعریف دنباله به عنوان تابعی با دامنه اعداد طبیعی ، نمودار آنها را نیز می توان رسم کرد.

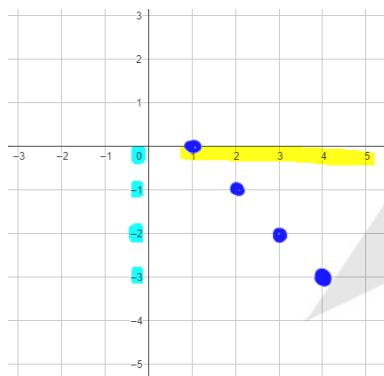
۲۴- نمودار دنباله $1, 0, 1, 4, \dots$ را رسم کنید.



۲۳- نمودار دنباله $1, 3, 5, 7, \dots$ را رسم کنید.



۲۵- نمودار دنباله $b_n = 1 - n$ را رسم کنید.



$$n=1 \Rightarrow b_1 = 1-1=0$$

$$n=2 \Rightarrow b_2 = 1-2=-1$$

$$n=3 \Rightarrow b_3 = 1-3=-2$$

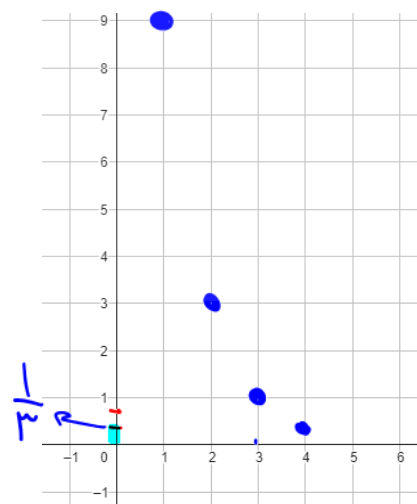
$$n=4 \Rightarrow b_4 = 1-4=-3$$

۲۶- نمودار دنباله $b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n$, $(a_1 = 9)$ را رسم کنید.

$$9, 3, 1, \frac{1}{3}$$

Arrows indicate the recursive relationship: $9 \times \frac{1}{3} = 3$, $3 \times \frac{1}{3} = 1$, and $1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

$$\frac{9}{1} \times \frac{1}{3} = 3$$



بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



دنباله های حسابی

دنباله هایی که هر جمله آن به جز جمله اول، از اضافه شدن یک عدد ثابت به جمله پیشین به دست می آید، دنباله های "حسابی" نامیده می شوند.

a_1, a_2, a_3, a_4
الف: ۲، ۵، ۸، ۱۱، ۱۴، ...

$$\begin{array}{c} \text{2} \quad \text{5} \quad \text{8} \quad \text{11} \quad \text{14} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ +3 \quad +3 \quad +3 \end{array}$$

$$a = 2$$

$$d = 3 \quad \text{اختلاف مشترک}$$

$$a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$$

$$a_3 - a_2 = 8 - 5 = 3$$

$$11 - 8 = 3$$

$$14 - 11 = 3$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a_n = 2 + (n-1) \times 3$$

$$a_n = 2 + 3n - 3 \Rightarrow a_n = 3n - 1$$

ب: ۴، ۱، -۲، -۵، -۸، ...

$$\begin{array}{c} \text{4} \quad \text{1} \quad \text{-2} \quad \text{-5} \quad \text{-8} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ -3 \quad -3 \quad -3 \end{array}$$

$$a = 4$$

$$d = -3$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a_n = 4 + (n-1) \times (-3)$$

پ: -۳، ۲، ۷، ۱۲، ۱۷، ...

$$\begin{array}{c} \text{-3} \quad \text{2} \quad \text{7} \quad \text{12} \quad \text{17} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ +5 \quad +5 \quad +5 \end{array}$$

$$a = -3, d = +5$$

$$a_n = -3 + (n-1) \times 5$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

جمله عمومی دنباله حسابی:

اختلاف مشترک $\rightarrow$ شماره جمله $\rightarrow$ جمله اول

$$\begin{array}{c} a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, a+(n-1)d \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ +d \quad +d \quad +d \end{array}$$

$$a_{10} = a + 9d \quad | \quad a_{11} = a + 10d, \quad a_1 = a + 0d$$

۲۷- در یک دنباله حسابی جمله اول ۲ و اختلاف مشترک آن ۵ است. جمله ۳۱ ام آن را بدست آورید.

$$2, 7, 12, 17, \dots$$

+5 +5 +5

$$d=5 \quad a=2$$

$$a_n = a + (n-1)d \Rightarrow a_{31} = 2 + (31-1) \times 5 = 2 + 150 = 152$$

۲۸- کدام دنباله زیر یک دنباله حسابی است؟ در دنباله ای که حسابی است، جمله پانزدهم و جمله عمومی آن را به دست آورید.

الف: ۶، ۹، ۱۳، ۱۸، ...

$$+3 \quad +4 \quad +5$$

دنباله حسابی نیست

ب: ۷، ۱۱، ۱۵، ۱۹، ...

$$+4 \quad +4 \quad +4$$

دنباله حسابی است.

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a_n = 7 + (n-1) \times 4$$

$$a_{15} = 7 + (15-1) \times 4 = 7 + 56 = 63$$

$$a=7$$

$$d=4$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



پیدا کردن شماره جمله دنباله

۲۹- در یک دنباله حسابی جمله اول ۵- و اختلاف مشترک برابر ۸ است. کدام جمله دنباله برابر ۵۵۵ است؟

$$-5, 3, 11, 19, \dots, 555$$

+8 +8 +8

روش اول:

$$a_n = a + (n-1)d \Rightarrow -5 + (n-1) \times 8 = 555$$

$$8n - 8 = 555 + 5 = 560 \Rightarrow 8n = 560 + 8 \Rightarrow 8n = 568$$

$$n = \frac{568}{8} = 71$$

$$n = \frac{555 - (-5)}{8} + 1 = \frac{560}{8} + 1 = 70 + 1 = 71$$

روش دوم: استفاده از فرمول: (تعداد جملات یک دنباله حسابی)

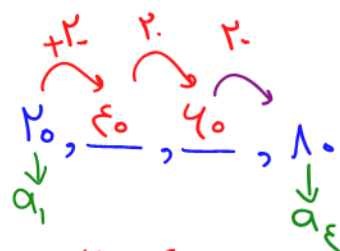
$$n = \frac{\text{جمله اول} - \text{جمله آخر}}{\text{فاصله}} + 1$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



درج واسطه حسابی

منظور از درج واسطه حسابی بین دو عدد a و b ، قرار دادن تعداد مشخصی عدد بین a و b است به طوری که کل این اعداد باهم تشکیل یک دنباله حسابی بدهند.

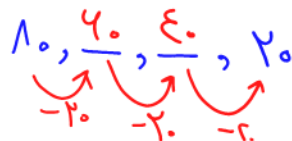


$$a_1 = 20$$

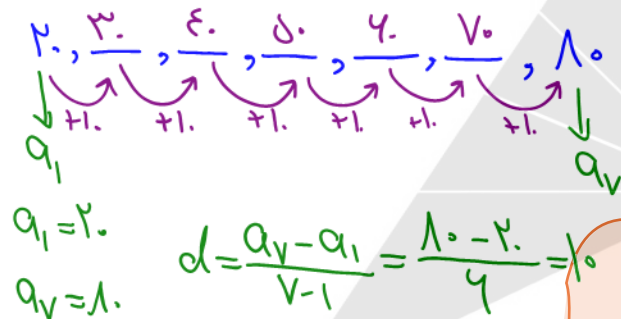
$$a_4 = 80$$

$$d = \frac{a_4 - a_1}{4 - 1} = \frac{80 - 20}{3} = \frac{60}{3} = 20$$

۳۰- بین ۲۰ و ۸۰ دو واسطه حسابی بنویسید.



۳۱- بین ۲۰ و ۸۰ پنج واسطه حسابی بنویسید.



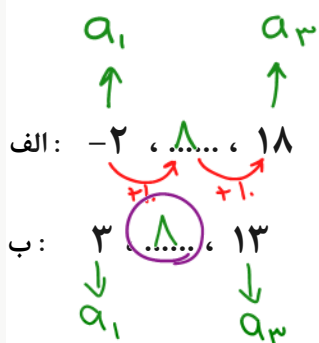
$$d = \frac{a_7 - a_1}{7 - 1} = \frac{80 - 20}{6} = 10$$

نکته: یک فرمول برای پیدا کردن سریع مقدار اختلاف مشترک (d):

اگر دو جمله دلخواه a_n ، a_m از دنباله حسابی به ما داده شوند می توانیم مقدار d را به کمک فرمول زیر بدست بیاوریم.

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

$$\frac{11 + (-2)}{2} = \frac{14}{2} = 7$$



$$d = \frac{a_3 - a_1}{3 - 1} = \frac{11 - (-2)}{2} = 7$$

۳۲- بین دو عدد زیر یک واسطه حسابی بنویسید.

$$d = \frac{a_3 - a_1}{3 - 1} = \frac{13 - 3}{2} = 5$$

$$\frac{13 + 3}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

سه جمله متوالی دنباله حسابی a, b, c $\rightarrow b = \frac{a+c}{2}$

نکته:

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



۳۲- در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۲- و جمله ششم آن برابر ۱۸ است. جمله بیستم این دنباله را بدست آورید.

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 \\ a_6 &= 18 \end{aligned} \quad d = \frac{a_6 - a_1}{6 - 1} = \frac{18 - (-2)}{5} = 4$$

$$a_{20} = a + 19d = -2 + 19 \times 4 = -2 + 76 = 74$$

۳۳- یازدهمین جمله ی یک دنباله حسابی ۵۲ و جمله نوزدهم آن ۹۲ است. جمله سی ام این دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} a_{11} &= 52 \\ a_{19} &= 92 \end{aligned} \quad d = \frac{a_{19} - a_{11}}{19 - 11} = \frac{92 - 52}{8} = 5$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} 2 & 7 & 12 & 17 & 22 & 27 & 32 & 37 & 42 & 47 & 52 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & +5 & & +5 & & +5 & & +5 & & +5 & & +5 \end{array}$$

$$a_{30} = a + 29d = 2 + 29 \times 5 = 2 + 145 = 147$$

ردش اول:

ردش دوم:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 52 \\ a + 10d &= 52 \\ a + 10 \times 5 &= 52 \\ a + 50 &= 52 \\ a &= 52 - 50 = 2 \end{aligned}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



رابطه بازگشتی دنباله حسابی

$$a_{n+1} = a_n + d \quad \text{یا} \quad a_{n+1} - a_n = d$$

۳۴- رابطه بازگشتی دنباله های زیر را بنویسید.

الف: ۲، ۵، ۸، ۱۱، ...

$$\begin{array}{cccc} 2 & 5 & 8 & 11 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & +3 & +3 & +3 \end{array}$$

$$a_{n+1} = a_n + 3$$

ب: ۱۹، ۱۴، ۹، ...

$-5 \quad -5$

$$a_{n+1} = a_n - 5$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



صعودی و نزولی بودن دنباله حسابی

به دنباله های حسابی که اختلاف مشترکشان عددی مثبت است دنباله حسابی افزایشی می گویند.

اگر اختلاف مشترکشان عدد منفی باشد دنباله را کاهشی می گویند.

اگر اختلاف مشترک برابر صفر باشد، دنباله را ثابت می گوئیم.

-۱، ۳، ۷

$+4 \quad +4$

۱۰، ۱۶، ۲۲، ...

$+6 \quad +6$

۴، ۴، ۴، ...

$+0 \quad +0$

۲۲، ۱۴، ۱۰، ...

$-8 \quad -4$

نکته: $d > 0 \Rightarrow$ افزایشی

$d < 0 \Rightarrow$ کاهشی

$d = 0 \Rightarrow$ ثابت

مجموع جملات دنباله حسابی

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول a و اختلاف مشترک d را با S_n نشان می دهیم. برای S_n دو تا فرمول پر استفاده داریم

که با توجه به سوال از یکی از آن ها استفاده می کنیم:

تعداد جملات n $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ $\leftarrow$ جمله اول $\leftarrow$ جمله آخر

تعداد جملات n $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$ $\leftarrow$ تعداد جملات $\leftarrow$ جمله اول $\leftarrow$ تعداد جملات $\leftarrow$ افضل مشترک

$$a_n = a + (n-1)d \quad S_n = \frac{n}{2}(a + a + (n-1)d) = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

۳۵- مجموع ۲۰ جمله اول دنباله $-1, 4, 9, \dots$ را محاسبه کنید.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{20}{2}[2(-1) + (20-1) \times 5]$$

$$= 10 \times [-2 + 95] = 10 \times 93 = 930$$

$$a = -1$$

$$d = 5$$

$$n = 20$$

۳۶- مجموع ده جمله اول دنباله حسابی زیر را بدست آورید.
 $n=10$

$1, 5, 9, \dots$ $a=1, d=4, n=10$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] = \frac{10}{2} [2 \times 1 + (10-1) \times 4] = 5 [2 + 36] = 5 \times 38 = 190$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



$$a_n = a + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$\text{تعداد جملات یک دنباله حسابی} = \frac{(\text{جمله اول} - \text{جمله آخر})}{\text{اختلاف مشترک}} + 1$$

یادآوری:

$$n = \frac{95 - 10}{5} + 1 = \frac{85}{5} + 1 = 17 + 1 = 18$$

۳۷- مجموع عددهای ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۲۵،، ۹۵ را بدست آورید.

روش اول:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \Rightarrow S_{18} = \frac{18}{2} [10 + 95] = 9 \times 105 = 945$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \Rightarrow S_{18} = \frac{18}{2} [2 \times 10 + (18-1) \times 5] = 9 [20 + 85] = 9 \times 105 = 945$$

روش دوم:

$$n = \frac{13 - 19}{-4} + 1 = \frac{-6}{-4} + 1 = 1.5 + 1 = 2.5$$

۳۸- مجموع عددهای ۱۳ و ۱۹، ۸۵، ۸۱، را بدست آورید.

روش اول:

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n] \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2} [19 + 13] = 5 \times 32 = 160$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2} [2 \times 19 + (10-1) \times (-4)] = 5 [38 - 36] = 5 \times 2 = 10$$

روش دوم:

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



مسئله های دنباله حسابی

در مسئله هایی که مقداری ثابت به چیزی در حال اضافه شدن (یا کم شدن) بود، شما یک مسئله دنباله حسابی دارید. مقدار اولیه آن را a_1 و آن مقداری که اضافه (یا کم) می شود را d در نظر می گیرید.

۳۹- در یک کارخانه سنگ بری برای صیقل دادن سنگ ها از یک صفحه به وزن ۱۲۵۰۰ گرم استفاده می شود. اگر با توجه به مصرف هفتگی به طور میانگین ۱۸۷۵ گرم از وزن صفحه کم شود، پس از شش هفته استفاده مداوم وزن صفحه چقدر است؟

روش اول:

۱۲۵۰۰ ، ۱۰۶۲۵ ، ۸۷۵۰ ، ۶۸۷۵ ، ۵۰۰۰ ، ۳۱۲۵ ، ۱۲۵۰

همه هفته اول -1875 ، -1875 ، -1875 ، -1875 ، -1875 ، -1875 ، -1875

پس از ۶ هفته $a_n = a + (n-1)d \rightarrow a + 4d$

روش دوم:

$$a_7 = a + 4d = 12500 + 4 \times (-1875) = 1250$$

۴۰- یک طراح برای یک سالن سینما در ردیف اول ۱۵ صندلی، در ردیف دوم ۱۸ صندلی و در ردیف سوم ۲۱ صندلی مشخص کرده است. اگر صندلی های هر ردیف با همین نظم اضافه شوند، برای داشتن سالنی با ۸۷۰ صندلی باید چند ردیف صندلی داشته باشیم؟

۱۵
۱۸
۲۱
۲۴
⋮

⊕
۱۷۰

$$15 + 18 + 21 + 24 + \dots = 170$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$170 = \frac{n}{2} [2 \times 15 + (n-1) \times 3]$$

$$170 = n(15 + \frac{3}{2}(n-1)) \Rightarrow n(27 + 3n) = 170$$

$$3n^2 + 27n - 170 = 0 \xrightarrow{\div 3} n^2 + 9n - 510 = 0$$

$$(n+29)(n-20) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -29 & \text{غ ق} \\ n = 20 & \text{ق ق} \end{cases}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



جمع بندی: +

$$\Rightarrow a_n = a + (n-1)d$$

$$\Rightarrow d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = a_n + d$$

$$a_1 = 0$$

$$\rightarrow a, b, c \Rightarrow b = \frac{a+c}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \\ S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n] \end{cases}$$

math-pilevar.ir

فصل ۳ - الگوهای غیر خطی

درس ۱: دنباله هندسی

به دنباله هایی از اعداد که هر جمله شان به جز جمله اول از ضرب یک عدد ثابت مخالف صفر در جمله پیشین به دست می آید ، دنباله هندسی گفته می شود . عدد ثابت را "نسبت مشترک" می نامند و عموماً با r نشان می دهند.

به زبان ساده : در دنباله هندسی هر جمله از ضرب یک مقدار ثابت در جمله قبلی اش به دست می آید.

مثال : به دنباله های زیر دقت کنید:

الف: $2, 6, 18, 54, \dots$

$\times 3 \quad \times 3 \quad \times 3$

جمله اول: $a = 2$

نسبت مشترک: $r = 3$

$$\frac{\text{جمله دوم}}{\text{جمله اول}} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{54}{18} = 3$$

$$\begin{cases} a_n = a r^{n-1} \\ a_n = 2 \times 3^{n-1} \end{cases}$$

ب: $3, 6, 12, 24, \dots$

$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$

$a = 3$

$r = 2$

$$a_n = a r^{n-1}$$

$$a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

پ: $1, 4, 12, 24, \dots$

$a = 1$

$r = \frac{4}{1} = 4$

$$a_n = a r^{n-1}$$

$$a_n = 1 \times 4^{n-1}$$

جمله عمومی دنباله هندسی

$$a, ar^1, ar^2, ar^3, ar^4, \dots, ar^{n-1}$$

شماره جمله

جمله عمومی دنباله هندسی: $a_n = ar^{n-1}$ نسبت مشترک دنباله هندسی: $r = \frac{\text{جمله دوم}}{\text{جمله اول}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ۱- نسبت مشترک و جمله عمومی دنباله $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$ را بنویسید.

$$r = \frac{\text{جمله دوم}}{\text{جمله اول}} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$$

$$a_n = ar^{n-1} \Rightarrow a_n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

۲- نسبت مشترک و جمله عمومی دنباله $100, 25, \frac{25}{4}, \frac{25}{16}, \dots$ را بنویسید.

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$a_n = ar^{n-1} \Rightarrow a_n = 100 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



افزایشی یا کاهشی بودن جملات دنباله هندسی

به دنباله های زیر دقت کنید:

۱- اگر جمله اول مثبت و $r > 1 \Leftrightarrow$ افزایشی۲- اگر جمله اول مثبت و $0 < r < 1 \Leftrightarrow$ کاهشی۳- اگر جمله اول منفی و $r > 1 \Leftrightarrow$ کاهشی۴- اگر جمله اول منفی و $0 < r < 1 \Leftrightarrow$ افزایشی

$$2, 4, 8, 16, \dots$$

$\times 2, \times 2, \times 2$

افزایشی

$$20, 10, 5, \dots$$

$\times \frac{1}{2}, \times \frac{1}{2}$

کاهشی

$$-2, -4, -8, -16, \dots$$

$\times 2, \times 2, \times 2$

کاهشی

$$-20, -10, -5, \dots$$

$\times \frac{1}{2}, \times \frac{1}{2}$

افزایشی

$$3, 3, 3, 3, \dots$$

x_1, y_1

ثابت

۴- اگر $r = 1 \Leftrightarrow$ دنباله ثابت

تذکر: دنباله ثابت تنها دنباله ای است که هم حسابی ($d=0$) و هم هندسی ($r=1$) است.

نکته مهم: اگر $r < 0$ باشد، چون جملات یکی در میان مثبت و منفی می شوند، دنباله نه کاهشی است و نه افزایشی.

مثال: $-40, +20, -10, 5, \dots$

$\times (-2), \times (-2), \times (-2)$

نوسانی

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...

رابطه بازگشتی دنباله هندسی

۳- ضابطه بازگشتی دنباله های زیر را بنویسید.

الف: $3, 6, 12, 24, \dots$

$\times 2, \times 2, \times 2$

$$a_{n+1} = a_n \times 2 \rightarrow a_{n+1} = 2a_n$$

ب: $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \dots$

$\times \frac{1}{5}$

$$a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n$$

اگر r نسبت مشترک دنباله هندسی باشد، رابطه بازگشتی آن به صورت مقابل است. $a_{n+1} = r \times a_n$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...

یافتن تعداد جملات یک دنباله هندسی

$$r^{n-1} = \frac{\text{جمله آخر}}{\text{جمله اول}}$$

ساده ترین راه برای بدست آوردن n در دنباله هندسی، استفاده از فرمول مقابل است.

$3, 4, 12, 24, 48, \dots, 384$

$\times 4, \times 3, \times 2, \times 2$

۴- کدام جمله دنباله $3, 6, 12, \dots$ برابر با ۳۸۴ است؟

روش اول:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1} \Rightarrow 3 \times 2^{n-1} = 384 \Rightarrow 2^{n-1} = \frac{384}{3} = 128 \Rightarrow 2^{n-1} = 128 = 2^7 \Rightarrow n-1=7 \Rightarrow n=8$$

$$3, 6, 12, \dots, 384$$

$\times 2 \quad \times 2$

$$a_n = ar^{n-1} \Rightarrow r^{n-1} = \frac{a_n}{a} \rightarrow \begin{matrix} \text{صیغه آخر} \\ \text{صیغه اول} \end{matrix}$$

روش دوم:

$$r^{n-1} = \frac{\text{صیغه آخر}}{\text{صیغه اول}} \Rightarrow 2^{n-1} = \frac{384}{3} = 128 \Rightarrow 2^7 = 128 = 2^7 \Rightarrow n-1=7 \Rightarrow n=8$$

۵- نخستین جمله یک دنباله هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنباله هندسی $\frac{1}{2}$ است. کدام جمله دنباله برابر ۶ است؟ (تمرین کتاب)

روش اول:

$$1536, 768, 384, 192, 96, 48, 24, 12, (4) \rightarrow n=9$$

$\times \frac{1}{2} \quad \times \frac{1}{2}$

روش دوم:

$$r^{n-1} = \frac{\text{صیغه آخر}}{\text{صیغه اول}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{4}{1536} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{384} = \left(\frac{1}{2}\right)^8 \Rightarrow n-1=8 \Rightarrow n=8+1=9$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...

سه جمله متوالی دنباله هندسی

سه جمله متوالی دنباله هندسی a, b, c $b^2 = a \times c$

مثال: $3, (4), 12 \Rightarrow 4^2 = 3 \times 12$ مثال: $5, (15), 45 \Rightarrow 15^2 = 5 \times 45$

$\times 2 \quad \times 2$

۶- اگر $x, x+2, x+3$ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را بدست آورید. (تمرین کتاب)

$$(x+2)^2 = x(x+3)$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 3x$$

$$4x - 3x = -4 \Rightarrow x = -4$$

$-4, -2, -1$

$$(x+2)^2 = (x+2)(x+3)$$

$$= x^2 + 2x + 2x + 4$$

$$= x^2 + 4x + 4$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...

درج واسطه هندسی

منظور از درج واسطه هندسی بین دو عدد a و b این است که چند تا عدد بین دو عدد داده شده قرار دهیم به طوری که همه این اعداد باهم تشکیل یک دنباله هندسی بدهند.

بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی مثبت بنویسید.

$$3, \frac{4}{x_1}, \frac{12}{x_2}, \frac{24}{x_3}, 48$$

Arithmetic progression with common ratio 2: $3 \times 2 = 6, 6 \times 2 = 12, 12 \times 2 = 24, 24 \times 2 = 48$

$$r^{n-1} = \frac{a_n}{a_1} \Rightarrow r^{4-1} = \frac{48}{3} = 16 \Rightarrow r^3 = 16 \Rightarrow r = 2$$

بین ۴ و ۹۷۲ چهار واسطه هندسی مثبت بنویسید.

$$4, \frac{12}{x_1}, \frac{36}{x_2}, \frac{108}{x_3}, \frac{324}{x_4}, 972$$

Arithmetic progression with common ratio 3: $4 \times 3 = 12, 12 \times 3 = 36, 36 \times 3 = 108, 108 \times 3 = 324, 324 \times 3 = 972$

$$r^{n-1} = \frac{a_n}{a_1} \Rightarrow r^{4-1} = \frac{972}{4} = 243 \Rightarrow r^3 = 243 \Rightarrow r = 3$$

پیدا کردن ۲ به کمک دو جمله دلخواه دنباله هندسی

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$$

۹- جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جمله هفتم این دنباله هندسی را بدست آورید. (تمرین کتاب)

$$a_3 = 27$$

$$a_5 = 243$$

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$a_7 = ar^6 = 3^1 \times 3^6 = 3^7$$

$$r^{5-3} = \frac{a_5}{a_3} \Rightarrow r^2 = \frac{243}{27} = 9 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$$

Arithmetic progression with common ratio 3: $3, 9, 27, \dots, 243$



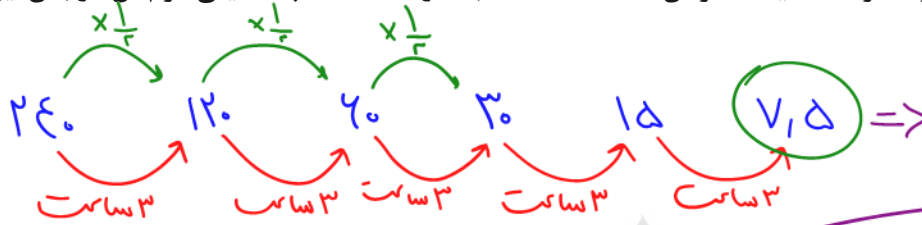
مسائل نیمه عمر

به مدت زمانی که طول می کشد تا مقدار یک دارو (یا کافتین یا ...) در خون، به نصف قبلی اش برسد، نیمه عمر می گوییم.

۱۰- شخصی ۲۴۰ میلی گرم از دارویی را مصرف کرده که نیمه عمر آن ۳ ساعت است. بعد از ۱۵ ساعت چند میلی گرم آن در بدن این شخص

باقی مانده است؟

بعد ۱۵ ساعت



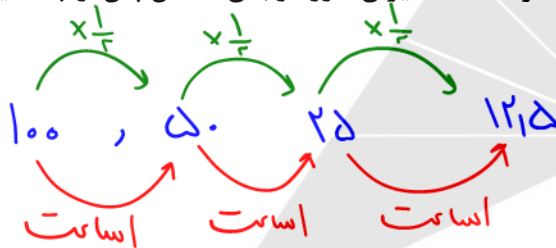
رژش دوم: $a_n = ar^{n-1}$

$$a_5 = 240 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = 240 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{240}{16} = 15$$

$$n = \frac{\text{مدت زمان}}{\text{نیمه عمر}} = \frac{15}{3} = 5$$

۱۱- شخصی ۱۰۰ میلی گرم از دارویی که نیمه عمر آن یک ساعت است، مصرف کرده است. میزان دارو در بدن شخص پس از چند نیمه عمر،

کمتر از ۲۰ میلی گرم خواهد بود؟



math-pilevar.ir

فرمول محاسبه نیمه عمر: $a_n = a \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ یا $\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \text{مقدار اولیه} = \text{مقدار باقی مانده}$

$$n = \frac{\text{زمان سپری شده}}{\text{طول یک نیمه عمر}}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



مجموع جملات دنباله هندسی

تعداد جملات $\rightarrow$ $S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r}$ یا $S_n = a \times \frac{r^n-1}{r-1}$ $\leftarrow$ نسبت متعادل

مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی از رابطه مقابل بدست می آید:۱۲- مجموع ۵ جمله اول دنباله $2, 4, 8, \dots$ را بدست آورید. $n=5$

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$$

$$S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_5 = 2 \times \frac{1-2^5}{1-2}$$

$$= 2 \times \frac{1-32}{-1} = 2 \times \frac{-31}{-1} = 2 \times 31 = 62$$

۱۳- مجموع ۵ جمله اول دنباله $\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots$ را بدست آورید. $n=5$

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} = \text{😊}$$

$$S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_5 = \frac{2}{5} \times \frac{1-(\frac{1}{5})^5}{1-\frac{1}{5}} =$$

$$S_5 = \frac{2}{5} \times \frac{1 - \frac{1}{15625}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{5} \times \left(\frac{15625 - 1}{15625} \right) \times \frac{5}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{15624}{15625} \times \frac{5}{4} = \frac{31}{40} \times \frac{15624}{15625}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...

الف: $1 + 4 + 16 + \dots + 4096$

$$r^{n-1} = \frac{\text{جمله آخر}}{\text{جمله اول}} \Rightarrow 4^{n-1} = \frac{4096}{1} = 4096 = 4^9 \Rightarrow n-1=9 \Rightarrow n=10$$

$$S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r} = 1 \times \frac{1-4^{10}}{1-4} = \frac{1-147456}{-3}$$

$$\frac{147455}{3} = 49151$$

یادآوری: یافتن تعداد جملات دنباله هندسی

$$r^{n-1} = \frac{\text{جمله آخر}}{\text{جمله اول}}$$

ب: $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{640}$

$\times \frac{1}{r}$

$$r = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{20}} = \frac{1}{2}$$

$$r^{n-1} = \frac{\text{صدا آخر}}{\text{صدا اول}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{640}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{128} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \Rightarrow n-1=7 \Rightarrow n=8$$

$$S_8 = \frac{1}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8}{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{1 - \frac{1}{256}}{\frac{5-2}{10}} = \frac{1}{5} \times \frac{\frac{255}{256}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{5} \times \frac{255}{256} \times \frac{10}{3} = \frac{51}{128}$$

جمع بندی فرمول های دنباله هندسی و حسابی: +

دنباله هندسی	دنباله حسابی	
$a_n = ar^{n-1}$	$a_n = a + (n-1)d$	جمله عمومی
$a_{n+1} = a_n \times r$	$a_{n+1} = a_n + d$	رابطه بازگشتی
$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$	$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$	پیدا کردن نسبت مشترک و اختلاف مشترک
$a, b, c \rightarrow b^2 = ac$	$a, b, c \rightarrow b = \frac{a+c}{2}$	سه جمله متوالی
$\checkmark S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r}$	$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$	مجموع جملات
$S_n = a \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$	$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$	

درس ۲: ریشه نام و توان گویا

یادآوری توان:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = +4$$

$$-2^2 = -(2 \times 2) = -4$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{2^2}{3} = \frac{2 \times 2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$a^0 = 1, \sqrt{a^0} = 1$$

۴'

یادآوری قواعد مهم توان ها:

$$1) a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$\text{مثال} \rightarrow 2^5 \times 2^3 = 2^8$$

$$2) a^n \div a^m = a^{n-m}$$

$$\text{مثال} \rightarrow 2^5 \div 2^3 = 2^2$$

$$3) a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

$$\text{مثال} \rightarrow 3^4 \times 2^4 = 6^4$$

$$4) a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\text{مثال} \rightarrow 4^4 \div 3^4 = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \quad \text{یا} \quad 16^4 \div 7^4 = 2^2$$

$$5) (a^n)^m = a^{mn}$$

$$\text{مثال} \rightarrow (a^2)^3 = a^6$$

$$a^{2^3} = a^8 \quad \leftarrow 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$6) a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\text{مثال} \rightarrow 2^{-2} = \frac{1}{2^2} \quad \text{و} \quad \frac{1}{2^{-5}} = 2^5 \quad \text{و} \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^1$$

$$7) a^1 = a$$

$$\text{مثال} \rightarrow 5^1 \quad \text{یا} \quad 1^1$$

$$8) a^0 = 1$$

$$\text{مثال} \rightarrow 2^0 = 1 \quad \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

الف: $\frac{4^5 \times 7^4}{2^8 \times 3^3} = \frac{4^2 \times 7^2}{1 \times 3^3} = 14 \times 7 = 112$

پ: $13^0 + 3^{-2} + 5^1 = 1 + \frac{1}{9} + 5 = \frac{4 \times 9}{1 \times 9} + \frac{1}{9} = \frac{55}{9}$

ب: $(4^7 \times 2^7) \div 8^3 = 8^7 \div 8^3 = 8^4$

ت: $4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5 = 4 \times 4^5 = 4^6$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



ریشه نام

ریشه دوم: اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ ریشه های دوم عدد a هستند.

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$(+2)^2 = 4$

$(-2)^2 = 4$

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

اعداد منفی جذر ندارند $\sqrt{-4}$

مثال: ریشه های دوم عدد ۴ برابر 2 و -2

مثال: ریشه های دوم عدد ۹ برابر 3 و -3

مثال: ریشه های دوم عدد ۵ برابر $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$

ریشه سوم: اگر a عدد حقیقی (چه مثبت، چه منفی، چه صفر) باشد، ریشه سومش برابر $\sqrt[3]{a}$ است.

$x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$

$x^3 = -8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -2$

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

مثال: ریشه سوم عدد ۸ برابر 2

ریشه سوم عدد -۸ برابر -2

مثال: ریشه سوم عدد ۱۵ برابر $\sqrt[3]{15}$ و $-\sqrt[3]{15}$

ریشه های بالاتر:

$\sqrt[5]{-32} = -2$

۱۶- ریشه پنجم عدد ۳۲ برابر است.

۱۷- ریشه ششم عدد ۶۴ برابر است.

$\sqrt[4]{4^4} = 4$ و $\sqrt[4]{4^4} = -4$

نوع
ریشه

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



جمع بندی درباره ریشه های n ام ($n \in \mathbb{N}$) عددی مانند a :

$$a \geq 0 \begin{cases} \xrightarrow{\text{زوج } n} \text{ریشه } n \text{ام } a: \sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a} \\ \xrightarrow{\text{فرد } n} \text{ریشه } n \text{ام } a: \sqrt[n]{a} \end{cases}$$

$$a < 0 \begin{cases} \xrightarrow{\text{زوج } n} \text{ریشه ندارد} \\ \xrightarrow{\text{فرد } n} \text{ریشه } n \text{ام } a: \sqrt[n]{a} \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & n \text{ فرد} \\ |a| & n \text{ زوج} \end{cases} \quad \text{تذکر: در محاسبه } \sqrt[n]{a^n} \text{ دقت کنید:}$$

۱۸- حاصل عبارتهای زیر را بنویسید:

الف: $\sqrt[12]{5^{12}} = 5$

ب: $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$

پ: $\sqrt[5]{(-\frac{1}{3})^5} = -\frac{1}{3}$

ت: $\sqrt[10]{(-15)^{10}} = |-15| = 15$

توان های گویا

هرگاه $a > 0$ ، برای دو عدد طبیعی n و m ، چنین تعریف می کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

۱۹- اعداد توان دار زیر را به شکل رادیکالی بنویسید. (کاردرکلاس کتاب)

الف: $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$

ب: $6^{\frac{7}{9}} = \sqrt[9]{6^7}$

پ: $-12^{-\frac{2}{11}} = \sqrt[11]{-12^{-2}}$

ت: $(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3})^{-\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3})^4}$

ث: $(0.001)^{\frac{14}{4}} = \sqrt[4]{0.001^{14}}$

۲۰- اعداد رایکالی زیر را به شکل توان دار بنویسید.

الف: $\sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}}$ ب: $\sqrt[3]{2/7^5} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{-\frac{5}{3}}$ پ: $\sqrt[3]{25^1} = 25^{\frac{1}{3}}$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



$$\sqrt[5]{(-1)^3} = (-1)^{\frac{3}{5}}$$

نذکر: کتاب درسی توان کسری را برای اعداد منفی تعریف نمی کند. مثال:

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



۲۱- هر یک از عبارتهای زیر را به ساده ترین شکل ممکن بنویسید. (کاردکلاس کتاب)

الف: $(2 \times 8)^{\frac{1}{4}} = 14^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{14} = 2$ ب: $-4(1000)^{\frac{1}{3}} = -4 \sqrt[3]{1000} = -4 \times 10 = -40$

پ: $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 3^1 = 3$ ت: $7^{\frac{3}{4}} \times 7^{\frac{5}{4}} = 7^{\frac{3}{4} + \frac{5}{4}} = 7^2 = 49$

ث: $125^{\frac{2}{3}} \times 125^{\frac{1}{3}} = 125$ ج: $8^{\frac{2}{7}} \times (1/5)^{\frac{2}{7}} = (8 \times 1/5)^{\frac{2}{7}} = 12^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{12^2}$

$125^{\frac{11}{12}} = \sqrt[12]{125^{11}}$ $8 \times \frac{125^2}{125} = 12$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



درس ۳: تابع نمایی

ضابطه تابع نمایی

هر تابع به صورت $y = a^x$ ، که یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است، یک تابع نمایی است.

مثال:

$$y = 2x + 1$$

$$y = x^2$$

$$y = |x|$$

...

$$y = 2^x$$

$$y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}$$

$$y = 2 \times 5^{2x-1}$$

$$y = (-3)^x \quad \text{نمایی نیست}$$

$$y = -3^x \quad \text{نمایی است}$$

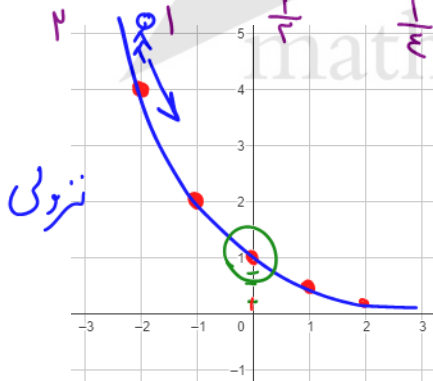
$$y = 1^x \quad \text{نمایی نیست}$$

نمودار تابع نمایی

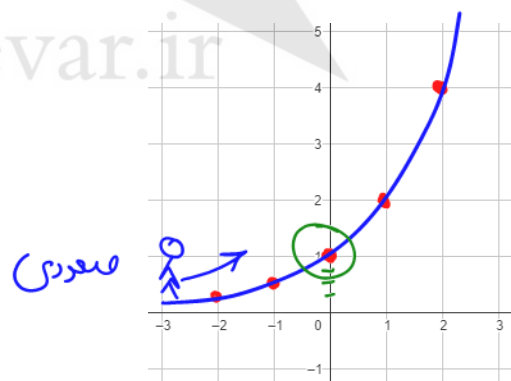
ب: نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را رسم کنید.

۲۲-الف: نمودار تابع $y = 2^x$ را رسم کنید.

x	-2	-1	0	1	2
y	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^0$	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$
	۴	۲	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



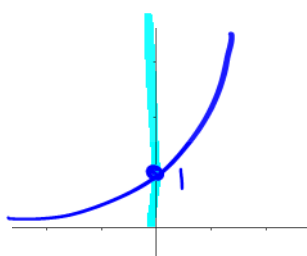
نتیجه:

دامنه:

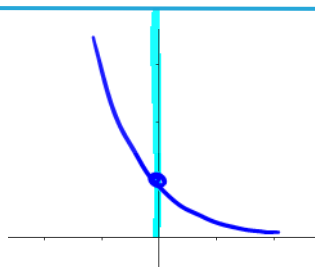
بردار:

$$D = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} = (0, +\infty) \quad \text{یا} \quad \mathbb{R}^+$$



$$a > 1$$

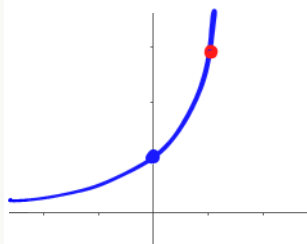


$$0 < a < 1$$

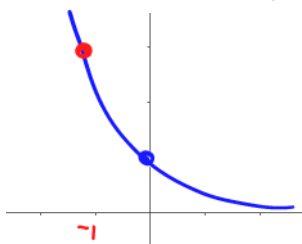
۲۳- نمودار تابع های نمایی زیر را رسم کنید.

$$3^1 = 3$$

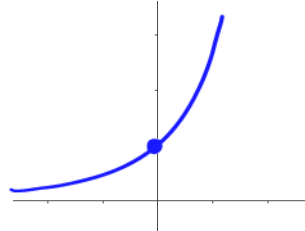
$$y = 3^x$$
 بزرگتر از یک



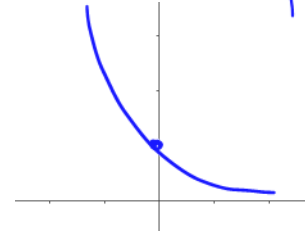
$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$
 کوچکتر از یک



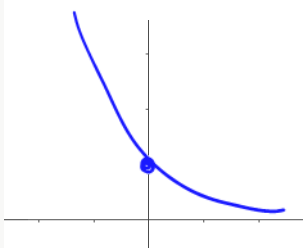
$$y = 4^x$$
 بزرگتر از یک



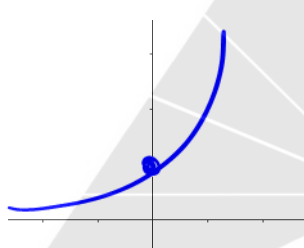
$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$
 کوچکتر از یک



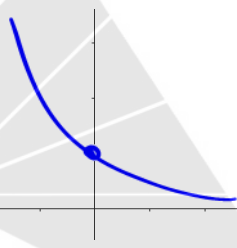
$$y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$$
 کوچکتر از یک



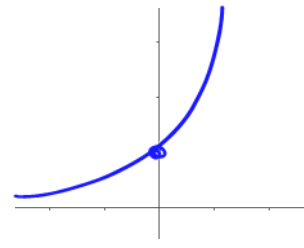
$$y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$$
 بزرگتر از یک



$$y = \left(\frac{5}{7}\right)^x$$



$$y = \left(\frac{7}{5}\right)^x$$



نکته: تشخیص بزرگتر از یک یا کوچکتر از یک بودن یک کسر

$$a > 1 \Rightarrow \text{مخرج} > \text{صورت}$$

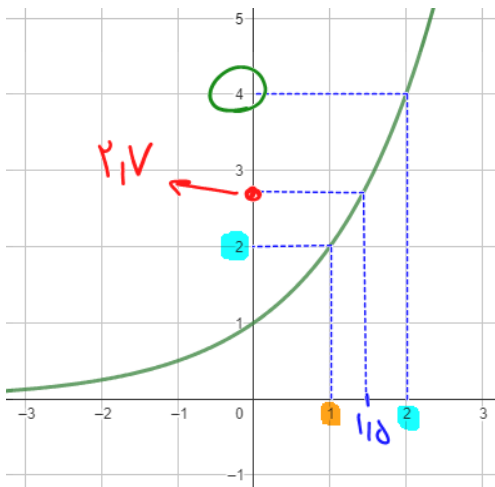
$$0 < a < 1 \Rightarrow \text{مخرج} < \text{صورت}$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



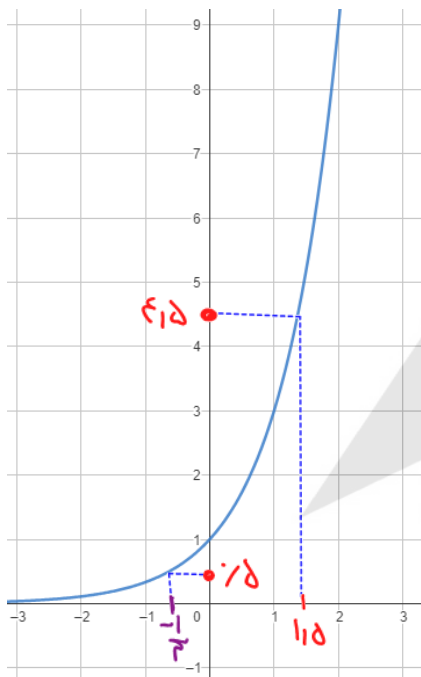
چند نکته از نمودار تابع نمایی

۱- پیدا کردن مقدار تقریبی عددی خاص با استفاده از نمودار

۲۴- با استفاده از نمودار تابع $y = 2^x$ مقدار تقریبی عدد $2^{1.5}$ را بدست آورید.

$$2^{1.5} \approx 2.17$$

$$\begin{aligned} 2^2 &= 4 \\ 2^3 &= 8 \\ 2^1 &= 2 \end{aligned}$$

۲۵- با استفاده از نمودار تابع $y = 3^x$ مقدار تقریبی عدد $3^{-\frac{1}{2}}$ و $3^{\frac{1}{2}}$ را بدست آورید.

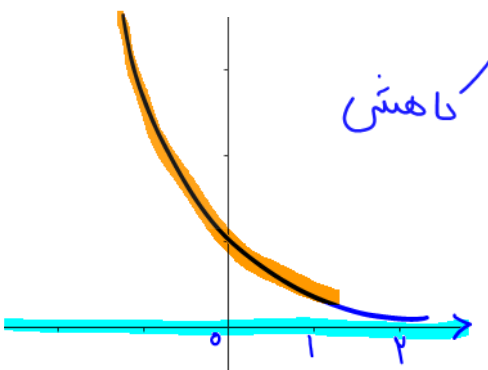
$$3^{\frac{1}{2}} \approx 1.5$$

$$3^{-\frac{1}{2}} \approx 0.5$$

۲- افزایشی و کاهشی نمودار

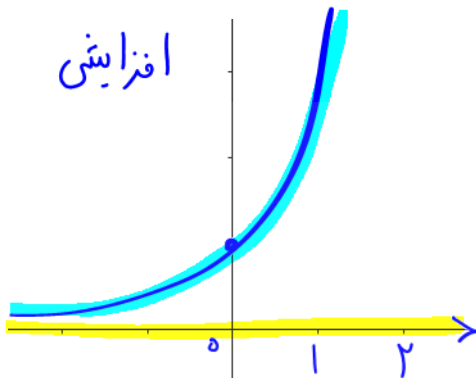
در تابع نمایی $y = a^x$ ، اگر $0 < a < 1$ باشد:

- وقتی x افزایش پیدا می کند مقدار y کاهشی می یابد
- وقتی x کاهش پیدا می کند مقدار y افزایشی می یابد



در تابع نمایی $y = a^x$ ، اگر $a > 1$ باشد:

افزایش

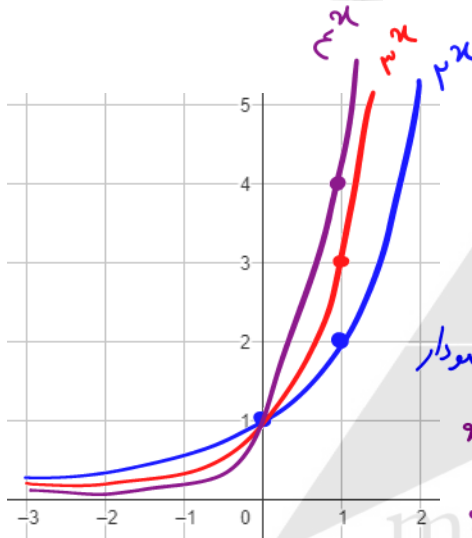


- وقتی x افزایش پیدا می کند مقدار y افزایش می یابد
- وقتی x کاهش پیدا می کند مقدار y کاهش پیدا می کند

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



۳- مقایسه چند نمودار تابع نمایی

۲۶- نمودار توابع $y = 2^x$ ، $y = 3^x$ ، $y = 4^x$ را در یک دستگاه مختصات

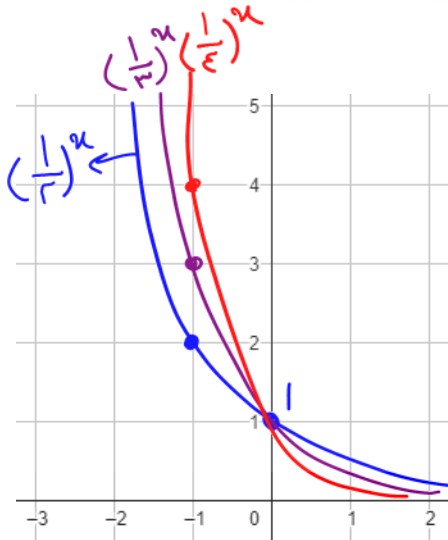
رسم کنید و آنها را باهم مقایسه کنید.

- همه از نقطه $(0, 1)$ می گذرنند.
- همه افزایش هستند.
- هر چه عدد پایه بزرگتر شود لبه بالایی نمودار به محور y ها نزدیکتر می شود ($x > 0$) و لبه پایینی نمودار به محور x ها نزدیکتر می شود ($x < 0$).

$$x > 0 \Rightarrow 4^x > 3^x > 2^x$$

$$x = 0 \Rightarrow 4^0 = 3^0 = 2^0 = 1 \rightarrow (0, 1)$$

$$x < 0 \Rightarrow 4^x < 3^x < 2^x$$

۲۷- نمودار توابع $y = (\frac{1}{2})^x$ ، $y = (\frac{1}{3})^x$ ، $y = (\frac{1}{4})^x$ را در یک دستگاه

مختصات رسم کنید و آنها را باهم مقایسه کنید.

- همه از نقطه $(0, 1)$ می گذرنند.
- همه نمودارها کاهش هستند.
- هر چه عدد پایه کوچکتر باشد لبه بالایی نمودار به محور y ها نزدیکتر می شود و لبه پایینی نمودار به محور x ها نزدیکتر می شود.

$$x > 0 \Rightarrow (\frac{1}{4})^x < (\frac{1}{3})^x < (\frac{1}{2})^x$$

$$x = 0 \Rightarrow (\frac{1}{4})^0 = (\frac{1}{3})^0 = (\frac{1}{2})^0 = 1$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...



رشد و زوال نمایی

در این بخش به بررسی پدیده‌هایی در دنیای واقعی می‌پردازیم که روند افزایش یا کاهش آن‌ها مطابق با الگوهای نمایی است. موضوعاتی مانند سود بانکی، رشد جمعیت یا حتی کاهش جمعیت، از جمله مسائلی هستند که می‌توان آن‌ها را با استفاده از روابط نمایی مدل‌سازی کرد.

معادله رشد نمایی و زوال نمایی به صورت زیر است:

$$f(t) = c(1+r)^t \quad \text{رشد نمایی} \quad \begin{array}{l} \text{زمان} \rightarrow t \\ \text{مقدار رشد} \rightarrow r \\ \text{مقدار اولیه} \rightarrow c \end{array}$$

$$f(t) = c(1-r)^t \quad \text{زوال نمایی} \quad \begin{array}{l} \text{زمان} \rightarrow t \\ \text{مقدار کاهش} \rightarrow r \\ \text{مقدار اولیه} \rightarrow c \end{array}$$

۲۸- جمعیت یک روستا در سال ۱۳۹۶ حدود دو هزار نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این روستا با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۱۳۹۸ چند نفر خواهد بود؟

$$C = 2000$$

$$r = 0.01$$

$$t = 2$$

$$f(t) = c(1-r)^t \Rightarrow f(2) = 2000(1-0.01)^2$$

$$= 2000 \times (0.99)^2 = 2000 \times 0.9801 = 1960.2$$

۲۹- سرمایه اولیه یک شرکت ۱۰۰ میلیون تومان، سود سالانه آن ۲۰ درصد و میزان آن را در تمام مدت یکسال در نظر می‌گیریم. سرمایه شرکت پس از گذشت سه سال چقدر خواهد بود؟

$$C = 100,000,000$$

$$r = 0.20$$

$$t = 3$$

$$f(t) = c(1+r)^t$$

$$f(3) = 100,000,000(1+0.2)^3$$

$$= 100,000,000(1.2)^3 = 100,000,000 \times 1.728 = 172,800,000$$

بریم چند تا سوال نهایی حل کنیم...

