

به نام خالق هستی

مباحث تکمیلی کتاب ریاضی (۱) دهم

رشته:

علوم تجربی

مدرس و مولف:

طیبه آذین

T. A. Zarshin

فصل چهارم:

معادله ها

و

نامعادله ها

مدرس:

طیه آذرشین

T. Azarshin

معادله درجه دوم:

معادله ی $ax^2 + bx + c = 0$ را که در آن a, b, c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$ است، یک معادله درجه دوم بر حسب x می گویند.

اگر b یا c صفر باشند، معادله به یک معادله درجه دوم ناقص تبدیل می شود.

حل معادله درجه دوم ناقص:

حالت اول:

در هر معادله درجه دوم ناقص که $b = 0$ باشد، معادله یاریشه ندارد یا ۲ ریشه تریزه هم دارد.

۵۵۵- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $3x^2 = 0$

ب) $2x^2 - 8 = 0$

پ) $\frac{1}{2}x^2 + 3 = 0$

ت) $3x^2 - 48 = 0$

ث) $4x^2 + 36 = 0$

ج) $5 - 5x = 5x(2x - 1)$

حالت دوم: در هر معادله درجه دوم ناقص که $c = 0$ باشد، معادله دارای ۲ ریشه است که یکی از ریشه ها صفر است. (حل معادله از طریق فاکتورگیری انجام می شود).

۵۵۶- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $5x^2 - 20x = 0$

ب) $5x^2 - 7x = 2x(x - 3)$

حل معادله درجه دوم به کمک تجزیه:

در این روش از انواع تجزیه که در سال نهم و فصل گذشته آموختیم استفاده می شود.

۵۵۷- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $4x^2 - 12x + 8 = 0$

ب) $9x^2 = 9x - 2$

پ) $3x^2 - 2x - 1 = 0$

ت) $4x^2 - 16x + 15 = 0$

حل معادله درجه دوم به کمک ریشه گیری (خاصیت ریشه زوج)

اگر a عددی نامنفی باشد که $x^2 = a$ باشد، آنگاه داریم: $x = \pm\sqrt{a}$

۵۵۸- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $(x - 2)^2 = 25$

ب) $(3x + 2)^2 - 36 = 0$

پ) $x^2 + 16 = 0$

ت) $4(3x - 1)^2 - 9 = 0$

ث) $4x^2 = 49$

۵۵۹- مجموع ریشه های معادله $(\sqrt{3} - 2)^2 = (x - 2)^2$ کدام است؟

حل معادله درجه دوم از روش مربع کامل:

ابتدا اجزای مثل x را یک طرف و عدد ثابت را طرف دیگر می بریم.

ضریب x^2 باید ۱ شود (بدین منظور باید طرفین را تقسیم بر ضریب x^2 کرد).

حال ضریب x را b می نامیم و حاصل $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ را به طرفین اضافه می کنیم.

نتیجه اعمال بالا این است که طرف اول با کمک تجزیه به یک اتحاد مربع تبدیل می شود.

در نهایت از خاصیت ریشه زوج استفاده کرده و در ادامه عملیات جواب های x یافت می شود.

۵۶۰- معادلات زیر را از روش مربع کامل حل نمایید.

الف) $3x^2 + 4x - 15 = 0$

ب) $x^2 + 6x - 187 = 0$

پ) $x^2 - \frac{x}{6} = \frac{7}{6}$

۵۶۱- معادلات زیر را از روش مربع کامل حل نمایید.

۱) $2a^2 + a - 2 = 0$

$$۲) ۳x^2 + ۴x + ۱ = ۰$$

$$۳) ۲m^2 = ۳ - ۵m$$

حل معادله درجه ۲ از روش کبی (Δ دلتا):

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ابتدا $\Delta = b^2 - 4ac$ را محاسبه می کنیم که سه حالت رخ می دهد.

حالت اول: Δ صفر است. پس معادله دارای یک ریشه مضاعف است که از رابطه $x = -\frac{b}{2a}$ بدست می آید.

حالت دوم: Δ مثبت است پس معادله دارای ۲ ریشه حقیقی و متمایز است که از رابطه $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ بدست می آید.

حالت سوم: Δ عددی منفی است پس معادله ریشه حقیقی ندارد.

۵۶۲- معادلات زیر را حل کنید .

$$\text{الف) } ۲x^2 + ۱۳x - ۴۵ = ۰$$

$$\text{ب) } ۸ - x = ۳x(x - ۱)$$

$$\text{پ) } ۳x^2 - x + ۵ = ۰$$

$$\text{ت) } (۳x + ۱)^2 - (۲x + ۳)^2 + ۱ = ۰$$

۵۶۳- معادلات زیر را حل کنید .

۱) $25x^2 - 30x + 9 = 0$

۲) $5x^2 + 6x = 8$

۳) $-2a^2 + a + 3 = 0$

۴) $x^2 + 2\sqrt{3}x - 9 = 0$

حل معادله درجه دوم از روش مربع (در بعضی حالات):

حالت اول:

در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a + b + c = 0$ باشد یکی از ریشه های معادله ۱ و ریشه دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

حالت دوم:

در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a + c = b$ باشد یکی از ریشه های معادله ۱- و ریشه دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

۵۶۴- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2 - 19x + 18 = 0$

ب) $x^2 + 135x - 136 = 0$

پ) $x^2 + (1 - \sqrt{3})x - (2 - \sqrt{3}) = 0$

۵۶۵- معادلات زیر را حل کنید .

۱) $13a^2 = 20a - 7$

۲) $x^2 - \frac{1}{5}x = \frac{4}{5}$

۳) $\sqrt{5}x^2 + (1 + \sqrt{5})x + 1 = 0$

۴) $mx^2 + (m + n)x + n = 0$

نکته: ریشه هر معادله در آن معادله صدق می کند.

۵۶۶- اگر یکی از ریشه های معادله $(m + 1)x^2 = 2mx - m + 5$ برابر ۲ باشد، ابتدا m و سپس ریشه ی دیگر را بدست آورید.

ج: $m = 1$, $x = -1$

۵۶۷- مقدار $m + n$ کدام است؟

الف) اگر ۲ و ۳- ریشه ی معادله $x^2 + mx + n = 0$ باشند. ۵- ج:

ب) اگر ۲ و ۴ ریشه ی معادله $x^2 - (m + 2n)x + 2mn = 0$ باشند.

۵۶۸- یکی از ریشه های معادله $0 = -3x^2 + mx + 12$ برابر ۲- است. ابتدا m و سپس ریشه دیگر را بدست آورید.

۵۶۹- حدود m را چنان بدست آورید که معادله $0 = (m - 1)x^2 + x - m$ دارای ریشه ی مضاعف باشد.

۵۷۰- اگر معادله $0 = x^2 + (2m + 3)x + m^2$ فقط یک ریشه حقیقی داشته باشد، آن ریشه را بدست آورید. ج: $-\frac{3}{4}$

۵۷۱- اگر معادله درجه دوم $x(2x - 5) = a$ دارای ریشه مضاعف باشد. آن ریشه کدام است؟ ج: $\frac{5}{4}$

۵۷۲- اگر معادله $0 = ax^2 + 2ax + 1$ دارای ریشه مضاعف باشد. مقدار a کدام است؟ ج: ۱

۵۷۳- اگر معادله $0 = (m + 1)x^2 - x + (m - 2)$ دارای دو ریشه ی یکسان باشد. مقدار m کدام است؟

۵۷۴- حدود m را چنان بدست آورید که معادله $0 = (4m + 1)x^2 - 4mx + m - 3$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد.

ج: $(-\frac{3}{11}, +\infty)$

۵۷۵- حدود k را چنان بدست آورید که $(k+1)x^2 - 2kx + k = 0$ ریشه نداشته باشد. $(0, +\infty)$: ج

۵۷۶- حدود m را چنان بدست آورید که معادله $mx^2 + (2m-1)x + m = 0$ ریشه نداشته باشد.

۵۷۷- به ازای چه مقدار k معادله $x^2 + (k-4)x + 4 = 0$ دارای دو ریشه یکسان می باشد؟

۵۷۸- معادلات زیر را از روش تغییرمتغیر حل نمائید.

الف) $(x^2 - 1)^2 - 3(x^2 - 1) + 2 = 0$

ب) $(x+2)^2 + 2\sqrt{3}(x+2) = 6$

ج) $x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{5}} - 2 = 0$

د) $x^{\sqrt{18}} + x^{\sqrt{2}} = 2$

ه) $x^6 - 5x^2 + 4 = 0$

ی) $\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2 - 8\left(\frac{x^2}{2} - 1\right) + 12 = 0$

۵۷۹- اگر معادله $x^2 + (b + c)x + 4 = 0$ تنها یک ریشه داشته باشد. حاصل $b + c$ کدام است؟

۵۸۰- در مستطیلی طول از ۲ برابر عرض یک واحد بیشتر است. اگر مساحت ۲۱ باشد. محیط کدام است؟ ج: ۲۰

۵۸۱- طول اضلاع مثلث قائم الزاویه ای $1, x + 1, x + 2, 3x - 1$ است. اندازه وتر کدام است؟ ج: ۵

۵۸۲- مجموع مربعات دو عدد صحیح متوالی ۸۵ است. آن دو عدد کدامند؟ ج: ۶, ۷

۵۸۳- به ازای چند مقدار صحیح m معادله $16x^2 + 2mx + 1 = 0$ جواب حقیقی ندارد. ج: ۷

۵۸۴- حاصلضرب دو عدد فرد مثبت و متوالی ۱۹۵ است. مجموع این دو عدد کدام است؟ ج: ۲۸

۵۸۵- وتر مثلث قائم الزاویه ای $\sqrt{65}$ و مجموع دو ضلع ۱۱ است. طول اضلاع قائمه چقدر است؟ ج: ۷, ۴

سهی و محلات مربوط به آن:

نمودار سهی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است که در آن a, b, c اعداد حقیقی و $a \neq 0$ است.

در هر معادله سهی که $a > 0$ باشد، نمودار سهی روبه بالا در آن نقطه $\min$ سهی است.

و در هر معادله سهی که $a < 0$ باشد، نمودار سهی روبه پایین و رأس آن نقطه $\max$ سهی است.

خطی عمودی که از رأس سهی می‌گذرد، را خط تقارن سهی می‌نامند. (نمودار سهی نسبت به این خط متقارن است). معادله خط تقارن سهی برابر $x = -\frac{b}{2a}$ است

$$\text{محضات رأس سهی به صورت } \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right) \text{ می‌باشد.}$$

(معمولاً برای بدست آوردن عرض نقطه رأس راحت تر آن است که در معادله سهی به جای x مقدار $-\frac{b}{2a}$ را قرار داد تا y بدست آید.)

برای رسم سهی از روش نقطه یابی کافی است سه نقطه از سهی را پیدا کنیم که بهتر آن است علاوه بر نقطه رأس دو نقطه یکی بعد از طول نقطه رأس و یکی قبل از طول نقطه رأس و ترجیحاً متساوی الفاصله با نقطه رأس انتخاب و با بدست آوردن عرض آنها، نمودار سهی را رسم کنیم.

نمودار سهی گاهی بصورت $y = a(x - h)^2 + k$ که $a \neq 0$ است، ارائه می‌شود. که در آن محضات نقطه رأس (h, k) است و معادله خط تقارن $x = h$ است.

۵۸۶- در هر یک از سهمی های زیر ابتدا رأس و خط تقارن را مشخص کنید و سپس نمودارشان را رسم نمایید.

الف) $y = 2x^2 + 4x - 1$

ب) $y = -2(x - 1)^2 + 3$

پ) $y = x^2 - 2x$

ت) $y = (x + 1)^2 - 2$

ث) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 3$

۵۸۷- نمودار هر یک از سهمی های زیر را رسم کنید.

۱) $y = -x^2 + 3$

۲) $y = x - x^2$

۳) $y = x^2 - 2x + 3$

مباحث تکمیلی در نمودار سهمی:

۱- محل برخورد سهمی با محور طول با همان جوابهای معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است.

۲- محل برخورد سهمی با محور عرض با همان نقطه $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ است.

۳- اگر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ محور x را در نقطه با طول های x_1 و x_2 قطع کند می توان معادله سهمی را بصورت $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ نوشت و اگر سهمی محور x را در یک نقطه با طول x_1 قطع کند می توان معادله سهمی را می توان بصورت $y = a(x - x_1)^2$ نوشت.

۴- اگر طول دو نقطه A و B از سهمی دارای عرض های یکسان باشند در این صورت طول نقطه رأس از میانگین طول های A و B یعنی $\frac{x_A + x_B}{2}$ بدست می آید و معادله خط تقارن نیز $x = \frac{x_A + x_B}{2}$ خواهد بود.

۵- محل برخورد خط تقارن با نمودار سهمی تنها در نقطه رأس خواهد بود.

۶- تنها یک خط افقی وجود دارد که بر نمودار سهمی مماس و آن خطی به معادله $y = -\frac{\Delta}{4a}$ است که از رأس میگذرد.

۵۸۸- محل برخورد سهمی $y = x^2 - x - 2$ با محور طول ها کدام است؟

۵۸۹- محل برخورد سهمی $y = -x^2 + 3x - 2$ با محور عرضها کدام است؟

۵۹۰- محل برخورد سهمی $y = 4x^2 - 4x + 1$ با محور طول ها کدام است؟

۵۹۱- محل برخورد $y = -2x^2 + x - 1$ با محور طول ها کدام است؟

۵۹۲- معادله سهمی را بنویسید که در نقاط ۱ و ۲- محور x ها را قطع کند و از نقطه $(\frac{3}{5})$ بگذرد.

۵۹۳- معادله سهمی بنویسید که فقط در نقطه ۲ محور x ها را قطع کند و از نقطه $(-\frac{4}{3})$ بگذرد.

۵۹۴- نقاط (1) ، (-3) دو نقطه از سهمی هستند، معادله خط تقارن را بدست آورید.

۵۹۵- معادله خط تقارن سهمی $x^2 + y = x$ و محل برخورد سهمی با محور عرض ها را بدست آورید.

۵۹۶- رأس سهمی $y = -x^2 + mx + 6$ بر روی خط $x = -2$ است. محل برخورد سهمی با محور x ها را بدست آورید.

۵۹۷- محور تقارن سهمی $y = x^2 - 6x + 2m$ ، خط $y = -5$ را بر روی خود سهمی قطع می کند. محل برخورد سهمی با محور y ها را بیابید.

۵۹۸- سهمی $y = (2k - 1)x^2 + x - 2$ نسبت به خط $x = \frac{1}{4}$ متقارن است. این سهمی در چند نقطه محور x را قطع میکند؟

۵۹۹- اگر در سهمی $y = mx^2 + 3x + 4m - 1$ عرض بالاترین نقطه ۷ باشد. محل برخورد سهمی با محور y ها کدام است؟

۶۰۰- معادله سهمی را بنویسید که محور x ها را در نقاط -1 و 3 و محور y ها را در نقطه -1 قطع کند.

۶۰۱- به ازای چه مقدار t سهمی $y = -x^2 + 2x + 3t - 1$ دارای ماکزیممی برابر 6 است؟ 2 ج:

۶۰۲- نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ محور x ها را در نقطه ای به طول 1 و محور عرض ها را در نقطه y به عرض -6 قطع می کند و

از نقطه $(-2, -6)$ می گذرد. اگر $(-1, m)$ نقطه ای از سهمی باشد، m کدام است؟ -8 ج:

۶۰۳- مقدار $a + b + c$ در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ چقدر است در صورتیکه نمودار سهمی محور x ها را در نقطه ای 1 و محور

عرض ها را در نقطه y -1 و از نقطه $(2, 3)$ بگذرد؟ $0 = (-1) + 0 + 1$ ج:

۶۰۴- بیرانوند دروازه بان معروف فوتبال از جلوی دروازه توپی را شوت می کند، اگر مسیر طی شده از رابطه $y = -x^2 + 4x + 2$

بدست آید، حداکثر ارتفاع توپ از سطح زمین چقدر است؟ 6 ج:

۶۰۵- حدود m را چنان بدست آورید که خط $y = 2x - m$ ، سهمی $y = x^2 - 4x + 3$ را در دو نقطه قطع کند؟ $(-\infty, 6)$ ج:

تعیین علامت:

مطور از تعیین علامت یک عبارت جبری آن است که مشخص می کنیم این عبارت در چه فاصله ای از اعداد حقیقی، مثبت و در چه فاصله ای از اعداد حقیقی، منفی و در کجا به صفر است.

تعیین علامت عبارت درجه اول:

ابتدا عبارت درجه اول را مساوی صفر می گذاریم و ریشه آن را بدست می آوریم و سپس از جدولی بصورت روبرو استفاده می کنیم:

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
$ax + b$	مخالف علامت a		موافق علامت a

تعیین علامت عبارت درجه دوم:

ابتدا عبارت درجه دوم را مساوی صفر می گذاریم و سپس Δ را می یابیم. حال سه حالت رخ می دهد:

حالت اول: اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دو ریشه x_1, x_2 دارد که جدولی بصورت زیر رسم می کنیم:

x	$x < x_1$	x_1	$x_1 < x < x_2$	x_2	$x > x_2$
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a		مخالف علامت a		موافق علامت a

حالت دوم: اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله یک ریشه x_1 دارد که جدولی بصورت زیر رسم می کنیم:

x	$x < x_1$	x_1	$x > x_1$
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a		موافق علامت a

حالت سوم: اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله ریشه ندارد که جدولی بصورت زیر رسم می کنیم:

x	همواره (به ازای هر x)
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a

تعیین علامت کسری و عباراتی بصورت حاصلضرب دو یا چند عبارت:

جدول تعیین علامت هر عبارت را در طبقات روی هم رسم و در نهایت علامت را در هم ضرب می کنیم، تنها تفاوت در این است که عبارت به ازای ریشه های خارج تعریف نشده است.

حل نامعادله:

به کمک تعیین علامت انجام می گیرید، بدین صورت که تمامی عبارت را به یک طرف نامساوی برده و تبدیل به یک کسری حاصلضرب چند عبارت می کنیم و طرف دیگر نامساوی صفر است و سپس با کمک جدول تعیین علامت محدوده های قابل قبول را به صورت بازه نمایش می دهیم.

نکته:

در تعیین علامت عبارات شامل قدر مطلق و پرانتزهای توان زوج و عباراتی که به شکل ax^2 باشد، حالات خاص به حساب می آیند. در پرانتزهای توان فرد از توان آن صرف نظر و بقیه عبارت را تعیین علامت می کنیم.

روش برای تعیین علامت سریع داریم که در وقت معین آموزش خواهیم داد.

۶۰۶- عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $A = \frac{-6x + 5}{2}$

ب) $B = x - 3(x + 2) + (4x - 1)$

پ) $A = (2x + 4)^5$

ت) $B = (-\frac{1}{3}x + 1)^{13}$

۶۰۷- عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $A = (3x - 6)(-4x + 1)$

۲) $B = (-2x + 5)^5$

۳) $A = (-2x + 4)^3(-3x + 3)^{12}$

۴) $B = -3x^2(4x + 1)$

۶۰۸- عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $A = -3(x + 2)^5(1 - 5x)^{13}$

۲) $B = |-2x + 1|$

۳) $A = |1 - 5x|$

۶۰۹- عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $A = \frac{2x + 1}{4 - 2x}$

ب) $B = \frac{x(3x - 6)}{1 - 3x}$

$$\text{ت) } A = \frac{(2x-3)(1-5x)^2}{|3x+9|}$$

$$\text{ج) } B = \frac{(-2x+1)^4(-2x)}{(3x-6)^3}$$

$$\text{ح) } A = \frac{-2(x+5)}{|x|(5x-10)^3}$$

۶۱۰- حدود x را چنان بدست آورید که عبارت $y = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+3)^2(-x+4)}$ مثبت باشد. ج: $(-3, -2) \cup (1, 4)$

۶۱۱- نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \frac{x+1}{x-1} \leq 2$$

$$\text{ج: } (-\infty, 1) \cup [3, +\infty)$$

$$\text{ب) } \frac{2x+1}{3x-1} \leq -1$$

$$\text{ج: } [0, \frac{1}{3})$$

$$\text{پ) } \frac{2x+1}{3x-1} > 2$$

$$\text{ج: } (\frac{1}{3}, \frac{3}{4})$$

۶۱۲- بدون کمک گرفتن از تعیین علامت نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $-1 \leq \frac{1-2x}{3} < 2$

ب) $-2 < \frac{3x+1}{2} < 1$

ت) $2 \leq 3x-1 \leq 4x+2$ ج: $[1, +\infty)$

ث) $3x-3 < 2x-2 \leq x-1$ ج: $(-\infty, 1)$

ج) $4-x < 2x-2 < x+1$ ج: $(2, 3)$

۶۱۳- عبارات زیر را تعیین علامت کنید و سهمی مربوط به آن را رسم و سپس تعبیری هندسی از جدول تعیین علامت و نمودار سهمی ارائه دهید.

الف) $y = x^2 - 2x + 3$

ب) $y = x^2 - 2x - 3$

پ) $y = -x^2 + 4x - 4$

ت) $y = -x^2 + x + 2$

ث) $y = -x^2 + 1$

ج) $y = x^2 + 2$

۶۱۴- عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $A = (x^2 - 4)(-6x^2 + 11x - 3)$

ب) $B = (x^2 - x + 1)(4x^2 + 4x + 1)$

$$\text{پ) } A = \frac{(x^2 - 2x)(x^2 + x + 7)}{(x^2 - x - 6)^3}$$

$$\text{ت) } B = \frac{(-3x^2 + 2x + 1)(x^2 + 3)}{(-x^2 + 1)^2}$$

$$\text{ث) } A = \frac{(6 - 3x)^2}{-3x^2(x^2 - 10x + 25)}$$

۶۱۵- عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

$$\text{۱) } B = \frac{|x^2 - 3|}{(1 - 2x)^2(6x^2 - x - 1)}$$

$$\text{۲) } A = \frac{(x + 2)^2(1 - 4x^2)^3}{(2x^2 - x - 1)|2x - 6|}$$

۶۱۶- مجموع جواب نامعادلات زیر را بدست آورید.

الف) $\frac{(x-1)^2(x^2+4)}{-x^2+2x-2} \leq 0$

ب) $\frac{(x-x^2)^2(4-x)}{|x+1|(2x^2-x+7)} > 0$

پ) $-4 \leq x^2 - 4x \leq 6$

ج: $[2 - \sqrt{10}, 2 + \sqrt{10}]$

ت) $\frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 2} > 0$

ج: $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

۶۱۷- مجموع جواب نامعادلات زیر را بدست آورید.

۱) $\frac{3x^2 - 4x}{x+1} \geq -1$

ج: $[-1, +\infty)$

۲) $\frac{x+1}{3x^2-4x} < 0$

ج: $(-\infty, -1) \cup (0, \frac{4}{3})$

۳) $\frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 3x + 2} < 1$

ج: $(-\infty, 0) \cup (1, 2)$

۶۱۸- دستگاه نامعادلات زیر را حل کنید.

الف)
$$\begin{cases} \frac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 - x - 12} > 1 \\ x^2 - x - 12 < 0 \end{cases}$$
 ج: $(-\frac{3}{2}, 3)$

ب)
$$\begin{cases} x^2 - 4x \leq 0 \\ x^3 - 3x^2 > 0 \end{cases}$$
 ج: $(3, 4]$

۶۱۹- حدود m را چنان بدست آورید که سهمی $y = (x + 8)(x + 1)$ با خط $y = mx$ نقطه اشتراکی نداشته باشند؟
ج: $(9, 25)$

۶۲۰- اگر خط $y = mx + 4$ با سهمی $y = -x^2 + 2x$ نقطه اشتراکی نداشته باشند، حدود m کدام است؟
ج: $(-2, 6)$

۶۲۱- در چه بازه ای سهمی $y = 2x^2 - 7x + 3$ پائین تر از سهمی $y = -x^2 + 2x + 3$ قرار میگیرد؟
ج: $(0, 3)$

۶۲۲- حدود m را چنان بدست آورید که سهمی $y = -x(x - 2) - 4$ خط $y = mx$ را دو نقطه قطع می کند؟
ج: $(-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$

۶۲۳- حدود m را چنان بدست آورید که نامساوی زیر به ازای تمام مقادیر x برقرار باشد.

$$(m - 2)x^2 + m < 4x - 1$$

ج: $(-\infty, -3)$

۶۲۴- حدود m را چنان بدست آورید که معادله $mx^2 + (m - 1)x + m = 0$ ریشه نداشته باشد.

۶۲۵- حدود n را چنان بدست آورید که نامعادله زیر به ازای همه مقادیر x برقرار باشد.

$$(2 - n)x^2 + 4x - n - 1 > 0$$

۶۲۶- به ازای چه مقادیر m مقدار عبارت $x^2 - mx$ از مقدار عبارت $2x + 3m - 1$ بیشتر است؟ $(-16, 0)$ ج:

۶۲۷- به ازای چه مقدار m نامساوی زیر همواره برقرار است؟

ج: $(-4, 0)$

الف) $x^2 + (m + 2)x + 1 > 0$

ب) $2x^2 + (1 - m)x + 2 > 0$

ج: $(-3, 5)$

۶۲۸- به ازای کدام مقدار m سهمی $y = 2x^2 + (m + 1)x + \frac{1}{4}m + 2$ محور x ها را قطع نمی کند. ج: $(-3, 5)$

۶۲۹- به ازای چه مقدار m نمودار سهمی $y = mx^2 - mx - 1$ همواره پائین محور x ها است؟

ج: $(-4, 0)$

۶۳۰- به ازای چه مقدار m نمودار سهمی $y = (m + 2)x^2 - 2mx$ همواره بالای خط $y = -1$ قرار دارد؟ ج: $(-1, 2)$

۶۳۱- به ازای چه مقادیری از m خط $y = x + 5$ همواره بالای نمودار $y = 4mx^2 + 5x - 4m$ قرار دارد؟ ج: $(-1, -\frac{1}{4})$

تعریف قدر مطلق و خواص آن:

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$$

$$|u| = a \quad (a \geq 0 \text{ با شرط}) \Rightarrow u = \pm a$$

$$|u| < k \Rightarrow -k < u < k$$

$$|u| > k \Rightarrow u < -k \quad \cup \quad u > k$$

$$|u| = |V| \Rightarrow u = \pm V$$

$$|u| \times |V| = |u \cdot V|$$

$$|u| \div |V| = \left| \frac{u}{V} \right| \quad (V \neq 0)$$

$$|u^r| = |u|^r = u^r$$

$$|-u| = |u|$$

$$\sqrt[n]{u^n} = |u|$$

۶۳۲- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $|2x - 5| = 3$

ب) $|3x + 2| + 1 = 0$

پ) $||x| - 5| = 3$

ت) $||1 - x| + 3| = 5$

ج) $|2x + 3| = |1 - x|$

۶۳۳- معادلات زیر را حل کنید.

۱) $|3x - 2| = x + 1$

۲) $|x^2 - x - 3| = -x - 1$

۳) $x^2 - 3|x| + 2 = 0$

۴) $2x^2 - 5|x| + 3 = 0$

۶۳۴- نامعادلات زیر را حل نمایید.

الف) $|5 - 3x| \leq 4$ ج: $[\frac{1}{3}, 3]$

ب) $|x - 1| > |x + 2|$ ج: $(-\infty, -\frac{1}{2})$ (راهنمایی: طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم)

پ) $|\frac{x-2}{x+4}| > 1$ ج: $(-\infty, -4) \cup (-4, -1)$

ت) $|\frac{4-2x}{2-3x}| > 2$ ج: $(0, \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, 1)$

ج) $||x + 1| - 2| < 3$ ج: $(-6, 4)$

نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۶۳۵) \frac{|x+1|}{(x-1)^2(x-2)^2} > 0, \quad \text{ج: } (1, +\infty)$$

$$۶۳۶) \frac{m(m^2+m)}{m-2} > 0, \quad \text{ج: } [2, +\infty)$$

$$۶۳۷) |2x-1|(x^2-6x+9) \leq 0, \quad \text{ج: } \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$$

$$۶۳۸) \frac{x^2-2}{x} < 1, \quad \text{ج: } (-\infty, -1) \cup (0, 2)$$

$$۶۳۹) \frac{x^2+2}{2x+1} \leq x, \quad \text{ج: } \left[-2, -\frac{1}{2}\right) \cup [1, +\infty)$$

$$۶۴۰) \frac{x^2-1}{x^2+1} < 1, \quad \text{ج: } \mathbb{R}$$

$$۶۴۱) x \geq \frac{2x-1}{x+4}, \quad \text{ج: } (-4, +\infty)$$

$$۶۴۲) \frac{x+2}{2x-1} \leq \frac{1}{x-2}$$

$$\text{ج: } [-1, \frac{1}{2}) \cup (2, 3]$$

$$۶۴۳) 4x \geq x^3$$

$$\text{ج: } (-\infty, -2] \cup [0, 2]$$

$$۶۴۴) \frac{x^2+x+2}{x^2-3x+2} > 1$$

$$\text{ج: } (0, 1) \cup (2, +\infty)$$

$$۶۴۵) \frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-3}$$

$$\text{ج: } (1, 3)$$

$$۶۴۶) 1 \geq \frac{x-1}{x} - \frac{x}{x+1}$$

$$\text{ج: } (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

$$۶۴۷) \frac{x-1}{x+1} > 2x$$

$$\text{ج: } (-\infty, -1)$$

$$۶۴۸) \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} < 0$$

$$\text{ج: } (-3, -2) \cup (-2, 1)$$

$$۶۴۹) \frac{۵x^2 - ۱۲x}{x^2 - ۹} < ۱$$

$$\text{ج: } (-۳, ۳) - \left\{\frac{۳}{۲}\right\}$$

$$۶۵۰) x^3 + ۲x^2 \leq x + ۲$$

$$\text{ج: } (-\infty - ۲] \cup [-۱, ۱]$$

$$۶۵۱) \frac{۱}{x-۱} + ۴ \leq ۳ + \frac{۲x}{۱-x}$$

$$\text{ج: } [۰, ۱)$$

$$۶۵۲) \frac{۳x^2 - ۳x}{۱ - x^2} < -۱$$

$$\text{ج: } (-\infty, -۱) \cup \left(\frac{۱}{۲}, ۱\right) \cup (۱, +\infty)$$

$$۶۵۳) ۲x - ۲ \leq x + ۱ < ۲x + ۲$$

$$\text{ج: } [-۱, ۳]$$

$$۶۵۴) \frac{۸ + ۴x}{x-۱} < |۳ \cot(۱۳۵)|$$

$$\text{ج: } (-۱۱, ۱)$$

$$۶۵۵) x^2 - \frac{۱}{۲}x \leq |\cos ۱۲۰|$$

$$\text{ج: } \left[-\frac{۱}{۲}, ۱\right]$$

$$۶۵۶) x^4 + x^2 \leq ۶$$

$$\text{ج: } [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$۶۵۷) ۱۶ - (x + ۲)^2 \leq ۰$$

$$\text{ج: } (-\infty, -۶] \cup [۲, +\infty)$$

$$۶۵۸) \frac{1}{x^2} - \frac{1}{۴} \geq ۰$$

$$\text{ج: } [-۲, ۲]$$

$$۶۵۹) \frac{2x^2|x+۲|}{x+۱} \geq ۰$$

$$۶۷۰) (x + ۲)^2(x - ۳) \geq ۰$$

$$\text{ج: } [-۴, +\infty) \cup \{-۲\}$$

$$۶۷۱) -x^2(x^2 - ۴)^2 \geq ۰$$

$$\text{ج: } \{۰, \pm ۲\}$$

$$۶۷۲) \begin{cases} ۱۶ - x^2 \leq ۰ \\ -x^2 - ۳x + ۱۰ > ۰ \end{cases}$$

$$۶۷۳) -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 8 > \frac{9}{2}$$

$$۶۷۴) \frac{a}{a^2 - 27} \leq \frac{1}{a^2 + 3a + 9}$$

$$۶۷۵) 2 - \left(\frac{a}{a-2}\right)^2 \leq 8$$

$$۶۷۶) 5x^2 - 80 < 0$$

$$\text{ج: } (-4, 4)$$

$$۶۷۷) \frac{x^2 + x + 1}{1 + x - 2x^2} \geq 0$$

$$\text{ج: } \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$۶۷۸) x^3 + 2x^2 + x \leq 0$$

$$\text{ج: } (-\infty, 0]$$

$$۶۷۹) x^3 - 2x^2 + x \geq 0$$

$$\text{ج: } [0, +\infty)$$

$$۶۸۰) \frac{-x^2 - x + 2}{|x + 2|} \geq 0$$

$$\text{ج: } (-2, 1]$$

$$۶۸۱) \frac{3x^2 - 2x}{4 + x^2} \leq 2$$

$$\text{ج: } [-2, 4]$$

$$۶۸۲) 0 \leq \frac{2x - 2}{2x + 1} \leq 1$$

$$\text{ج: } \left[-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}\right]$$

$$۶۸۳) \frac{2x - 2}{2x + 1} \geq \frac{2x - 1}{2x + 2}$$

$$\text{ج: } \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$۶۸۴) \begin{cases} 6x - x^2 \geq 8 \\ 2x^3 + 2x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{ج: } [2, 4]$$

$$۶۸۵) \frac{3a - 3a^2}{1 - a^3} \leq 1$$

$$\text{ج: } \mathbb{R} - \{1\}$$

$$۶۸۶) \frac{x^2}{x+1} \leq \frac{1}{1-x^2}$$

$$۶۸۷) \frac{x^2 + x}{x+1} \leq ۰$$

$$\text{ج: } (-\infty, ۰] - \{-1\}$$

$$۶۸۸) -1 \leq \frac{x^2}{x-2} < 2$$

$$\text{ج: } (-\infty, ۰] \cup (3, +\infty)$$

۶۸۹- دامنه هر از عبارات رادیکال زیر را بدست آورید.

$$\text{الف) } A = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$$

$$\text{ب) } B = \sqrt{\frac{2x - x^2}{1+x}}$$

$$\text{پ) } C = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - x}}$$

تمرین برای دانش آموزان سخت کوش:

۶۹۰- حدود m را چنان بدست آورید که تابع $f(x) = \frac{x^2 + 2x + m}{1 - x + 2x^2}$ پایین تر از خط $y = 1$ قرار گیرد؟ $m < -\frac{5}{4}$ ج:

۶۹۱- مجموعه جواب نامعادلات زیر کدام است؟

۱) $|5x + 4| < 3x + 2$ ج: $\emptyset$

(راهنمایی: با شرط $3x + 2 > 0$ باشد، طرفین را به توان ۲ می رسانیم.)

۲) $|x^2 - x - 4| > 2$ ج: $(-\infty, -2) \cup (-1, 2) \cup (3, +\infty)$

۳) $\frac{|2x + 3| + 5}{|2x - 1| - 5} \geq 0$ ج: $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

۶۹۲- نامعادله $|x^3 - 27| < x^2 + 3x + 9$ به ازای چه مقدار x همواره برقرار است؟ (راهنمایی: عبارت همواره قسمت را می توان از

طرفین حذف کرد.) ج: $(2, 4)$

۶۹۳- مجموعه جواب نامعادله $1 < |x - 1| < 6$ کدام است؟ (راهنمایی: در دو حالت $x - 1 \geq 0$, $x - 1 < 0$ نامعادله را حل کنید).

ج: $(-5, 0) \cup (2, 7)$

۶۹۴- مجموعه جواب نامعادله $|2x - 8| > x^2$ بصورت (a, b) است. حاصل $a + b$ کدام است؟

(راهنمایی: در دو حالت $2x - 8 \geq 0$, $2x - 8 < 0$ نامعادله را حل کنید).

۶۹۵- به ازای چه مقادیری از m عبارت $\sqrt{-mx^2 + 2x - m}$ همواره تعریف شده است؟ $[-1, -\infty)$ ج:

۶۹۶- تابع $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4}$ در بازه (a, b) پائین تر از خط $y = 2$ قرار می گیرد. حاصل $\frac{b}{a}$ کدام است؟ $-\frac{4}{2} = -2$ ج:

۶۹۷- تابع $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ به ازای چه مقادیری از x در ناحیه اول بالای خط $y = \frac{1}{6}$ قرار می گیرد؟ $(1, 3)$ ج:

۶۹۸- به ازای چه مقدار m هر نقطه از نمودار تابع $f(x) = (m-1)x^2 + 2\sqrt{2}x + m$ بالای محور x هاست؟ $(2, +\infty)$ ج:

۶۹۹- به ازای چه مقدار b نامعادله $b^3x^2 + bx + \frac{1}{b} < 0$ همواره برقرار است؟ $(-\infty, 0)$ ج:

۷۰۰- در چه بازه ای معکوس عبارت $x^2 - 1$ از ۲ برابر معکوس عبارت $x^2 + x + 1$ بیشتر نیست؟ $(-\infty, 1]$ ج:

۷۰۱- به ازای چه مقدار نامنفی x نمودار $f(x) = x^2 + x$ پایین تر از خط $y = 4x + 10$ قرار می گیرد؟ $[0, 5)$ ج:

۷۰۲- به ازای کدام حدود a تابع $y = ax^2 - 2x$ زیر سهمی $y = x^2 + 1$ قرار دارد؟ $(-\infty, 0)$ ج:

۷۰۳- به ازای چه مقدار m عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1$ همواره بالای محور x هاست؟ $(\frac{5}{4}, +\infty)$ ج:

۷۰۴- به ازای چه مقدار x تابع $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ بالای محور x ها قرار ندارد؟ $\{-2\} \cup (-\infty, 1]$ ج:

۷۰۵- به ازای چه مقدار m نمودار تابع $f(x) = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ همواره پائین محور طول هاست؟ $(-\infty, -\frac{1}{3})$ ج:

۷۰۶- به ازای چه مقدار b نمودار تابع $y = (b+2)x^2 - 2bx + 1$ همواره بالای محور x هاست؟ $(-1, 2)$ ج:

۷۰۷- اگر جواب نامعادله $(m-1)x + n \leq -3$ برابر $(-1, +\infty)$ شود، حدود n, m را بیابید. $n < -3, m < 1$ ج:

۷۰۸- مجموعه جواب نامعادله $x^3 + x > 2x^2$ شامل چند عدد طبیعی نمی شود؟ ۱ ج:

۷۰۹- کوچکترین عدد صحیح که در نامعادله $\frac{x+8}{16} + 1 > \frac{4-x}{8}$ صدق می کند. کدام است؟ -۵ ج:

۷۱۰- اگر جواب نامعادله $x + a > 3x + \frac{x-1}{3}$ بصورت $(2, +\infty)$ باشد. مقدار a کدام است؟ ۵: ج

۷۱۱- اگر جواب نامعادله $\frac{x+m}{6} > \frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{3}$ برابر $(-\frac{1}{5}, +\infty)$ باشد. مقدار m کدام است؟ ۲-: ج

۷۱۲- به ازای چه مقدار k نمودار سهمی $y = x^2 + 3x + k$ بالای خط $y = 5$ قرار دارد؟ $(\frac{29}{4}, +\infty)$: ج

۷۱۳- از تساوی $0 = 4x^2 + y^2 - 4(x + y) + 5$ مقدار $x + y$ کدام است؟

۷۱۴- طول دو ضلع قائمه $1, x + 2, x$ و وتر $2\sqrt{13}$ می باشد. مقدار x کدام است؟ ۳: ج

۷۱۵- ثابت کنید معادله $0 = (m-3)x^2 - 2mx - (m-3)$ همواره دارای ۲ ریشه حقیقی متمایز است.

۷۱۶- اگر a, b ریشه های معادله $0 = x^2 - 3x + 1$ باشند. حاصل $|\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}|$ کدام است؟

۷۱۷- اگر محل برخورد خط تقارن سهمی $y = ax^2 - bx$ با خود سهمی نقطه ی $(-\frac{2}{1})$ باشد. مقدار $a + b$ کدام است؟

۷۱۸- اگر خط $y = 3a - \frac{1}{4}$ محور تقارن سهمی $y = -x^2 + 5x + 1$ باشد، نقطه min تابع $y = ax^2 - 3x + 1$ کدام است؟

۷۱۹- اگر رأس سهمی $y = kx^2 + 2kx + 2$ روی نیمساز ربع دوم و چهارم قرار داشته باشد. مقدار k را بدست آورید. ۱: ج

۷۲۰- به ازای چه مقدار m دو سهمی به معادلات $y_1 = -x^2 + x + m$, $y_2 = x^2 - 3x + 1$ همدیگر را در یک نقطه قطع می کنند؟ (راهنمایی: برای اینکه دو سهمی همدیگر را در یک نقطه قطع کنند می بایست معادله ای که از $y_1 = y_2$ بدست می آید، دارای ریشه ی مضاعف باشد). ۱ - : ج

۷۲۱- به ازای کدام مقدار a سهمی به معادله ی $y = x^2 + 5x + 4$ بر نیمساز ربع اول مماس است؟

غ ق ق ۱ $a =$, ق ق ۹ $a =$: ج

۷۲۲- اگر مجموعه نامعادله $\frac{1}{x^2+1} \geq \frac{1}{2x^2+x+1}$ برابر بازه $[a, b]$ باشد. حاصل $a \times b$ کدام است؟ ۰: ج

۷۲۳- دستگاه نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} > \frac{1}{3} \\ \frac{1 - 3x^2}{x + 1} \leq 1 - x \end{cases} \quad \text{ج: } \left[\frac{1}{3}, +\infty\right) - \{1\}$$

۷۲۴- دامنه هر از عبارات رادیکال زیر را بدست آورید.

$$A = \sqrt{\frac{5x^2(x-3)}{x^2-x-2}}$$

$$B = \sqrt[4]{\frac{-x^2(x+3)}{x^2-x+1}}$$

$$C = \sqrt{\frac{3+|x-1|}{-2x^2(x-2)}} \quad \text{ج: } (-\infty, 2)$$

$$D = \sqrt[4]{\frac{2x-1}{1-x^2}} \quad \text{ج: } \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

۷۲۵- معادله زیر را حل کنید.

نکته: (جمع چند مقدار نامنتی، زمانی صفر است که یکی صفر باشد و ریشه مشترک میثاق ریشه معادله است.)

$$\sqrt{x^2 - 4} + |x^2 - 5x + 6| + \sqrt{2 - x} = 0$$

۷۲۶- به ازای کدام نمودار سهمی $y = (m - 2)x^2 - 3x + m + 2$ بالای محور x ها و مماس بر آن است؟ ج: $\frac{5}{4}$

۷۲۷- نمودار $y = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4}$ در بازه (a, b) پائین تر از خط $y = 2$ قرار می گیرد. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟ ج: ۶

۷۲۸- به ازای چه مقدارهایی از m عبارت $\frac{-x^2 + mx - 1}{x^4 + x^2 + 7}$ همواره منفی است؟

۷۲۹- نامعادله زیر به ازای چه مقدار m همواره برقرار است؟

ج: $(-3, 3)$ $x^2 + 2(m^2 - 1)x + m^4 - 3m^2 + 10 > 0$

۷۳۰- معادلات زیر را حل کنید.

۱) $|x^2 - 1| + |3x^2 - x - 2| = 0$

۲) $|x - 3| + |x - 1| = 6$

۳) $|x - 2| = 6 + |x - 6|$

نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۷۳۱) \left| \frac{۱-x}{۲x-۵} \right| > ۱$$

$$\text{ج: } (۲, ۴) - \left\{ \frac{۵}{۲} \right\}$$

$$۷۳۲) ۲x - ۱ \leq \frac{x+۲}{x+۱}$$

$$\text{ج: } (-\infty, -\sqrt{\frac{۳}{۲}}] \cup (-۱, \sqrt{\frac{۳}{۲}}]$$

$$۷۳۳) \left| \frac{۲-x}{۳x+۱} \right| > ۲$$

$$\text{ج: } \left(-\frac{۴}{۵}, -\frac{۱}{۳}\right) \cup \left(-\frac{۱}{۳}, ۰\right)$$

$$۷۳۴) ۰ \leq \frac{x^2 - ۶x}{x+۸} < ۱$$

$$\text{ج: } (-۱, ۰] \cup [۶, ۸)$$

۷۳۵- اگر یکی از جوابهای معادله زیر ۳ باشد، مقدار k را بیابید.

$$|x+k| - |x-۱| = ۶$$

۷۳۶- نامعادله ای قدرمطلق بنویسید که جواب آن $(-\infty, -۳] \cup [۳, \infty)$ باشد.

۷۳۷- نامعادله ای قدرمطلق بنویسید که جواب آن $(-\frac{۱}{۳}, ۰)$ باشد.

۷۳۷- نامعادله ای قدرمطلق بنویسید که جواب آن $[-۲, ۴]$ باشد.

۷۳۸- جواب نامعادله زیر بصورت $|x - a| < b$ است. مقدار a و b را بیابید.

$$x^2 - 15x + 36 < 0$$

۷۳۹- اگر راس سهمی زیر بر روی نمودار $y = \frac{m}{x}$ باشد. مقادیر m را بیابید.

$$y = x^2 - 2mx + 2$$

T. Azarshin

فصل پنجم:

تابع

T. Azarshin

زوج مرتب: دو تایی (a, b) را یک زوج مرتب می نامند. a را مؤلفه اول و b را مؤلفه دوم می گویند و داریم:

$$(a, b) = (m, n) \Rightarrow \begin{cases} a = m \\ b = n \end{cases} \quad (a, b) \neq (b, a)$$

۷۴۰- اگر $(1, x - 2y) = (2x + y, 3)$ باشند، مقدار x, y کدامند؟ $-1, 1$ ج:

۷۴۱- اگر $(1, x^2 - y^2) = (x + y, 4)$ باشند. مقدار $\frac{x}{y}$ کدام است؟

۷۴۲- اگر $(a^2 + 3b, 3) = (0, 2a + b)$ باشند. مقدار $a + b$ کدام است؟

۷۴۳- اگر دو زوج مرتب $(13, ab)$, $(a^2 + b^2, -6)$ در دستگاه مختصات روی یک نقطه واقع باشند، مقدار $2|a-b|$ کدام

است. 32 ج:

تابع:

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده میشود.

تابع مجموعه ای از زوج های مرتب می باشد.

نکته : تعی تابع ست.

۷۴۴- اگر رابطه ی $\{(m - 2, 5), (1, 2), (1, m^2 - 7)\}$ تابع باشد. مقدار m کدام است؟ -3 ج:

۷۴۵- اگر رابطه ی $\{(5, m^3 + m), (m, 7), (5, 2), (1, n - 1)\}$ تابع باشد. مقدار a, b کدامند؟ ۸, ۱: ج

۷۴۶- اگر رابطه ی $f = \{(-1, 2a), (a + 1, 4), (-1, 0), (a - 2, -1)\}$ تابع باشد. مقدار $f(-2) + f(1)$ کدام است؟ ۳: ج

۷۴۷- اگر رابطه ی $\{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m + 2), (m, 4)\}$ تابع باشد. m کدام است؟ ۱-: ج

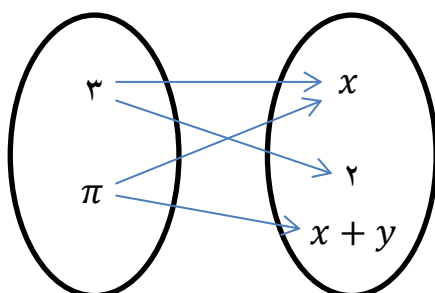
۷۴۸- آیا رابطه $f = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z} \text{ و } |x| + |y| = 1\}$ تابع است؟ بله: ج

۷۴۹- آیا رابطه $f = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z} \text{ و } x^2 + y^2 = 4\}$ تابع است؟ خیر: ج

۷۵۰- تابع $f = \{(-1, 2), (7, a^2 - 4a), (a, 6), (2, 5), (7, 5)\}$ چند نقطه بالای نیمساز ربع اول دارد؟ ۲: ج

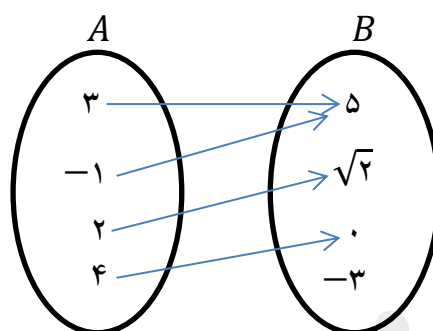
۷۵۱- اگر رابطه $\{(2, 6), (1, -1), (2, b + \sqrt{b})\}$ تابع باشد. مقدار b کدام است؟ ۴: ج

۷۵۲- اگر نمودار ون روبرو مربوط به یک تابع باشد. مقدار x, y کدامند؟ ۰, ۲: ج



دامنه و برد تابع: اگر f از A به B یک تابع باشد، تمامی اعضای A دامنه تابع هستند و اما فقط عضوهای از B که به آنها پیکانی وارد شده است را برد تابع می‌گویند. به مجموع B هم دامنه می‌گویند.

در تابع



$$\text{دامنه} = \{3, -1, 2, 4\}$$

$$\text{برد} = \{5, \sqrt{2}, 0\}$$

$$\text{هم دامنه} = \{5, \sqrt{2}, 0, -3\}$$

در واقع $R_f \subseteq B, D_f = A$ است.

۷۵۳- اگر برد تابع $f = \{(2n, 2m - 5), (1, mn)\}$ برابر $\{5\}$ باشد. دامنه تابع f کدام است؟ ج: $\{1, 2\}$

۷۵۴- مقدار طبیعی a, b را چنان بدست آورید که دامنه ی تابع زوج مرتبی $f = \{(a^2 + b^2, -1), (0, 3), (a - 5, 1)\}$ برابر

$\{0, 13, -3\}$ باشد. ج: $2, 3$

نکته: اگر برد رابطه ای، دقیقاً یک عضو داشته باشد، آن رابطه قطعاً تابع است چون هیچ مؤلفه اولی نمی تواند به دو یا چند مقدار برود.

۷۵۵- کدام رابطه زیر، قطعاً تابع است؟

(الف) رابطه ای با دامنه $\{a, b\}$ و برد $\{a, b, c\}$

(ب) رابطه ای با دامنه $\{a, b, c\}$ و برد $\{m, n\}$

(پ) رابطه ای با برد $\{a\}$

(ت) رابطه ای با دامنه $\{a\}$

۷۵۶- کدام گزینه در مورد تابع f که از مجموعه A به مجموعه B تعریف شده است، درست است؟

الف) تعداد اعضای برد و هم دامنه همواره برابرند.

ب) اگر هم دامنه نامتناهی باشد، برد نیز نامتناهی است.

پ) دامنه تابع f مجموعه A است.

ت) تعداد اعضای برد همواره بزرگتر یا مساوی تعداد اعضای A است.

تعبیر تابع به عنوان یک ماشین؛ هر تابع می تواند یک ماشین باشد که دارای یک ورودی و یک خروجی است.

ورودی آن اعضای دامنه و ضابطه تابع همان عملکرد ماشین است که روی ورودی اعمال می شود و از خروجی آن مقدار تابع (برد تابع) به ازای هر مقدار دامنه خارج می شود.

نمایش جبری یک تابع بصورت $y = f(x)$ است که x ورودی و $f(x)$ مقدار تابع به ازای آن ورودی است.

۷۵۷- اگر $f(x) = 2x^2 - 3x$ باشد. حاصل $f(2) + f(0)$ کدام است؟ ج: ۲

۷۵۸- اگر $f(x) = 2x^2 - 3x$ باشد و $f(a) = -1$ باشد. a کدام است؟ ج: ۱

۷۵۹- اگر $f(x) = x^2 + 2$ باشد، مقدار $f(\sqrt{2}) - f(-2)$ کدام است؟ ج: ۲

۷۶۰- مقدار m را چنان بدست آورید که در تابع $f(x) = 3x^2 - 2x + m$ مقدار $f(1)$ برابر ۵ باشد. ج: ۴

۷۶۱- مقدار t را چنان بدست آورید که در تابع $f(x) = tx^2 - x + 2t - 3$ مقدار $f(-1)$ برابر ۴ باشد. ج: ۲

پگونی تشفیف تابع بودن یک ضابطه:

در تعریف تابع به صورت ضابطه گفتیم که رابطه ی $y = f(x)$ وقتی ضابطه یک تابع است که به ازای هر عددی که به x بدهیم حداکثر یک جواب برای y یافت شود. یعنی وقتی برای دو ورودی مساوی $x_1 = x_2$ باید بتوان نشان داد $y_1 = y_2$ وگرنه آن ضابطه تابع نیست.

۷۶۲- نشان دهید $f(x) = -3x + 2$ تابع است.

۷۶۳- نشان دهید $f(x) = x^2 - 2x - 5$ تابع است.

نکته: برای اینکه ثابت کنیم رابطه ای تابع نیست کافی است مثالی بیاوریم که به ازای آن برای y دو مقدار متفاوت یافت شود.

نکته: معمولاً وقتی در ضابطه تابع، y توان زوج داشته باشد و یا دافل قدر مطلق باشد، آن ضابطه تابع نیست. (به استثنائات باید توجه کرد.)

نکته: هر رابطه که در آن فقط یک y با توان یک وجود دارد، یک تابع است.

۷۶۴- کدامیک از روابط زیر ضابطه یک تابع اند؟ چرا؟

الف) $x^2 + 4y^2 = 1$ ×

ب) $x^2 + 4y^2 = 1$ ($y \leq 0$) ✓

پ) $|y| + 1 = 2x^2$ ×

ت) $|y| + 1 = 2x^2$ ($y \geq 0$) ✓

ج) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$ ✓

چ) $9y^2 + 16x^2 - 18y - 32x + 25 = 0$ ✓

ح) $\sqrt{x-1} + |y^2 - 1| = 0$ ×

د) $2^{2x+y+5} = 1$ ✓

ذ) $(-1)^x = (-1)^y$ ×

ر) $1^{3y-2} = 1$ ×

ز) $(-1)^{2y+3} = 1$ ×

س) $|x+2| + |y| = 1$ ×

ش) $x^2y + xy = 5$ ✓

ص) $4x^2 + y^2 - 4x + 4y = 7$ ×

ع) $x^2 - 4x = -4$ ×

غ) $4y^2 - 4y + 1 = 0$ ✓

ف) $y^2 + 2y - xy = x$ ×

ق) $xy = 0$ ×

ک) $y = \sqrt{x} + \sqrt{-x-1}$ ✓ (راهنمایی: تهی تابع است)

گ) $xy = 1$ ✓

ج) $x^2y + y^3 = 0$ ✓

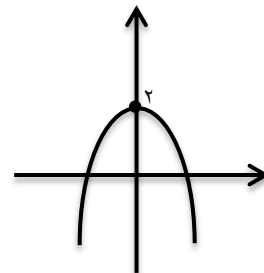
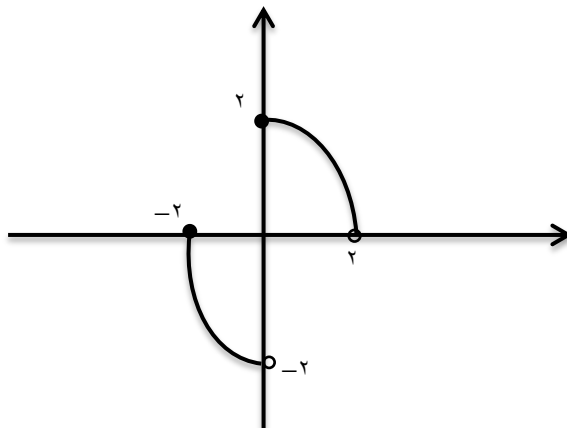
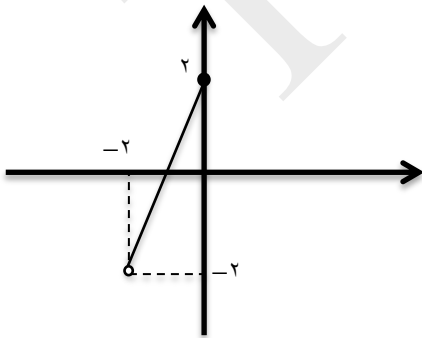
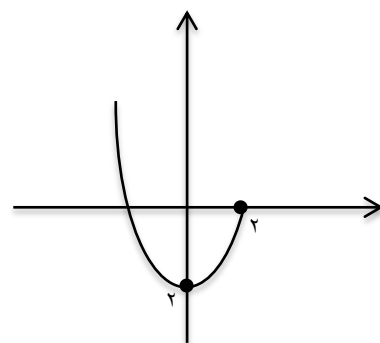
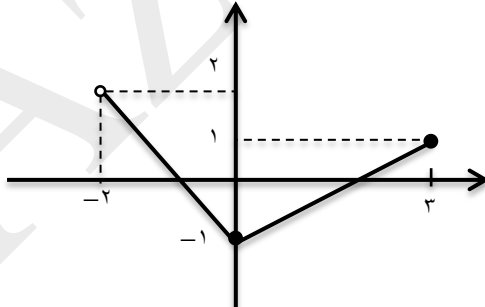
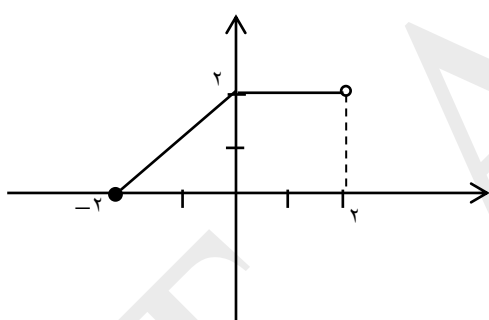
م) $4x^2 + y^2 = 4xy$ ✓

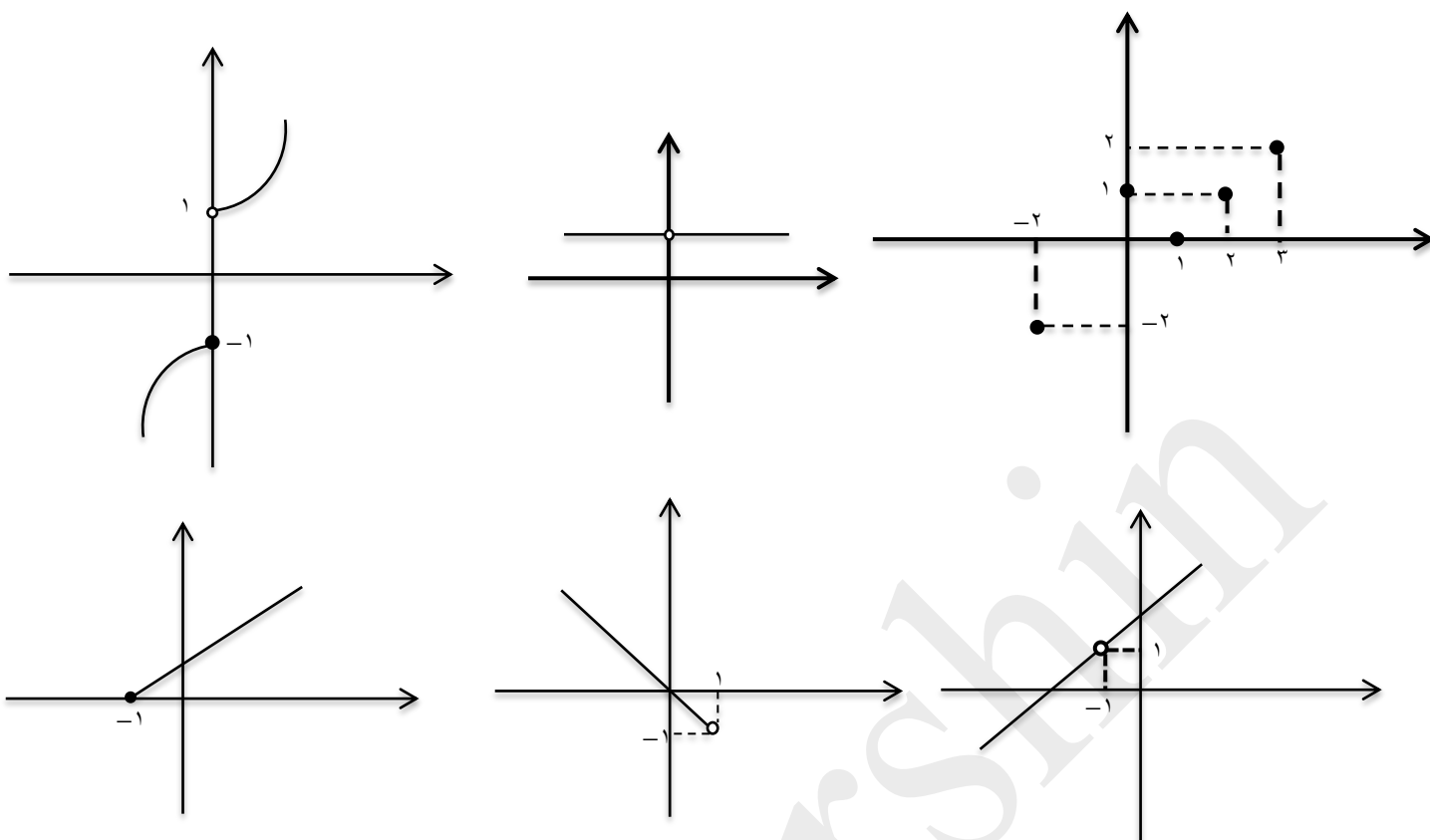
ن) $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$ ✗

پگونگی یافتن دامنه و برد تابع از روی نمودار:

دامنه تابع برابر است با تصویر همه نقاط نمودار روی محور طول ها و برد تابع برابر است با تصویر همه نقاط نمودار بر روی محور عرضها.

۷۶۶- تمامی نمودارهای زیر تابع اند. چون هر خطی موازی محور عرضها رسم شود نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع میکند. دامنه و برد توابع زیر را بدست آورید.





نکته:

هر ضابطه به شکل $y = f(x) = ax + b$ که $a, b \in \mathbb{R}$ که نشانگر یک خط است، یک تابع خطی است.

نکته: هر ضابطه به شکل $f(x) = x$ نوعی از تابع خطی است که تابع همانی نامیده می شود که نمودار آن همان نیمساز ربع اول و سوم است.

نکته: هر ضابطه به شکل $f(x) = b$ که $b \in \mathbb{R}$ باشد نوعی تابع خطی است که تابع ثابت نامیده می شود.

نکته: برد تابع ثابت چون به ازای هر x مقدار تابع همواره b است، برابر مجموعه تک عضوی $\{b\}$ است و شکل آن یک خط موازی محور x هاست.

نکته: در نمایش جدولی تابع، زمانی می تواند یک تابع خطی باشد که شیبی که از دو بروی نقاط بدست می آوریم یکسان باشد.

۷۶۷- آیا جداول زیر، ضابطه تابع خطی است؟ دامنه و برد آن تابع خطی را بنویسید.

x	۱	۳	-۲
y	-۱	-۷	۸

x	۱	۳	-۲
y	۱	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$

x	۲	۳	-۲
y	۲	۳	-۲

x	۱	۲	۳	۴
y	۱	۴	۹	۱۶

x	۱	۲	-۳
y	-۵	-۵	-۵

۷۶۸- به ازای کدام مقدار m سه نقطه $(1, 1)$, $(-2, -5)$, $(m, -1)$ از یک تابعی خطی اند؟ $\text{ج} = ۰$

نکته: برای رسم نمودار یک تابع قطعی، با توجه به مقادیری که x از دامنه می تواند اختیار کند از مراحل رسم فط استفاده می کنیم.

۷۶۹- در تابع $y = -2x$ اگر دامنه بصورت های زیر باشد، ابتدا بود و سپس نمودار را رسم کنید.

الف) $D = N$

ب) $D = \{-2, 0, 2\}$

پ) $D = (-1, 2]$

ت) $D = [-2, 1]$

ث) $D = \mathbb{R}^+$

ج) $D =$ اعداد حقیقی نا منفی

چ) $D = \mathbb{R}^-$

ح) $D =$ اعداد حقیقی نامثبت

خ) $D = \mathbb{R}$

۷۷۰- تابع $f(x) = 2$ را در دامنه های زیر رسم کنید و سپس برد را مشخص نمایید.

الف) $\mathbb{R}$

ب) $\mathbb{R}^+$

پ) $(-2, 3]$

ت) W

۷۷۱- آیا تابع f بصورت $f = \{(1, 1), (-2, 4), (2, 0), (4, -2)\}$ یک تابع خطی است؟ نمودار آن را رسم کنید و سپس مقدار $f(2) - f(-2)$ ، $f(1) \times f(4)$ را بدست آورید.

۷۷۲- تابعی خطی رسم کنید که دامنه آن $(2, 5)$ و برد آن $(-1, 4)$ باشد.

۷۷۳- تابعی خطی رسم کنید که دامنه آن $(-3, 4)$ و برد آن $\{-2\}$ باشد.

۷۷۴- تابعی خطی رسم کنید که دامنه آن $(1, +\infty)$ و برد آن $(-\infty, 3]$ باشد.

۷۷۵- دو تابع رسم کنید که دامنه آن $(-2, 3)$ و برد آن $[-1, 3]$ باشد.

۷۷۶- تابعی مثال بزنید که دامنه آن فقط ۳ عضو داشته باشد.

۷۷۷- تابعی مثال بزنید که برد آن فقط یک عضو داشته باشد.

۷۷۸- تابعی مثال بزنید که برد آن فقط یک عضو داشته باشد. دامنه آن نامتناهی باشد.

۷۷۹- تابعی مثال بزنید که دامنه و برد آن نامتناهی باشد.

۷۸۰- تابعی مثال بزنید که دامنه آن ۴ عضو و برد آن ۲ عضو داشته باشد.

۷۸۱- آیا میتوان تابعی یافت که تعداد اعضای دامنه آن بیشتر از برد باشد؟

۷۸۲- آیا میتوان تابعی یافت که دامنه آن ۴ عضوی و برد آن ۵ عضوی باشد؟

نکته: در تابع خطی $y = ax + b$ در صورتی که دامنه را بصورت یک بازه داده باشند و برای بردست آوردن برد می توان x را داخل بازه دامنه قرار داد و از روی آن ضابطه $ax + b$ را سافت که همان معروده y یعنی برد بردست می آید.

نکته: در تابع خطی $y = ax + b$ در صورتی که برد را بصورت یک بازه داده باشند برای بردست آوردن دامنه می توان y را داخل بازه برد قرار داد و از روی آن معروده y را یافت که همان دامنه است.

۷۸۳- در تابع خطی $y = -2x + 3$ اگر دامنه $(-1, 5)$ باشد. برد کدام است؟ ج: $(-7, 5)$

۷۸۴- در تابع خطی $y = 2x - 1$ اگر برد $[-1, 3]$ باشد. دامنه کدام است؟ ج: $[-1, 2]$

۷۸۵- در تابع خطی $y = -2x + 3$ اگر دامنه $[-1, +\infty)$ باشد. برد کدام است؟ ج: $(-\infty, 5]$

۷۸۶- در تابع خطی $y = -2x + 3$ اگر برد $(-2, +\infty)$ باشد. دامنه کدام است؟ ج: $(-\infty, 7)$

۷۸۷- در تابع خطی $y = -2x + 3$ اگر دامنه اعداد صحیح در بازه $(-2, 5)$ باشد. برد کدام است؟

ج: $\{5, 3, 1, -1, -3, -5\}$

۷۸۸- در تابع خطی $y = -2x + 3$ اگر برد تابع اعداد طبیعی در بازه $(-2, 5)$ باشند، دامنه کدام است؟

ج: $\left\{1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right\}$

۷۸۹- هزینه اجاره دوچرخه در هنگام تحویل در پیست دوچرخه سواری هزار تومان و به ازای هر ساعت دوچرخه سواری ۵ هزار تومان باید پرداخت شود. ضابطه تابعی بر حسب x بنویسید که x نشان دهنده تعداد ساعات دوچرخه سواری و $f(x)$ نمایش هزینه بر حسب تومان باشد.

ج: $f(x) = 5x + 1$

۷۹۰- ماشینی به ازای هر ۱۰۰ کیلومتر ۸ لیتر بنزین مصرف می کند. ضابطه تابعی را بنویسید که x نشان دهنده مصرف بنزین و $f(x)$ نمایش مسافت طی شده توسط ماشین باشد. $f(x) = 12/5 x$ ج:

۷۹۱- یک کمپ کویری برای اجاره اتاق هایش دو نوع پرداخت بهای کرایه به مشتریان پیشنهاد می دهد.

پیشنهاد اول: هزینه ثابت ۳۰ هزار تومان و ۱۰ هزار تومان به ازای هر روز اقامت در کمپ.

پیشنهاد دوم: ۱۵ هزار تومان به ازای هر روز اقامت در کمپ.

الف) ضابطه تابع را در هر حالت بنویسید بطوریکه که x تعداد روزها و y بهای کرایه بر حسب هزار تومان باشد.

ب) اگر شخصی بخواهد ۳ روز در هتل بماند بهتر است کدام پیشنهاد را بپذیرد؟

پ) اگر شخصی بخواهد ۱۲ روز در هتل بماند بهتر است کدام پیشنهاد را بپذیرد؟

ت) به ازای چند روز اقامت در هتل هزینه پرداخت با هر دو پیشنهاد یکسان است؟

ج: $f_1(x) = 10x + 30$, $f_2(x) = 15x$

۷۹۲- در یک تولیدی کیف ماهیانه مبلغ یک میلیون تومان هزینه ثابت مغازه است. هزینه تمام شده ی هر کیف ۴ هزار تومان است. اگر قیمت فروش هر کیف ۱۲ هزار تومان باشد، تابعی بنویسید که سود این تولیدی را به ازای هر کیف بیان کنید؟

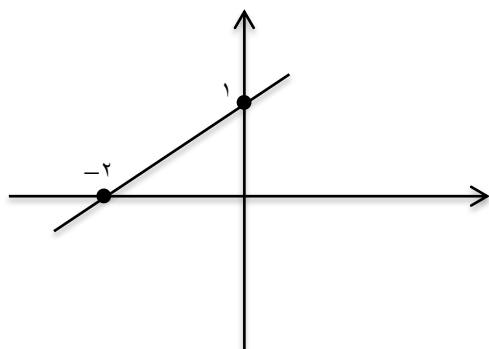
ج: $f(x) = 8000x - 1000000$

تعیین کنید او ماهیانه چند کیف بفروشد تا به سود برسد؟

بیش از ۱۲۵ کیف ج:

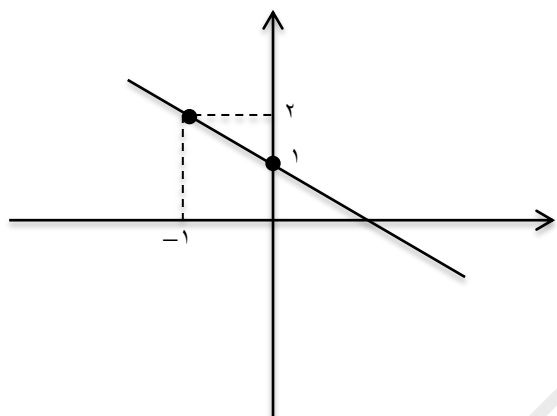
۷۹۳- آیا رابطه بین طول قد انسان با گذشت عمر خطی است؟ چرا؟

نکته: برای یافتن ضابطه یک تابع فنی کافیست در معادله $y = ax + b$ مفتحات دو نقطه را جایگزین و از طریق حل دستگاه a , b بدست می آیند.



۷۹۴- ضابطه تابعی خطی را چنان بدست آورید که:

الف) نمودار آن بصورت زیر باشد.



ب) نمودار آن بصورت زیر باشد.

پ) مقدار $f(1) = 2$, $f(2) = -1$

ت) مقدار $f(2) = 3$ باشد و نمودار تابع محور x ها را در نقطه ای بطول -1 قطع کند.

ث) مقدار $f(-1) = 5$ و نمودار تابع از نقطه $(1, 1)$ بگذرد.

ج) مقدار $f(1) + f(2) = -4$ و نمودار تابع محور عرض ها را در نقطه 5 قطع کند.

۷۹۵- در تابع خطی $f(x) = 2mx + 1$ مقدار m را چنان بیابید که $f(-1) = 5$ باشد.

۷۹۶- در تابعی خطی $f(x) = 2mx + 1$ مقدار m را چنان بدست آورید که $f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(1) = 3$ باشد.

۷۹۷- در تابع $f(x) = 2mx + 1$ مقدار m را چنان بیابید که $f(f(1)) = 6$ باشد.

۷۹۸- در تابع خطی $f(x) = 2mx + 1$ مقدار m را چنان بدست آورید که سه عدد $f(-2), f(m), f(0)$ تشکیل تصاعد حسابی دهند.

ج: $m = -1$

۷۹۹- در تابع خطی $y = (a+1)x^2 + bx + c$ مقدار a, b, c را چنان بدست آورید که مثلثی که نمودار تابع با محورهای مختصات می سازد مساحتش ۱ باشد و $f(2) = 2$ باشد و سپس ضابطه تابع خطی را بنویسید.

ج: $f(x) = 2x - 2$ یا $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

۸۰۰- در تابع خطی $f(x) = (m+n-1)x^2 - (m+n)x - 2m - 2n$ مقدار $f(1)$ کدام است؟

ج: -۳

۸۰۱- کدام تابع خطی است؟

$$f(x) = (x+2)^2 - (x-1)^2 \quad \checkmark$$

$$g(x) = (x+1)^3 - x(x^2 + 3x) \quad \checkmark$$

ج: $f(x) = 2x + \frac{20}{x}$

۸۰۲- مساحت مستطیلی ۱۰ است. ضابطه تابع محیط بر حسب طول (x) کدام است؟

۸۰۳- محیط مستطیلی ۱۴ است. ضابطه تابع مساحت بر حسب طول (x) کدام است؟

ج: $f(x) = 7x - x^2$

۸۰۴- ضابطه تابعی مساحت یک مربع به ضلع x را بر حسب طول ضلع بنویسد.

ج: $f(x) = x^2$

۸۰۵- ضابطه تابع محیط مستطیلی را بر حسب طول آن (x) طوری بنویسید که عرض آن نصف طول آن است؟

ج: $f(x) = 3x$

۸۰۶- ضابطه تابع محیط مستطیلی را بر حسب طول آن طوری بنویسید که عرضش از ۲ برابر طول ۴ واحد کمتر باشد.

ج: $f(x) = 6x - 8$

۸۰۷- در تابع خطی $f(x) = mx + n$ مقدار m, n را طوری بدست آورید که $f(2) = 1, f(x+1) = f(x) + 2$ باشند. ج: $2, -3$

۸۰۸- در تابع خطی f اگر $f(-2) = 8, f(x) = f(x+1) - 1$ باشد. ضابطه تابع خطی را بیابید. ج: $f(x) = x + 10$

۸۰۹- ضابطه تابع خطی f را چنان بدست آورید که $f(x) + 2f(-x) + 1 = 3x$ باشد. ج: $f(x) = -3x - \frac{1}{3}$

۸۱۰- ضابطه تابع خطی f را چنان بدست آورید که $f(1-2x) = 4x - 1$ باشد. ج: $f(x) = -2x + 1$

۸۱۱- ضابطه تابعی خطی f را چنان بدست آورید که $f(2x-1) = 5 + 4x$ باشد. ج: $f(x) = 2x + 7$

۸۱۲- اگر در تابع خط f داشته باشیم $f(-2x) + f(2) = 2x + 1$ مقدار $f(-2)$ کدام است؟ ج: $\frac{7}{2}$

۸۱۳- اگر $f(x) = x + 1$ و $f(4) - 3f(x-2) = x + 1$ باشند. ضابطه تابع خطی $f(x)$ کدام است؟
ج: $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{13}{6}$

نکته: در تابع همانی $f(x) = x$ دامنه و برد با هم برابرند اما هر تابعی که دامنه و برد آن برابر باشند هتماً همانی نیست.

نکته: در تابع همانی $f(x) = x$ هر عضو دقیقاً به همان عضو برده میشود.

۸۱۴- اگر تابع $f = \{(3, 3), (5, a-b), (16, 2a+b)\}$ تابعی همانی باشد. مقدار a, b کدامند؟
ج: ۷, ۲

۸۱۵- اگر تابع $f(x) = ax - b + 3x + 1$ همانی باشد. مقدار a, b کدامند؟
ج: ۲, ۱

۸۱۶- مقدار a, b, c را چنان بدست آورید که $f(x) = (a+b+c)x^2 + (2b+c)x + c - 1$ همانی باشد.
ج: ۱, ۰, ۱

۸۱۷- اگر تمامی زوج مرتب های تابع $f = \{(5, b^2 + 4), (b, a-1), (2, 2b)\}$ روی نیمساز ربع اول و سوم قرار گیرند.
مقدار a, b کدامند؟
ج: ۲, ۱

۸۱۸- اگر $f = \{(a^2 - 1, 3), (a - 2b, 4)\}$ تابعی همانی باشد. مقدار a, b کدامند؟

۸۱۹- اگر تمامی زوج مرتب های تابع $f = \{(-1, m+4), (-1, 3), (4, n^2 - 2n)\}$ روی خطی موازی محور x ها باشند. ما کزیم مقدار $n + m$ کدام است؟
ج: ۱ +

$$3 = 2$$

۸۲۰- اگر تمامی زوج مرتب های تابع $g = \{(3, 5), (1, mn), (2n, 2m - 5)\}$ روی خطی عمود بر محور عرض ها باشد. دامنه ی تابع g کدام است؟
ج: $\{3, 1, 2\}$

۸۲۱- کدام تابع همانی و کدام ثابت است؟ چرا؟

الف) تابعی که به هر عدد اول، مقسوم علیه های طبیعی آنرا نسبت دهد.

ب) تابعی که به هر عدد اول، عامل طبیعی غیر از یک آنرا نسبت بدهد.

پ) تابعی که به هر عدد حقیقی تعداد ریشه های سوم آنرا نسبت دهد.

ت) تابعی که به هر عدد حقیقی مثبت، تعداد ریشه های دوم آنرا نسبت دهد.

ث) تابعی که به هر عدد نامنفی، تعداد ریشه های دوم آنرا نسبت دهد.

ج) تابعی که به هر عدد حقیقی فاصله اش از مبدأ را نظیر کند.

چ) تابعی با برد $\{5\}$ که دامنه آن تک عضوی باشد.

تابع چند ضابطه ای:

* هر تابعی که در قسمت های مختلفی از دامنه، ضابطه های متفاوتی داشته باشد، یک تابع چند ضابطه ای است.

* اشتراک دامنه هادر تابع چند ضابطه ای تهی است. (در صورت اشتراک، مقدار تابع در آن نقاط یکسان است.)

* دامنه تابع چند ضابطه ی اجتماع دامنه ضابطه ها و برد آن نیز اجتماع برد ضابطه هاست.

* برای یافتن مقدار $f(a)$ در تابع چند ضابطه ای ابتدا باید مشخص کنیم a در دامنه کدام ضابطه قرار دارد.

* برای رسم نمودار تابع چند ضابطه ای تمام ضابطه ها را در دامنه مربوط به خودشان رسم می کنیم.

۸۲۲- اگر رابطه ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{3x^2 + 1} & x \geq 1 \\ \frac{x+a}{x+2\sqrt{x}} & x \leq 1 \end{cases}$ تابع باشد. a کدام است؟ ۵: ج

۸۲۳- در تابع دو ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & x < 1 \\ x^2 + 3 & x \geq 1 \end{cases}$ مقادیر $f(-1), f(0), f(\sqrt{2}), f(f(-2))$ را بیابید.

۸۲۴- در تابع $f(x) = \begin{cases} -2x + 5 & x < 0 \\ x - 4 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x + 1 & x > 1 \end{cases}$ به ازای چه مقدار x $f(x) = 5$ است؟ ۲: ج

۸۲۵- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x + a & x \leq a \\ 6 - x & x \geq a \end{cases}$ محور x ها را در چند نقطه قطع می کند؟ ۲ نقطه: ج

۸۲۶- در تابع ثابت f بصورت $f(x) = (2a - b)x - 3$ و تابع دو ضابطه ای $g(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 2 \\ ax^2 + b & x \leq 2 \end{cases}$ مقدار $a + b$ کدام است؟ ۲: ج $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$

۸۲۷- در تابع $f(x) = \begin{cases} x + 2 & x < 0 \\ x - 2 & x \geq 0 \end{cases}$ مقادیر $f(f(1 - \cos^2 x)), f(\sin^2 x + \cos^2 x), f(f(2 - \sqrt{2})), f(-a^2 - 2)$ را بیابید.

۸۲۸- در تابع $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ -2 & x \geq 0 \end{cases}$ مقدار $f(f(1 + \sqrt{2}))$ و مقدار $f(\tan x \times \cot x)$ کدام است؟

۸۲۹- در تابع چند ضابطه ای $f(x) = \begin{cases} mx - 3 & x < 0 \\ nx^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}$ داریم $f(-1) = 3$ و تابع از نقطه ی $\left(\frac{2}{3}\right)$ می گذرد. مقدار $f(-2) \times f(3)$ کدام است؟

ج: $m = -6, n = 1 \Rightarrow 72$

۸۳۰- در تابع $f(x) = \begin{cases} -2 & x \in Q \\ 1 & x \notin Q \end{cases}$ مقدار $f(f(x))$ کدام است؟

ج: -2

۸۳۱- در تابع $f(x) = \begin{cases} -3x + 1 & x > 0 \\ 5 & x < 0 \end{cases}$ مقدار $f(-x\sqrt{x})$ کدام است؟

ج: 5

۸۳۲- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & x \leq 2 \\ 2x - ax^2 & x \geq 2 \end{cases}$ تابع باشد. مقدار $f(-1)$ کدام است؟

ج: 1

۸۳۳- نمودار توابع زیر را رسم کنید. دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

الف) $f(x) = \begin{cases} 0 & x > 1 \\ -x^2 + 1 & x \leq 1 \end{cases}$

ب) $g(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x > -1 \\ -x & x < -1 \end{cases}$

پ) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$

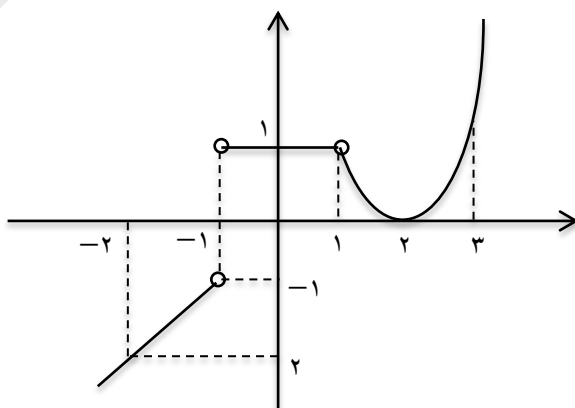
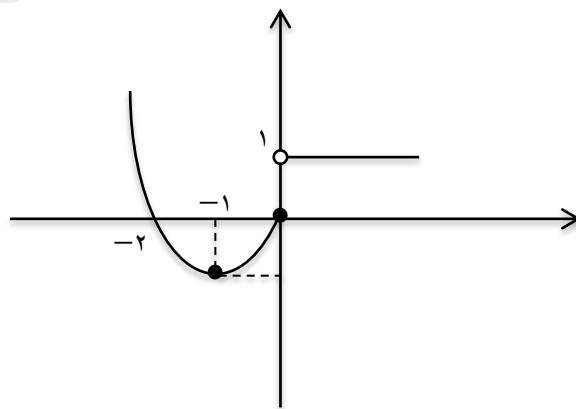
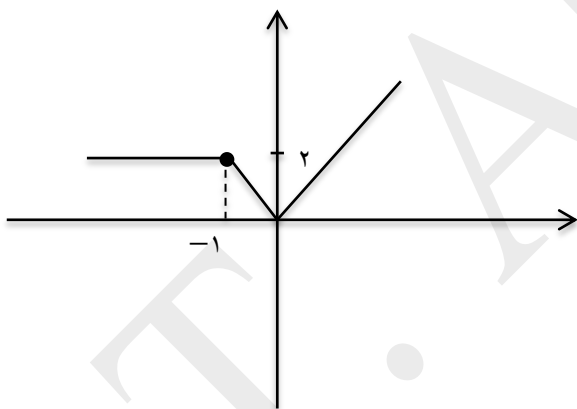
$$\text{ت) } g(x) = \begin{cases} x + 1 & x \geq 1 \\ 2 & -1 < x < 1 \\ -x + 1 & x \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{ث) } f(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ x & -2 < x \leq 0 \\ -x - 4 & x \leq -2 \end{cases}$$

$$\text{ج) } g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & x < 2 \\ x - 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{چ) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ x^2 - 1 & x < 0 \end{cases}$$

۸۳۴- ضابطه هر نمودار و دامنه و برد هر کدام را مشخص نمائید.



تابع قدر مطلق:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

برای رسم تابع قدر مطلق از روش نقطه یابی ابتدا ریشه دافل قدر مطلق (نقطه شکستگی تابع) را بدست می آوریم سپس یک نقطه بعد از نقطه شکستگی و یک نقطه قبل آن را انتخاب و با تکمیل عرض این نقاط، نمودار به سادگی رسم می شود.

۸۳۵- نمودارهای زیر را رسم کنید، دامنه و برد هر یک را مشخص نمایید.

الف) $f(x) = |x|$

ب) $f(x) = |x + ۱| - ۲$

پ) $f(x) = |۲x - ۴| + ۱$

ت) $f(x) = -|x - ۳| + ۲$

ث) $f(x) = -\frac{۱}{۲}|۲x + ۱| - ۱$

ج) $f(x) = -\sqrt{۴x^۲ - ۴x + ۱} + ۲$

چ) $f(x) = ۱ - \sqrt{x^۲ - ۶x + ۹}$

ح) $f(x) = \frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲} - ۱$

۸۳۶- در تابع $f = \{(-3, 5), (-2, 1)\}$ ، $g = \{(-3, a), (b, c + 2)\}$ دامنه ها یکسان است، اگر g نمایش یک تابع قدر مطلق باشد، مقدار a, b, c کدامند؟
ج: $3, -2, 0$

۸۳۷- تابع $f(x) = |x + 1| - |x - 1| + |2x - 3|$ به ازای $0 < x < 1$ برابر با کدام تابع خطی می باشد؟
ج: $f(x) = 3$

۸۳۸- تابع $f(x) = x^2$ ، $f(x) = |x|$ در چند نقطه همدیگر را قطع می کنند؟
ج: ۳

۸۳۹- فرم چند ضابطه ای توابع زیر را بنویسید و سپس نمودار را رسم و بردهریک را مشخص نمایید.

الف) $f(x) = -|x| + 1$

ب) $g(x) = |x + 1| + \frac{1}{2}$

پ) $f(x) = |x - 1| + 2x$

ت) $g(x) = \frac{|x|}{x} + x$

ث) $f(x) = \frac{|x + 1|}{x + 1} + |x + 1|$

ج) $g(x) = |2x + 1| + x - 1$

چ) $f(x) = x|x| + ۱$

ح) $f(x) = x|x| + ۲x$

۸۴۰- اگر دامنه تابع $f(x) = -|x + ۳|$ برابر $[-۴, ۳]$ باشد. برد آن کدام است؟

ج: $(-۶, ۰]$

۸۴۱- مساحت ناحیه محدود بین توابع $y = |x| - ۴$, $y = -|x|$ کدام است؟

ج: ۸

توابع چند جمله ای:

* هر رابطه با ضابطه $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$ که $n \in \mathbb{N}$ باشد را یک تابع چند جمله ای از درجه n می گویند.

* هر تابع چند جمله ای درجه یک تابعی خطی است.

* هر تابع چند جمله ای درجه صفر تابعی ثابت است.

* هر تابع چند جمله ای درجه دو، یک سهمی است.

* دامنه توابع چند جمله ای با هر درجه ای $\mathbb{R}$ است و برد آن اگر درجه اش فرد باشد $\mathbb{R}$ و اگر درجه اش زوج باشد نامشخص است.

۸۴۲- تابع درجه دوم $y = x^2 - ۶x + ۹$ محورهای مختصات را در ۲ نقطه قطع می کند. فاصله این نقاط چقدر است؟

ج: $۳\sqrt{۱۰}$

۸۴۳- تابع $f(x) = mx^2 + ۵x - ۳$ بر محور طول ها مماس است. m کدام است؟

ج: $\frac{-۲۵}{۱۲}$

۸۴۴- نمودار تابع درجه دوم $f(x) = x^2 + x - ۱$ با نیمساز ربع سوم در چه نقطه ای متقاطع اند.

ج: $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

۸۴۵- در تابع $f(x) = mx^2 + 2x + n$ اگر $f(1) = 4$ ، $f(-1) = 0$ باشد. مقدار $f(-2)$ کدام است؟ ج: ۷

۸۴۶- اگر دامنه تابع $f(x) = 1 - x^2$ برابر $(-1, 1)$ باشد. برد آن کدام است؟ ج: $(0, 1]$

۸۴۷- دامنه و برد تابع $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4$ ، $g(x) = -x^2 + 2x - 1$ کدامند؟

ج: $D_f = R_f = D_g = \mathbb{R}$ ، $R_g = (-\infty, 0]$

۸۴۸- در تابع $f(x) = 2x^2 - x + 1$ ، $f(x+1)$ کدام است؟

۸۴۹- مقدار دو تابع $f(x) = x^2$ ، $f(x-1)$ در چه نقطه ای متقاطع اند؟ ج: $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

۸۵۰- در تابع $f(x-1) = x^2 + 2x - 1$ ، $f(x)$ کدام است؟

۸۵۱- اگر ضابطه $f(x) = x^2 - 3x - 4$ باشد، $f(x-1)$ کدام است؟ ج: $x^2 - 5x$

۸۵۲- در تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ مقدار $f(1 + \sqrt[3]{2})$ کدام است؟ ج: ۳

۸۵۳- در تابع $f(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x$ مقدار $f(\sqrt[3]{5})$ کدام است؟ ج: ۴

۸۵۴- در تابع $f(x+2) = x^2 + 4x$ مقدار $f(2)$ کدام است؟ ج: ۰

۸۵۵- در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \notin Q \\ 3x + 2 & x \in Q \end{cases}$ مقادیر زیر را بدست آورید.

الف) $f(f(\frac{1}{4})) + f(g(-\frac{2}{3})) =$

ب) $g(f(\frac{1}{\sqrt{2}})) =$

پ) $f(g(\sqrt{3})) =$

۸۵۶- در تابع $f(x) = x^3 + bx - c$ اگر $f(2) = -2$ ، $f(-1) = 4$ باشد. $f(3)$ کدام است؟
ج: ۱۲

نکته: برد تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ اگر $a > 0$ باشد $[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty)$ و اگر $a < 0$ باشد $(-\infty, -\frac{\Delta}{4a})$ می باشد.

نکته: برای بدست آوردن برد تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ که دامنه مفرد به $[m, n]$ باشد، باید ابتدا $f(x)$ را از طریق مربع سازی به شکل $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ درآوریم و سپس با توجه به اینکه $m \leq x \leq n$ است، از روی x ضابطه $f(x)$ را بسازیم.

۸۵۷- برد تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ کدام است؟
ج: $[2, +\infty)$

۸۵۸- برد تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ در دامنه $[-2, 2]$ کدام است؟
ج: $[2, 11]$

روش انتقال برای رسم توابع:

برای رسم نمودار تابع $f(x) \pm a$ نمودار تابع $f(x)$ را a واحد به بالا (+) و پائین (-) انتقال می دهیم.

برای رسم نمودار تابع $f(x \pm a)$ نمودار تابع $f(x)$ را a واحد به چپ (+) و راست (-) انتقال می دهیم.

برای رسم نمودار تابع $-f(x)$ در نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم.

برای رسم نمودار تابع $|f(x)|$ در نمودار تابع $f(x)$ جاهایی که بالای محور x هاست را بدون تغییر نگه داشته اما جاهایی که زیر محور x هاست را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم.

۸۵۹- توابع زیر را از روش انتقال رسم کنید.

$$f(x) = |x + 1| - 2$$

$$g(x) = -|x| + 1$$

$$f(x) = \sqrt{x^2} - 2$$

$$g(x) = ||x| - 2|$$

$$f(x) = |x - 4| - 1$$

$$g(x) = ||x - 4| - 1|$$

$$f(x) = 2 - |x - 2|$$

$$g(x) = -(x - 1)^2 + 2$$

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$g(x) = |x^2 - 2|$$

$$f(x) = |-x^2 + 1|$$

$$g(x) = x^2 - 4x$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$g(x) = -x^2 + 4x + 2$$

۸۶۰- نمودار کدامیک از توابع زیر از هر ۴ ناحیه می گذرد و نمودار کدام تابع از دو ناحیه نمی گذارد؟ (رسم با روش انتقال)

$$f_1(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$f_2(x) = -|x + 1|$$

$$f_3(x) = 2 - x^2$$

$$f_4(x) = |x + 2| - 3$$

$$f_5(x) = 2 - (x - 1)^2$$

$$f_6(x) = |1 - |x + 1||$$

$$f_7(x) = x^2 - 4x + 3$$

۸۶۱- تابع $y = |x - 3|$, $y = -x^2 + 4x - 3$ در چند نقطه متقاطع اند؟ (رسم با کمک انتقال)

۸۶۲- تابع $y = -|x|$, $y = x^2 - 2$ در چند نقطه متقاطع اند؟

تمرین برای دانش آموزان سخت کوش:

۸۶۳- اگر $(5, 2b + 6a - a^2 + b^2) = (5, -10)$ باشند، مقدار $b + a$ کدام است؟ $2 = (-1) + 3$: ج

۸۶۴- اگر $(12c + 4b - 4c^2 + b^2, 1) = (-13, 2a - a^2)$ باشند، مقدار c و a و b کدام است؟

$1, 2, -\frac{3}{2}$: ج

۸۶۵- اگر مجموعه $A = \left\{ \left(\sqrt{2}^{x-y}, 5^{x+y} \right), (32, 625) \right\}$ تک عضوی باشد، x, y کدامند؟ $3, -7$: ج

۸۶۶- اگر رابطه ی $f = \left\{ (1, 3), (a, 2), (1, a^2 - 2a), \left(-1, \frac{1}{a}\right) \right\}$ تابع باشد. معادله $x^3 - 6x^2 + a^2x = 0$ چند ریشه

دارد؟ 2 : ج

۸۶۷- اگر رابطه ی $\{(3, 2), (a, 5), (1, 3), (2, 2), (1, a - 2b), (2, a^2 - b)\}$ تابع باشد. مقدار a, b کدامند؟

ج: $-\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}$

۸۶۸- کدام تابع است؟

۱) $|y| = \sin\left(\frac{\pi|x|}{x}\right)$ ✓

۲) $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x}$ ✓

۳) $y = \begin{cases} 2x^2 - 1 & x \geq 1 \\ |x - 2| & x \leq 1 \end{cases}$ ✓

۴) $y = \sqrt{7-x} - \sqrt{x-7}$ ✓

۵) $|x^2 - 4| = -|y + 1|$ ✓

۶) $(x - 1)|y + 5| = 0$ × (راهنمایی: x را یک بگذارید)

۸۷۰- الف) چند تابع از مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ به مجموعه $B = \{m, n, p\}$ می توان نوشت؟ ۳^۴ ج:

ب) اگر $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 12k\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 + 1 - 3x = 0\}$ باشد. آیا میتوان تابعی از A به B تعریف کرد؟ از B به A چطور؟

۸۷۱- دو تابع رسم کنید که دامنه آنها $(0, +\infty)$ و برد یکی $(-\infty, 2)$ باشد و دیگری $(-2, +\infty)$ باشد.

۸۷۲- دو تابع مثال بنزید که دامنه و بردشان یکسان باشد اما هیچ دو زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

۸۷۳- چند تابع یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی میتوان نوشت؟ $(m \geq n)$ ج: n^m

۸۷۴- دامنه تابعی $7-2n$ و برد آن $n+3$ عضو دارد. چه مقادیری میتواند باشد؟

۸۷۵- خطی که از نقطه $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ می گذرد با محورهای مختصات مثلثی قائم الزاویه می سازد. تابع مساحت آن را بنویسید و آیا تابع مساحت یک تابع خطی است؟

۸۷۶- در ظرفی استوانه ای شکل با سرعت ثابت آب می ریزیم. اگر در $t = 2$ ارتفاع آب در ظرف ۵ سانتی متر و در $t = 5$ ارتفاع آب $6/5$ سانتی متر باشد. در $t = 10$ ارتفاع آب ظرف کدام است؟
ج: $f(x) = 0/5x + 4 \Rightarrow f(10) = 9$

۸۷۷- با ۱۰۰ متر زمین به شکل مستطیل رو به ساحل را محصور کرده ایم که از طرف دریا آزاد است. تابع مساحت کدام است؟

ج: $S(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 50x$

۸۷۸- در تابع خطی $5, f(x+3) - f(x) = 5, f(-2) = 0$ باشد. $f(4)$ کدام است؟
ج: $\frac{6}{5}$

۸۷۹- در تابع خطی $x = f(x) + 2f(3-x)$ باشد. $f(4)$ کدام است؟
ج: -2

۸۸۰- ضابطه تابع خطی f را چنان بدست آورید که $2f(x-1) + f(1-x) = 2x$ باشد. $f(x) = 2x + \frac{2}{3}$ ج:

۸۸۱- اگر $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{bx^2+2x+4}$ تابعی ثابت باشد. دامنه آن کدام است؟ ج: $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$

(راهنمایی: باید ضرائب جملات هم درجه در صورت و مخرج متناسب باشند.)

۸۸۲- به ازای چه مقدار a, b تابع $f(x) = \frac{bx+a^2-4}{(a-2)x+3}$ یک تابع همانی است؟ ج: ۲, ۳

۸۸۳- اگر $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 2, 5\}$ باشند. در تابع از A به B طوری معرفی کنید که f همانی و g همان نباشد.

۸۸۴- اگر $2f(x-2) - 2f(2-x) = x+1$ باشد. ضابطه تابع خطی $f(x)$ کدام است؟ ج: $f(x) = \frac{1}{5}x + 3$

۸۸۵- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+bx+c}{2-x} & x \neq 2 \\ \frac{a}{x+2} & x = 2 \end{cases}$ همانی باشد. مقدار a, b, c کدامند؟

۸۸۶- اگر f تابعی ثابت و g همانی باشد و رابطه ی $4f(4) = (f(3))^2 + g(3)$ برقرار باشد، مقدار $f(1) + g(2)$ کدام است؟

(راهنمایی: $f(x) = c$ بگیرید تا معادله ای بر حسب c یافت شود.) ج: ۵

۸۸۷- اگر $f(x) = \frac{(a-2)x^2+bx+4}{3x^2+2}$ تابعی ثابت باشد. مقدار b, a کدامند؟ ج: ۸, ۰

۸۸۸- اگر برد تابع $f = \{(2, a+1), (3, b^2+a-31), (4, c^6+a+b-65)\}$ برابر $\{3\}$ باشد. مقدار طبیعی a, b, c کدامند؟ ج: ۲, ۲, ۲

۸۸۹- اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ باشد. $f(1-x)$ کدام گزینه است؟ (راهنمایی: روش حذف گزینه)

- (۱) $x^2 + 1$ ✓ (۲) $x^2 + 3$ (۳) $x^2 + 4x + 5$ (۴) $x^2 - 4x + 5$

۸۹۰- اگر $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد. ضابطه $f(x)$ کدام است؟ (راهنمایی: روش حذف گزینه)

- (۱) $x^2 - x + 3$ (۲) $x^2 - 2x - 1$ (۳) $x^2 - 2x + 1$ (۴) $x^2 - x + 1$ ✓

۸۹۱- اگر $f(2x-3) = 4x^2 - 2x - 5$ باشد، ضابطه $f(x)$ کدام است؟ ج: $x^2 + 5x + 1$

۸۹۲- نمودار هر کدام از توابع از کدام نواحی عبور نمی کند؟

الف) $f(x) = 2 - \sqrt{x^2 - 4x + 4}$

ب) $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - 1$

پ) $f(x) = x^2 + 2x$

۸۹۳- اگر $f(2-3x) = 9x - 5$ باشد. مقدار $f(a^2)$ کدام است؟ ج: $1 - 3a^2$

۸۹۴- در رابطه ی $f(3x - 1) + f(5) = x^2 + 4$ مقدار $f(5)$ کدام است؟ ج: ۴

۸۹۵- اگر $f(x - 4) = x^2 + 5x$ باشد. مقدار $f(0) + f(-4)$ کدام است؟ ج: $36 + 0 = 36$

۸۹۶- اگر $f(2x - 1) = 4x + 5$ باشد. $f(1 - 2x)$ کدام است؟ ج: $-4x + 9$

۸۹۷- اگر $f(2x - 1) + f(7) = x^2 + 3x$ باشد. ضابطه $f(x)$ کدام است؟

۸۹۸- اگر برای هر $x \neq 0$ داشته باشیم $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3$ باشد، ضابطه $f(x)$ کدام است؟ ج: $f(x) = x^3$

۸۹۹- اگر برای هر $x \neq 0$ داشته باشیم $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = 2x - \frac{2}{x} + 1$ ، ضابطه $f(x)$ کدام است؟ ج: $f(x) = 2x + 1$

۹۰۰- اگر برای هر $x \neq 0$ داشته باشیم $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ، ضابطه $f(x)$ کدام است؟ ج: $f(x) = x^2 - 2$

۹۰۱- اگر $f\left(\frac{x^2+2}{x}\right) = x^2 + \frac{4}{x^2}$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ ج: $x^2 - 4$

۹۰۲- اگر $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$ باشد. آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (راهنمایی: از مکعب سازی استفاده کنید.)

ج: $f(x) = x^3 - 3x$

۹۰۳- فاصله محل برخورد های دو تابع $y = (x - 2)^2$, $g = 4 - |x|$ چقدر است؟ ج: $3\sqrt{2}$

۹۰۴- تابع $f(x) = x^2 - 4x$ را ابتدا یک واحد به راست و سپس ۲ واحد به بالا می بریم تا تابع g بدست آید. محل تقاطع g , f کدام نقطه است؟ ج: $(-\frac{7}{4}, \frac{7}{4})$

۹۰۵- در تابع $f: \mathbb{R} \Rightarrow B$ که $f(x) = x^2 - 6x + 5$ است. مجموعه B کدام گزینه نمی تواند باشد؟

- (۱) $\mathbb{R}^+$ ✓ (۲) $\mathbb{R}$ (۳) $[-5, +\infty)$ (۴) $[-4, +\infty)$

۹۰۶- در نمودار تابع چند ضابطه ای $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 5 & 1 < x \leq 5 \\ |x| - 1 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$ چند عدد صحیح هم در دامنه و هم در برد هستند؟ ج: ۶

۹۰۷- مساحت ناحیه محصور بین محور طول ها و نمودار $f(x) = 2 - |x|$ کدام است؟

۹۰۸- نمودار تابع $f(x) = 2x^2 + ax + b$ و تابع $f(x) = 2x + b$ در نقطه ای به طول ۲ بر روی محور x ها متقاطع اند. a کدام است؟ ج: -۲

۹۰۹- در تابع خطی $3x + 3 = f(5x - 1) + 2f(3x + 1)$ مقدار $f(4)$ کدام است؟ ج: ۲

۹۱۰- در استوانه ای که مجموع ارتفاع و شعاع قاعده آن ۱۰ باشد،

الف) ضابطه تابعی بنویسید که حجم استوانه را بر حسب ارتفاع مشخص کند.

ب) ضابطه تابعی بنویسید که مساحت جانبی استوانه را بر حسب ارتفاع مشخص کند.

۹۱۱- اگر $f(x) = x^2$ باشد. نامعادله $\frac{f(x-1)}{x^2-4x+3} \leq 0$ را حل کنید.

فصل ششم:

شمارش،

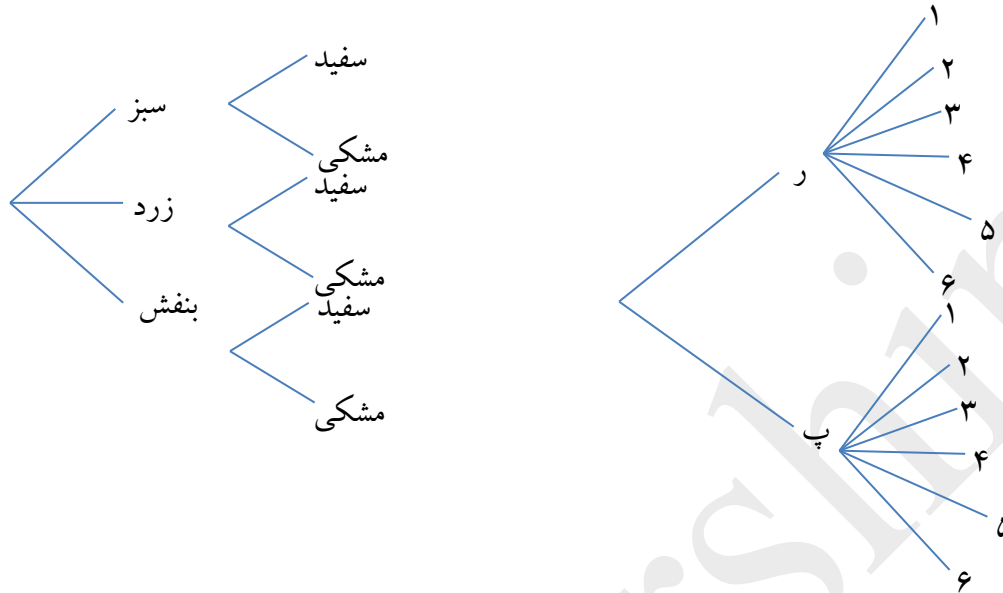
بدون شمارش.

T. Azarshin

نمودار درختی:

نمودار درختی تمامی حالات هماهنگ کردن ۳ رنگ بلوز (سبز و زرد و بنفش) با ۲ رنگ شلوار (سفید و مشکی): ۶ حالت

نمودار درختی تمامی حالات پرتاب یک سکه و یک تاس: ۱۲ حالت



۹۱۲- نمودار درختی تمامی حالات پرتاب یک تاس که اگر زوج آمد یک سکه پرتاب شود را رسم کنید. (۹ حالت)

۹۱۳- نمودار درختی جنسیت فرزندان یک خانواده سه فرزندی را رسم کنید. (۸ حالت)

اصل ضرب:

اگر عملی از k جزء مختلف و متوالی تشکیل شده باشد که جزء اول آن به n_1 طریق و جزء دوم به n_2 طریق و ... و جزء k ام به n_k طریق مختلف قابل انجام باشد، آنگاه انجام آن عمل به $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ طریق مختلف انجام می شود.

۹۱۴- برای رفتن از شهر A به شهر B سه مسیر مختلف و برای رفتن از شهر B به شهر C چهار مسیر مختلف وجود دارد. تشخیص می خواهد از شهر A از طریق شهر B به شهر C سفر کند.

(۱) به چند طریق می تواند مسیرش را انتخاب کند؟

(۲) به چه طریق می تواند از همین مسیر به شهر C برسد و سپس به شهر A برگردد؟

(۳) به چه طریق می تواند از همین مسیر به شهر C برسد و سپس به شهر A برگردد بطوریکه از مسیرهای تکراری رد نشود؟

۹۱۵- با حروف a, b, c, d, e چند کلمه سه حرفی می توان نوشت بطوریکه:

(الف) تکرار حروف مجاز باشد.

(ب) تکرار حروف مجاز نباشد.

۹۱۶- از بین ۲ نوع سوپ و ۳ نوع ساندویچ و ۴ نوع سالاد چند نهار مختلف شامل هر سه مورد می توان انتخاب کرد؟

۹۱۷- برای مسافرت از شهری به شهر دیگر ۵ نوع وسیله نقلیه وجود دارد. تعداد راه های ممکن که می توان از شهر A به شهر B با عبور از دو شهر متوالی C, D رفت بطوریکه از هر نوع وسیله نقلیه بتوان حداکثر یکبار بین شهرها استفاده کرد. کدام است؟

۹۱۸- به چند طریق می توان به یک آزمون ۲ گزینه ای (ص یا غ) شامل ۱۰ سؤال پاسخ داد بطوریکه:

(الف) پاسخ به همه سؤالات اجباری باشد.

(ب) پاسخ به همه سؤالات اجباری نباشد.

۹۱۹- به چند طریق می توان به یک آزمون ۴ گزینه ای شامل ۱۰ سؤال پاسخ داد. بطوریکه:

(الف) پاسخگویی به تمام سؤالات اجباری باشد.

(ب) پاسخگویی به تمام سؤالات اجباری نباشد.

۹۲۰- به چند طریق می توان به یک آزمون ۱۰ سؤال که ۵ سؤال آن چهار گزینه ای و ۵ سؤال بعدی دو گزینه ای باشند و پاسخ داد. بطوریکه:

(الف) پاسخگویی به همه سؤالات اجباری باشد.

(ب) پاسخگویی به همه سؤالات اجباری نباشد.

۹۲۱- اگر تعداد راه های ممکن پاسخگویی به تعدادی تست ۴ گزینه ای که پاسخگویی اجباری باشد برابر 2^{30} باشد. چند تست بودند؟ ۱۵: ج

۹۲۲- در یک روستا ۵ بلوار و در هر بلوار ۴ خیابان و در هر خیابان ۱۰ کوچه و در هر کوچه ۷ خانه وجود دارد. نامه ای به این روستا پست می شود که آدرس آن مخدوش شده است. پستیچی به چند حالت ممکن آدرس دهی باید بیاندهد؟

۹۲۳- با ارقام ۲، ۳، ۵، ۷، ۹ چند عدد می توان ساخت که:

(الف) سه رقمی باشد.

(ب) سه رقمی باشد و ارقام آن تکراری نباشند.

(پ) چهار رقمی زوج باشد.

(ت) چهار رقمی زوج باشد و ارقام آن تکراری نباشند.

۹۲۴- تعداد حالات در پرتاب یک سکه و یک تاس همزمان چقدر است؟

۹۲۵- تعداد حالات در پرتاب ۳ سکه و ۵ تاس همزمان چقدر است؟

اصل جمع: اگر یک عمل به m طریق و عمل دیگر به n طریق انجام گیرد اما انجام m و n دو عمل ممکن نباشد، آنگاه عمل اول با عمل دوم به $m + n$ طریق قابل انجام می باشند. (می توان این اصل را به اعمال بیشتر تعمیم داد).

۹۲۵- ضلع جنوبی یک استادیوم فوتبال ۲ درب و ضلع شمالی آن ۳ درب دارد. به چند طریق می توان وارد این استادیوم شد؟

۹۲۶- شخصی در یک آزمون شرکت می کند. او باید از بین ۳۲ سؤال تشریحی به یک سوال یا از بین ۵ سؤال تستی به یک سوال پاسخ دهد. او به چند طریق می تواند به یک سؤال پاسخ دهد؟

۹۲۷- از میان ۷ ایرانی و ۳ آمریکایی و ۴ روسی به چند طریق می توان ۲ نماینده انتخاب کرد به شرط آنکه نمایندگان از ملیت های مختلف باشند؟

۶۱: ج

۹۲۸- دوچرخه سواری در یک سفر کوهستانی برای رفتن از کمپ A به کمپ B می تواند ۳ راه اصلی یا ۲ راه میانبر استفاده کند. این دوچرخه سوار به چند طریق مختلف می تواند از کمپ A به B برسد؟

۹۲۹- مدیر می خواهد برای کمک به دانش آموزان نیازمند یک هدیه شروع مدرسه تهیه کند. انتخاب های او کیف ۳ نوع، چندین جلد دفتر (۲ نوع ساده و سیمی) و کفش (۴ مدل) است. اگر او بتواند یکی از اجناس را هدیه دهد، چند انتخاب دارد؟

نکته: در مسائل مربوط به شمارش لفظ «و» نشان دهنده اصل و ضرب و لفظ «یا» نشان دهنده اصل جمع می باشد.

۹۳۰- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد می توان نوشت که شرایط زیر را داشته باشند.

(۱) سه رقمی

(۲) سه رقمی بدون تکرار ارقام

(۳) سه رقمی فرد

(۴) سه رقمی فرد بدون تکرار ارقام

۹۳۱- با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد می توان نوشت که شرایط زیر را داشته باشند.

(۱) سه رقمی زوج

(۲) سه رقمی زوج بدون تکرار ارقام

۹۳۲- با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد می توان نوشت که شرایط زیر را داشته باشند.

(۱) چهار رقمی بزرگتر از ۴۰۰

(۲) چهار رقمی بزرگتر از ۴۰۰ بدون تکرار ارقام.

۹۳۳- با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد می توان نوشت که شرایط زیر را داشته باشند.

(۱) چهار رقمی که رقم دهگان آن ۵ باشد.

(۲) چهار رقمی که رقم دهگان آن ۵ نباشد.

۹۳۴- با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد می توان نوشت که شرایط زیر را داشته باشند.

(۱) چهار رقمی مضرب ۵

(۲) چهار رقمی مضرب ۵ بدون تکرار ارقام

(۳) چهار رقمی مضرب ۵ بدون تکرار و بزرگتر از ۳۰۰۰

۹۳۵- عبارت $(x + y)(a + b + c)$ در نهایت چند جمله دارد؟

۹۳۶- عبارت $(a + b)^3(x + y + z)$ در نهایت چند جمله دارد؟

۹۳۷- تعداد کل اعداد سه رقمی چندتا است اگر:

الف) تکرار ارقام مجاز باشد. ۹۰۰ ج

ب) تکرار ارقام مجاز نباشد. ۶۴۸ ج

۹۳۸- به چند طریق می توان وارد مسجدی با ۵ در شد و از دری دیگر خارج شد؟

۹۳۹- یک بنا، گچ بری های یک مسجد را در ۴ اندازه و ۳ طرح و ۲ رنگ انجام داده است. حداکثر چند نوع گچ بری در این مسجد وجود دارد؟ ۲۴:ج

۹۴۰- یک آسانسور ساختمان ۱۰ طبقه ای؛ ۴ مسافر دارد، به چند طریق می توان مسافران را پیاده کرد؟ به چند طریق می توان مسافران را پیاده کرد به شرط آنکه در هر طبقه حداکثر یک نفر پیاده شود؟

۹۴۱- چند نفر می توانند کد ملی ۱۰ رقمی داشته باشند (عدد شروع غیر صفر است)؟

۹۴۲- خانواده ای دارای ۵ فرزند شامل ۲ پسر و ۳ دختر است. در حوالی محله شان ۳ مدرسه پسرانه و ۴ مدرسه دخترانه وجود دارد که او بتواند فرزندان را ثبت نام کند.

(۱) اینکار به چند طریق امکانپذیر است؟

(۲) اینکار به چند طریق امکان پذیر است که فرزندان نخواهند با هم، هم مدرسه ای باشند؟

۹۴۳- به چند طریق می توان ۴ نفر را در ۶ هتل طوری جا داد که هیچ دو نفری در یک هتل نباشد؟ ۳۶۰:ج

۹۴۴- با حروف کلمه «Subject» چند کلمه ۴ حرفی می توان ساخت، به شرط آنکه:

الف) حروف تکراری مجاز باشد.

ب) حروف تکراری نباشد.

پ) شامل حرف صد ادا نباشد.

ت) حرف S در ابتدای کلمه باشد.

ث) حرف S در ابتدای کلمه و حرف Z در انتهای کلمه باشد.

۹۴۵- با حروف کلمه «احتمالات» چند کلمه ی سه حرفی می توان نوشت که حرف تکراری نداشته باشد؟ ۶۰:ج

۹۴۶- چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۲۵۰ وجود دارد؟ ۳۶۰:ج

۹۴۷- چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۲۵۰ وجود دارد که شامل ۶ و ۷ نباشد؟

۹۴۸- قورباغه ای روی پله اول از یک راه پله ای ایستاده است. این قورباغه می تواند در هر پرش به پله ی بعدی یا مستقیم به پله های بالاتر برود. با حرکت رو به جلو به چند طریق می تواند به پله آخر برسد؟ ۸:ج

۹۴۹- با استفاده از سه رنگ قرمز، آبی و زرد به چند طریق می توان سه تابلو کنار هم را رنگ آمیزی کرد به شرط آنکه خانه های کنار هم هم رنگ نباشند؟

۹۵۰- با حروف کلمه «هفتم» چند کلمه سه حرفی بدون تکرار حروف می توان نوشت که با حرف «ف» شروع شود؟

۹۵۱- کیسه ای حاوی ۵ مهره به رنگ های قرمز، آبی، زرد، سبز و سفید می باشد. از این کیسه سه مهره پی در پی و بدون جایگذاری برمی داریم. چند ترکیب رنگ سه تایی پدید می آید؟ ۶۰:ج

۹۵۲- یک ساختمان ۱۰ طبقه را به چند طریق می توان با ۴ رنگ، رنگ آمیزی کرد بطوریکه هیچ دو طبقه مجاوری هم رنگ نباشند؟
۳۹ × ۴:ج

۹۵۳- با استفاده از رنگ های قرمز، آبی و سبز به چند طریق می توان خانه های شکل روبرو را رنگ کرد بطوریکه خانه های مجاور هم رنگ نباشند؟
۲۴:ج



۹۵۴- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ چند عدد ۴ رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت که ۲ رقم سمت راست آن ۳ یا ۶ باشند؟

۸:ج

۹۵۵- چند کد چهاررقمی با ارقام ۰، ۱ می توان نوشت؟

۹۵۶- علی دارای ۵ جفت کفش، ۴ نوع شلوار و ۳ نوع تیشرت است. به چند طریق ممکن می تواند پوشش خود را انتخاب کند؟ با اضافه کردن یک مورد متمایز به کدامیک از موارد (کفش، شلوار، تیشرت) می تواند انتخاب های خود را به بیشترین حالت برساند؟

۹۵۷- به چند طریق می توان به ۵ سؤال ۴ گزینه ای پاسخ داد بطوریکه:

الف) جواب هیچ دو تستی یکسان نباشند؟

ب) هیچ دو تست متوالی جواب یکسان نداشته باشند.

پ) سه تست اول پاسخگویی اجباری و ۲ تست آخر اجباری نمی باشد.

۹۵۸- چند عدد سه رقمی با ارقام فرد متمایز می توان نوشت که بر ۵ بخشپذیر باشد؟

۹۵۹- چند عدد سه رقمی می توان نوشت که با رقم فرد شروع (صدگان) و با رقم زوج ختم شود؟

۹۶۰- چند عدد ۴ رقمی با ارقام ۱, ۰, ۰, ۵ می توان نوشت؟

۹۶۱- با حروف کلمه «دبیرستان» به چند طریق می توان کلمات ۳ حرفی بدون تکرار ساخت بطوریکه حرف آخر آن نقطه دار نباشد؟

۹۶۲- با حروف کلمه «خوارزمی» به چند طریق می توان کلمات ۳ حرفی بدون تکرار ساخت که حرف اول آن نقطه دار نباشد؟

۹۶۳- به چند طریق می توان ۶ کتاب متمایز را در یک قفسه چید در صورتی که یک کتاب مورد نظر، بین آنها در جای خاصی باشد؟

ج: ۱۲۰

۹۶۴- با حروف کلمه «سبزینه» بدون تکرار حروف کلمات ۴ حرفی ساخته ایم. تعداد این کلمات که شامل حرف س باشند. چند برابر تعداد کلماتی است که فاقد حرف س باشند؟
ج: ۲

۹۶۵- یک اتوبوس ۲۰ مسافر دارد، اگر اتوبوس در ۱۰ ایستگاه توقف کند و در پایان تمام مسافران پیاده شوند مسافران به چند طریق می توانند پیاده شوند؟
ج: ۱۰۲۰

۹۶۶- چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۵۷۲ می توان نوشت که ارقام آن تکراری نباشند؟
ج: ۳۱۱

۹۶۷- یک قفل رمزی ۳ رقمی پیدا شده است. اگر لازم به دانستن محتویات آن باشد و امتحان کردن هر رمز آن ۲ دقیقه طول بکشد، حداکثر چند مدت برای باز کردن قفل لازم است؟

۹۶۸- چند تابع بادامنه ی $\{1, 2, 3, 4\}$ می توان نوشت که برد آن $\{0, 6, 5\}$ باشند؟
ج: ۸۱

۹۶۹- چگونه می توان رأس های یک چهار ضلعی سه رنگ آبی، سفید و قرمز رنگ کرد بطوریکه: رأی های A, C که روبروی هم هستند هم رنگ باشند اما رأس های که منتهی به یک ضلع هستند هم رنگ نباشند.
ج: ۱۲

استفاده از متمم: گاهی برای ساده تر شدن برقی از مسائل که حکم آنها حالات مختلفی دارند. به جای بررسی تک تک شرایط حکم از روش نقیض حکم یا متمم استفاده می کنیم.

۹۷۰- چند عدد سه رقمی می توان نوشت که حداقل یکی از ارقام آن ۵ باشد؟
ج: ۲۵۲

۹۷۱- با حروف t, s, p, o چند کلمه سه حرفی می توان نوشت بطوریکه در هر کدام از کلمات حداقل یک حرف تکراری وجود داشته باشد.
ج: ۴۰

۹۷۲- چند عدد سه رقمی شامل عدد ۲ و ۳ بدون تکرار ارقام وجود دارد؟

۹۷۳- در چند کلمه سه حرفی با حروف کلمه «Nader» حداقل یک حرف صدادار وجود دارد؟
ج: ۹۸

۹۷۴- در چند عدد سه رقمی حاصلضرب ارقام بر ۳ بخشپذیر است؟

ج: ۶۸۴

۹۷۵- با ارقام زوج عدد چهار رقمی ساخته ایم. در چند حالت حداقل یکی از ارقام ۲ است؟

ج: ۳۰۸

۹۷۶- در چند عدد ۵ رقمی که می توان با اعداد N_7 نوشت، حاصلضرب ارقام عددی زوج است؟

ج: ۴۵ - ۷۵

۹۷۷- چند عدد چهار رقمی با ارقام فرد متمایز، بزرگتر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟

ج: ۹۶

۹۷۸- با ارقام ۰، ۱، ۵، ۷ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ بدون تکرار ارقام وجود دارد؟

ج: ۱۰

۹۷۹- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۳۰۰ می توان نوشت؟

ج: ۱۰۷

۹۸۰- چند عدد ۳ رقمی فرد فاقد رقم ۹ وجود دارد؟

ج: ۲۸۸

۹۸۱- تعداد اعداد ۵ رقمی که ارقام آن زوج و غیر صفر باشند، کدامند؟

ج: ۱۰۲۴

۹۸۲- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام بر ۹ بخشپذیر می توان نوشت؟

۹۸۳- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد سه رقمی که ارقام آن یک در میان زوج و فرد متمایز باشند می توان نوشت؟

۹۸۴- چند عدد ۶ رقمی با اعداد ۰، ۱ می توان نوشت؟

ج: ۳۲

۹۸۵- چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز داریم که شامل ۲، ۷ نباشد و از ۴۰۰۰ بزرگتر باشد؟

ج: ۱۰۵۰

۹۸۶- در یک مسابقه تنیس که ۵ نفر شرکت کننده دارد. قرار است هر دو نفر یکبار مسابقه دهند. تعداد کل بازیها چندتا است؟

ج: ۱۰

فالتوریل

$n!$ یعنی حاصلضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n .

$$n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \times 1$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1$$

$$0! = 1 \text{ (طبق قرارداد)}$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5 \times 4!$$

$$\frac{5!}{4!} = \frac{5 \times 4!}{4!} = 5$$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$$

$$2! + 3! \neq 5!$$

$$2 + 3! \neq 5!$$

$$\frac{15!}{5!} \neq 3!$$

$$2! \times 3! \neq 6!$$

$$2 \times 3! \neq 6!$$

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = \frac{10!}{6!}$$

$$\frac{5!}{0!} = 5!$$

۹۸۷- در معادله $(n^2 - 4n + 4)! = 1$ مقدار طبیعی n کدام است؟ ج: ۱، ۲

۹۸۸- اگر $120 \times 42 = n!$ باشد. مقدار n کدام است؟ ج: ۷

۹۸۹- اگر حاصلضرب $3^2 \times 2^7 \times 35$ برابر $n!$ باشد. مقدار n کدام است؟ ج: ۸

۹۹۰- اگر $8 \times 9 \times 10 = n!$ باشد. مقدار n کدام است؟ ج: ۶

۹۹۱- در تساوی $\frac{n!}{(n-2)!} = 42$ مقدار n است؟ ج: ۷

۹۹۲- در تساوی $1 = (n^2 - 3)!$ مقدار طبیعی n کدام است؟ ج: ۲

۹۹۳- اگر $\frac{1}{6} = \frac{(n-1)!}{(n+1)!}$ باشد. مقدار n کدام است؟ ج: ۲

۹۹۴- حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

۱) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{14}{15!} =$

ج: $1 - \frac{1}{15!}$

(راهنمایی: هر کسر را به این صورت در آورید: $\frac{3}{4!} = \frac{4-1}{4!} = \frac{4}{4!} - \frac{1}{4!} = \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}$)

۲) $((2 + 0!)!)^2 =$

ج: ۳۶

جایگشت: اگر n شیء متمایز داشته باشیم. هر یک از حالات کنار هم قرار گرفتن این n شیء در کنار هم به طوری که ترتیب قرار گرفتن اشیاء در آن اهمیت داشته باشد را یک جایگشت از n شیء می نامند.

نکته: در هر جایگشت اشیاء متمایز و مکان های خالی برابرند.

۹۹۵- با حروف کلمات «market» چند کلمه ۶ حرفی متمایز می توان ساخت بطوریکه حروف تکراری نباشند؟ ج: ۷۲۰

۹۹۶- به چند طریق ۷ نفر می توانند در یک صف بایستند؟ ج: ۵۰۴۰

۹۹۷- در چند جایگشت از حروف کلمه «بهاری» حرف ب حرف شروع است؟ ج: ۲۴

۹۹۸- با حروف کلمه «موفقیت» بدون تکرار حروف چند کلمه ۶ حرفی می توان ساخت که کلمه «موفق» در آن باشد؟ ۶: ج

۹۹۹- در چند جایگشت از کلمه «*computer*»:

الف) سه حرف c, o, m کنار هم قرار دارند؟

ب) سه حرف *com* به همین صورت کنار هم قرار دارند؟

پ) با سه حرف *com* به همین صورت آغاز می شود؟

۱۰۰۰- در چند جایگشت از کلمه زاهدان، عبارت زاهد وجود دارد اما عبارت ان وجود ندارد.

۱۰۰۱- در چند جایگشت از کلمه «*logarithm*».

الف) سه حرف l, o, g کنار هم قرار دارند؟

ب) سه حرف *log* به همین صورت کنار هم قرار دارند؟

پ) سه حرف *log* به همین صورت در ابتدای کلمه می باشند؟

۱۰۰۲- به چند طریق می توان ۴ کتاب شیمی و ۳ کتاب ریاضی متمایز را کنار هم قرارداد بطوریکه:

الف) کتاب های شیمی کنار هم باشند.

ب) کتاب های ریاضی کنار هم باشند.

پ) کتاب های شیمی کنار هم و کتاب های ریاضی هم کنار هم باشند.

ت) کتاب های شیمی و کتاب های ریاضی یک در میان باشند.

۱۰۰۳- خانواده ای شامل ۳ دختر و ۲ پسر می خواهند با والدین کنار هم بایستند و عکس بگیرند به چند طریق اینکار می تواند انجام گیرد به شرط آنکه:

الف) خواهرها کنار هم باشند.

ب) خواهرها کنار هم و برادرها نیز کنار هم باشند.

پ) خواهرها کنار هم و برادرها نیز کنار هم و والدین هم کنار هم باشند.

ت) خواهرها کنار هم و بین پدر و مادر باشند.

ث) والدین در دو طرف بایستند چه تفاوتی با والدین کنار هم بین دو پسر باشند، دارد؟

۱۰۰۴- با حروف کلمه «درویشان» بدون تکرار حروف چند کلمه ۷ حرفی می توان نوشت که با «د» شروع نشود و حروف کلمه «شان» سه حرف آخر باشند. ۱۰۸:ج

۱۰۰۵- به چند طریق می توان ۹ ماشین متمایز را در یک ردیف پارک کرد بطوریکه ۳ ماشین مخصوص کنار هم نباشند.

۱۰۰۶- با حروف کلمه «stable» چند جایگشت وجود دارد که A, B کنار هم و e, s نیز کنار هم باشند.

۱۰۰۷- با حروف کلمه «گلناز» چند کلمه ۵ حرفی می توان ساخت؟ در چه تعداد از این حالات حرف ن و ز کنار هم قرار دارند؟ در چه تعداد از این حالات حرف «ن» بلافاصله بعد از «ز» آمده است؟

۱۰۰۸- تعداد اعداد ۵ رقمی که با کنار هم قرار گرفتن اعداد ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ می توان ساخت بطوریکه رقم های فرد کنار هم باشند؟ بطوریکه رقم های فرد کنار هم و رقم های زوج نیز کنار هم باشند؟ بطوریکه رقمهای زوج و فرد یک در میان باشند.

۱۰۰۹- با حروف کلمه «active» چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت که حروف صدا دار یک در میان قرار گیرند؟ ۷۲: ج

۱۰۱۰- با حروف کلمه «فاکتوریل» بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که با «ل» ختم شود؟

ب) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که با فاکتور شروع شوند؟

پ) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که با حرف بی نقطه شروع و با حرف نقطه دار ختم شود.

ث) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آن حروف کلمه فاکتور کنار هم باشند.

ج) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت که با فاک شروع شود.

چ) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت که با (ف) شروع و با (ت) ختم شود.

پایستگی های با تکرار:

اگر n شیء داشته باشیم که m_1 تا از نوع اول، m_2 از نوع دوم و ... و m_k تا از نوع k باشند
 $(m_1 + m_2 + \dots + m_k = n)$ این n شی به $\frac{n!}{m_1! \times m_2! \times \dots \times m_k!}$ طریق می توانند در یک ردیف کنار هم قرار گیرند.

۱۰۱۱- با ارقام ۱، ۱، ۰، ۰، ۰، ۰ چند رمز پنج رقمی می توان ساخت؟ ۱۰: ج

۱۰۱۲- تعداد جایگشت های حروف کلمه «سیستم» که در آن حرف «س» کنار هم نباشند، کدام است؟

۱۰۱۳- با ارقام ۱، ۲، ۲، ۳، ۳ چند عدد چهار رقمی می توان ساخت؟ ۱۲: ج

۱۰۱۴- با حروف کلمه «lagrange» چند کلمه هشت حرفی می توان ساخت که حروف یکسان کنار هم باشند. ۷۲۰: ج

۱۰۱۵- با حروف کلمه «start» چند کلمه پنج حرفی می توان نوشت بطوریکه حروف یکسان کنار هم باشند. ج: ۲۴

۱۰۱۶- با جایجایی رقم های ۱, ۳, ۲, ۳, ۴, ۳, ۵, ۶ چند عدد ۸ رقمی می توان نوشت که در آن سه رقم یکسان کنار هم و ارقام زوج کنار هم باشند؟ ج: ۱۴۴

۱۰۱۷- با ارقام N_5 اعداد ۵ رقمی ساخته ایم که همواره رقم های فرد کنار هم هستند، چند عدد ۵ رقمی داریم؟ ج: ۳۶

۱۰۱۸- با حروف کلمه «Banana» چند جایگشت ۶ حرفی می توان نوشت؟ ج: ۶۰

۱۰۱۹- چند عدد شش رقمی با ارقام ۷, ۷, ۷, ۳, ۳, ۷ می توان نوشت؟ ج: ۱۵

۱۰۲۰- با ارقام ۲, ۲, ۲, ۳, ۳, ۳ چند عدد چهار رقمی می توان نوشت؟ ج: ۱۴

(راهنمایی: ابتدا ارقام را بصورت ۴ تایی دسته بندی کنید.)

۱۰۲۱- با حروف کلمه «آبادان» چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت که حرف الف در آن یک در میان باشند. ج: ۱۲

۱۰۲۲- حروف کلمه «missisipi» چند جایگشت دارد؟ ج: ۲۵۲۰

۱۰۲۳- با ارقام ۰, ۰, ۰, ۰, ۳, ۳, ۳, ۳ چند عدد زوج ۸ رقمی می توان نوشت؟ ج: ۲۰

۱۰۲۴- ۵ زوج به چند طریق کنار هم می نشینند بطوریکه هر فرد کنار همسرش نشسته باشد. ج: $5! \times (2!)^5$

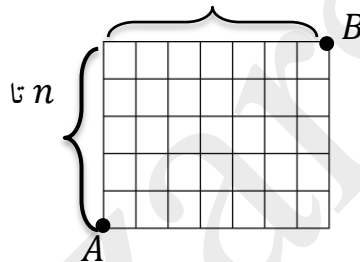
۱۰۲۵- اگر سکه ای را ۱۰ بار پرتاب کنیم به چند حالت ۳ بار سکه «رو» می آید؟ ۱۲۰: ج

۱۰۲۶- راه های مختلف مرتب کردن حرف های واژه ای ۵ حرفی برابر ۶۰ بوده است. در این واژه «چه تعداد حرف» ۲ بار وجود دارد؟ ۱: ج

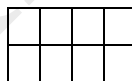
۱۰۲۷- تعداد جایگشت های حروف کلمه ای ۸ حرفی برابر ۷! شده است. این کلمه چند حرف را دو بار داشته است؟ ۳: ج

نکته: تعداد مسیرهای پیشرو در شکل روبرو برای رفتن از A به B از رابط زیر درست می آید.

$$\text{تعداد مسیرها} = \frac{(n+m)!}{n! \times m!}$$



۱۰۲۸- در شکل مقابل با چند حرکت پیشرو (بالا و راست) می توان از A به B رسید؟ ۱۵: ج



۱۰۲۹- در شکل شطرنجی ۳ در ۳ با چند حرکت پیشرو می توان از گوشه راست پایین به گوشه چپ بالا رسید؟

بایگشت k شی از n شی:

انتخاب k شی و از n شی متمایز را که در آن ترتیب قرار گرفتن اشیاء مهم باشد را بایگشت k شی و از n شی می نامیم و بصورت

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{نمایش داده می شود که:}$$

۱۰۳۰- در یک ساختمان ۱۰ طبقه آسانسوری با ۴ سرنشین به چند طریق سرنشینان می توانند پیاده شوند بطوریکه در هر طبقه فقط یک نفر پیاده شود. ۵۰۴۰:ج

۱۰۳۱- چند کلمه چهار حرفی با حروف کلمه «راستین» می توان نوشت که شامل حرف «ن» باشد؟ ۲۴۰:ج

۱۰۳۲- با حروف کلمه «بندرگاه» چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت؟ ۲۱۰:ج

۱۰۳۳- با حروف کلمه «موفقیت» چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که کلمه «موفق» در آن باشد؟ ۴:ج

۱۰۳۴- ده نفر برتر کلاس مشخص شده اند. چند حالت رتبه بندی نفرات اول تا سوم وجود دارد؟ ۷۲۰:ج

۱۰۳۵- از بین تعدادی حرف، دو حرف را انتخاب و کلمه دو حرف ساخته ایم. تعداد کل حالات ۱۱۰ شده است. تعداد حروف چند تا بوده است؟ ۱۱:ج

۱۰۳۶- سه مسافر وارد شهری می شوند که ۵ مسافر خانه دارد. اگر قرار باشد هر مسافر خانه پذیرای حداکثر یک مسافر باشد به چند طریق می توان مسافران را اقامت داد؟ ۶۰:ج

۱۰۳۷- ۵ دانش آموز سال دهم و ۳ دانش آموز سال یازدهم می خواهند در یک ردیف بنشینند بطوریکه هیچ دو دانش آموز سال یازدهم کنار هم نباشند. این کار به چند طریق امکان پذیر است؟
ج: ۱۴۴۰۰

۱۰۳۸- قرار است ۳ عروسک و ۲ توپ به ۵ دختر بچه و ۴ پسر بچه اهدا شود اگر به هر کودک حداکثر یک هدیه داده شود و هیچ پسری عروسک دریافت نکند، به چند طریق هدیه ها داده می شود؟
ج: ۱۸۰۰

۱۰۳۹- از بین حروف کلمه ای، ۲ حرف را انتخاب و کلمات ۲ حرفی ساخته ایم، تعدادشان ۳۰ حالت شده است. اگر از بین حروف آن کلمه ۳ حرف را انتخاب کنیم. چند کلمه سه حرفی می توانیم بسازیم؟ (حروف متمایزند)
ج: ۱۲۰

۱۰۴۰- با حروف کلمه «Nokia» چند کلمه سه حرفی با حروف متمایز می توان نوشت؟
ج: ۶۰

۱۰۴۱- شرکتی با ۳۰ نوع گزینش برای استخدام یک کارمند و یک معادن روبرو شده است. داوطلبان چند نفر بودند؟
ج: ۶

۱۰۴۲- مقدار n را در تساوی های زیر بدست آورید.

$$P(n, 5) = 18 P((n-2), 4) \quad \text{ج: } n = 9 \text{ و } 10$$

$$P(n, 4) = 3P(n, 3) \quad \text{ج: } 6$$

$$P(5, n) = p(5, n-1) \quad \text{ج: } 5$$

۱۰۴۳- با حروف کلمه computer چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که در آن دو حرف m , o بکار روند؟

ج: $p(5, 2) \times p(6, 3)$

۱۰۴۴- با حروف کلمه computer چند کلمه می توان نوشت که حروف صدادار در مکان های زوج قرار گیرند؟

ج: $5! \times p(4, 3)$

۱۰۴۵- علی با ۵ نفر از دوستانش وارد کلاس می شوند. او می نشیند. به چند طریق دوستانش در همان ردیف علی می نشینند؟

ج: ۷۲۰

۱۰۴۶- اگر برای ارتباط افراد در یک همایش از ایران، روسیه، فرانسه، ترکیه و سوریه فرهنگ لغت تهیه شود. چند نوع فرهنگ لغت

لازم است؟ ۲۰ ج:

نکته: تعداد جایگشت های دوری n شیء متمایز که در آنها جهت اهمیت دارد. $(n-1)!$ است.

نکته: تعداد جایگشت های دوری n شیء متمایز که در آنها جهت اهمیت ندارد. $\frac{(n-1)!}{2}$ می باشد.

۱۰۴۷- به چند طریق ۶ سرباز دور یک میدان می ایستند؟

۱۰۴۸- به چند طریق می توان ۸ پستی را دور یک اتاق چید؟

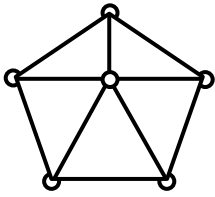
۱۰۴۹- سه مرد و سه زن به چند طریق می توانند دور یک میز دایره ای بنشینند بطوریکه مردها و زن ها یک در میان باشند؟

ج: ۸

۱۰۵۰- به چند طریق ۵ مرد و ۳ زن می توانند دور یک میز گرد بنشینند بطوریکه زن ها کنار هم باشند؟ ۵! $\times$ ۳! ج:

۱۰۵۱- با ۵ مهره متمایز چند گردنبند می توان ساخت؟ ۱۲ ج:

۱۰۵۲- اعداد N_6 را به چند طریق می توان در دایره های شکل روبرو نوشت؟ ۱۴۴ ج:



۱۰۵۳- چند عدد ۲ رقمی داریم که مجموع ارقام آنها از ۱۱ بزرگتر است؟ ۲۸ ج:

ترکیب: انتقاب k شی از n متمایز را که در آن ترتیب اشیاء انتقاب شده مهم نباشد، «ترکیب» k از n می گوئیم و با نماد $c(n, k)$ یا $\binom{n}{k}$ نمایش می دهیم که:

$$c(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \times k!}$$

۱۰۵۴- مجموعه $\{a, b, c, d\}$ چند زیر مجموعه سه عضوی دارد؟

۱۰۵۵- پدری می خواهد یک یا بیش از یکی از ۶ فرزند خود را به مسافرت ببرد. این عمل به چند طریق امکانپذیر است؟

۶۳ ج:

۱۰۵۶- انتخاب ۴ دانش آموز از بین ۲۰ دانش آموز برای اعزام به اردو چند حالت دارد؟

۱۰۵۷- قرعه کشی بین ۱۵ نفر شرکت کننده و انتخاب ۳ نفر برای دادن ۳ ماشین یکسان، چند حالت دارد؟

۱۰۵۸- در یک پرواز داخلی ۴ جای خالی در هواپیما وجود دارد و ۹ نفر در لیست انتظار هستند. به چند طریق می توان ۴ نفر

انتخاب و سوار کرد؟ ۱۲۶ ج:

۱۰۵۹- از میان ۹ مرد و ۶ زن به چند طریق می توان ۵ نفر، شامل ۳ مرد و ۲ زن انتخاب کرد؟ ۱۲۶۰ ج

۱۰۶۰- با ۱۰ نقطه روی محیط دایره:

الف) چند پاره خط می توان ساخت؟ ۴۵ ج

ب) چند بردار می توان ساخت؟ ۹۰ ج

پ) چند مثلث می توان ساخت؟ ۱۲۰ ج

ت) چند چهارضلعی می توان ساخت؟

۱۰۶۱- در یک مهمانی ۲۰ نفر شرکت کرده اند، اگر هر دو نفر از آنها با هم است داده باشند، تعداد دفعاتی که دست داده شده

چند تاست؟ (راهنمایی: مشابه پاره خط) ۱۹۰ ج

۱۰۶۲- از میان ۶ دانش آموز سال دهم و ۵ دانش آموز سال یازدهم به چند طریق می توان تیمی ۳ نفره ساخت که حداقل ۱

دانش آموز سال دهم در آنها باشد؟ ۱۵۵ ج

۱۰۶۳- دانش آموزی در یک آزمون ۱۲ سؤال شرکت کرده است که باید به ۸ سؤال پاسخ دهد.

الف) به چند طریق امکان پذیر است؟ ۴۹۵ ج

ب) به چند طریق امکان پذیر است اگر قرار باشد حتماً به ۵ سؤال اول به دو تا پاسخ دهد. ۲۱۰۰ ج

پ) به چند طریق امکان پذیر است اگر قرار باشد از ۵ سؤال اول فقط به ۲ تا پاسخ دهد. ۷۰ ج

۱۰۶۴- به چند طریق می توان از بین ۳ دانش آموز دهم و ۳ یازدهم و ۳ دوازدهم، ۳ نفر را انتخاب کرد، بطوریکه:

(الف) از دو پایه یک نفر انتخاب شود.

(ب) هر سه نفر هم پایه باشند.

(پ) دقیقاً یک نفر از دوازدهم باشد.

(ت) حداقل یک نفر از دوازدهم باشد.

(ث) حداکثر یک نفر از دوازدهم باشد.

۱۰۶۵- به چند طریق می توان از بین ۶ مهره سفید و ۵ سیاه، سه مهره انتخاب کرده که حداکثر یک مهره سیاه باشد؟ ۹۵: ج

۱۰۶۶- به چند طریق می توان از ده سؤال به ۶ سؤال پاسخ داد بطوریکه:

(الف) حداقل به ۴ سؤال از ۵ سؤال اول پاسخ داده شود.

(ب) حداکثر به ۲ سؤال از ۵ سؤال اول پاسخ داده شود.

(پ) سؤال اول و آخر بدون جواب بمانند.

(ت) به ۲ پرسش اول پاسخ داده شود.

(ث) دقیقاً به یک پرسش که مضرب آن ۳ است، پاسخ داده شود.

۱۰۶۷- از بین ۵ دانش آموز رشته تجربی و ۴ دانش آموز رشته ریاضی و ۳ دانش آموز رشته انسانی قرار است شورایی تشکیل شود. به چند طریق می توان این کار را انجام داد به شرط آنکه:

الف) شورا سه نفره باشد و یک دانش آموز تجربی و حداقل یک دانش آموزان انسانی در آن باشد.

ب) شورا سه نفره باشد و هیچ دو نفری هم رشته ای نباشند.

پ) شورا ۵ نفره باشد و حداقل ۲ نفر انسانی باشند.

تعداد زیرمجموعه ها:

تعداد زیرمجموعه های k عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر $\binom{n}{k}$ است.

تعداد زیرمجموعه های k عضوی از یک مجموعه n عضوی که شامل r عضو مشخص باشد برابر $\binom{n-r}{k-r}$ است.

تعداد زیرمجموعه های k عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر که شامل q عضو مشخص نباشد برابر $\binom{n-q}{k}$ است.

تعداد زیرمجموعه های k عضوی از یک مجموعه n عضوی که شامل r عضو مشخص باشد اما شامل q عضو مشخص نباشد برابر $\binom{n-r-q}{k-r}$ است.

۱۰۶۸- در چند تا از زیرمجموعه های ۷ عضوی مجموعه N_{12} عضوهای ۱، ۲، ۳ وجود دارند اما اعداد ۱۱، ۱۲ وجود ندارند؟
ج: ۳۵

۱۰۶۹- در زیر مجموعه های N_{10} :

الف) چند زیرمجموعه ۵ عضوی دارد که شامل دقیقاً ۲ عدد اول است؟

ب) چند زیر مجموعه ۳ عضوی دارد که فقط یک عضو آن زوج است؟

پ) چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد که حاصلضرب اعضای آن مضرب ۳ باشد. (راهنمایی: استفاده از متمم)

۱۰۷۰- در چند زیرمجموعه از اعداد طبیعی یک رقمی، حداقل یک عدد زوج قرار دارد؟ (راهنمایی: استفاده از متمم) ج: ۴۸۰

۱۰۷۱- با ارقام ۵، ۲، ۴ چند عدد سه رقمی می توان ساخت که رقم تکراری داشته باشند؟ (راهنمایی: استفاده از متمم) ۲۱: ج

۱۰۷۲- قرار است از بین افراد a, b, c, d, e, f, g چهار نفر در اردو شرکت کنند. به چند طریق ممکن دقیقاً ۲ نفر از افراد a, b, c در بین منتخبین است؟ ۱۸: ج

برای سرعت بخشیدن به محاسبات این نکات را به قاطر بسپارید.

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n \times (n-1)}{2!}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

۱۰۷۳- مجموعه N_7 چند زیرمجموعه دارد بطوریکه:

الف) ۴ عضوی باشد. ۳۵: ج

ب) حداقل ۴ عضوی باشد. ۶۴: ج

پ) کمترین عضو استفاده شده ۴ باشد. ۱۵: ج

(راهنمایی: باید از اعضای ۴، ۵، ۶، ۷ در ساختن یک مجموعه استفاده کرد.)

۱۰۷۴- از ۵ پسر و ۶ دختر به چند طریق می توان یک گروه مختلط سه نفره ساخت؟ ۱۳۵: ج

۱۰۷۵- به چند طریق می توان از اعداد N_1 دو عدد انتخاب کرد که مجموع آنها زوج باشد. ۲۰: ج

۱۰۷۶- با حروف کلمه «جهانگردی» چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت بطوریکه شامل حروف کلمه «جهان» باشد؟

چند تا از آنها شامل کلمه جهان هستند؟ ۳۶, ۴۳۲۰ ج

۱۰۷۷- تعداد زیرمجموعه های ۴ عضوی یک مجموعه با تعداد زیرمجموعه های ۶ عضوی آن برابر است. آن مجموعه چند عضو دارد؟ ۱۰ ج

۱۰۷۸- در چند زیرمجموعه ۳ عضوی از مجموعه N_V حاصل ضرب اعضاء عددی زوج است؟ (راهنمایی: استفاده از متمم) ۳۱ ج

۱۰۷۹- یک آشپز ۱۰ نوع ادویه دارد. با سه نوع آنها یک طعم بخصوص می سازد. این آشپز چند طعم می تواند بسازد به شرط آنکه ۲ ادویه خاص با هم استفاده نشوند؟ ۱۱۲ ج

۱۰۸۰- مجموعه N_V چند زیرمجموعه ۴ عضوی دارد که فقط شامل یکی از دو عدد ۵ و ۶ هستند؟ ۲۰ ج

۱۰۸۱- اگر تعداد زیرمجموعه های ۲ عضوی از یک مجموعه ۴۵ تا باشد، تعداد زیرمجموعه های ۸ عضوی آن چند تا است؟ ۴۵ ج

۱۰۸۲- اگر تعداد زیرمجموعه های ۲ عضوی از یک مجموعه ۲۸ تا باشد. تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی آن چند تا است؟ ۵۶ ج

۱۰۸۳- مجموعه $\{a, b, \{a\}, \{b\}\}$ دارای چند زیرمجموعه شامل عضو a است؟ ۸ ج

۱۰۸۴- در یک همایش ۵ نفر قرار است سخنرانی کنند. به چند طریق می توان ترتیب سخنرانی ها را تنظیم کرد بطوریکه بین سخنرانان a , b فقط یک سخنران قرار گیرد؟ ۳۶ ج

۱۰۸۵- حروف A, B, C, D چند جایگشت دارند که در آنها A بعد از B می آید. ۶۰: ج

۱۰۸۶- در تساوی های زیر مقدار مجهول را بیابید.

$$p(n, k) = 6c(n, k) \quad k = ?$$

$$p(n, k) = 56, c(n, k) = 28 \quad n, k = ?$$

$$\frac{p(n, 4)}{c(n-1, 4)} = 26 \quad n = ? \quad 52: ج$$

۱۰۸۷- در تساوی های زیر مقدار مجهول را بیابید.

$$c(n, 3) = c(6, 3) + 15 \quad n: ?$$

$$2p(n, 3) = 15c(n+1, n-1) \quad n = ? \quad 7: ج$$

$$p(n, 2) = 36 + c(n, 2) \quad n: ?$$

۱۰۸۸- با ارقام ۱, ۱, ۲, ۲, ۳, ۳ چند عدد سه رقمی می توان ساخت؟ ۲۴: ج

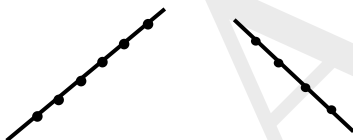
۱۰۸۹- با جابجایی ارقام ۲۲۵۷۶۲ چند عدد ۶ رقمی می توان نوشت بطوریکه رقم های ۲ یک در میان باشند؟ ج: ۱۲

۱۰۹۰- با ارقام ۳، ۰، ۴، ۴، ۴ چند عدد سه رقمی می توان ساخت؟ ج: ۱۰

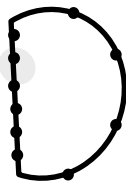
۱۰۹۱- از بین ۲ کوهنورد کرمانی و ۲ کوهنورد اصفهانی و ۲ کوهنورد شیرازی قرار است یک تیم ۲ نفره برای کار بر روی دیوار کتیبه کوه های صاحب الزمان کرمان (کوه های شیوشگان) برگزیده شوند. به چند طریق می توان اینکار را انجام داد بطوریکه همشهری نباشند.

۱۰۹۲- از هر یک شهرهای کرمان، تهران، مشهد، اصفهان و تبریز ۲۰ دانش آموز دختر دبیرستانی به یک کنفرانس دعوت شده اند. به چند طریق می توان سه دانش آموز را برای ارائه مقاله فراخواند بطوریکه دو بدو غیرهمشهری باشند؟

۱۰۹۳- با نقاط زیر چند مثلث می توان ساخت؟ ج: ۹۶



۱۰۹۴- با نقاط روبرو چند مثلث می توان ساخت؟



۱۰۹۵- روی هر کدام از اضلاع ۶ ضلعی منتظم ۳ نقطه قرار داده ایم. تعداد مثلثهایی که با این نقاط را می توان ساخت چندتا است؟

ج: ۸۱۰

نکته: با تعداد m پاره قط موازی هم عمودی و n پاره قط موازی هم افقی می توان $\binom{m}{2} \binom{n}{2}$ مستطیل ساخت.

۱۰۹۶- یک صفحه شطرنجی 7×4 چند مستطیل دارد؟ ج: ۲۸۰

۱۰۹۷- اسب های a, b, c در مسابقه شرکت می کنند، به چند طریق به خط پایان می رسند؟ ج: ۱۳

۱۰۹۸- با حروف کلمه «حداکثر» چند کلمه ۴ حرفی می توان ساخت که:

(الف) شامل حرف «ث» باشد.

(ب) شامل حرف «ث» باشد. اما شامل حرف «ک» نباشد.

(ت) شامل هیچ یک از دو حرف ک و ث نباشد.

۱۰۹۹- با ارقام N بدون تکرار ارقام چند عدد می توان ساخت بطوریکه:

(الف) پنج رقمی شامل ۲ رقم فرد، ۳ رقم زوج باشد و رقم یکان آن ۶ باشد.

$$\text{ج: } \binom{3}{2} \times \binom{2}{2} \times \binom{1}{1} \times 4! = 72$$

(ب) چهار رقمی شامل ۲ رقم فرد و ۲ رقم زوج باشد و ارقام زوج و فرد یک در میان باشند؟

$$\text{ج: } \binom{3}{2} \times \binom{3}{2} \times (4 + 4) = 72$$

۱۱۰۰- با ۶ نقطه روی محیط یک دایره چند مثلث می توان ساخت که:

(الف) از رأس A بگذرد.

(ب) وتر AB یکی از ضلع های آن باشد.

۱۱۰۱- از میان ۳ توپ قرمز، ۴ توپ سفید و ۵ توپ آبی به چند طریق می توان سه توپ انتخاب کرد که:

الف) هر سه هم رنگ باشند.

ب) از هر سه رنگ باشند.

پ) حداقل ۲ تای آنها هم رنگ باشند.

۱۱۰۲- از میان ۵ مهره قرمز و ۳ مهره آبی و ۴ مهره سفید متمایز به چند طریق می توان ۲ مهره غیر هم رنگ انتخاب کرد؟

۱۱۰۴- به چند طریق می توان از میان اسامی ۶ زن و ۷ مرد نام های ۴ زن و ۳ مرد را انتخاب و اسامی آنها را یک در میان در لیست نوشت؟
ج: $6! \times 105$

۱۱۰۵- گل فروشی ۱۰ مدل گل دارد. او چگونه می تواند دسته گلی درست کند که حداقل شامل ۸ شاخه گل متمایز باشد؟
ج: ۵۶

۱۱۰۷- با ارقام ۲، ۳، ۵، ۶، ۷ چند عدد سه رقمی می توان ساخت که رقم یکان بزرگتر از دهگان و دهگان بزرگتر از صدگان باشد؟
ج: ۱۰

۱۱۰۸- در یک ساختمان ده خانوار زندگی می کنند، می خواهیم یک هیأت ۴ نفره انتخاب کنیم بطوریکه از هر خانوار یک نفر (مادر یا پدر) انتخاب شوند، به چند طریق می توان کار را انجام داد؟
ج: $2^4 \times \binom{10}{4}$

۱۱۰۹- در یک ساختمان ۶ زن و شوهر وجود دارند به چند طریق می توان:

الف) ۴ نفر را از بین این ۱۲ نفر انتخاب کرد بطوریکه هیچ زن و شوهری در بین منتخبین نباشند؟
ج: ۲۴۰

ب) ۵ نفر را از بین این ۱۲ نفر انتخاب کرد بطوریکه فقط یک زن و شوهر در افراد منتخب باشند؟
ج: ۴۸۰

۱۱۱۰- با ارقام متمایز به چند طریق می توان یک عدد ۴ رقمی ساخت که فقط یک رقم زوج داشته باشد؟
ج: ۹۶۰

۱۱۱۱- به چند طریق می توان ۳ کتاب از ۵ کتاب سال دهم و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال یازدهم را یک در میان در قفسه ای چید؟
ج: ۱۰۸۰۰۰

۱۱۱۲- از بین ۴ جفت کفش متمایز، ۳ لنگه کفش انتخاب کرده ایم، در چند حالت:

(الف) یک جفت کفش در بین لنگه های انتخابی وجود دارد؟ ج: ۲۴

(ب) هیچ کدام از سه لنگه کفش از یک جفت کفش نمی باشند؟ ج: ۳۲

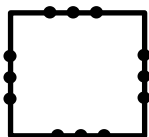
۱۱۱۳- ده توپ متمایز و ده جعبه متمایز داریم. به چند طریق می توان توپ ها را داخل جعبه ها چید بطوریکه فقط یک جعبه خالی بماند. ج: $4050 \times 8!$

۱۱۱۴- ۶ گنجشک و ۶ لانه متمایز داریم. به چند طریق می توان گنجشک ها در لانه بنشینند بطوریکه فقط یک لانه خالی بماند. ج: $450 \times 4!$

۱۱۱۵- هفت توپ سفید یکسان و سه توپ سیاه یکسان را به چند طریق می توان در یک ردیف کنار هم چند در صورتیکه هیچ دو توپ سیاهی کنار هم نباشند. ج: ۵۶

۱۱۱۶- در چند عدد ۵ رقمی که با ارقام ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ ساخته می شود. ۳ رقم زوج وجود دارد؟ ج: ۷۲۰

۱۱۱۷- چند مثلث با کمک نقاط روی شکل می توان ساخت که در آن هیچ دو رأسی روی یک ضلع مربع نباشند؟ ج: ۱۰۸



۱۱۱۸- چند عدد ۶ رقمی با ارقام متمایز وجود دارد بطوریکه ارقام اول و آخر آن فرد باشند. ج: ۳۳۶۰۰

۱۱۱۹- با ارقام N_8 چند عدد ۸ رقمی با ارقام متمایز می توان نوشت که هیچ ۲ عدد اول فرد مجاور نباشند.

(راهنمایی: ابتدا ۵ رقم زوج را چیدمان و سپس در ۶ جای خالی ۳ رقم خاص را چیدمان کنید.) ج: ۱۴۴۰۰

۱۱۲۰- با حروف a, b, c یک کلمه ۱۰ حرفی ساخته ایم که دقیقاً سه حرف a دارد. چند حرف متفاوت می توان ساخت؟

(راهنمایی: ابتدا سه حرف a را در ۱۰ مکان چیدمان کنید.) ج: ۱۵۳۶۰

فصل هفتم:

آمار و احتمال

T. Azarshin

پیشامد قطعی: پدیده هایی که می توان نتیجه ی آنها را پیش از وقوع بطور قطعی تعیین کرد.

پیشامد تصادفی: پدیده هایی که نمی توان نتیجه ی آنها را پیش از وقوع بطور قطعی تعیین کرد اما از تمام حالات ممکن در به وقوع پیوستن آن مطلع باشیم.

۱۱۲۱- کدامیک از پدیده های زیر قطعی و کدام تصادفی است؟

الف) نتیجه بازی بسکتبال تیم ایران و کره

ب) در پرتاب تاس، رو شدن عدد یک رقمی

پ) تعداد اتومبیل های که در ساعت مشخصی از مقابل مدرسه می گذرند.

فضای نمونه: به مجموعه ای شامل همه حالات ممکن در یک پدیده تصادفی فضای نمونه می گویند.

۱۱۲۲- فضای نمونه هر یک از آزمایش های تصادفی زیر را مشخص کنید.

الف) پرتاب ۲ سکه

ب) پرتاب ۲ تاس

پ) پرتاب یک تاس و یک سکه همزمان

ت) یک تاس را می اندازیم اگر عدد اول آمد، یک سکه پرتاب می کنیم.

ث) یک سکه را می اندازیم اگر «رو» آمد یک تاس و اگر «پ» آمد یک سکه دیگر می اندازیم.

ج) پرتاب ۳ بار یک سکه

چ) جنسیت فرزندان یک خانواده ۳ فرزند

ح) انداختن یک تاس که روی همه وجه های آن ۲ نوشته باشد.

خ) انداختن یک سکه که روی ۳ وجه آن ۶ و روی سایر وجه ها ۱ نوشته شده باشد.

د) کنار هم قرار گرفتن سه عدد ۵, ۲, ۱.

ذ) انتخاب تصادفی ۲ عدد از بین اعداد ۰, ۲, ۳, ۵ و ساختن عدد دو رقمی زوج

نکته: گاهی نوشتن تمامی اعضای فضای نمونه و قتلیر است پس کافی است تعداد اعضای فضای نمونه را بدانیم.

۱۱۲۳- تعداد اعضای فضای نمونه پیشامدهای تصادفی زیر را بنویسید.

(الف) از کیسه ای شامل ۳ مهره سیاه و ۴ مهره سفید دو مهره همزمان برمی داریم.

(ب) از کیسه ای شامل ۳ مهره سیاه و ۴ مهره سفید دو مهره پی در پی و بدون جایگذاری برمی داریم.

(پ) از کیسه ای شامل ۳ مهره سیاه و ۴ مهره سفید دو مهره پی در پی و با جایگذاری برمی داریم.

(ت) سه سکه را پرتاب می کنیم (یا یک سکه را ۳ بار پرتاب می کنیم).

(ث) ۸ سکه را پرتاب می کنیم (یا یک سکه را ۸ بار پرتاب می کنیم).

(ج) ۳ تاس را پرتاب می کنیم (یا یک تاس را ۳ بار پرتاب می کنیم).

(چ) n تاس را پرتاب می کنیم (یا یک تاس را n بار پرتاب می کنیم).

(ح) n تاس و m سکه را پرتاب می کنیم (یا یک تاس را n بار و یک سکه را m بار پرتاب می کنیم).

(خ) یک تاس را می اندازیم هر عددی که ظاهر شد به همان تعداد سکه می ریزیم.

(د) انتخاب ۲ عدد از بین اعداد یک رقمی

(ذ) ساختن عدد ۲ رقمی با انتخاب دو رقم از بین اعداد N_v .

(ر) طول عمر یک لامپ. (نمونه ای از فضای نمونه پیوسته)

(ز) جنسیت فرزندان یک خانواده n فرزندی

(ژ) قرار گرفتن n شی کنار هم

(س) انتخاب k شی از بین n شی که ترتیب قرار گرفتن آنها مهم باشد.

پیشامد تصادفی: هر زیرمجموعه از فضای نمونه را یک پیشامد تصادفی می نامند.

۱۱۲۴- دو تاس را می اندازیم، مطلوب است پیشامدهای زیر:

الف) اعداد ظاهر شده اختلافشان ۳ واحد باشد.

ب) اعداد ظاهر شده مربع کامل باشند.

پ) اعداد ظاهر شده مجموعشان مضرب ۶ باشد.

ت) عدد تاس اول از عدد تاس دوم بزرگتر باشد.

ث) عدد تاس اول از عدد تاس دوم بزرگتر نباشد.

ج) حداقل یک بار ۶ ظاهر شود.

چ) عدد تاس اول مقسوم علیه عدد تاس دوم باشد.

ح) مجموع اعداد ظاهر شده مکعب کامل باشد.

خ) حداکثر ۱ بار عدد ۶ ظاهر شود.

د) اعداد ظاهر شده اول باشند.

ذ) اعداد ظاهر شده اختلافشان ۴ و هر دو عدد فرد باشند.

ر) اعداد ظاهر شده هر دو مربع کامل یا مجموعشان عددی اول باشد.

نکته: تعداد پیشامدهای ممکن از فضای نمونه S برابر $2^{n(s)}$ است.

نکته: پیشامد نشدنی (غیرممکن) آن پیشامدی است که وقوع آن امکانپذیر نباشد در واقع همان پیشامد تهی است که هیچ عضوی ندارد.

نکته: پیشامد هتمی آن پیشامدی است که وقوع آن قطعی است. در واقع همان پیشامد S است.

نکته: پیشامدی که فقط شامل یک عضو باشد را پیشامد ساده می نامند.

۱۱۲۵- جاهای خالی را پر کنید.

(الف) اگر $S = N_5$ باشد، تعداد کل پیشامدهای ممکن برابر است.

(ب) اگر پیشامد $A = \phi$ باشد آن پیشامد را و اگر $A = S$ باشد آن پیشامد را می نامند.

(پ) به پدیده هایی که از به وقوع پیوستن آن اطمینان نداشته باشیم پیشامد می گوئیم.

(ت) هر زیرمجموعه از فضای نمونه را یک در فضای نمونه می گوئیم.

(ث) در پرتاب یک تاس تعداد کل پیشامدها تا است.

(ج) انداختن یک تاس که روی همه ی وجه های آن ۲ حک شده باشد. یک پدیده است .

(چ) تاس را ۳ بار می اندازیم. تعداد پیشامدهای شدنی آن تا است.

(ح) تعداد پیشامدهای k عضوی از فضای نمونه S برابر تا است.

(خ) ظاهر شدن عدد یک رقمی در پرتاب یک تاس یک پیشامد است.

(د) در پرتاب یک تاس ظاهر شدن دو عدد که مجموعشان بیش از ۱۲ باشد یک پیشامد است.

(ذ) یک آزمایشی که ۱۲۷ پیشامد غیر تهی دارد. فضای نمونه آن عضوی است.

(ر) در یک خانواده سه فرزندی اگر بدانیم خانواده حداقل یک فرزند پسر دارد فضای نمونه عضو دارد.

(ز) سکه ای را پرتاب می کنیم. اگر «رو» آمد دو سکه ی دیگر پرتاب می کنیم، تعداد کل پیشامدها است.

(ژ) از بین ۹ نفر سه نفر را به تصادف انتخاب می کنیم، تعداد برآمدهای پیشامد A که در آن فرد مورد نظر در بین منتخبین باشد، تا است.

۱۱۲۶- در آزمایش پرتاب تاس تعداد پیشامدهای:

(الف) دو عضوی که شامل ۲ باشند چندتاست؟

(ب) سه عضوی که شامل ۲ باشند چندتاست؟

۱۱۲۷- در آزمایش پرتاب تاس تعداد کدام پیشامد بیشتر است؟

(الف) پیشامدهای ۲ عضوی

(ب) پیشامدهای ۴ عضوی

(پ) پیشامدهایی که اعضای آن اعداد فرد باشند.

۱۱۲۸- در پرتاب یک تاس و یک سکه پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

(الف) پیشامد A که عدد روی تاس زوج باشد.

(ب) پیشامد B که عدد روی تاس زوج و سکه «پ» بیاید.

(پ) پیشامد C که سکه «پ» بیاید.

(ث) پیشامد D که سکه رو یا تاس ۶ بیاید.

۱۱۲۹- با اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ عدد زوج ۲ رقمی با ارقام متمایز ساخته ایم و روی کارتهایی نوشته ایم. یک کارت به تصادف برمی

داریم، مطلوب است پیشامد آنکه:

(الف) عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

(ب) عدد روی کارت مضرب ۵ باشد.

(پ) عدد روی کارت بر ۴ بخشپذیر باشد اما بر ۵ بخشپذیر نباشد.

(ت) عدد روی کارت بزرگتر از ۳۰ باشد.

(ث) عدد روی کارت ارقامش زوج باشند.

(ت) عدد روی کارت اول باشد.

۱۱۳۰- فضای نمونه آزمایش های زیر چند عضو دارد؟

(الف) تاس را پرتاب می کنیم اگر عدد رو شده بیشتر از ۴ بود یک سکه را ۳ بار پرتاب می کنیم.

(ب) تاس را پرتاب می کنیم اگر عدد رو شده اول بود یک تاس دیگر و اگر اول نبود یک سکه پرتاب می کنیم.

(پ) از کیسه ای شامل ۲ مهره قرمز و ۳ مهره آبی دو مهره پی در پی و با جایگذاری برمی داریم.

(ت) از کیسه ای شامل ۲ مهره قرمز و ۳ مهره آبی دو مهره پی در پی و بدون جایگذاری برمی داریم.

۱۱۳۱- در پرتاب یک تاس اگر عدد مربع کامل بود یک تاس دیگر می ریزیم و گرنه ۲ بار سکه می اندازیم. مطلوب است:

(الف) فضای نمونه

(ب) پیشامد A که دو بار عددی یکسان بیاید.

(پ) پیشامد B که دو بار «رو» ظاهر شود.

(ت) پیشامد C مجموع اعداد روی تاس زوج یا سکه ها مانند هم ظاهر نشوند.

(ث) پیشامد D حداقل یکی از سکه ها «پ» یا حداقل ۱ بار عدد ۴ دیده شود.

(ج) پیشامد E که دو برآمد یکسان دیده شود. (۲ عدد یکسان یا ۲ روی سکه یکسان)

(چ) پیشامد آنکه حداقل مقدار رو شده در تاس ۴ باشد چندبرآمد دارد.

۱۱۳۲- در یک خانواده ۴ فرزند، مطلوب است:

الف) تعداد اعضای فضای نمونه

ب) پیشامد A که خانواده دارای ۳ دختر باشد.

پ) پیشامد B که فرزندان خانواده یک درمیان دختر باشند.

ت) پیشامد C که فرزندان اول و آخر هم جنس باشند.

ث) پیشامد D که تعداد فرزندان دختر بیشتر نباشد.

ج) پیشامد E که فرزندان اول و آخر هم جنس باشند و خانواده حداقل یک پسر داشته باشد.

۱۱۳۳- با حروف کلمه مغموم کلمه ۵ حرفی نوشته ایم. مطلوب است:

الف) فضای نمونه

ب) پیشامد A که حروف یکسان کنار هم باشند.

پ) پیشامد B که حروف یکسان کنار هم و میان کلمه باشند.

ت) پیشامد C که حروف یکسان کنار هم نباشند.

۱۱۳۴- از محفظه ای شامل ۵ موش سالم و ۳ موش بیمار، دو موش گریخته است. مطلوب است:

الف) فضای نمونه

ب) پیشامد A که هر دو موش سالم باشند.

پ) پیشامد B که هر دو موش بیمار باشند.

ت) پیشامد C که حداقل یک موش سالم باشد.

ث) پیشامد D که حداکثر یک موش سالم باشد.

۱۱۳۵- شخصی از بین ۱۰ مداد رنگی اش که ۲ تای آنها HB است. ۶ مداد انتخاب و داخل جامدادی می گذارد. پیشامد آنکه در جامدادی حداقل یک مداد HB باشد، چندبرآمد دارد؟

۱۱۳۶- در پرتاب ۲ تاس پیشامدهای زیر هر کدام چند برآمد دارند؟

الف) مجموع دو تاس بزرگتر از ۵ و برابر باشند.

ب) اختلاف دو تاس بر ۴ بخشپذیر باشد و مجموع آنها ۶ نباشد.

پ) حاصلضرب ۲ عدد مضرب ۶ یا مجموع دو تاس اول نباشد.

ت) تاس اول مضرب ۳ و تاس دوم حداقل ۵ باشد.

۱۱۳۷- ۵ پرنده سفید و ۴ پرنده رنگی در بوستانی محافظت می شوند. اگر سه پرنده به مکانی دیگر منتقل شوند. پیشامد آنکه هر سه پرنده سفید باشند، چقدر با پیشامد آنکه هر سه پرنده رنگی باشند، تفاوت دارد؟

۱۱۳۸- جاهای خالی را پر کنید.

الف) هرگاه یک تاس را n بار پرتاب کنیم و یا n تاس را یک بار پرتاب کنیم فضای نمونه

ب) سکه ای را پرتاب می کنیم. اگر «پ» آمد ۲ سکه ی دیگر و اگر «ر» آمد یک سکه دیگر پرتاب می کنیم. پیشامد آنکه همه ی پرتاب ها یکسان ظاهر شوند تا برآمد دارد.

پ) با ارقام N_5 عدد پنج رقمی ساخته ایم. پیشامد آنکه در ارقام عدد مربوطه دو رقم زوج کنار هم قرار گیرند برآمد دارد.

۱۱۳۹- از بین اعداد ۲۰۰ تا ۵۰۱ بطور تصادفی عددی انتخاب کرده ایم. پیشامد آنکه آن عدد مضرب ۵ باشد برآمدهای بیشتری دارد یا پیشامد آنکه این عدد بر ۶ بخشپذیر باشد؟

۱۱۴۰- تمامی اعداد دو رقمی که از کنار هم قرار دادن دو عدد از بین اعداد ۰, ۱, ۲, ۳, ۶ می توان ساخت را روی توپ های کوچکی نوشته ایم. یک توپ را به تصادف برمی داریم. مطلوب است:

الف) فضای نمونه

ب) پیشامد آنکه عدد روی توپ فرد باشد اما بر ۳ بخشپذیر باشد.

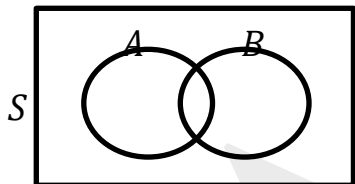
پ) پیشامد آنکه عدد روی توپ زوج باشد یا بر ۳ بخشپذیر باشد.

ت) پیشامد آنکه عدد روی توپ فرد و از ۲۵ بزرگتر باشد.

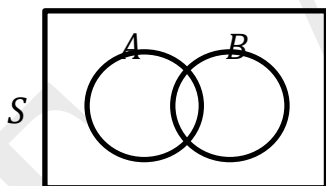
ث) پیشامد آنکه عدد روی توپ زوج و بزرگتر از ۲۶ نباشد.

اعمال روی پیشامدها:

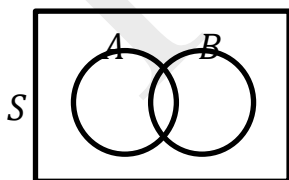
۱) اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می دهد که حداقل یکی از دو پیشامد رخ دهند. (یا A رخ دهد یا B رخ دهد یا هر دو رخ دهند).



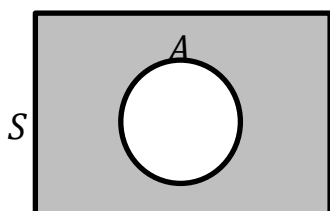
۲) اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می دهد که دو پیشامد با هم رخ دهند. (هم پیشامد A رخ دهد و هم پیشامد B رخ دهد).



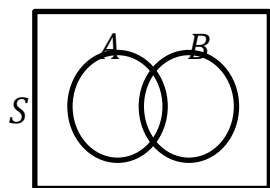
۳) تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A - B$ زمانی رخ می دهد که پیشامد A رخ دهد اما B رخ ندهد.



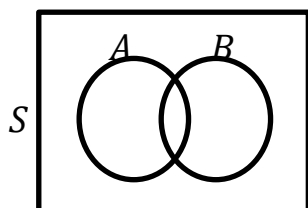
۴) متمم یک پیشامد: پیشامد A' زمانی رخ می دهد که A رخ ندهد.



۵) پیشامد $(A - B) \cup (B - A)$ زمانی رخ می دهد که A یا B دقیقاً یکی رخ دهد.

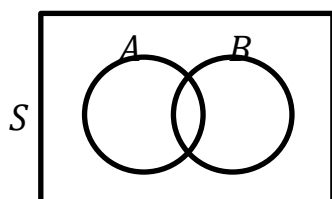


۶) پیشامد $A' \cap B'$ زمانی رخ می دهد که A یا B هیچکدام رخ ندهند.



می دانیم: $(A' \cap B') = (A \cup B)'$

۷) پیشامد $(A \cap B)'$ زمانی رخ می دهد که پیشامدهای A , B با هم رخ ندهند. (از A و B حداقل یکی رخ دهد).



می دانیم: $(A \cap B)' = A' \cup B'$

نکته:

$$۱) n(A') = n(S) - n(A)$$

$$۲) n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$۳) n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$۴) n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(S) - n(A \cup B)$$

$$۵) n(A \cap B)' = n(S) - n(A \cap B)$$

و می دانیم که $A' = S - A$, $A \cup A' = S$, $A \cap A' = \phi$

نکته: اگر پیشامدهای A , B اشتراک نداشته باشند به آنها دو پیشامد ناسازگار می گویند. داریم:

$$A \cap B = \phi \Rightarrow A, B \text{ ناسازگارند} \Rightarrow n(A \cap B) = 0 \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

۱۱۴۱- سکه ای را ۴ بار می اندازیم. اگر A پیشامد آن باشد که سکه ۲ بار «پ» بیاید و B پیشامد آن باشد که سکه دو بار وسط «پ» بیاید. پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) A'

ب) B'

پ) $A - B$

ت) $B - A$

ث) $A \cap B$

ج) $A \cup B$

۱۱۴۲- در پرتاب ۲ تاس اگر A پیشامد آن باشد که مجموع اعداد رو شده حداکثر ۹ باشند و B پیشامد آن باشد که اعداد رو شده نامساوی و اول باشند، پیشامدهای زیر را مشخص نمایید.

الف) A'

ب) B'

پ) $A \cap B$

ت) $B \cup A$

ث) $A - B$

ج) $B - A$

۱۱۴۳- در پرتاب ۲ تاس می دانیم عدد روی دو تاس زوج است و پیشامد A آن است که اعداد رو شده نسبت به هم اول باشند و B پیشامد آن است که مجموع اعداد رو شده بزرگتر از ۸ نباشد. مطلوب است:

= فضای نمونه (الف)

= پیشامد A (ب)

= پیشامد B (پ)

= $A - B$ = پیشامد آنکه A رخ دهد اما B رخ ندهد (ت)

= $B - A$ = پیشامد آنکه B رخ دهد اما A رخ ندهد (ث)

= $A \cap B$ = پیشامد آنکه A, B هر دو رخ دهند (ج)

= $A' \cap B' = (A \cup B)'$ = پیشامد آنکه A, B هیچکدام رخ ندهند (چ)

= $A \cup B$ = پیشامد آنکه A, B حداقل یکی رخ دهد (ح)

= $A' \cup B' = (A \cap B)'$ = پیشامد آنکه A, B حداقل یکی رخ ندهد (خ)

= $(A \cap B)'$ = هر دو با هم رخ ندهند = پیشامد آنکه A, B حداکثر یکی رخ دهد (د)

۱۱۴۴- هر کدام از اعداد دو رقمی که می توان با ارقام ۰, ۱, ۳, ۴, ۵ نوشت را روی کارتهایی نوشته ایم. یک کارت را به تصادف برمی داریم، اگر بدانیم عدد روی کارت زوج است و پیشامد A آن باشد که این عدد بر ۳ بخشپذیر باشد و پیشامد B آن باشد که عدد بر ۵ بخشپذیر باشد. مطلوب است:

= فضای نمونه (الف)

= پیشامد A (ب)

= پیشامد B (پ)

= $A - B$ = پیشامد آنکه A رخ دهد اما B رخ ندهد (ت)

= $B - A$ = پیشامد آنکه B رخ دهد اما A رخ ندهد (ث)

ج) $A \cap B =$ پیشامد آنکه A, B هر دو رخ دهند

چ) $A' \cap B' = (A \cup B)' =$ پیشامد آنکه A, B هیچکدام رخ ندهند

ح) $A \cup B =$ پیشامد آنکه A, B حداقل یکی رخ دهد

خ) $A' \cup B' = (A \cap B)' =$ پیشامد آنکه A, B حداقل یکی رخ ندهد

د) $(A \cap B)' =$ هر دو با هم رخ ندهند $=$ پیشامد آنکه A, B حداکثر یکی رخ دهد

۱۱۴۵- در پرتاب ۲ تاس پیشامد A آن است که عدد ۵ دیده شود و پیشامد B آن است که مجموع اعداد رورده کمتر از ۱۰ باشد. مطلوب است:

الف) پیشامد آنکه A, B حداکثر یکی رخ دهد.

ب) فقط یکی از پیشامدهای A, B رخ دهد.

۱۱۴۶- در پرتاب ۳ سکه اگر A پیشامد آن باشد که برآمدها مثل هم باشند A' چند برآمد دارد؟

۱۱۴۷- در هر مورد نمودار ون مناسبی رسم کنید.

الف) فقط A رخ دهد یا فقط B رخ دهد.

ب) دو پیشامد A, B همزمان رخ ندهند.

پ) A, B هر دو رخ دهند.

ت) از A, B حداقل یکی رخ ندهد.

ث) A, B هیچکدام رخ ندهند.

۱۱۴۸- دو تاس می ریزیم. اگر A پیشامد متمایز بودن اعداد رو شده و B پیشامد آنکه عدد رو شده یکی از تاس ها مربع عدد دیگر باشد و C پیشامد آن باشد که حداقل یکی از اعداد رو شده اول باشند. تعداد اعضای پیشامدهای زیر را بیابید.

الف) $A - B$

ب) $B - C$

پ) $A - C$

ت) $B \cap A'$

ت) $C \cap B'$

۱۱۴۹- در پرتاب ۲ تاس، اگر A پیشامد آن باشد که مجموع دو تاس ۵ باشد و B پیشامد آن باشد که اعداد رو شده متوالی باشند و C پیشامد زوج بودن اعداد رو شده باشد. کدام در پیشامد زیر سازگار و کدام دسته ناسازگارند؟

الف) A, B

ب) A, C

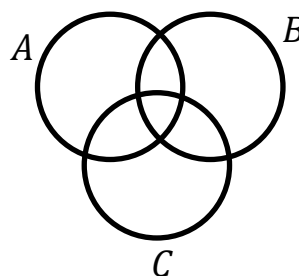
پ) B, C

ت) $A - B, C$

ث) $B - C, A$

۱۱۵۰- در هر کدام از موارد نمودار ون جدیدی مانند رویو رسم و سپس مورد خواسته شده را هاشور بزنید.

فقط A رخ دهد (الف)



از پیشامد های A, B, C فقط یکی رخ دهد (ب)

فقط یکی از پیشامد های A, B رخ دهد یا C رخ دهد (ت)

تنها دو پیشامد رخ دهد (ث)

۱۱۵۱- سکه ای که یک طرف آن عدد ۱ طرف دیگر آن عدد ۲ نوشته شده است را سه بار پرتاب می کنیم. از A پیشامد آن باشد که مجموع اعداد روی سکه در پرتاب اول و دوم برابر ۲ باشد و B پیشامد آن باشد که عدد پرتاب دوم باشد، آنگاه پیشامدهای زیر کدامند؟

الف) $A \cap B =$

ب) $B - A =$

پ) $A \cap B' =$

ت) $A' \cap B' =$

احتمال: اگر S فضای نمونه یک آزمایش تصادفی و A یک پیشامد در فضای نمونه S باشد. احتمال رخ دادن A را با $P(A)$ که عددی حقیقی در

بازه $[0, 1]$ است را بصورت مقابل تعریف می کنیم: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

نکته:

$$P(\phi) = 0, \quad P(S) = 1, \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

احتمال پیشامد متمم A :

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$A, B \text{ ناسازگار} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \text{ یا } P(A - B) = P(A \cup B) - P(B)$$

۱۱۵۲- دو تاس را همزمان پرتاب می کنیم، احتمال آنکه اعداد روی تاس متوالی باشند. چقدر است؟ ج: $\frac{5}{18}$

۱۱۵۳- حروف کلمه «فروشنده» را به تصادف کنار هم چیده ایم، احتمال آنکه:

الف) کلمه مورد نظر با «ف» شروع شود چقدر است؟ ج: $\frac{1}{7}$

ب) کلمه مورد نظر با «ف» پایان پذیرد، چقدر است؟

پ) در کلمه ساخته شده حروف کلمه «فروش» کنار هم باشند، چقدر است؟ ج: $\frac{4}{35}$

ت) در کلمه ساخته شده کلمه ی «فروش» دیده شود، چقدر است؟ ج: $\frac{1}{210}$

ث) در کلمه ساخته شده حروف کلمه «فروش» یک در میان باشند چقدر است؟ ج: $\frac{1}{35}$

۱۱۵۴- حروف کلمه «function» را بطور تصادفی قرار داده ایم. با چه احتمالی دو حرف n کنار هم هستند؟ ج: $\frac{1}{4}$

۱۱۵۵- حروف کلمه «ساسانیان» را کنار هم قرار داده ایم. با چه احتمالی حروف یکسان کنار هم هستند؟

۱۱۵۶- حروف کلمه «mississippi» را کنار هم قرار داده ایم. با چه احتمالی حروف یکسان کنار هم هستند؟ ج: $\frac{2}{525}$

۱۱۵۷- خانواده ای با سه فرزند خود می خواهند عکس بگیرند با چه احتمالی در ردیفی که ایستاده اند فرزندان یک در میان بین پدر و مادر ایستاده اند؟

۱۱۵۸- در پرتاب سه تاس احتمال آنکه همگی اعداد رو شده زوج یا همگی فرد باشند، چقدر است؟ ج: $\frac{54}{216}$

۱۱۵۹- در خانواده ای ۴ فرزندی مطلوب است احتمال آنکه:

(الف) هر ۴ فرزند از یک جنس باشند.

(ب) تعداد فرزندان دختر بیشتر باشد.

(پ) فرزند اول و آخر دختر باشند.

(ت) خانواده حداقل دارای ۱ پسر باشد.

(ث) خانواده حداکثر دارای ۱ پسر باشد.

(ج) هر ۴ فرزند در یک روز هفته دنیا آمده باشند.

(چ) هر ۴ فرزند در روز یکشنبه دنیا آمده باشند.

(ح) هر ۴ فرزند در ماه مهر دنیا آمده باشند.

(خ) هر ۴ فرزند در یک ماه دنیا آمده باشند.

(د) جشن تولد هر ۴ فرزند در یک روز از سال باشد.

(ذ) هر ۴ فرزند در روزهای مختلف هفته دنیا آمده باشند.

(ر) حداقل ۲ نفر در یک فصل سال متولد شده باشند. (راهنمایی: استفاده از متمم) ج: $\frac{29}{32}$

(ز) حداقل ۲ نفر در یک ماه از سال متولد شده باشند. (راهنمایی: استفاده از متمم) ج: $\frac{41}{96}$

(ژ) هر ۴ فرزند در ماه های متفاوت از سال دنیا آمده باشند. ج: $\frac{55}{96}$

۱۱۶۰- احتمال آنکه نفرات a, b, c در روزهای متفاوت هفته متولد شده باشند چقدر است؟

۱۱۶۱- احتمال تولد فرزند پسر در خانواده ای $\frac{1}{4}$ است. چقدر احتمال دارد فقط فرزند اول و آخر خانواده از یک جنس باشند؟

ج: $\frac{9}{128}$

۱۱۶۲- در یک خانواده سه فرزندی اگر فرزند اول دختر باشد، با چه احتمالی دو فرزند دیگر پسر هستند؟ $\frac{1}{4}$:ج

۱۱۶۳- در یک خانواده ۴ فرزندی بزرگترین فرزند دختر است. احتمال آنکه هر سه فرزند دیگر از یک جنس باشند چقدر است؟

۱۱۶۴- در یک خانواده سه فرزندی با چه احتمالی حداقل یک فرزند دختر داریم؟

۱۱۶۵- احتمال آنکه ۱۰ نفر برتر کلاس شما در ماه مهر دنیا آمده باشند، چقدر است؟

۱۱۶۶- احتمال آنکه در یک خانواده ۵ فرزندی هیچ دو فرزندی در یک روز از سال متولد نشده باشند، چقدر است؟

۱۱۶۷- چقدر احتمال دارد سه دوست در یک ماه دنیا آمده باشند؟ $\left(\frac{1}{12}\right)^3$:ج

۱۱۶۸- در خانواده ۳ فرزندی احتمال وقوع کدام پیشامد بیشتر است؟

الف) فرزندان یک در میان پسر یا دختر باشند.

ب) فرزند سوم دختر باشد.

پ) فقط فرزند سوم دختر باشد.

ت) هر سه فرزند از یک جنس باشند.

ث) فقط دو پسر یا فرزندان یک در میان پسر باشند.

ج) دو فرزند اول جنسیت متفاوت داشته باشند.

نکته برای دانش آموزان سفتکوش:

احتمال آنکه خانواده با n فرزند دقیقاً k فرزند پسر (یا دختر) داشته باشد برابر است با: $P(A) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

اگر یک سکه n بار پرتاب شود احتمال آنکه دقیقاً k بار «رو» (یا پشت) بیاید برابر است با: $P(A) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

۱۱۶۹- در خانواده ای ۶ فرزندی مطلوب است احتمال آنکه خانواده دارای:

الف) فقط ۲ فرزند دختر باشد. ج: $\frac{15}{64}$

ب) حداقل ۴ فرزند پسر باشد. ج: $\frac{22}{64}$

پ) حداکثر ۴ فرزند دختر باشد اما همه فرزندان پسر نباشند. ج: $\frac{56}{64}$

۱۱۷۰- احتمال اینکه در یک خانواده ۴ فرزندی دو فرزند دختر و دو فرزند پسر باشد، کدام است؟

(راهنمایی: این هم معنا با جمله دقیقاً ۲ فرزند دختر باشند، است.) ج: $\frac{6}{16}$

۱۱۷۱- در خانواده ای ۵ فرزندی احتمال اینکه این خانواده حداکثر ۴ پسر داشته باشد، کدام است؟ (راهنمایی: استفاده از متمم)

ج: $\frac{31}{32}$

۱۱۷۲- در خانواده ۴ فرزندی احتمال آنکه تعداد دختران بیشتر باشد، کدام است؟

(راهنمایی: این هم معنا با جمله داشتن دقیقاً ۳ دختر یا دقیقاً ۴ دختر است.) ج: $\frac{5}{16}$

۱۱۷۳- در یک خانواده ۴ فرزندی با کدام احتمال:

الف) خانواده دارای حداقل یک دختر یا حداقل یک پسر است؟ (راهنمایی: استفاده از متمم) ج: $\frac{14}{16}$

ب) خانواده دارای هم پسر و هم دختر باشد اما تعداد پسر و دختر یکسان نباشند؟ ج: $\frac{8}{16}$

پ) چند درصد احتمال دارد سه فرزند آنها دختر باشد. ۲۵ درصد ج:

ت) این خانواده دارای ۲ فرزند پسر و ۲ دختر است؟ (راهنمایی: هم معنی با دقیقاً ۲ دختر) ج: $\frac{3}{8}$

۱۱۷۴- زوجی آرزو دارند در آینده صاحب ۵ فرزند شوند! بیشترین تعداد دختری که با بیشترین احتمال به دنیا می آید چند نفرند؟
ج: ۳

۱۱۷۵- در خانواده ای ۶ فرزندی مطلوب است احتمال آنکه:

الف) تعداد دختران بیشتر باشد؟

ب) حداکثر ۴ دختر داشته باشند؟

۱۱۷۶- در خانواده ای ۳ فرزندی A پیشامد هم جنس بودن فرزندان و B پیشامد آنکه فرزند اول پسر باشد. آیا A, B سازگارند؟
 A', B چطور؟

۱۱۷۷- در خانواده ای ۶ فرزندی احتمال آنکه فرزندان پسر و دختر ۲ تا اختلاف داشته باشند. چقدر است؟ ج: $\frac{15}{32}$

۱۱۷۸- در خانواده ای ۴ فرزندی اگر خانواده حداقل ۲ فرزند پسر داشته باشد، احتمال آنکه تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشد، چقدر است؟ ج: $\frac{6}{11}$

۱۱۷۹- از بین اعداد سه رقمی عددی را انتخاب کرده ایم، احتمال آنکه حداقل یکبار عدد ۵ در ارقام باشد. چقدر است؟ ج: $\frac{252}{900}$

۱۱۸۰- عددی ۲ رقمی انتخاب کرده ایم، احتمال آنکه این عدد بر ۱۱ بخشپذیر باشد، چقدر است؟

۱۱۸۱- از مجموعه ی N_{99} عددی را به تصادف انتخاب کرده ایم، با چه احتمالی

(الف) عدد مربع کامل است؟

(ب) عدد توانی از ۳ است؟

(پ) عدد مکعب کامل است؟

(ت) عدد بر ۵ بخشپذیر و زوج است؟

۱۱۸۲- از بین اعداد طبیعی بین ۵۰ و ۳۰۱ عددی را به تصادف برگزیده ایم، با کدام احتمال این عدد بر ۶ یا ۷ بخشپذیر است اما

مضرب ۴۲ نمی باشد؟ ج: ۰/۲۶

۱۱۸۳- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ بدون تکرار ارقام عدد سه رقمی زوج ساخته ایم. یکی از اعداد را به تصادف انتخاب می کنیم، مطلوب است احتمال آنکه:

(الف) آن عدد کمتر از ۲۰۰ باشد. (پیشامد A)

(ب) آن عدد بر ۵ بخشپذیر باشد. (پیشامد B)

(پ) A رخ دهد اما B رخ ندهد.

(ت) A ، B هیچ یک رخ ندهند.

(ث) از A ، B حداکثر یکی رخ دهد.

۱۱۸۴- هر کدام از اعداد ۲ رقمی که می توان با کنار هم گذاشتن دو کارت از کارت هایی که روی آنها ۰, ۱, ۲, ۳, ۴ نوشته شده، ساخت را در نظر بگیرید. اگر یکی از این اعداد را به تصادف برداریم، احتمال آن را بدست آورید که آن عدد:

(الف) زوج باشد اما بر ۳ بخشپذیر نباشد.

(ب) زوج و بر ۳ بخشپذیر باشد.

(پ) اول باشد.

(ت) بر ۹ بخشپذیر باشد.

۱۱۸۵- با ۴ رقم ۰, ۱, ۲, ۳ عدد چهار رقمی ساخته ایم، اگر یکی را به تصادف برگزینیم با کدام احتمال مضرب ۶ است؟ ج: $\frac{10}{18}$

۱۱۸۶- از بین اعداد سه رقمی، عددی برگزیده ایم، با کدام احتمال عدد ۲ در آن دیده نمی شود؟ ج: $\frac{648}{900}$

۱۱۸۷- با اعداد مجموعه N_4 عدد چهار رقمی بدون تکرار ساخته ایم، اگر عددی به تصادف برگزینیم با کدام احتمال آن عدد فرد و بین ۲۰۰۰ تا ۴۰۰۰ است؟ ج: $\frac{6}{24}$

۱۱۸۸- در یک آزمون ۲ گزینه ای شامل ده سؤال که پاسخگویی به سؤالات اجباری است. مطلوب است احتمال آنکه:

(الف) فقط به ۴ سؤال پاسخ درست داده شود. ج: $\frac{210}{1024}$

(ب) حداکثر به ۳ سؤال پاسخ درست داده شود. ج: $\frac{176}{1024}$

(پ) به همه ی سؤالات پاسخ درست داده شود. ج: $\frac{1}{1024}$

۱۱۸۹- یک عدد ۴ رقمی به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آنکه هر ۴ رقم آن مساوی باشند، کدام است؟ ج: $\frac{1}{1000}$

۱۱۹۰- از بین اعداد ۲ رقمی عددی را به تصادف انتخاب کرده ایم. با چه احتمالی بر ۳ و ۷ بخشپذیر است؟

۱۱۹۱- از اعداد طبیعی کمتر از ۵۰۰ عددی را به تصادف انتخاب کرده ایم، با چه احتمالی این عدد مضرب ۴ هست اما مضرب ۶ نیست؟ (راهنمایی: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$) ج: $\frac{83}{500}$

۱۱۹۲- احتمال آنکه بیتا در رشته پزشکی قبول شود ۵۵ درصد و احتمال اینکه در رشته دندانپزشکی قبول شود ۶۰ درصد است. اگر احتمال آنکه حداقل در یکی از ۲ رشته قبول شد ۷۵ درصد، احتمال قبولی او در هر دو رشته چقدر است؟ ج: ۴۰ درصد

۱۱۹۳- تعداد مسافری در یک هتل ۷۲ نفرند که ۲۳ نفرشان تاجر و ۱۲ نفر اولین بار به این شهر سفر کرده اند. ۸ نفر از تاجری برای اولین بار سفر کرده اند. اگر فردی از بین آنها انتخاب شود با چه احتمالی این فرد نه تاجر است و نه برای اولین بار سفر کرده است؟ ج: $\frac{45}{72}$

۱۱۹۴- هر یک از ارقام N_5 را روی ۵ کارت یکسان نوشته ایم، به تصادف ۳ کارت برمی داریم و کنار هم می گذاریم، با کدام احتمال عدد سه رقمی حاصل مضرب ۳ است؟ ج: $\frac{4}{10}$

۱۱۹۵- در پرتاب همزمان ۲ سکه و یک تاس احتمال آنکه حداقل یکبار «رو» و عدد تاس، اول باشد، چقدر است؟

۱۱۹۶- در پرتاب ۲ تاس پیشامد A آن است که عدد ۳ دیده شود و پیشامد B آن است که اعداد یکسان نباشند، مطلوب است احتمال آنکه:

الف) A, B حداقل یکی رخ دهد.

ب) حداقل یکی از دو پیشامد A, B رخ ندهد.

پ) هیچکدام از پیشامدهای A, B رخ ندهند.

ت) از A, B فقط یکی رخ دهد.

ث) در مورد سازگاری A, B نظر دهید.

۱۱۹۷- در پرتاب ۲ تاس احتمال آن را بیابید که :

الف) قدر مطلق تفاضل اعداد رو شده ۲ باشد.

ب) مجموع اعداد رو شده از ۴ بزرگتر باشد.

پ) مجموع اعداد رو شده ۸ یا هر دو عدد زوج باشند.

ت) یکی فرد و یکی زوج باشد اما مجموعشان ۷ نباشد.

ث) حداقل یکی از اعداد رو شده فرد باشد.

۱۱۹۸- در پرتاب ۲ تاس میدانیم عدد تاس اول، عددی اول است، مطلوب است احتمال رخ دادن پیشامدهای زیر:

الف) پیشامد A که هر دو عدد فرد باشند. ج: $\frac{6}{18}$

ب) پیشامد B که مجموع ۲ عدد از ۹ کمتر باشد. ج: $\frac{14}{18}$

پ) پیشامد C که یکبار عدد ۵ بیاید. ج: $\frac{7}{18}$

ت) پیشامد A, C هر دو رخ دهند. ج: $\frac{5}{18}$

ث) پیشامد آنکه A, B, C هیچکدام رخ ندهند. ج: $\frac{1}{18}$

ج) پیشامد A رخ دهد اما B رخ ندهد. ج: $\frac{3}{18}$

۱۱۹۹- در پرتاب ۲ تاس میدانیم عدد تاس دوم مقسوم علیه ۶ است. مطلوب است:

الف) کل پیشامدهای شدنی فضای نمونه $1 - 2^4$ ج:

ب) احتمال رخ دادن پیشامد A اینکه هر دو عدد زوج باشند. ج: $\frac{6}{24}$

پ) احتمال رخ دادن پیشامد B اینکه یکبار عدد ۳ دیده شود. ج: $\frac{8}{24}$

ت) احتمال رخ دادن پیشامد C اینکه مجموع دو عدد از ۵ بیشتر باشد. ج: $\frac{15}{24}$

ث) احتمال رخ دادن پیشامد A, C هر دو. ج: $\frac{5}{24}$

ج) احتمال آنکه سه پیشامد A, B, C هیچکدام رخ ندهد. ج: $\frac{4}{24}$

۱۲۰۰- در پرتاب ۲ تاس اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده فرد است. مطلوب است:

الف) احتمال آنکه هر دو عدد رو شده اول نباشند. ج: $\frac{14}{18}$

ب) احتمال آنکه عدد ۵ در پرتاب ها دیده نشود. ج: $\frac{12}{18}$

پ) تعداد پیشامدهای شدنی فضای نمونه $1 - 2^{18}$ ج:

ت) احتمال آنکه اعداد رو شده یکی مضرب دیگری باشد.

ث) احتمال آنکه اعداد رو شده مجموعشان اول باشد.

تمرین برای دانش آموزان سفتکوش:

۱۲۰۱- اگر تاس را به گونه ای بیندازیم که احتمال روشن شدن اعداد اول $\frac{1}{3} + 4a$ و احتمال رو شدن سایر اعداد $\frac{1}{3} + 4a$ باشد.

مقدار a کدام است؟ ج: $\frac{1}{24}$

۱۲۰۲- دو تاس پرتاب می کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد زوج بیایند، با کدام احتمال حداکثر در ۴ پرتاب نتیجه حاصل می شود؟

$$\frac{9}{36} + \left(1 - \frac{9}{36}\right) \times \frac{9}{36} + \left(1 - \frac{9}{36}\right)\left(1 - \frac{9}{36}\right) \frac{9}{36} + \left(1 - \frac{9}{36}\right)\left(1 - \frac{9}{36}\right)\left(1 - \frac{9}{36}\right) \times \frac{9}{36}$$

۱۲۰۳- یک تاس را حداقل چند بار پرتاب کنیم تا احتمال ظاهر شدن حداقل یکبار «ب» بیش از ۴۰ درصد شود؟

راهنمایی: استفاده از متمم، A' : آمدن دقیقاً صفر بار «پ» بنابراین $P(A') = \frac{\binom{n}{0}}{2^n}$ ج: ۱

۱۲۰۴- در پرتاب ۲ تاس A پیشامد رو شدن دو عدد که مجموعشان ۸ باشد و B پیشامد دیده نشدن عدد ۴ است. آیا A, B

ناسازگارند؟

۱۲۰۵- در پرتاب ۲ تاس A پیشامد آن است که عدد تاس اول زوج است و B پیشامد آن است که عدد تاس دوم، اول است. آیا A, B ناسازگارند؟

۱۲۰۶- در پرتاب ۲ تاس A پیشامد آن است که اعداد رو شده هر دو اول و کمتر از ۴ می باشند و B پیشامد آن است که مجموع اعداد رو شده کمتر از ۱۰ نباشد، آیا A, B ناسازگارند؟

۱۲۰۷- در پرتاب ۶ سکه احتمال آنکه همه ی سکه ها یکسان ظاهر شوند چند برابر آن است که نصف سکه ها رو و نصف دیگر پشت ظاهر شوند است؟
 $\Rightarrow \frac{1}{32}, \frac{1}{32}$ برابر ۰/۱
 ج: $\frac{1}{32}$

۱۲۰۸- دو تاس پرتاب می کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد زوج باشند. با کدام احتمال حداکثر در ۳ پرتاب این نتیجه حاصل می شود؟

$$\text{ج: } \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64}$$

۱۲۰۹- در پرتاب ۲ تاس احتمال آنکه مجموع اعداد رو شده ۷ باشد یا قدر مطلق تفاضل دو عدد بیشتر از ۳ باشد، چقدر است؟

۱۲۱۰- در پرتاب ۲ تاس با کدام احتمال عدد رو شده حداقل یکی از تاس ها مضرب ۳ نباشد و جمع دو عدد رو شده مضرب ۴ باشد، چقدر است؟

۱۲۱۱- دو تاس قرمز و آبی را می ریزیم. با چه احتمالی عدد تاس قرمز بزرگتر از عدد تاس آبی است؟
 ج: $\frac{15}{36}$

۱۲۱۲- سه تاس که ۲ تاس آنها سفید و یکی سیاه است را می اندازیم. احتمال آنکه عدد تاس سیاه کوچکتر از تاس های سفید باشد. چقدر است؟
 ج: $\frac{55}{216}$

۱۲۱۳- در پرتاب ۳ تاس با کدام احتمال عدد رو شده ی فقط یکی از تاس ها ۵ است؟
ج: $\frac{75}{216}$

۱۲۱۴- در پرتاب ۳ تاس با کدام احتمال عدد رو شده ی فقط دو تاس با هم برابر است؟
ج: $\frac{90}{216}$

۱۲۱۵- در پرتاب ۳ تاس با کدام احتمال عدد رو شده ی سه تاس به ترتیب: عدد تاس اول < عدد تاس دوم < عدد تاس سوم خواهد بود؟ (راهنمایی: کافیت سه عدد متفاوت از ۶ عدد برگزینیم)
ج: $\frac{20}{216}$

۱۲۱۶- در پرتاب ۴ سکه با کدام احتمال ۳ بار رو یا ۳ بار پشت می آید؟
ج: $\frac{1}{2}$

۱۲۱۷- در پرتاب همزمان ۲ تاس می دانیم جمع دو عدد رو شده کمتر از ۱۰ است. به کدام احتمال هر دو عدد فردند؟
ج: $\frac{4}{15}$

۱۲۱۸- احتمال آمدن باران به نیامدن باران $\frac{2}{3}$ است. احتمال آمدن باران چقدر است؟
ج: $\frac{2}{5}$

۱۲۱۹- سه نفر a , b , c در مسابقه ای شرکت کرده اند. اگر احتمال برنده شدن a دو برابر احتمال برنده شدن b و احتمال برنده شدن b سه برابر c باشد، احتمال بازنده شدن b چقدر است؟
ج: $\frac{7}{10}$

۱۲۲۰- در پرتاب ۲ سکه و یک تاس با کدام احتمال هر دو سکه رو یا تاس ۶ ظاهر می شود؟
ج: $\frac{3}{8}$

۱۲۲۱- در معادله ی $1 + 12n = \binom{n}{2} + \binom{n}{1}$ ، اگر n تعداد اعضای فضای نمونه باشد، تعداد کل پیشامدها کدام است؟

۱۲۲۲- اگر n سکه را پرتاب کنیم، احتمال رو آمدن چقدر است؟ (راهنمایی: استفاده از متمم)

۱۲۲۳- اگر فضای نمونه N باشد، چند پیشامد وجود دارد که حداقل همه اعداد زوج را دارا باشد؟

۱۲۲۴- چقدر احتمال دارد عقربه ساعتی که روی اعداد ۱ تا ۱۲ می ایستد، روی مضربی از ۳ بایستد؟ ج: $\frac{4}{12}$

۱۲۲۵- دو رأس یک ۶ ضلعی را انتخاب می کنیم. احتمال آنکه مجاور باشند چقدر است؟

(راهنمایی: با مجاورت دو رأس ضلع پدید می آید.) ج: $\frac{6}{15}$

۱۲۲۶- دو رأس یک ۵ ضلعی را انتخاب کرده ایم، احتمال آنکه مجاور نباشند، چقدر است؟ ج: $\frac{1}{4}$

۱۲۲۷- اگر A, B دو پیشامد ناسازگار باشند، $P(A) = \frac{a}{3}$ ، $P(B) = \frac{1}{4}$ باشد. حدود a کدام است؟ ج: $[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$

۱۲۲۸- اگر احتمال رخ ندادن A برابر $\frac{3}{7}$ و احتمال رخ دادن B برابر $\frac{7}{10}$ و احتمال اینکه حداقل یکی از A, B رخ دهند $\frac{9}{10}$ باشد. احتمال آنکه هر دو رخ دهند چقدر است؟ ج: $\frac{5}{10}$

۱۲۲۹- اگر $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $P(A') = \frac{3}{4}$ ، A, B ناسازگار باشند. حاصل $P(A \cup B)$ کدام است؟ ج: $\frac{7}{12}$

۱۲۳۰- اگر A, B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند که A زیرمجموعه B باشد و $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ ، $P(A) = \frac{1}{4}$ باشد. $P(B)$ کدام است؟

۱۲۳۱- اگر $P(A) = \frac{1-2a}{3}$ باشد حدود a کدام است؟

۱۲۳۲- اگر تعداد اعضای پیشامد A برابر ۴ و احتمال رخ دادن پیشامد A' برابر $\frac{3}{5}$ باشد، تعداد پیشامدهای ممکن کدام است؟

۱۲۳۳- اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ ، $A \subseteq B$ باشد، $P(B)$ کدام است؟ ج: $\frac{1}{3}$

۱۲۳۴- از بین دانش آموزان مدرسه ۳۰ درصد والیبال، ۲۵ درصد بسکتبال بازی می کنند. اگر ۱۱ درصد هردو رشته را بازی کنند، دانش آموزی که بطور تصادفی انتخاب می شود با چه احتمالی هیچ کدام از دو رشته را بازی نمی کند؟ ج: $\frac{56}{100}$

۱۲۳۵- از والدین یک دانش آموز یکی شان به جلسه انجمن مدرسه می رود، احتمال آنکه پدر برود $0/7$ و احتمال آنکه مادر برود $0/6$ است. احتمال آنکه یکی برود چقدر است؟

۱۲۳۶- از دانش آموزان مدرسه ای ۵۰۰ نفره، ۱۲۰ نفر به نقاشی، ۲۳۰ نفر به خطاطی و ۸۰ نفر به هردو رشته علاقه دارند، اگر یکی را به تصادف انتخاب کنیم با کدام احتمال به هیچ رشته ای علاقه ندارد؟ با کدام احتمال فقط به یک رشته علاقه دارد؟

۱۲۳۷- از بین ۵ نفر می خواهیم سه نفر را انتخاب کنیم. احتمال آنکه یک شخص خاصی انتخاب شود چقدر است؟ ج: $\frac{6}{10}$

۱۲۳۸- اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(A' \cap B') = \frac{11}{20}$ باشند، $P(B - A)$ را بدست آورید. ج: $\frac{1}{5}$

۱۲۳۹- اگر A, B دو پیشامد ناسازگار باشند و $P(A - B) = \frac{1}{5}$ ، $P(B - A) = \frac{3}{10}$ باشد. مقدار $P(A \cup B)$ را بدست آورید. ج: $\frac{1}{2}$

۱۲۴۰- درستی عبارات زیر را بررسی کنید.

الف) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

ب) $1 - P(A') - P(A \cap B) = P(A \cap B')$

پ) $1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = P(A' \cap B')$

ت) $P(A' \cup B) - P(A \cap B) = 1 - P(A)$

۱۲۴۱- اگر $P(B - A) = \frac{1}{17}$ ، $P(A - B) = \frac{2}{17}$ ، $P(B) = 3P(A)$ باشند. $P(A \cup B)$ کدام است؟ ج: $\frac{14}{17}$

۱۲۴۲- اگر A, B, C سه پیشامد مجزا باشند و $P(A \cup B) = \frac{2}{25}$ ، $P(A \cup C) = \frac{3}{50}$ ، $P(B \cup C) = \frac{1}{10}$ باشند. احتمال آنکه حداقل یکی از سه پیشامد A, B, C رخ دهند چقدر است؟ ج: $\frac{3}{25}$

۱۲۴۳- در کیسه ای شامل ۵ مهره سفید، ۳ مهره آبی و ۴ مهره قرمز به تصادف ۲ مهره برمی داریم. اگر بدانیم دو مهره سفید نیستند با چه احتمالی همرنگ هستند؟ ج: $\frac{3}{7}$

۱۲۴۴- از جعبه ای شامل ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی، سه توپ به تصادف و پی در پی بر می داریم. احتمال آنکه فقط توپ اول و سوم هم رنگ باشند را در دو حالت زیر بررسی کنید؟

حالت اول: با جایگذاری

حالت دوم: بدون جایگذاری

۱۲۴۵- از محفظه ای در آزمایشگاه ۲ موش رها شده است. اگر داخل محفظه ۵ موش سالم و ۴ موش بیمار بوده باشد. با چه احتمالی حداقل یکی از موش های رها شده بیمار بوده است؟

۱۲۴۶- در جعبه ای ۳ مهره نارنجی، ۵ مهره بنفش و ۴ مهره زرد موجود است. اگر سه مهره به تصادف پی در پی و بدون جایگذاری خارج کنیم، مطلوب است احتمال آنکه:

الف) هر سه مهره بنفش باشند.

ب) هر سه مهره هم رنگ باشند.

پ) هر کدام از یک رنگ باشند.

ث) ۲ مهره نارنجی باشد.

ج) حداقل ۲ مهره نارنجی باشد.

۱۲۴۷- از بین ۵ دختر و ۶ پسر می خواهیم تیمی سه نفره بسازیم. مطلوب است احتمال آنکه:

الف) تیم از یک جنسیت باشند.

ب) تیم از یک جنسیت نباشند.

پ) تیم دخترانه باشد.

ت) دخترن بیشتر باشند اما تیم از یک جنسیت نباشد.

۱۲۴۸- در جعبه ای شامل ۴ مهره سفید و ۷ مهره سیاه، هشت مهره برمی داریم. احتمال آنکه مهره های باقی مانده در کیسه سفید

باشد چقدر است؟ $\frac{130}{165}$ ج:

۱۲۴۹- از بین ۳ دانش آموز پسر و ۴ دانش آموز دختر، ۳ نفر را برگزیده ایم. مطلوب است احتمال آنکه:

الف) حداقل ۲ پسر انتخاب شود.

ب) حداکثر ۲ پسر انتخاب شود.

پ) فقط ۲ پسر انتخاب شود.

۱۲۵۰- از کیسه ای شامل ۴ مهره قرمز و ۶ مهره آبی، دو مهره به تصادف برمی داریم. مطلوب است احتمال آنکه:

الف) مهره ها هم رنگ نباشند. (در حالت پی در پی و بدون جایگذاری) $\frac{48}{90}$ ج:

ب) مهره ها هم رنگ نباشند. (در حالت برداشتن همزمان) $\frac{24}{45}$ ج:

۱۲۵۱- از جعبه ای شامل ۴ توپ قرمز و ۵ توپ آبی ۲ توپ به تصادف برمی داریم، مطلوب است احتمال آنکه:

الف) توپ ها هم رنگ باشند. (در حالت برداشتن پی در پی و با جایگذاری) $\frac{41}{81}$ ج:

ب) توپ ها هم رنگ باشند. (در حالت برداشتن همزمان) $\frac{16}{36}$ ج:

۱۲۵۲- در کیسه ای ۶ مهره قرمز و ۲ مهره آبی قرار دارد. اگر مهره ای به تصادف برداریم احتمال قرمز بودن چند برابر احتمال آبی بودن آن مهره است؟

۱۲۵۳- از کیسه ای شامل ۳ توپ قرمز، ۴ توپ آبی و ۳ توپ سبز، سه توپ به تصادف و پی در پی بر می داریم چقدر احتمال دارد که:

(الف) توپ ها هم رنگ باشند (با جایگذاری)

(ب) توپ ها هم رنگ باشند. (بدون جایگذاری)

(پ) توپ اول و آخر سبز باشد. (با جایگذاری)

(ت) توپ اول و آخر سبز باشد. (بدون جایگذاری)

(ث) بیشتر توپ ها قرمز باشند. (با جایگذاری)

(ج) بیشتر توپ ها قرمز باشند. (بدون جایگذاری)

۱۲۵۴- از کیسه ای شامل ۵ مهره شماره گذاری شده ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ دو مهره پی در پی بر می داریم. با چه احتمالی مهره های انتخابی متوالی اند؟ ج: $\frac{8}{25}$

۱۲۵۵- از کیسه ای شامل ۲ مهره سفید و k مهره سیاه، دو مهره به تصادف پی در پی و بدون جایگذاری بر می داریم. اگر احتمال غیر هم رنگ بودن مهره ها ۴۸ درصد باشد. مقدار k کدام است؟ ج: ۳

۱۲۵۶- در کیسه ای ۵ مهره شماره گذاری شده بصورت ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ وجود دارد. این مهره ها را بطور تصادفی پی در پی و بدون جایگذاری برمی داریم. با کدام احتمال دومهره با شماره فرد متوالیاً خارج نمی شوند؟
ج: $\frac{12}{120}$

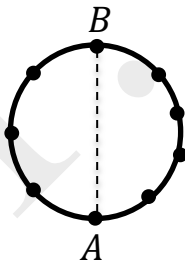
۱۲۵۷- در کیسه ای ۸ مهره که روی آن حروف «ش، س، م، د، ن، ذ، ر، ح» نوشته شده اند. داریم. حال مهره ها را به تصادف، پی در پی و بدون جایگذاری خارج می کنیم. با کدام احتمال هیچ دومهره ای باحروف نقطه دار متوالیاً خارج نمی شوند؟

ج: $\frac{\binom{6}{3} \times 3! \times 5!}{8!}$

۱۲۵۸- چهار دختر و سه پسر به تصادف روی ۱۰ صندلی که در ۲ ردیف ۵ تایی قرار دارند، می نشینند. با کدام احتمال پسرها در یک ردیف می نشینند؟
ج: $\frac{\binom{2}{1}\binom{5}{3} \times 3! \times \binom{7}{4} \times 4!}{\binom{10}{7} \times 7!}$

۱۲۵۹- در جعبه ای ۴ توپ سفید و ۵ توپ سیاه و ۳ توپ قرمز وجود دارد. سه توپ به تصادف برمی داریم، با کدام احتمال حداکثر ۲ توپ سیاه است؟ (راهنمایی: استفاده از متمم)
ج: $\frac{21}{22}$

۱۲۶۰- ۴ نقطه از ۹ نقطه روی محیط دایره ای را بطور تصادفی انتخاب کرده ایم و با آن ۴ ضلعی ساخته ایم. با چه احتمالی AB یک ضلع آن چهار ضلعی است؟
ج: $\frac{1}{14}$



۱۲۶۱- در کیسه ای شامل m توپ که ۴ تای آنها سفید است ۲ توپ به تصادف برداشته ایم و اگر احتمال سفید بودن هر دو مهره $\frac{1}{13}$ باشد، تعداد مهره هایی که سفید نیستند چند تاست؟
ج: ۹

۱۲۶۲- از بین ۴ دانش آموز کلاس دهم و ۶ دانش آموز کلاس یازدهم و ۳ دانش آموز کلاس دوازدهم بطور تصادفی ۳ نفر را برگزیده ایم. احتمال آنکه ۲ نفر همکلاسی نباشند، کدام است؟
ج: $\frac{261}{286}$

۱۲۶۳- از بین ۶ جفت دستکش، ۴ لنگه را بطور تصادفی برمی داریم. با چه احتمالی هیچ جفت دستکش در آنها وجود ندارد؟
ج: $\frac{16}{33}$

۱۲۶۴- در بین ۱۵ کتاب، ۲ کتاب ریاضی و ۵ کتاب هندسه وجود دارند. ۱۱ کتاب رابه تصادف بر می داریم. در چند حالت فقط یک کتاب ریاضی و حداقل ۴ کتاب هندسه انتخاب می شوند؟
ج: $\binom{2}{1} \binom{5}{4} \binom{8}{6} + \binom{2}{1} \binom{5}{5} \binom{8}{5}$

۱۲۶۵- از کیسه ای که محتوای آن ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز است. به تصادف سه مهره خارج می کنیم، با کدام احتمال بین مهرهای خارج شده مهره سیاه نیست یا مهره سفید نیست؟
ج: $\frac{9}{22}$

تمرینات برای دانش آموزان سفتکوش:

۱۲۶۶- می خواهیم این ۷ خانواده یک شورای سه نفره شامل پدر و مادر بسازیم. با چه احتمالی افراد انتخاب شده هر نفر از یک خانواده است؟
ج: $\frac{280}{366}$

۱۲۶۷- اسب های A, B, C در حال مسابقه اند. با چه احتمالی هر سه نفر باهم به خط پایان می رسند؟
ج: $\frac{1}{13}$

۱۲۶۸- از بین اعداد دو رقمی عددی را انتخاب کرده ایم، احتمال آنکه مجموع ارقام آن از ۱۵ بزرگتر باشد را بدست آورید.
ج: $\frac{1}{15}$

۱۲۶۹- با حروف کلمه ی «Banana» کلمات شش حرفی نوشته ایم، یکی را به تصادف انتخاب می کنیم. با چه احتمالی در کلمه ی انتخاب شده حروف یکسان کنار هم هستند؟
ج: $\frac{1}{10}$

۱۲۷۰- دو سکه و یک تاس را می اندازیم. با چه احتمالی سکه ها حداقل یک بار رو تاس عددی مضرب ۳ می آید؟
ج: $\frac{1}{4}$

۱۲۷۱- اگر A, B دو پیشامد مستقل و $P(A \cap B) = 2P(A) = 3P(B)$ باشد. مقدار $P(B')$ را بیابید.
ج: $\frac{1}{3}$

۱۲۷۲- اگر $P(B) = \frac{3}{8}$, $P(A) = \frac{3}{4}$ باشد. آیا A, B سازگارند؟
خیر ج:

۱۲۷۳- ۶ زوج در تالار دانشگاه ازدواج دانشجویی برگزار کرده اند ۴۰ نفر از آنها برای رفتن به سفر کربلا انتخاب می شوند. با چه احتمالی ممکن است. فقط یک عروس و داماد بین ۴ نفر باشد؟
ج: $\frac{240}{495}$

۱۲۷۴- ۲ تاس را آنقدر می ریزیم تا مجموع دو عدد رو شده ۶ شود. احتمال آنکه کمتر از ۴ پرتاب لازم باشد، چقدر است؟

$$\text{ج: } \frac{5}{36} + \left(1 - \frac{5}{36}\right) \times \frac{5}{36} + \left(1 - \frac{5}{36}\right) \times \left(1 - \frac{5}{36}\right) \times \frac{5}{36}$$

۱۲۷۵- خانواده ای با ۴ فرزند می خواهند کنار هم بایستند و عکس بگیرند. با چه احتمالی پدر و مادر در کنار هم قرار نمی گیرند؟

$$\text{ج: } \frac{480}{720}$$

۱۲۷۶- اگر $P(A' \cap B') = \frac{1}{8}$, $P(A') = \frac{5}{8}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ باشد. مقدار $P(B)$ را بیابید.
ج: $\frac{3}{4}$

۱۲۷۷- اگر احتمال وقوع پیشامد A برابر $\frac{1}{4}$ و احتمال وقوع پیشامد A یا B برابر $\frac{1}{3}$ باشد و $A \subset B$ باشد، احتمال وقوع پیشامد B را بدست آورید. ج: $\frac{1}{3}$

۱۲۷۸- اگر $P(A' \cup B') = \frac{4}{5}$ ، $P(A) = \frac{3}{5}$ باشد. مقدار $P(A - B)$ را بدست آورید. ج: $\frac{2}{5}$

۱۲۷۹- اگر A ، B مستقل باشند و $P(A \cup B) = 0/8$ ، $P(A) = 0/5$ ، مقدار $P(B')$ را بیابید. ج: $\frac{6}{10}$

۱۲۸۰- یک سکه را حداقل چند بار پرتاب کنیم، تا احتمال آمدن حداقل یکبار رو بیش از ۹۸ درصد شود؟ تشریحی: ج:

$$\Rightarrow n = 6 \Rightarrow \frac{1}{2^n} \geq \frac{98}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{98}{100} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{2^n} \Rightarrow P(A') = \frac{1}{2^n} = \frac{\binom{n}{1}}{2^n} \Rightarrow \text{آمدن دقیقاً صفر بار رو: } A' \Rightarrow \text{متمم آمدن حداقل یکبار رو}$$

۱۲۸۱- چقدر احتمال دارد در یک خانواده ۴ نفره حداقل دو نفرشان در یک ماه از سال بدنيا آمده باشند؟ ج: $\frac{41}{96}$

۱۲۸۲- دو تاس را می اندازیم تا برای اولین بار اعداد رو شده مجموعشان ۸ شود. با کدام احتمال حداکثر در سه پرتاب نتیجه حاصل می شود؟ ج: $\frac{5}{36} + (1 - \frac{5}{36}) \times \frac{5}{36} + (1 - \frac{5}{36}) \times (1 - \frac{5}{36}) \times \frac{5}{36}$

۱۲۸۳- سکه ای را پرتاب می کنیم، اگر رو آمد تاس می اندازیم و گرنه ۳ سکه ی دیگر می اندازیم. با چه احتمالی دقیقاً یک «رو» ظاهر می شود؟ ج: $\frac{4}{5}$

۱۲۸۴- با استفاده از حروف کلمه ی *Ataxia* چند کلمه ی ۶ حرفی می توان نوشت که سه حرف A در کنار هم و در انتهای کلمه باشند؟ ج: $\frac{6}{120}$

۱۲۸۵- از بین اعداد سه رقمی عددی را به تصادف انتخاب کرده ایم، با چه احتمالی عدد انتخاب شده حداقل یک رقم تکراری دارد؟

ج: $\frac{252}{900}$

۱۲۸۶- سکه ای را ۶ بار پرتاب می کنیم. احتمال آنکه سومین «رو» در پرتاب آخر بیاید چقدر است؟ تشریحی: ج

○○○○○

خانه آخر رو است پس در پنج جای خالی باید ۲ رو قرار گیرد $n(A) = \binom{5}{2} \Leftarrow n(s) = 2^6$, $P(A) = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$

۱۲۸۷- شاهنگ و شاهنده در یک کلاس ۲۸ نفره درس میخوانند. می خواهیم از این کلاس یک تیم ۵ نفره را به مسابقات علمی

اعزام کنیم، احتمال آنکه شاهنده در این تیم باشد اما شاهنگ نباشد چقدر است؟ ج: $\frac{\binom{26}{4}}{\binom{28}{5}}$

۱۲۸۸- از مجموعه ی N_v سه عدد متمایز انتخاب می کنیم. با چه احتمالی این سه عدد متوالی اند؟ ج: $\frac{5}{35}$

۱۲۸۹- اگر $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ باشند، مقدار $P(B - A)$ را بیابید. ج: $\frac{1}{5}$

۱۲۹۰- از مقسوم علیه های طبیعی عدد ۲۴ یکی را برمی گزینیم، احتمال آنکه اول باشد چقدر است؟ ج: $\frac{2}{8}$

۱۳۰۰- دانا و دنیا با ۵ نفر از دوستان کنار هم ایستاده و در حال عکس گرفتن هستند، احتمال آنکه دقیقاً ۳ نفر بین آنها قرار گیرد

چقدر است؟ ج: $\frac{\binom{5}{3} \times 3! \times 2! \times 5!}{7!} = \frac{1}{7}$

۱۳۰۱- دو تاس را می ریزیم با چه احتمالی عدد رو شده در تاس اول ۶ یا مجموع اعداد روی دو تاس بزرگتر از ۵ می باشد؟ ج: $\frac{26}{36}$

۱۳۰۲- از تعدادی مهره که ۵ تای آنها قرمز است، ۲ مهره به تصادف برمی گزینیم. اگر احتمال قرمز بودن هر دو مهره $\frac{5}{14}$ باشد، تعداد کل مهره ها چند است؟ $3 + 5 = 8$ ج:

۱۳۰۳- از کیسه ای شامل ۵ مهره سفید، ۴ مهره قرمز و ۳ مهره آبی، سه مهره را به تصادف برمی داریم، احتمال آنکه اولی و سومی قرمز باشند را در دو حالت بدون جایگذاری و با جایگذاری بدست آورید.

$$\text{بدون جایگذاری: ج} = \frac{4 \times 3 \times 2}{12 \times 11 \times 10} + \frac{4 \times 8 \times 3}{12 \times 11 \times 10}$$

$$\text{با جایگذاری: ج} = \frac{4 \times 4 \times 4}{12 \times 12 \times 12} + \frac{4 \times 8 \times 4}{12 \times 12 \times 12}$$

۱۳۰۴- روی ۴ وجه تاسی ۳ و روی ۲ وجه دیگر عدد ۶ نوشته شده است. تاس را ۴ بار می اندازیم، با چه احتمالی ۲ مرتبه عدد ۶ می آید؟ $\frac{8}{27}$ ج:

۱۳۰۵- در سؤال بالا به چه احتمالی ۳ مرتبه عدد ۶ می آید. $\frac{8}{81}$ ج:

۱۳۰۶- سه تاس را می اندازیم با چه احتمالی ۳ عدد روشده، سه جمله از یک دنباله هندسی با قدر نسبت یک هستند؟ $\frac{6}{216}$ ج:

۱۳۰۷- در سؤال بالا با چه احتمالی یک دنباله حسابی با قدر نسبت یک می سازند؟ $\frac{4}{216}$ ج:

۱۳۰۸- در مسابقه ی تیراندازی هانیه، حانه و پریا شرکت می کنند. احتمال آنکه پریا به هدف بزند برابر $\frac{1}{3}$ و احتمال آنکه حانه و هانیه به هدف بزنند هر کدام برابر $\frac{1}{4}$ است. احتمال آنکه حداقل یک نفر به هدف بزند چقدر است؟ (راهنمایی: استفاده از متمم) $\frac{5}{8}$ ج:

۱۳۰۹- از ظرفی شامل a مهره ی سفید و $3 - a$ مهره ی سیاه، دو مهره به تصادف انتخاب می کنیم. اگر احتمال هم رنگ نبودن مهره ها $\frac{18}{55}$ باشد، مهره های ظرف چند تاست؟
 ۴۵ یا ۱۱ $2a - 3 = 11$, 24 یا $a = 7$ ج:

۱۳۱۰- در سوال بالا احتمال آنکه فقط یک نفر به هدف بزند، چقدر است؟

$$\frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{4}$$

۱۳۱۱- آذر با احتمال $\frac{2}{5}$ در مسابقه ی تیراندازی به هدف می زند. در سه بار شلیک احتمال آنکه یکبار به هدف بزند چقدر است؟

(راهنمایی: استفاده از متهم) ج: $\frac{98}{125}$

۱۳۱۲- مریم یک تاس و فاطمه ۲ تاس را می اندازند. احتمال آنکه دو عدد تاس در پرتاب ۲ تاس فاطمه برابر عدد تاس مریم باشد چقدر است؟ تشریحی ج:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(اعداد ممکن برای تاس های فاطمه)} \\ \begin{array}{ll} 2 \rightarrow (1, 1) & \rightarrow \frac{1}{6} \times \frac{1}{36} \\ 3 \rightarrow (1, 2)(2, 1) & \rightarrow \frac{1}{6} \times \frac{2}{36} \\ 4 \rightarrow (1, 3)(3, 1)(2, 2) & \rightarrow \frac{1}{6} \times \frac{3}{36} \\ 5 \rightarrow (1, 4)(4, 1)(2, 3)(3, 2) & \rightarrow \frac{1}{6} \times \frac{4}{36} \\ 6 \rightarrow (1, 5)(5, 1)(4, 2)(2, 4)(3, 3) & \rightarrow \frac{1}{6} \times \frac{5}{36} \end{array} \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \frac{1}{6} \left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \dots + \frac{5}{36} \right) = \frac{5}{72}$$

۱۳۱۳- از کیسه ای شامل ۴ مهره سفید و a مهره سیاه دو مهره به تصادف بر می داریم. اگر احتمال هم رنگ بودن مهره ها $\frac{3}{5}$ باشد. تعداد مهره های سیاه چند تاست؟
 $a = 12$ ج:

۱۳۱۴- برای انتخاب شورای ساختمان در یک ساختمان ۷ خانواری دونفر را انتخاب می کنیم. احتمال آنکه زن و شوهر باشند چقدر است؟ ج: $\frac{7}{91}$

۱۳۱۵- برای انتخاب شورای ساختمان در یک ساختمان ۷ خانواری ۴ نفر را برمی گزینیم. احتمال آنکه هیچکدام از یک خانواده نباشند؟ ج: $\frac{560}{1001}$

۱۳۱۶- از کیسه ای شامل ۳ توپ قرمز و ۶ توپ آبی، توپ ها را یکی یکی به تصادف و بدون جایگذاری برمی داریم. احتمال آنکه توپ سوم قرمز و توپ دوم و چهارم آبی باشد چقدر می باشد؟ ج: $\frac{5}{42} + \frac{5}{84}$

۱۳۱۷- سه عدد متوالی از بین اعداد ۵، ۶، ۷، ...، ۲۵ را به تصادف برگزیده ایم. با چه احتمالی عدد بزرگتر ۱۳ می باشد؟ ج: $\frac{1}{19}$

۱۳۱۸- اگر کوزه هایی که یک سفالگر در کارگاه خود می سازد ۹۰ درصد شکستگی نداشته باشند و آیتا ۴ کوزه برای ساخت یک کار هنری خریداری کند، با چه احتمالی فقط یکی از آنها شکستگی دارد؟ ج: $\frac{1}{11} \times \frac{9}{11} \times \frac{9}{11} \times \frac{9}{11}$

۱۳۱۹- اگر ۶۰ درصد دانش آموزان مدرسه به رنگ آبی و ۴۰ درصد آنها به رنگ قرمز علاقه داشته باشند و ۱۰ درصد به هر دو رنگ علاقه مند باشند. اگر دانش آموزی از بین آنها انتخاب شود با چه احتمالی:

الف) فقط به رنگ آبی علاقه دارد؟ ج: $\frac{50}{100}$

ب) فقط به یک رنگ (آبی یا قرمز) علاقه دارد؟ ج: $\frac{80}{100}$

پ) حداقل به به یک رنگ علاقه دارد؟ ج: $\frac{90}{100}$

ت) به هیچ کدام از این ۲ رنگ علاقه ندارد؟ ج: $\frac{10}{100}$

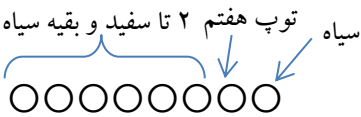
۱۳۲۰- دوتاس را با هم پرتاب می کنیم. مجموع اعداد رو شده m است. با چه احتمالی مقدار m بیشترین حالت ممکن است؟ ج: ۷

۱۳۲۱- در ظرفی ۴ مهره سفید و بقیه سیاه هستند، اگر ۲ مهره سفید به ظرف اضافه شود، احتمال خارج شدن یک مهره سیاه $\frac{1}{11}$ کم می شود. تعداد مهره های سیاه چقدر بوده است؟ ج: ۴ یا ۶ $a =$

۱۳۲۲- دور یک میدان ۶ سرباز ایستاده اند، احتمال آنکه دوسرباز هم شهری کنار هم ایستاده باشند چقدر است؟ ج: $\frac{48}{120}$

۱۳۲۳- از ۵ دانش آموز با چه احتمالی حداقل دو نفرشان در یک ماه از سال بدنیا آمده اند؟ ج: $\frac{89}{144}$

۱۳۲۴- از جعبه ای شامل ۳ توپ سفید و ۵ توپ سیاه، توپ ها را یکی یکی خارج می کنیم. احتمال آنکه سومین توپ سفید خارج شده، توپ هفتم باشد، چقدر است؟ تشریحی: ج



$$\left. \begin{array}{l} \text{انتخاب ۲ جایگاه برای توپ سفید} = \binom{6}{2} \\ \text{جایگشت توپهای سیاه} = 5! \\ \text{جایگاه توپهای سفید} = 3! \end{array} \right\} \Rightarrow n(A) = \binom{6}{2} 3! \times 5!$$

$$n(S) = 8! \Rightarrow P(A) = \frac{\binom{6}{2} 3! \times 5!}{8!} = \frac{15 \times 6 \times 5!}{8 \times 7 \times 6 \times 5!} = \frac{15}{56}$$

۱۳۲۵- سؤال بالا را در حالتی حل کنید که دومین توپ سیاه خارج شده، توپ چهارم باشد؟

$$n(B) = \binom{3}{1} \times \binom{4}{3} \times 5! \times 3! \Rightarrow P(B) = \frac{3}{14}$$

مبحث آمار

برخی تعاریف:

آمار: مجموعه ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

علم آمار: مجموعه روش هایی است که در نهایت منجر به قضاوت و پیش بینی مناسب در مورد پدیده ها و آزمایشهای تصادفی می شود.

مراحل علم آمار:

۱- جمع آوری اعداد و ارقام ۲- سازماندهی و نمایش ۳- تحلیل و تفسیر داده ها ۴- نتیجه گیری

جامعه: مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد جامعه یا جمعیت می گویند.

عضو جامعه: به هر یک از افراد یا اشیاء عضو جامعه میگویند.

نمونه: بخشی از جامعه که برای مطالعه انتخاب می شود را نمونه می گویند.

عضو نمونه: به هر یک از افراد یا اشیای انتخاب شده عضو نمونه می گویند.

سرشماری: اگر تعداد کل افراد جامعه را بشماریم، سرشماری انجام داده ایم.

۱۳۲۶- مطلب زیر را در نظر بگیرید و مراحل علم آمار را برای آن بنویسید.

«براساس اعداد و ارقام جمع آوری شده و با استفاده از روش های مدل بندی هواشناسی، پیش بینی می شود که دمای هوای چند روز آینده کمی گرم تر است.»

ج: ۱- جمع آوری ارقام و اعداد ۲- ساماندهی و مرتب سازی و نمایش آمار بدست آمده هواشناسی ۳- تحلیل و تفسیر آمار حاصل ۴- پیش بینی گرم تر شدن هوا

۱۳۲۷- مطلب زیر را در نظر بگیرید و مراحل علم آمار را برای آن بنویسید.

«براساس اعداد و ارقام جمع آوری شده و با استفاده از روش های مدل بندی جامعه شناسی، پیش بینی می شود که جمعیت کشور در سال آینده ۱ درصد زیاد می شود.»

ج: ۱- جمع آوری اعداد و ارقام ۲- سازماندهی و نمایش آمار مربوط به جمعیت هر شهر و استان ۳- تحلیل و تفسیر آمار حاصل ۴- پیش بینی زیاد شدن جمعیت به اندازه ۱ درصد

۱۳۲۸- برای مطالب زیر جدول خواسته شده را تکمیل کنید.

الف) کارخانه ای در طول یک هفته ۵۰۰۰۰ سه راهی برق تولید می کند، برای تشخیص سالم یا معیوب بودن کالای خود در هر هفته ۶۰۰ سه راهی به تصادف انتخاب می شوند.

جامعه	اندازه جامعه	نمونه	اندازه نمونه	عضو جامعه

ب) ۲۰۰ قطعه از ۲۵۰۰ قطعه تولیدی روزانه کارخانه ای را برای یافتن قطعات با نقص فنی را انتخاب کرده اند.

جامعه	اندازه جامعه	نمونه	اندازه نمونه	عضو جامعه

پ) شرکتی که ۳۰۰۰ کارمند دارد می خواهد میزان بازدهی کارمندان را در طول ماه سنجش کند. برای این بررسی ۱۵۰ نفر از کارمندان شرکت را به تصادف انتخاب می کند.

جامعه	اندازه جامعه	نمونه	اندازه نمونه	عضو جامعه

ت) برای بررسی میزان تحصیلات یک شرکت ۴۰۰ نفری با ۱۲ بخش از هر بخش ۳ نفر را تصادفی برگزیدیم.

جامعه	اندازه جامعه	نمونه	اندازه نمونه	عضو جامعه

۱۳۲۹- جاهای خالی را پر کنید.

الف) هدف از دست یابی به بیش بینی مناسب در مورد پدیده ها و آزمایش های تصادفی است.

ب) دومین مرحله علم آمار و سومین مرحله علم آمار است.

پ) اندازه جامعه همواره از اندازه نمونه است.

ت) بررسی همه تعداد اعضای جامعه نام داد.

ث) نمونه انتخابی مناسب باید طوری باشد که همه افاد یا اشیاء کیفیتی در آن باشند.

۱۳۳۰- شخصی در ۶ آزمون مهارتی رتبه های ۸، ۹، ۱۰، ۱۳، ۱۰، ۱۲، ۱۰ را بدست آورده است. رتبه وی در آزمون نهایی با

توجه به علم آمار چه می تواند باشد؟
۱۰: ج

برخی تعاریف دیگر:

متغیر: ویژگی ای از اعضای یک جامعه است که مورد آن بررسی و مطالعه واقع می شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می کند.

مقدار متغیر: عددی که به ویژگی یک عضو نسبت داده می شود، مقدار متغیر نامیده می شود.

انواع متغیرها

متغیرهای کمی: قابل اندازه گیری اند.

پیوسته: اگر دو مقدار a , b را بتوان اختیار کرد و مقدار بین آنها را نیز می توان اختیار کرد، مانند: قد، وزن، شدت صوت

گسسته: پیوسته نباشد، گسسته است و کاملاً قابل شمارش است. مانند: تعداد انسان ها، تعداد دندان ها، تعداد لباس، تعداد کالا

متغیرهای کیفی: قابل اندازه گیری نیستند.

اسمی: ترتیب ندارند. مانند: گروه فونی، ورزش مورد علاقه، جنسیت افراد، رنگ چشم

ترتیبی: ترتیب دارند. مانند: مراحل تفهیل، هروف الفبا میزان علاقه (کم، متوسط، زیاد)، مراحل زندگی انسان

نکته: مقدار متغیر کمی پیوسته می تواند هم صمیح و هم اعشاری باشد اما مقدار متغیر گسسته فقط عددی حسابی است.

شافص توده بدن:

رابطه ی: $\text{شافص توده بدن} = \frac{\text{وزن}}{(\text{قد})^2}$ که وزن بر حسب kg و قد بر حسب m است.

شاخص تود بدن	طبقه بندی
کمتر از ۱۸/۵	کم وزن
۱۸/۵ تا ۲۴/۹	وزن طبیعی
۲۵ تا ۲۹/۹	اضافه وزن
۳۰ تا ۳۴/۹	چاقی درجه یک
۳۵ تا ۳۹/۹	چاقی درجه دو
بیش از ۴۰	چاقی درجه سه

۱۳۳۱- شاخص توده بدن اشخاص زیر را بیابید و در مورد چاقی این شخص نتیجه گیری کنید.

نفر A: 60 kg با قد 170 m

نفر B: 65 kg با قد 165 m

نفر C: 75 kg با قد 162 m

نفر D: 67 kg با قد 163 m

۱۳۳۲- نوع متغیر را در هر مورد بیان کنید.

.....	رنگ مو		تعداد افراد خانواده
.....	شدت زلزله		گروه خونی
.....	سطح تحصیلات		رنگ چشم
.....	شاخص توده بدن	کیفی تربیتی (ماهر، متوسط، ضعیف)	رتبه بندی کارمندان براساس مهارت
کیفی تربیتی (کم، متوسط، زیاد)	شدت بارندگی		جمعیت روستا
کمی گسسته	سال تولید خودرو	کیفی تربیتی (اول، دوم، ...)	مقام های یک ورزشکار حرفه ای
.....	رنگ خودرو		درجه حرارت بدن
.....	فاصله	کیفی اسمی (دی اکسید کربن، ذرات معلق و ...)	نوع آلاینده های هوا
کیفی اسمی	اصلیت کرد، ترک، لر	متغیر پیوسته	وزن ماهی های موجود در دریا
کیفی اسمی (باران، برف)	نوع بارندگی	متغیر پیوسته	میزان آلودگی هوا
.....	میزان لذت آشپزی	گسسته	تعداد مکالمات تلفنی یک اداره در روز
.....	قطر تنه درخت		تعداد نامه های ارسالی این هفته
.....		کیفی تربیتی (آفتابی، ابری، بارانی و برفی)	وضعیت هوا
.....		کیفی تربیتی (بسیار زیاد، زیاد، متوسط و)	میزان علاقه به ورزش کوهنوردی