فصل ۳ :

توان های گویا و عبارت های جبری

درس اول :

ریشـــه و تـــوان

در سال گذشته با ریشه های دوم و سوم عددها آشنا شده اید .

یادآوری (۱) **ریشه های دوم عدد a :** اگر a عددی حقیقی و نامنفی باشد ، اعداد $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ را ریشه های دوم عدد a می نامیم .

مثال۱ : الف) ریشه های دوم عدد ۴۹ $\big\langle$

زیرا ....

ب) ریشه های دوم عدد ۷ $\big\langle$

زیرا ....

نتیجه : اعداد حقیقی مثبت ، هرکدام **دو ریشهٔ دوم قرینه** دارند . **فقط عدد صفر** ، **یک ریشهٔ دوم** دارد که **مساوی خودش** است . ($\sqrt{0}=0$)

نکته : اعداد حقیقی منفی ، **ریشهٔ دوم** ندارند .

مثلاً : ....

تهیه کننده : شهلا مرادوند - دبیرریاضی ناحیه ۲ اهواز

یادآوری (۲)

ریشهٔ سوم عدد a : اگر a عددی حقیقی باشد ، عدد $\sqrt[۳]{a}$ را ریشهٔ سوم عدد a می نامیم . ...

❋ همهٔ اعداد حقیقی (مثبت یا منفی یا صفر) ریشهٔ سوم دارند که علامتِ این ریشهٔ سوم ، همان علامتِ عددِ داده شده است .

❋ ریشهٔ سوم صفر ، **مساوی خودش** است . ($\sqrt[۳]{۰} = ۰$)

مثال ۲ : الف) ریشهٔ سوم عدد ۲۷ ، عددِ .... است ؛ زیرا ....

ب) ریشهٔ سوم عدد ۵ ، عددِ .... است ؛ زیرا ....

پ) ریشهٔ سوم عدد -۸ ، عددِ .... است ؛ زیرا ....

توجه

در محاسبات ، وقتی زیرِ رادیکال با فرجهٔ فرد ، منفی باشد ، بهتر است ابتدا منفی از رادیکال خارج شود .

به عنوان مثال : $\sqrt[۳]{-۸} = -\sqrt[۳]{۸} = -۲$

توجه

ریشه و **توان** رابطه ای دو سویه با هم دارند . (علامت $\Leftrightarrow$ به این معنی است که هرطرف ، طرف دیگر را نتیجه می دهد)

مثال ۳ : هر یک از تساوی های توانی در زیر را به رادیکالی و تساوی های رادیکالی را به توانی تبدیل کنید .

الف) $(-۳)^۳ = -۲۷ \Leftrightarrow$ ....

ب) $\sqrt{۸۱} = ۹ \Leftrightarrow$ ....

پ) $(-۵)^۳ = -۱۲۵ \Leftrightarrow$ ....

ت) $\sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲} \Leftrightarrow$ ....

ث) $(۰/۲۵)^۲ = ۰/۰۶۲۵ \Leftrightarrow$ ....

ج) $\sqrt[۳]{-۸} = -۲ \Leftrightarrow$ ....

چ) $(۰/۵)^۲ = ۰/۵۲ \Leftrightarrow$ ....

ح) $\sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵} \Leftrightarrow$ ....

خ) $۱۰^۲ = ۱۰۰ \Leftrightarrow$ ....

د) $\sqrt[۳]{۰/۰۰۱} = ۰/۰۱ \Leftrightarrow$ ....

محاسبهٔ تقریبی ریشه های دوم و سوم یک عدد

اعدادِ ... , ۲۵ , ۱۶ , ۹ , ۴ , ۱ را **مربع کامل** و اعداد ... , ۱۲۵ , ۶۴ , ۲۷ , ۸ , ۱ را **مکعبِ کامل** می نامیم .

برای محاسبهٔ تقریبی ریشهٔ دوم یا ریشهٔ سوم عددِ a ، باید ببینیم عددِ a بینِ کدام دو عددِ مربعِ کامل متوالی یا کدام دو مکعبِ کاملِ متوالی قرار می گیرد .

مثال۴ : حجم مخزن آبی که به شکل مکعب است ، برابر ۲۵ مترمکعب است. طول ضلع این مکعب را حدس بزنید و حدس خود را آزمایش کنید .

توجه : **ریشهٔ عددها را می توانیم به طور تقریبی روی محور اعداد نشان دهیم .**

مثال۵ : مقدار تقریبی یا دقیق ریشه ها را محاسبه کنید و روی محور اعداد، نشان دهید . (می توانید از ماشین حساب استفاده کنید)

$\sqrt[۳]{-۸}$ $\sqrt[۳]{۳}$ $\sqrt[۳]{۴}$ $\sqrt[۳]{۱۲۵}$ $\sqrt[۳]{۱}$

مثال۶ : مشخص کنید هر کدام از ریشه های زیر ، بینِ کدام دو عددِ صحیحِ متوالی قرار دارد ؟

الف) $\sqrt{۳۰}$

ب) $\sqrt{۷}$

پ) $\sqrt{۱۰}$

چیزهایی وجود دارد که پول قادر به خریدنشان نیست ؛

مانندِ تربیت ، اخلاق و فراست .

ت) $\sqrt[۳]{۲۰}$ ....

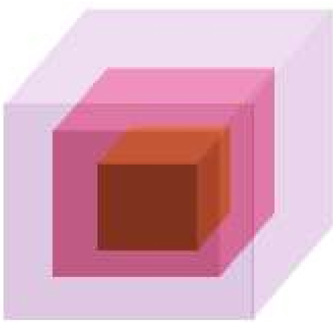
ث) $\sqrt[۳]{-۱۷}$ ....

مثال۷ : زیر رادیکال (جای خالی) عدد یا عددهایی بگذارید که نامساوی ها برقرار باشند .

الف) $۴ < \sqrt{\boxed{}} < ۵$

ب) $۹ < \sqrt[۳]{\boxed{}} < ۱۰$

مثال۸ : سه مکعب تو در تو مانند شکل مقابل واقع شده اند . حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۶۴ و حجم مکعب داخلی (کوچک) ۲۷ است . طول ضلع مکعب میانی چه عددهایی می تواند باشد ؟ (حداقل سه پاسخ متفاوت ارائه کنید) .

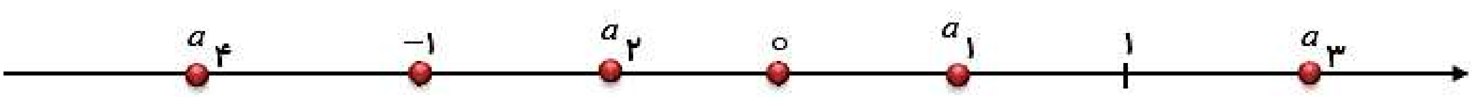


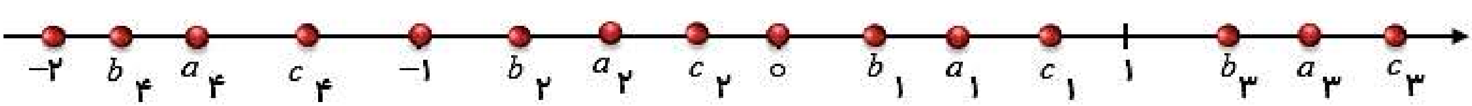
....

....

....

مثال۹ : هر یک از نقاط مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشهٔ سوم آن عدد است ، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید) .





با توجه به آنچه دربارهٔ ریشهٔ سوم اعداد درک کرده اید ، به سؤال های زیر پاسخ دهید .

الف) aعددی مثبت است و $\sqrt[۳]{a} > a$ ، a چه اعدادی می تواند باشد ؟

اگر a منفی باشد و $\sqrt[۳]{a} > a$ ، a چه اعدادی می تواند باشد ؟

ب) aعددی است که ریشهٔ سوم آن با خودش برابر است ؛ یعنی $\sqrt[۳]{a} = a$. a چه اعدادی می تواند باشد ؟

پ) aعددی مثبت است و $\sqrt[۳]{a} < a$ ، a چه اعدادی می تواند باشد ؟

اگر a منفی باشد و $\sqrt[۳]{a} < a$ ، a چه اعدادی می تواند باشد ؟

مثال هایی از تجزیهٔ عدد به عوامل اول

۵۳۹ , ۱۰۵ , ۸۱ , ۶۷۵ , ۱۱۰ , ۹۰ , ۱۲

ریشهٔ چهارم و پنجم یک عدد

مانند ریشه های دوم و سوم می توان ریشهٔ چهارم و پنجم و بالاتر را نیز تعریف کرد .

ریشه هایِ چهارم یک عدد

❋هر عدد مثبت دارای .... ریشهٔ چهارم است که .... یکدیگرند . عددهای منفی ریشهٔ چهارم ....

(....)

❋ ریشهٔ چهارمِ صفر ، **مساوی خودش** است . ($\sqrt[۴]{۰} = ۰$)

مثال۱۰ : الف) ریشه های چهارم عدد ۱۶ ⟩ زیرا ....

ب) ریشه های چهارم عدد ۵ ⟩ زیرا ....

پ) ریشه های چهارم عدد ۶۲۵ ⟩ زیرا ....

مثال۱۱: جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید . آخرین ستون را به دلخواه کامل کنید .

عدد	۱۶		۶۲۵		۱۰۰۰۰		۳۱۲۵					
ریشه های چهارم									−۳	۳		

ریشهٔ پنجم یک عدد

❋ هر عدد مثبت یا منفی دارای .... ریشهٔ پنجم است . که علامتِ این ریشهٔ پنجم ، همان علامتِ عددِ داده شده است .

(یعنی اگر عدد مثبت باشد ، ریشهٔ پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشهٔ پنجم آن .... است) .

❋ ریشهٔ پنجم صفر ، **مساوی خودش** است . ($\sqrt[5]{0} = 0$)

مثال۱۲ : محاسبه کنید .

الف) $\sqrt[5]{\frac{1}{100000}} =$ .... **ب)** $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} =$ ....

پ) $\sqrt[5]{-32} =$ .... **ت)** $\sqrt[5]{-0/00032} =$ ....

مثال۱۳ : جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید . آخرین ستون را به دلخواه کامل کنید .

عدد	۳۲−		۷۱	۲۴۳−			۱۹	
ریشه پنجم		۵			۱−	۱۰−		

مثال۱۴ : ریشهٔ پنجم چه عددهایی با خودشان برابر است ؟

مثال۱۵ : اگر $1<\sqrt[5]{x}<2$ باشد ، جای x ، کدام اعدادطبیعی را میتوان قرار داد ؟

مثال۱۶ : اگر $3<\sqrt[3]{a}<4$ باشد ، جای a ، کدام اعدادطبیعی را میتوان قرار داد ؟

مثال ۱۷ : جاهای خالی را پر کنید .

الف) اعداد ۳ و .... ریشه های چهارم عدد .... می باشند .

ب) اگر $a=\sqrt[4]{16}$ باشد ، در این صورت حاصل عبارت $a^{3}+5$ برابر است با ....

مثال ۱۸ : برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است ، جواب را بنویسید و در غیر این صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد .

الف) $\sqrt{۷۵}$ ....

ب) $\sqrt{۱۶}$ ....

پ) $-\sqrt[۴]{۲۰}$ ....

ت) $\sqrt[۳]{-۹۰}$ ....

ث) $\sqrt{۲۰}$ ....

$\sqrt[۵]{۱}$ ....

ج)

چ) $\sqrt[۳]{۲۵۰}$ ....

ح) $\sqrt[۳]{-۸}$ ....

خ) $\sqrt[۵]{۴۰۰}$ ....

د) $\sqrt[۴]{۴۰۰}$ ....

مقایسهٔ ریشه های اعداد و مقایسهٔ اعدادِ توان دار

$0<a<1 \quad \Rightarrow \quad 1>a^1>a^2>a^3>a^4>\cdots$ یعنی با بزرگتر شدنِ توان ، عددِ حاصل ، کوچکتر می شود .

$\Rightarrow \quad \sqrt{a}<\sqrt[3]{a}<\sqrt[4]{a}<\cdots<1$ یعنی با بزرگتر شدنِ فرجه ، عددِ حاصل از ریشه گیری ، بزرگتر می شود .

$a>1 \quad \Rightarrow \quad 1<a^1<a^2<a^3<a^4<\cdots$ یعنی با بزرگتر شدنِ توان ، عددِ حاصل ، بزرگتر می شود .

$\Rightarrow \quad \sqrt{a}>\sqrt[3]{a}>\sqrt[4]{a}>\cdots>1$ یعنی با بزرگتر شدنِ فرجه ، عددِ حاصل از ریشه گیری ، کوچکتر می شود .

$-1<a<0 \quad \Rightarrow \quad -1<a^1<a^3<a^5<a^7<\cdots$ یعنی با بزرگتر شدنِ توانِ فرد ، عددِ حاصل ، بزرگتر می شود .

$\Rightarrow \quad a>\sqrt[3]{a}>\sqrt[5]{a}>\sqrt[7]{a}>\cdots$ یعنی با بزرگتر شدنِ فرجهٔ فرد، عددِ حاصل از ریشه گیری ،کوچکترمی شود .

$a<-1 \quad \Rightarrow \quad -1>a^1>a^3>a^5>a^7>\cdots$ یعنی با بزرگتر شدنِ توانِ فرد ، عددِ حاصل ، کوچکتر می شود .

$\Rightarrow \quad a<\sqrt[3]{a}<\sqrt[5]{a}<\sqrt[7]{a}<\cdots$ یعنی با بزرگتر شدنِ فرجهٔ فرد ، عددِ حاصل ازریشه گیری ، بزرگتر می شود .

مثال ۱۹ : اگر $0<a<1$ ، مقایسه کنید .

ب) $\sqrt{a} \;\bigcirc\; \sqrt[3]{a}$

الف) $a^2 \;\bigcirc\; a^3$

مثال ۲۰ : اگر $a>1$ ، مقایسه کنید .

ب) $\sqrt{a} \;\bigcirc\; \sqrt[3]{a}$

الف) $a^2 \;\bigcirc\; a^3$

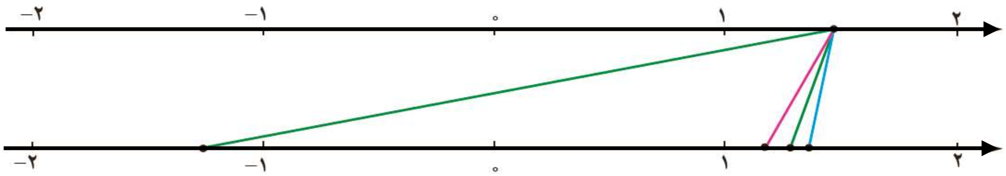
ت) $\sqrt[5]{a} \;\bigcirc\; \sqrt[11]{a}$

پ) $\sqrt[3]{a} \;\bigcirc\; \sqrt[5]{a}$

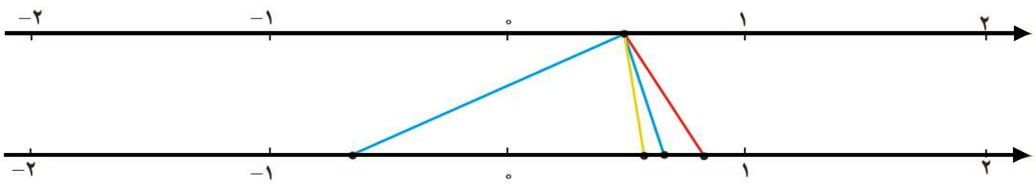
مثال ۲۱ : در هر یک از شکل های زیر ، نقطه ای از محور بالا به ریشه های سوم ، چهارم و پنجم خود از محور پائین وصل شده است .

مشخص کنید هر کدام از پاره خط های واصل ، مربوط به کدام ریشه است .

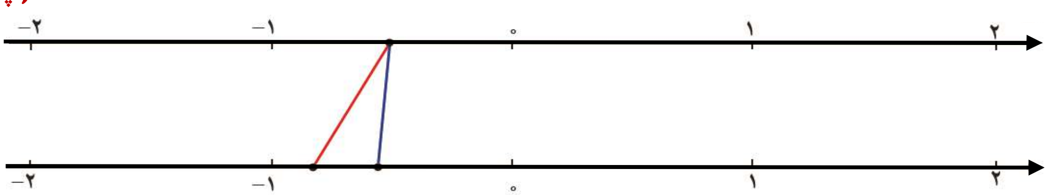
الف)



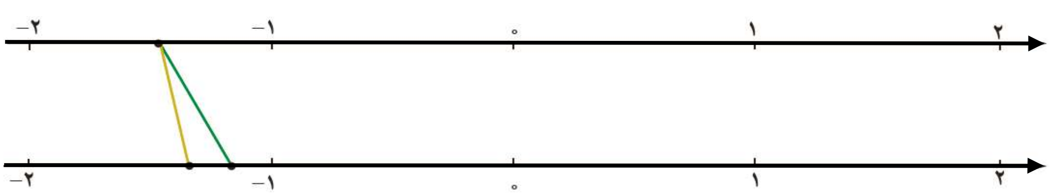
ب)



پ)



ت)



مثال ۲۲: یکی از علامت های <=> را در مربع قرار دهید .

الف) $(-0/1)^5 \; \square \; (-0/1)^3$

ب) $(-2)^5 \; \square \; (-2)^4$

پ) $(0/1)^5 \; \square \; (0/1)^3$

ت) $\sqrt[5]{0/00001} \; \square \; 0/1$

ث) $2^5 \; \square \; 2^3$

ج) $(-2)^5 \; \square \; (-2)^3$

چ) $\sqrt{0/25} \; \square \; \sqrt[3]{0/125}$

ح) $(0/5)^4 \; \square \; (-0/5)^2$

خ) $(-2)^4 \; \square \; (-2)^2$

د) $(0/5)^2 \; \square \; (0/5)^3$

ر) $(-0/5)^3 \; \square \; (-0/5)^5$

ز) $\sqrt{0/5} \; \square \; \sqrt[3]{0/5}$

ژ) $4^2 \; \square \; 4^3$

س) $(-2)^3 \; \square \; (-2)^5$

ش) $\sqrt{4} \; \square \; \sqrt[3]{4}$

ط) $(-0/5)^2 \; \square \; (-0/5)^3$

ظ) $(-2)^2 \; \square \; (-2)^3$

مثال ۲۳ : جدول زیر را که مربوط به ریشه های مختلف عدد ۶۴ است ، کامل کنید .

ریشه های هشتم	ریشه هفتم	ریشه های ششم	ریشه پنجم	ریشه های چهارم	ریشه سوم	ریشه های دوم

مثال ۲۴ : جدول زیر را که مربوط به ریشه های مختلف عدد ۶۴ – است ، کامل کنید .

ریشه هشتم	ریشه هفتم	ریشه ششم	ریشه پنجم	ریشه چهارم	ریشه سوم	ریشه دوم

ریشهٔ nام یک عدد

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد ، b را یک ریشهٔ nام عدد a می نامیم . هرگاه : $b^n = a$

مثال ۲۵ : جدول زیر را کامل کنید .

مثال عددی		تعداد ریشه ها	حالت های ممکن	
	$a =$ $n =$		n زوج	$a > 0$
	$a =$ $n =$		n فرد	
	$a =$ $n =$		n زوج	$a < 0$
	$a =$ $n =$		n فرد	

مثال ۲۶ : حاصل هر عبارت را به دست آورید :

الف) $\sqrt[3]{125} =$ ....

ب) $\sqrt[5]{-32} =$ ....

پ) $\sqrt[3]{-0/001} =$ ....

ت) $-\sqrt[4]{16} =$ ....

ث) $\sqrt[7]{128} =$ ....

ج) $\sqrt[4]{625} =$ ....

چ) $\sqrt[7]{-128} =$ ....

ح) $\sqrt[8]{256} =$ ....

د) $\sqrt[5]{\frac{-1}{32}} =$ ....

خ) $-\sqrt[4]{0/0016} =$ ....

ر) $\sqrt[9]{-1} =$ ....

ذ) $\sqrt[6]{0} =$ ....

ژ) $-\sqrt{1} =$ ....

ز) $\sqrt[10]{-1125} =$ ....

یادآوری : می دانیم : $\sqrt{x^2} = |x|$

به طور کلی

مثال ۲۷ : کدام یک درست محاسبه شده است ؟

پ) $\sqrt[6]{(-2)^6} = -2$

ب) $\sqrt[5]{3^5} = 3$

الف) $\sqrt[4]{(-3)^4} = -3$

ج) $\sqrt[6]{(-2)^6} = 2$

ث) $\sqrt[5]{(-3)^5} = -3$

ت) $\sqrt[4]{(-3)^4} = 3$

مثال ۲۸ : از سال قبل می دانیم :

برای هر دو عدد مثبت a و b : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ و برای هر دو عدد a و b : $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$

الف) آیا رابطهٔ بالا دربارهٔ $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{b}$ نیز برقرار می باشد ؟ مثال بزنید .

با توجه به اینکه ۴ یک عدد زوج است ، باید a و b .... باشند .

....

....

ب) دربارهٔ $\sqrt[5]{a} \times \sqrt[5]{b}$ چه می توان گفت ؟

آیا a و b حتما" باید نامنفی باشند ؟ مثالی از a و b نامنفی و مثالی از a و b منفی ارائه کنید و نشان دهید تساوی همواره برقرار است .

به طور کلی داریم :

برای $a,b>0$ و n یک عدد طبیعی زوج و برای a,b دلخواه و n یک عدد طبیعی فرد ، همواره داریم :

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

مثلا " :

مثال ۲۹ : آیا تساوی $\sqrt[n]{a+b}=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$ برقرار است ؟ n را برابر ۳ ,۴ یا ۵ بگیرید و به جای a و b مقدارهای عددی بدهید .

نکته : وقتی می نویسیم $\sqrt[n]{a}$ و n را زوج فرض می کنیم ، a را مثبت یا برابرِ صفر در نظر می گیریم .

بنابراین باید به یاد داشته باشیم که ریشه های زوج برای عددهای منفی بی معنا هستند . پس هرگاه نوشتیم $\sqrt{x}$ ، از آن می فهمیم که $x\geq 0$ است .

مثال ۳۰ : درستیِ رابطهٔ $\sqrt[k]{a^m}=\left(\sqrt[k]{a}\right)^m$ را با مقداردهی های مختلف به $m\,,k$ و a بررسی کنید .

مثال ۳۱ : الف) آیا $\sqrt[3]{2^5} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^5$ با هم برابرند ؟

ب) در مورد $\sqrt[4]{(-2)^4} = \left(\sqrt[4]{-2}\right)^4$ چه می توان گفت ؟

نتیجه : برای $a>0$ و k یک عدد طبیعی زوج و برای عدد حقیقی دلخواه a و k یک عدد طبیعی فرد همواره داریم :

$$\sqrt[k]{a^m} = \left(\sqrt[k]{a}\right)^m$$

مثال ۳۲ : تساوی روبرو به ازای چه مقادیری از a و n برقرار نیست ؟ $\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$

مثال ۳۳ : با توجه به تعریف ریشهٔ (اگر $\sqrt[n]{a} = b$ آنگاه $b^n = a$) ، نشان دهید برای هر عدد a و هر عدد طبیعی n (به شرط با معنا بودن رادیکال) رابطه روبرو برقرار است : $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

به طور کلی داریم :

همیشه روز را با اندیشه ای مثبت به پایان رسانید .

مهم نیست که چقدر سخت گذشت ؛

فردا فرصتی تازه است برای بهتر کردنِ آن .

مثال ۳۴ : عددهای زیر را محاسبه کنید .

الف) $\sqrt[3]{5^{-3}} =$ ....

ب) $\sqrt[5]{2^{-5}} =$ ....

پ) $\sqrt[7]{\dfrac{1}{128}} =$ ....

ت) $\sqrt[4]{3^{-4}} =$ ....

مثال ۳۵ : به جای a و b و عدد طبیعی n عددهایی قرار دهید ؛ به طوری که :

الف) تساوی $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار باشد .

ب) تساوی $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار نباشد .

به طور کلی داریم :

برای $a,b>0$ و n یک عدد طبیعی زوج و برای a,b دلخواه و n یک عدد طبیعی فرد ، همواره داریم :

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

مثال ۳۶ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید .

الف) $\sqrt{8\sqrt{4\sqrt[3]{64}}} =$ ....

ب) $\sqrt[۸]{۲۵۶\left(\sqrt{۲}-۱\right)^{۸}} =$ ....

پ) $\sqrt[۴]{\left(۲-\sqrt{۵}\right)^{۴}}+\sqrt[۶]{\left(۳-\sqrt{۵}\right)^{۶}} =$ ....

ت) $\sqrt[۹]{۵-\sqrt{۲۴}}\times\sqrt[۹]{۵+\sqrt{۲۴}} =$ ....

ث) $\sqrt[۶]{۶۴a^{۱۲}b^{۶}} =$ ....

ج) $\sqrt[۷]{x^{۸}y^{۱۵}} =$ ....

چ) $\sqrt[۳]{\frac{x}{۶}\sqrt[۴]{\frac{۳^{۴}}{۴^{۴}x^{۴}}}} =$ ....

ح) $\sqrt[۵]{\frac{۷}{۵a^{۵}}}\times\sqrt[۵]{\frac{۲۴۳}{۲۸}} =$ ....

تعریف ۱

برای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$ ، توان $\frac{۱}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می کنیم : $\boxed{a^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{a}}$

توجه : در این کتاب اگر $a < ۰$ ، $a^{\frac{۱}{n}}$ را تعریف نمی کنیم . به عنوان مثال عبارت هایی مانند $(-۱)^{\frac{۱}{۳}}$ و $(-۲)^{\frac{۲}{۴}}$ را تعریف نمی کنیم .

در تمام این فصل ، در عبارت $a^{\frac{۱}{n}}$ ، a را عددی مثبت درنظر می گیریم .

تعریف ۲

❄ هرگاه $a > ۰$ برای هر دو عدد طبیعی m و n ، $a^{\frac{m}{n}}$ را چنین تعریف می کنیم : $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$

❄ همچنین $a^{\frac{m}{n}}$ به این صورت تعریف می شود : $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{۱}{n}})^m = (a^m)^{\frac{۱}{n}}}$

❄ بنابراین : $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}}$

❄ همچنین ، $a^{-\frac{m}{n}}$ نیز به این صورت تعریف می شود : $\boxed{a^{-\frac{m}{n}} = \frac{۱}{a^{\frac{m}{n}}}}$

نکته : اگر r و s دو عدد گویا باشند ، و a و b اعدادی مثبت باشند ، داریم :

(۱) $a^r \times a^s = a^{r+s}$ **(۲)** $(a^r)^s = a^{rs}$ **(۳)** $(ab)^r = a^r \times b^r$

مثال ۳۷ : هریک از عبارت های زیر را به شکل رادیکالی نوشته و در صورت امکان حاصل آنها را به دست آورید .

الف) $۲^{\frac{۱}{۳}} =$ ....

ب) $۳^{\frac{۱}{۲}} =$ ....

پ) $۵^{\frac{۱}{۷}} =$ ....

ت) $۴^{\frac{۳}{۷}} =$ ....

ج) $۸۱^{\frac{۱}{۴}} =$ ....

ث) $۶^{\frac{۱}{۴}} =$ ....

ح) $۳^{\frac{۲}{۷}} =$ ....

چ) $۵^{\frac{۲}{۵}} =$ ....

د) $۱۶^{-\frac{۱}{۴}} =$ ....

خ) $۸۱^{\frac{۳}{۴}} =$ ....

ر) $۳^{\frac{۵}{۴}} =$ ....

ذ) $۳^{\frac{۲}{۵}} =$ ....

ژ) $۲^{\frac{۲}{۳}} \times ۲^{\frac{۳}{۲}} =$ ....

ز) $۴^{\frac{۱}{۵}} =$ ....

ش) $۵^{-\frac{۴}{۳}} =$ ....

س) $(۴ \times ۲)^{\frac{۱}{۳}} =$ ....

ظ) $۶^{\frac{۳}{۸}} =$ ....

ط) $(۱۶^{\frac{۱}{۳}})^{\frac{۳}{۴}} =$ ....

ض) $۵^{\frac{۱}{۲}} =$ ....

ص) $۱۶^{\frac{۱}{۲}} =$ ....

غ) $۳^{\frac{۱}{۳}} \times ۳^{\frac{۲}{۳}} =$ ....

ع) $(۴^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۲}{۳}} =$ ....

گ) $۳۲^{-\frac{۱}{۵}} =$ ....

ک) $۴^{\frac{۲}{۳}} =$ ....

م) $۱۲۵^{-\frac{۲}{۳}} =$ ....

ل) $۳۲^{\frac{۲}{۵}} =$ ....

مثال ۳۸: رادیکال ها را در صورت امکان به شکل توان کسری بنویسید .

ب) $\sqrt{۲^{۵}} =$ ....

الف) $\sqrt[۷]{۳^{۲}} =$ ....

ت) $\sqrt[۵]{۱۹} =$ ....

پ) $\sqrt[۳]{۷^{۲}} =$ ....

ث) $\sqrt[5]{64} =$ .... ج) $\sqrt[5]{25} =$ ....

مثال ۳۹ : با استفاده از نمای کسری نشان دهید که $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ است . $(a > 0)$

....

مثال ۴۰ : الف) آیا تساوی $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}$ همواره برقرار است ؟ $(a > 0)$

....

....

ب) نتیجه بگیرید که هر سه عدد $\sqrt{2}$ ، $\sqrt[4]{2^2}$ و $\sqrt[6]{2^3}$ برابرند .

....

....

....

مثال ۴۱ : ریشهٔ دوم مثبتِ 8^{x+1} با ریشهٔ سوم $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$ برابر است . x کدام است ؟

الف) ۰ **ب)** ۱ **پ)** ۲ **ت)** ۳

مثال ۴۲ : الف) فرض کنیم $a=۶۴$ ، $r=\frac{۱}{۲}$ و $s=\frac{۱}{۳}$. مقدارهای عددی $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید .

....

....

ب) اکنون خودتان سه نمونه دیگر برای a ، r و s انتخاب کنید و بار دیگر ، مقدارهای $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

مثال ۴۳ : حساب کنید .

الف) $۴^{\frac{۱}{۴}}=$ ....

ب) $\sqrt[۳]{\sqrt{۵}}=$ ....

پ) $\sqrt{\sqrt{۸۱}}=$ ....

ت) $(\sqrt[۳]{\sqrt{۲۷}})^۲=$ ....

ث) $(\sqrt[۴]{\sqrt[۵]{۹}})^{۱۰}=$ ....

ج) $\sqrt{\sqrt[۳]{۶۴}}=$ ....

در سال گذشته با تعدادی از اتحادها و تجزیه به کمک آن ها آشنا شده اید .

اتحاد ، یک تساوی از عبارت های جبری که به ازای تمام متغیرها برقرار است .

یادآوری اتحادهای گذشته

۱– اتحاد مربع دوجمله ای : $(a \pm b)^{۲} = a^{۲} \pm ۲ab + b^{۲}$

۲– اتحاد مزدوج : $(a+b)(a-b) = a^{۲} - b^{۲}$

۳– اتحاد جمله مشترک : $(x+a)(x+b) = x^{۲} + (a+b)x + ab$

۴– اتحاد مربع سه جمله ای : $(a+b+c)^{۲} = a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} + ۲ab + ۲ac + ۲bc$

تکلیف : حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحادها بیابید .

الف) $(۳xy - ۲)^{۲} =$ ....

ب) $(۳ + \sqrt{۲})^{۲} =$ ....

پ) $(x + ۵ - ۲y)^{۲} =$ ....

ت) $(x^{۲}y^{۲} - z)(x^{۲}y^{۲} + z) =$ ....

ث) $(x+۳)(x-۷) =$ ....

ج) $(x+۲)(x-۲)(x^{۲}+۵)=$ ....

چ) $۱۰۵^{۲}=$ ....

ح) $۱۶\times ۱۴=$ ....

خ) $۱۶\times ۱۳=$ ....

د) $۱۰۰۷^{۲}=$ ....

ذ) $۹۹^{۲}=$ ....

ر) $۹۹۹۹^{۲}=$ ....

مثال هایی از تجزیه به کمکِ این اتحادها

مثال ۴۴ : عبارت های زیر را به کمک اتحادها تجزیه کنید .

الف) $۹x^{۲}-۱۶=$ ....

ب) $x^{۲}y^{۴}-۲۵=$ ....

پ) $y^{۴}-۴=$ ....

ت) $۴a^{۲}-۲۵y^{۶}=$ ....

ث) $b^{۲}-۸b+۱۶=$ ....

ج) $z^{۲}+۱۴z+۴۹=$ ....

چ) $x^{2}+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=$

ح) $4x^{2}-4x+1=$

خ) $9x^{2}-6x+1=$

د) $x^{2}+5y+6=$

ذ) $y^{2}+3y-10=$

ر) $9x^{2}+18x+8=$

ز) $25x^{2}+25x+6=$

ژ) $4x^{2}+14x+12=$

ط) $x^{4}-y^{4}=$

توجه :

ظ) $2x^{2}+3x+1=$

س) $۲y^{۲}+۵y-۳=$ ....

....

ش) $۳a^{۲}-a-۱۰=$ ....

....

ص) $۶x^{۲}-۵x-۶=$ ....

....

مثال هایی از تجزیه به روش دسته بندی :

ض) $a^{۳}-۲ab+a^{۲}b-۲b^{۲}=$ ....

....

ع) $۱+a+a^{۲}+a^{۳}=$ ....

غ) $mn-n-n^{۲}+m=$ ....

....

ک) $m^{۲}+۴m-m^{۲}-۴=$ ....

....

اتحادهای جدید

اتحاد مکعبِ دوجمله ای

❋ $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$(\text{جمله اول} + \text{جمله دوم})^3 = (\text{جمله اول})^3 \pm 3(\text{جمله اول})^2(\text{جمله دوم}) + 3(\text{جمله اول})(\text{جمله دوم})^2 \pm (\text{جمله دوم})^3$

مثال ۴۵ : حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحادها بیابید .

الف) $(2x - y)^3 =$ ....

ب) $(2y + 1)^3 =$ ....

پ) $99^3 =$ ....

ت) $23^3 =$ ....

ث) $\left(x^2y - 2\right)^3 =$ ....

ج) $105^3 =$ ....

تجزیه به کمک اینِ اتحاد هر چهار جمله ای که دو جمله آن مکعب کامل باشد ، از طریق اتحاد مکعب دو جمله ای تجزیه می شود .

(البته به شرطی که دو جمله دیگر ، شرایط لازم برای این اتحاد را داشته باشند)

کافیست ریشهٔ سوم یا کعبِ دو جملهٔ مکعب را گرفته و داخلِ پرانتزی که توان ۳ دارد ، قرار دهیم . در آخر اگر تمام چهار جمله مثبت بودند ، بینِ دو جملهٔ داخل پرانتز مثبت و اگر دو جمله مثبت و دو جمله منفی بودند ، بینِ دو جملهٔ داخل پرانتز منفی می گذاریم .

$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

مثال ۴۶: عبارت های زیر را به کمک اتحادها تجزیه کنید .

الف) $27x^3+54x^2+36x+8=$ ....

ب) $y^3-y^2+\frac{1}{3}y-\frac{1}{27}=$ ....

پ) $125x^3+75xa+15xa^2+a^3=$ ....

ت) $x^3-y^3-3x^2y+3xy^2=$ ....

ث) $\frac{1}{27}a^3-\frac{2}{3}a^2+4a-8=$ ....

اتحاد های چاق و لاغر

اتحاد مجموع مکعب دوجمله ای

❋ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

^{3}(جمله دوم) + ^{3}(جمله اول) = [^{2}(جمله دوم) + (جمله دوم) (جمله اول) − ^{2}(جمله اول)] (جمله دوم + جمله اول)

اتحاد تفاضل مکعب دوجمله ای

❋ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

^{3}(جمله دوم) + ^{3}(جمله اول) = [^{2}(جمله دوم) + (جمله دوم) (جمله اول) − ^{2}(جمله اول)] (جمله دوم + جمله اول)

دقت کنید که : ....

....

مثال ۴۷ : حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحادها بیابید .

الف) $(3x-5)(9x^2+15x+25)=$ ....

ب) $(3a+b)(9a^2-3ab+b^2)=$ ....

پ) $(\frac{1}{3}+5y)(\frac{1}{9}-\frac{5}{3}y+25y^2)=$ ....

ت) $(2a^2-3b)(4a^4+6a^2b+9b^2)=$ ....

ث) $(x-1)(x+2)(x^2+x+1)(x^2-2x+4)=$ ....

....

....

تجزیه به کمکِ این اتحاد هر دو جمله ای را که تفاضل یا مجموع دو مکعب کامل باشد می توانیم از طریق اتحاد مکعبات تجزیه کنیم . کافیست ریشهٔ سوم یا کعبِ دو جملهٔ مکعب را گرفته و با همان علامتِ بینِ دو جمله ، داخلِ یک پرانتز بنویسیم که همان پرانتزِ(لاغر) است و سپس به کمکِ این پرانتز ، پرانتزِ بزرگ(چاق) را می نویسیم .

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

مثال ۴۸ : عبارت های زیر را به کمک اتحادها تجزیه کنید .

الف) $8x^3-27=$ ....

$x^3+1=$

پ) $x^{۳}-۸=$ ....

ت) $x^{۳}-۱۲۵=$ ....

ث) $t^{۶}-\frac{۱}{۸}=$ ....

ج) $۱۲۵-b^{۳}=$ ....

چ) $y^{۶}+۶۴=$ ....

ح) $۸a^{۳}-۲۷=$ ....

خ) $a^{۳}b^{۶}-۸=$ ....

د) $a^{۳}-y^{۳}=$ ....

توجه : ....

....

ذ) $x^{۶}-۱=$ ....

ر) $x^{۶}-y^{۶}=$ ....

ساده ترین درس زندگی این است :

« هرگز کسی را آزار نده »

شمارنده و مضرب

هر یک از عامل هایی که در تجزیهٔ یک چندجمله ای به دست می آید را یک **شمارنده** و آن چندجمله ای را یک **مضرب** هر یک از آن عامل ها (شمارنده ها) می نامیم .

به عنوان مثال : الف) در تجزیهٔ عدد ۱۲ : **ب)** در تجزیهٔ چندجمله ایِ $a^{۲}-b^{۲}$:

تعریف : مضرب های هر عبارت جبری از ضرب آن در عبارت های جبری دیگر به دست می آیند .

به عنوان مثال :

مثال ۴۹ : دو عبارت بنویسید که $a-b$. شمارنده هر یک از آنها باشد .

مثال ۵۰ : عبارت $۲۷a^{۳}-۱$.مضرب کدام یک از عبارت هاست ؟

الف) $a-۱$ **ب)** $۳a-۱$ **پ)** $۹a^{۲}+۳a+۱$ **ت)** $۳a+۱$

تعریف : کسرهایی را که صورت و مخرج آنها چند جمله ای باشند ، **عبارت های گویا** می نامند .

مثال ۵۱ : عبارت های گویا را با نماد☑ و عبارت های غیر گویا را با نماد ☒ مشخص کنید .

الف) $\frac{x^۳-۱}{x^۳+۱}$ ب) $\frac{۳x-\sqrt{۷}}{x^۲}$ پ) $\sqrt{x^۲}+۱$

ت) $\sqrt[۳]{x}-۱$ ث) $\frac{\sqrt{۵}x}{x}$ ج) $\sqrt[۳]{x^۲}+x-۱$

تعریف نشده های عبارت های گویا

نکته : یک عبارت گویا به ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می شود، تعریف نمی گردد . (مقدار ندارد)

برای پیدا کردنِ این مقدارها ، باید مخرج کسر را مساوی صفر قرار داد و معادلهٔ حاصل را حل کرد .

برای مثال عبارت گویای $\frac{x+۲}{x-۵}$ به ازای $x=۵$ تعریف نشده است ؛

زیرا با قراردادن $x=۵$ در آن ، مخرج کسر برابر با صفر می شود و در این حالت کسر تعریف نشده است .

مثال ۵۲ : عبارت های گویای زیر به ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی شود ؟

الف) $\frac{۳z+۵}{۳z-۵}$

ب) $\frac{a^۲+۳}{a^۲-۴}$

پ) $\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{x^۲+۴}$

ساده کردن عبارت های گویا

برای ساده کردن یک عبارت گویا ابتدا باید صورت و مخرج آن را در صورت امکان تجزیه کنیم ، سپس با خط کشیدن روی عوامل مشترک از صورت و مخرج کسر ، عبارت گویا ساده می شود .

یادآوری می کنیم ، عامل مشترکی که از صورت و مخرج کسر خط می زنیم ، باید مخالف صفر باشد .

مثال ۵۳ : عبارت های گویای زیر را ساده کنید .

الف) $\frac{x^{6}+1}{x^{4}+2x^{2}+1}=$ ....

ب) $\frac{x^{3}-1}{(x-1)^{3}}=$ ....

پ) $\frac{x^{2}+1}{x^{4}-1}=$ ....

ت) $\frac{y^{5}-y^{3}-12y}{8y^{2}+16y}=$ ....

ث) $\frac{a^{7}-a}{a^{3}+a^{2}+a}=$ ....

تعریف : برای جمع و تفریقِ کسرها باید بینِ آن ها مخرجِ مشترک گرفت . (ابتدا مخرج ها را در صورتِ امکان تجزیه کنید)

مثال ۵۴ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید .

الف) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^{2}-1}=$ ....

....

....

ب) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2+4}=$ ....

....

....

پ) $\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{2}{\sqrt{x}+1}+\frac{3}{x-1}=$ ....

....

....

ت) $\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{2}{\sqrt{x}+1}-\frac{5x}{x-1}=$ ....

....

....

گویـا کـردنِ مخرج کسرهـا

۳ حالت برای گویا کردن وجود دارد :

حالت(۱) برای گویا کردن **مخرج کسرهایی که شامل یک عبارت رادیکالی** هستند ، می توانیم آن کسر را دریک عبارت رادیکالی مناسب ، ضرب و تقسیم کنیم (یا صورت و مخرج را در آن ضرب کنیم) تا مخرج کسر گویا شود .

وقتی مخرج به صورتِ $\sqrt[n]{x^m}$ باشد ، در این صورت برای گویا کردنِ آن کافیست صورت و مخرج را در $\sqrt[n]{x^{n-m}}$ ضرب کنیم .

مثال ۵۵ : مخرج کسرهای زیر را گویا کنید .

الف) $\frac{5}{2\sqrt{3}}=$ ....

ب) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}=$ ....

ت) $\frac{-۵}{\sqrt[۳]{۲}} =$ ....

پ) $\frac{-۲}{\sqrt{x}} =$ ....

ث) $\frac{x+۳}{\sqrt[۷]{x^{۴}}} =$ ....

ج) $\frac{-۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۸}-۵\sqrt{۲}} =$ ....

حالت(۲) برای گویا کردن **مخرج کسرهایی که شامل عبارت رادیکالی به صورت مجموع یا تفاضل دو قسمت یکسان هستند** ، یعنی به صورت $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ **یا** $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ، کافیست صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کرد .

توجه : دو عبارت $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ **و** $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ را **مزدوج هم** می نامیم .

به عنوان مثال :

از ضرب هر عبارت رادیکالی در مزدوجِ آن ، عبارتی گویا به دست می آید :

مثال ۵۶ : مخرج کسرهای زیر را گویا کنید .

الف) $\frac{۲}{\sqrt{۳}+۵} =$ ....

ب) $\frac{۲}{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}} =$ ....

پ) $\frac{۲}{۳\sqrt{۲}+۴} =$ ....

ت) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} =$ ....

ث) $\dfrac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}=$ ....

ج) $\dfrac{۳}{۳+\sqrt{۷}}=$ ....

چ) $\dfrac{۸}{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}=$ ....

ح) $\dfrac{۱}{\sqrt{۲}-۱}+\dfrac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}=$ ....

مثال ۵۷ : اگر $\sqrt{x+۲}+\sqrt{x-۴}=۳$ حاصل عبارت $\sqrt{x+۲}-\sqrt{x-۴}$ ، را به دست آورید .

قدرِ لحظه ها را بدان .

زمانی می رسد که تو دیگر قادر نیستی بگویی :

حالت(۳) برای گویا کردن **مخرج کسرهایی که شامل عبارت رادیکالی به صورت** $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ **یا** $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ ، از اتحادهای مجموع و تفاضل مکعب ها (چاق و لاغر) که به صورت زیر هستند ، برای گویا کردن استفاده می کنیم .

یادآوری :

$$\begin{cases}(x+y)(x^{2}-xy+y^{2})=x^{3}+y^{3}\\ (\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})\ \ldots\ldots\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-y)(x^{2}+xy+y^{2})=x^{3}-y^{3}\\ (\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})\ \ldots\ldots\end{cases}$$

مثال ۵۸ : مخرج کسرهای زیر را گویا کنید .

الف) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}=\ldots\ldots$

ب) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^{2}}-1}=\ldots\ldots$

پ) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}+1}=\ldots\ldots$

ت) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}}=\ldots\ldots$

ث) $\dfrac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2}=\ldots\ldots$

ج) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}+1}=\ldots\ldots$

چ) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-2}=\ldots\ldots$

ح) $\dfrac{6}{2\sqrt[3]{2}-1}=\ldots\ldots$

مثال ۵۹ : حاصل عبارت زیر را به دست آورید .

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} - \frac{1}{x-1} = $$