فصل ۲ :

مثلثـــــات

شماره صفحه

زندگی انسانها یک معادله ی مثلثاتی است ؛ فقط آنهایی که در وسط مثلث زندگیشان خدا باشد می توانند این معادله را حل کنند .

درس اول :

نسبت های مثلثاتی

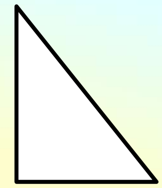
مثلثات شاخه ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می پردازد . یکی از اهداف این علم ، اندازه گیری فاصله ها به صورت غیرمستقیم است . مثلثات در علوم مهندسی ، فیزیک ، نقشه برداری ، دریانوردی ، نجوم و غیره کاربرد دارد .

به هر فرد یا شیئی ، یکسری از اعداد یا ویژگی ها و یا عناوین نسبت داده می شود .

به همین صورت،به هر زاویهٔ حاده درمثلث قائم الزاویه نیز ،یکسری اعداد نسبت داده می شودکه به آن ها نسبت های مثلثاتی گفته می شود .

در یک مثلث قائم الزاویه ، نسبت های سینوس (   ) ، کسینوس (   ) ، تانژانت (   ) و کتانژانت (   ) را **نسبت های مثلثاتی** می نامیم و به صورت زیر ، قابلِ محاسبه اند :

نسبت های مثلثاتی



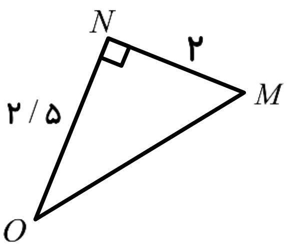
$\sin C =$ ―――――――――― $=$

$\tan C =$ ―――――――――― $=$

$\cos C =$ ―――――――――― $=$

$\cot C =$ ―――――――――― $=$

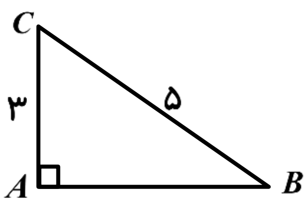
مثال ۱ – با توجه شکل روبرو ، جاهای خالی را کامل کنید .



الف) $\sin O =$ ....

ب) $\cot M =$ ....

مثال ۲ – با توجه به مثلث رسم شدهٔ زیر ، نسبت های مثلثاتی زاویهٔ B را به دست آورید .



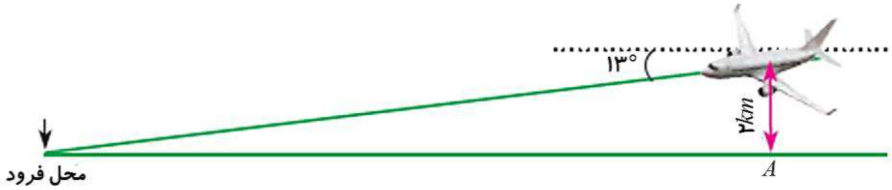
مثال ۳ – نسبت های مثلثاتی زاویهٔ ۵۰° را حساب کنید .

تکلیف – نسبت های مثلثاتی زاویهٔ 75° را حساب کنید .

مثال ۴ – در مثلث قائم الزاویهٔ ABC $(\hat{C}=90^\circ)$ ، اگر $c=25cm$ و $\cos B=\frac{3}{5}$ باشد ، اندازهٔ ضلع a را بیابید .

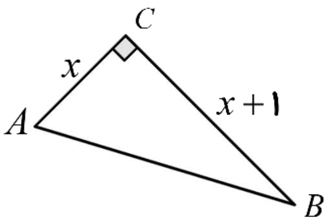
مثال ۵ – در مثلث قائم الزاویهٔ ABC $(\hat{B}=90^\circ)$ ، اگر $a=26cm$ و $\cot A=\frac{9}{13}$ باشد ، اندازهٔ ضلع b را بیابید .

مثال ۶ – یک هواپیما در ارتفاع $2km$ از سطح زمین در حال فرود آمدن است . اگر زاویهٔ هواپیما با افق حدود 13° باشد ، هواپیما در چه فاصله ای از نقطهٔ A فرود می آید ؟

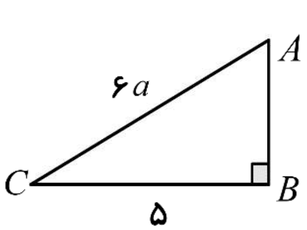


وقتی زمانه سخت می شود جرات کن و از آن سخت تر شو .

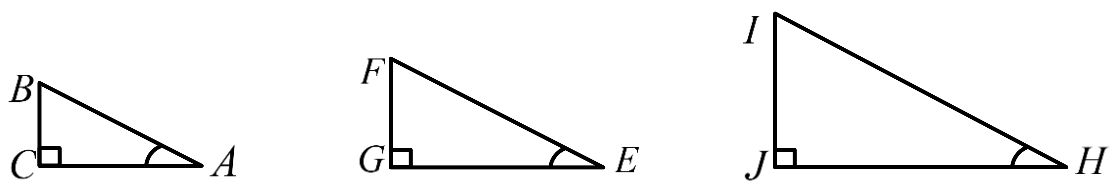
مثال ۷ – اگر در مثلث قائم الزاویه ی زیر $\tan B = \frac{۱}{۲}$ باشد ، مقدار x را بیابید .



مثال ۸ – اگر در مثلث قائم الزاویه ی زیر $\sin A = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ باشد ، مقدار a را بیابید .



توجه نسبت های مثلثاتی در مثلث های قائم الزاویه با اندازه های متفاوت ، برای زوایای برابر ، ثابت می مانند .



نکته : اگر دو زاویه متمم هم باشند ، یعنی جمعشان ۹۰° باشد ، در این صورت سینوس یکی از آن ها ، برابرِ کسینوس دیگری است و برعکس (یعنی کسینوس یکی ، برابرِ سینوس دیگری است) **و همچنین** تانژانت یکی از آن ها ، برابرِ کتانژانتِ دیگری است و برعکس (یعنی کتانژانت یکی ، برابرِ تانژانت دیگری است)

مثال ۹ – الف) اگر $\sin ۲۵^\circ = ۰/۲$ باشد ، مقدار $\cos ۶۵^\circ$ را بیابید .

ب) اگر $\cos ۸۷^\circ = a$ باشد ، مقدار $\sin ۳^\circ$ را بیابید .

جدول نسبت های مثلثاتی زوایای مهم و پُر کاربرد (۳۰° و ۴۵° و ۶۰°)

نکتــه

مثال ۱۰ – مقدار عددی عبارتهای زیر را بدست آورید .

الف) $\sin ۴۵^\circ . \cos ۴۵^\circ + \sin ۶۰^\circ . \cos ۳۰^\circ - \cot ۴۵^\circ =$ ....

ب) $۲\sin ۴۵^\circ - ۴\tan ۶۰^\circ - \sqrt{۲} =$ ....

پ) $\left(\sin ۶۰^\circ - \sin ۴۵^\circ\right)\left(\sin ۶۰^\circ + \sin ۴۵^\circ\right) =$ ....

ت) $\sin^۴ ۶۰^\circ + \cos^۴ ۶۰^\circ =$ ....

ث) $A = \dfrac{۲\cos^۲ ۳۰^\circ - ۲\sin ۳۰^\circ}{۲\tan ۴۵^\circ + ۳\cos^۲ ۶۰^\circ} =$ ....

....

ج) $\dfrac{\sqrt{۳}\tan ۶۰^\circ + ۴\left(\sin ۴۵^\circ\right)^۲}{۴\sin ۳۰^\circ . \cos ۶۰^\circ - ۳\tan ۴۵^\circ} =$ ....

....

مثال ۱۱– در جای خالی ، زاویه یاعدد مناسب قرار دهید .

الف) $\cos ۴۵^\circ = \boxed{}$ **ب)** $\sin \boxed{} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ **پ)** $\sin \boxed{} = \cos \boxed{}$

ت) $\sin ۶۰^\circ = \boxed{}$ **ث)** $\tan \boxed{} = ۱$ **ج)** $\tan \boxed{} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

مثال ۱۲ – درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید .

الف) $\tan ۸۰^\circ > \tan ۷۰^\circ$ **ب)** $\cos ۳۰^\circ < \cos ۴۰^\circ$

پ) $\cos ۷۰^\circ = \sin ۲۰^\circ$ **ت)** $\sin ۲۰^\circ < \sin ۵۰^\circ$

مثال ۱۳– مقایسه کنید .

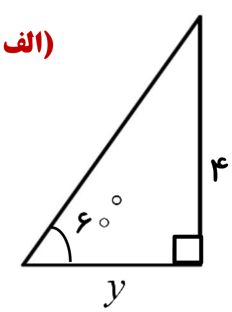
الف) $\tan ۱۲^\circ \ \boxed{} \ \tan ۵^\circ$ **ب)** $\sin ۲۵^\circ \ \boxed{} \ \sin ۴۰^\circ$

پ) $\cos ۳۶^\circ \ \boxed{} \ \sin ۵۴^\circ$ **ت)** $\cos ۲۷^\circ \ \boxed{} \ \cos ۴۰^\circ$

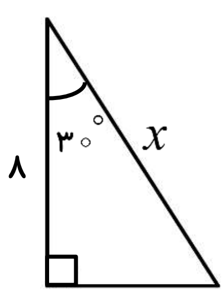
مثال ۱۴ – درستی یا نادرستی عبارت روبرو را تعیین کنید . $\cos ۶۰^\circ = ۲\cos ۳۰^\circ$

مثال ۱۵ – در مثلث های زیر ، مقادیر مجهول را حساب کنید .

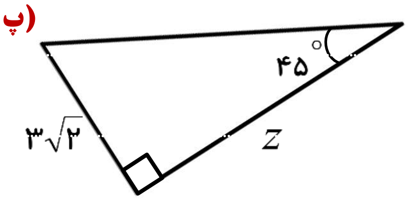
الف)



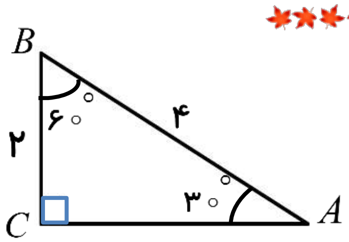
ب)



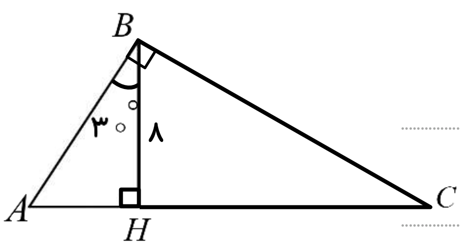
پ)



مثال ۱۶ – در شکل زیر ، محیط مثلث را حساب کنید .

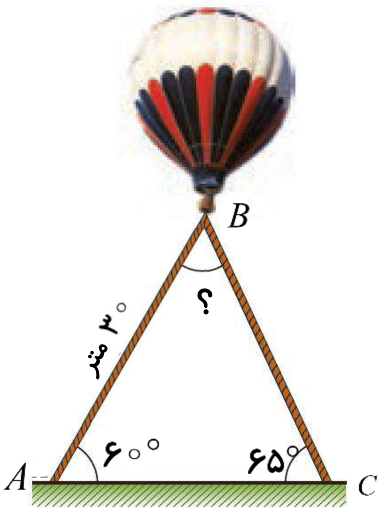


مثال ۱۷ – در شکل زیر ، طول ضلع BC را حساب کنید .

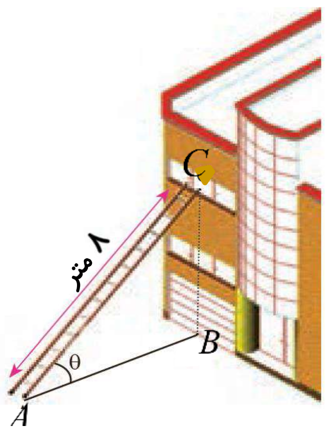


مثال ۱۸ – یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویهٔ °۳۰ پرتاب می شود . می خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه ، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می رسد ؟

مثال ۱۹ – در راه پیمایی ۲۲ بهمن ، یک بالن اطلاع رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است . طول یکی از طناب ها ۳۰ متر است .
اندازهٔ زاویهٔ B و همچنین طول طناب دوم را پیدا کنید .



مثال ۲۰ – مطابق شکل مقابل ، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجرهٔ ساختمانی قرار گرفته است .

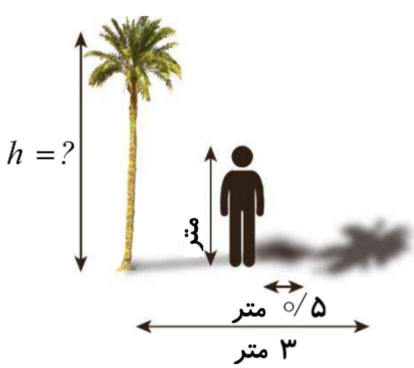


اگر زاویهٔ نردبان با سطح زمین $\theta = 30^\circ$ باشد :

الف) ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید .

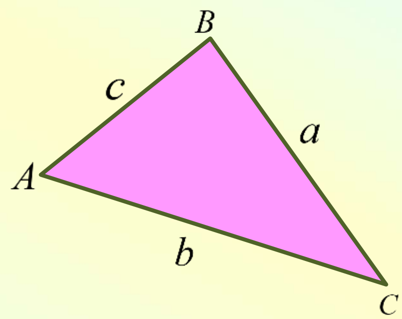
ب) فاصلهٔ پای نردبان تا ساختمان چقدر است ؟

مثال ۲۱ – علی می خواهد ارتفاع یک درخت را که طول سایهٔ آن ۳ متر است ، حساب کند . قد علی ۵/۱ متر و طول سایهٔ او در همان لحظه ۵/۰ متر است . ارتفاع درخت چقدر است ؟



محاسبۀ مساحتِ مثلث به کمک نسبت های مثلثاتی

با معلوم بودنِ مقادیرِ طولِ دوضلع مثلث و اندازۀ زاویۀ بینِ آن ها ، می توان مساحت یک مثلث را محاسبه کرد . با فرمول های زیر :



$$S_{\underset{ABC}{\Delta}} = \frac{۱}{۲} \times AB \times BC \times \mathrm{Sin}\, B \quad \text{یا} \quad \frac{۱}{۲} c.a.\mathrm{Sin}\, B$$

$$S_{\underset{ABC}{\Delta}} = \frac{۱}{۲} \times AC \times BC \times \mathrm{Sin}\, C \quad \text{یا} \quad \frac{۱}{۲} b.a.\mathrm{Sin}\, C$$

$$S_{\underset{ABC}{\Delta}} = \frac{۱}{۲} \times AC \times AB \times \mathrm{Sin}\, A \quad \text{یا} \quad \frac{۱}{۲} b.c.\mathrm{Sin}\, A$$

یعنی مساحت هر مثلث برابر است با : نصفِ حاصلضربِ طولِ دو ضلعِ آن ، در سینوسِ زاویۀ بینِ آن دو ضلع

مثال ۲۲ – ثابت کنید در مثلثِ ABC داریم : $S_{\underset{ABC}{\Delta}} = \frac{۱}{۲} \times AC \times AB \times \mathrm{Sin}\, A$

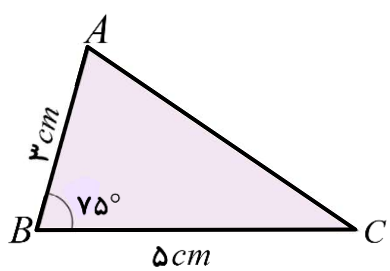
....

....

....

....

مثال ۲۳ – فرض کنید $Sin\, ۷۵^\circ \simeq ۰/۹۶$. مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید .



....

....

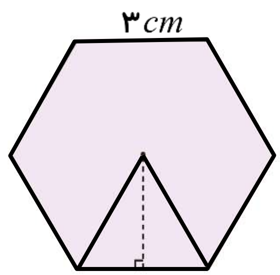
....

....

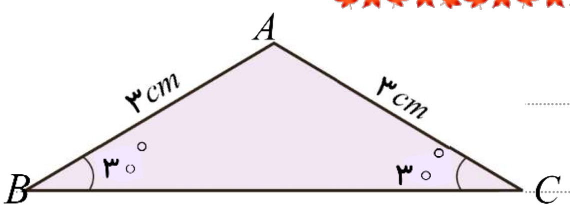
....

هیچ وقت به گمانِ اینکه وقت دارید ،
ننشینید .
زیرا در عمل خواهید دید که همیشه
وقت کم و کوتاه است .

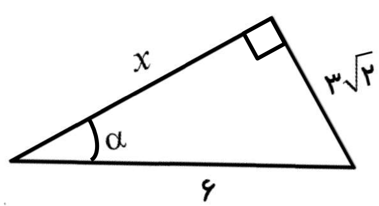
مثال ۲۴ – مساحت شش ضلعی منتظم روبرو را به دست آورید .



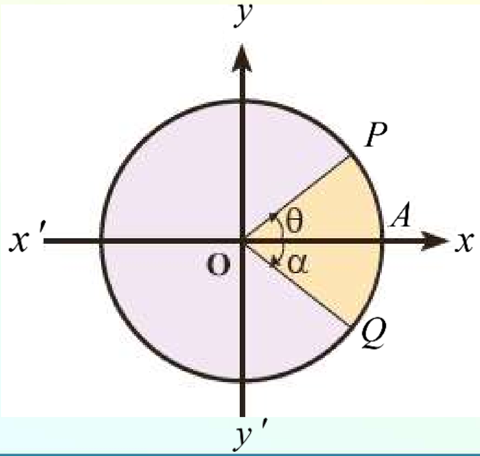
مثال ۲۵ – مساحت مثلث ABC را به دست آورید .



مثال ۲۶ – در مثلث زیر ، مقادیر x و α را به دست آورید .



معرفیِ دایرهٔ مثلثاتی



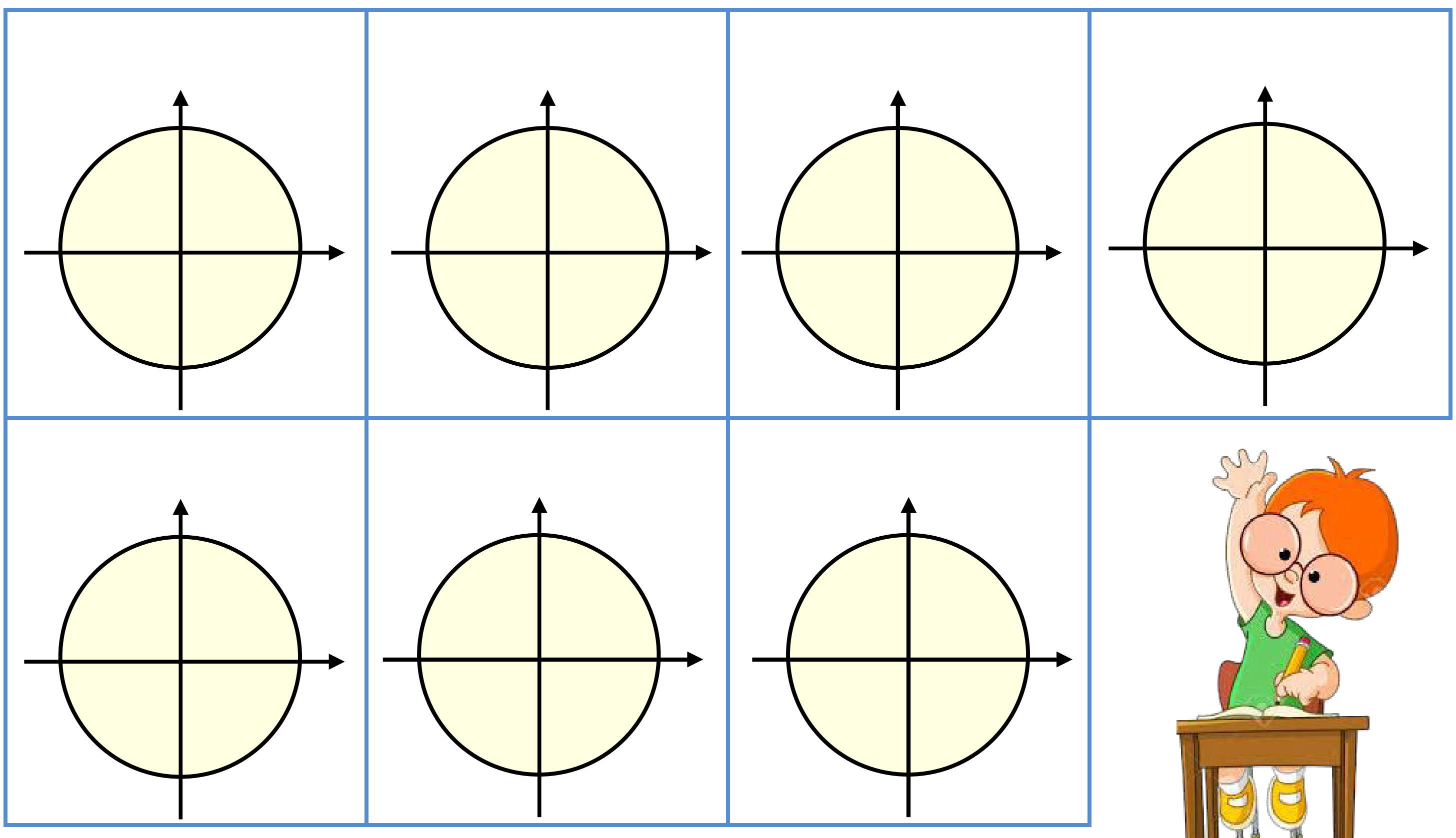
دایرهٔ مثلثاتی دایره ای است که :

۱– به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ واحد است .

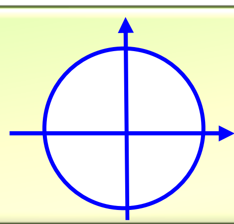
۲– اگر با حرکت در خلاف جهت عقربه های ساعت به نقطه ای مانند P برسیم ، زاویهٔ $A\hat{O}P$ مثبت است و اگر با حرکت در جهت عقربه های ساعت به نقطه ای مانند Q برسیم ، زاویه $A\hat{O}Q$ منفی است .

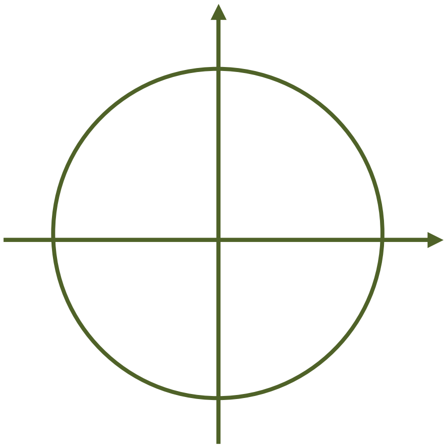
مثال ۲۷ – هر یک از زاویه های زیر را روی دایره های مثلثاتی داده شده ، نشان دهید .

-۲۷۰° ، ۱۳۵° ، -۳۰° ، ۲۲۵° ، -۲۱۰° ، -۹۰° ، ۹۰°



نکته : اگر زاویه ۳۶۰° باشد ، در اینصورت نقطهٔ P ، یک دورِ کامل زده ، یعنی به نقطهٔ شروعِ حرکتش (نقطهٔ A) برمی گردد .





فرض کنیم $P\,(x\,,y\,)$ نقطه ای دلخواه روی دایرهٔ مثلثاتی باشد و

θ زاویه ای باشد که نیم خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{Ox}$ می سازد .

می خواهیم نسبت های مثلثاتی زاویهٔ θ را به دست آوریم .

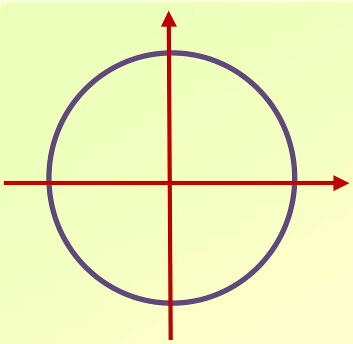
نتیجهٔ مهم : اگر P نقطه ای دلخواه روی دایرهٔ مثلثاتی باشد ، در این صورت داریم :

$$P\,(x\,,y\,) \quad \rightarrow \quad P\,(\cos\theta\;,\;\sin\theta)$$

و فرمول های زیر را داریم :

$\boxed{\sin\theta = y}$, $\boxed{\cos\theta = x}$, $\boxed{\tan\theta = \frac{y}{x}}$, $\boxed{\cot\theta = \frac{x}{y}}$

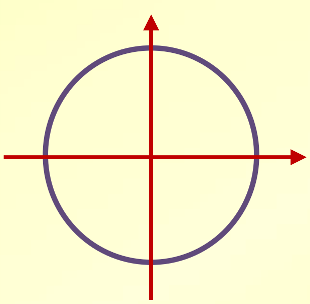
چند نکته مهم



۱– محور $x\,'ox$ یا محور x ها را **محور کسینوس ها** و محور $y\,'oy$ یا محور y ها را **محور سینوس ها** می نامیم .

۲– دو محور عمود بر همِ $x\,'ox$ و $y\,'oy$ صفحه را به چهار قسمت تقسیم می کنند . هر یک از این قسمت ها را یک **ناحیه** یا یک **ربع مثلثاتی** می نامیم .

(با توجه به جهت دایرهٔ مثلثاتی ، ناحیهٔ xoy را ربع اول ، ناحیهٔ $x\,'oy$ را ربع دوم ، ناحیهٔ $x\,'oy\,'$ را ربع سوم و ناحیهٔ $x\,'ox$ را ربع چهارم مثلثاتی می نامیم)



۳– زاویه های 0° و 90° و 180° و 270° و 360° زوایای مرزی هستند و آنها را در هیچ کدام از ناحیه های فوق در نظر نمی گیریم .

مثال ۲۸ – مشخص کنید انتهای کمان مربوط به هر یک از زاویه های زیر در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می گیرد ؟

الف) -۳۰° **ب)** ۶۵° **پ)** ۱۸۲° **ت)** -۹۵°

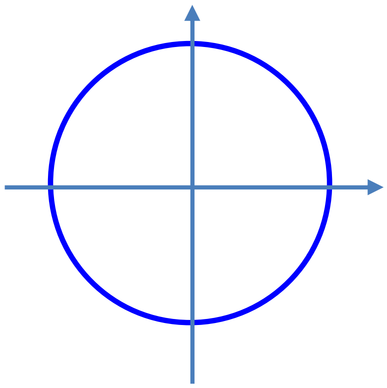
تکلیف – هر یک از زاویه های زیر را روی دایرهٔ مثلثاتی رسم کنید ، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می گیرد .

الف) ۲۷۰° **ب)** ۲۲۵° **پ)** -۱۳۵° **ت)** ۱۸۵°

مثال ۲۹ – اگر $P\left(\frac{\sqrt{۵}}{۳} , \frac{۲}{۳}\right)$ نقطه ای روی دایرهٔ مثلثاتی باشد و زاویهٔ θ را به وجود آورد ، نسبتهای مثلثاتی θ را حساب کنید .

مثال ۳۰ – می دانیم نقطهٔ $P\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲} , \frac{-۱}{۲}\right)$ روی دایرهٔ مثلثاتی باشد و زاویهٔ ایجاد شده ۱۲۰° است . نسبتهای مثلثاتی ۱۲۰° را حساب کنید .

محاسبهٔ نسبت های مثلثاتی زاویه های مرزی (0° و 90° و 180° و 270° و 360°)



جدولِ نسبت های مثلثاتی زوایای مرزی

(۰° و ۹۰° و ۱۸۰° و ۲۷۰° و ۳۶۰°)

مثال ۳۱ – حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید .

الف) $\cos 0^\circ - 2\sin 60^\circ . \cos 30^\circ - \cot 45^\circ + \sin 270^\circ =$ ....

ب) $\sqrt{3}\sin 0^\circ . \cos 45^\circ - \tan^2 180^\circ + \sin 30^\circ =$ ....

علامتِ نسبت های مثلثاتی در چهار ربعِ دایرهٔ مثلثاتی

مثال ۳۲ - اگر $\tan\theta$ و $\sin\theta$ هم علامت باشند ، آنگاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد ؟

مثال ۳۳ - حدودِ زاویهٔ θ را در هر یک از حالت های زیر مشخص کنید .

الف) $\sin\theta > 0 \quad , \quad \cos\theta > 0$

ب) $\sin\theta < 0 \quad , \quad \cos\theta > 0$

پ) $\sin\theta . \tan\theta < 0$

ت) $\sin\beta . \cos\beta < 0$

ث) $\cos\alpha . \cot\alpha > 0$

هرگز با آدمِ نادان مجادله نکنید ؛

تماشاگران ممکن است نتوانند تفاوت بین شما را تشخیص دهند ...

مثال ۳۴ – علامتِ نسبت های مثلثاتی ۱۳۹۵° را مشخص کنید .

مثال ۳۵ – اگر $cos\ \alpha = \frac{-۲}{۵}$ ، آنگاه در موردِ ناحیه ای که α در آن قرار می گیرد ، بحث کنید .

مثال ۳۶ – زاویه ای مثال بزنید که sin آن منفی و cos آن مثبت باشد .

مثال ۳۷ – زاویه ای مثل α پیدا کنید به طوری که $tan\ \alpha > cot\ \alpha$. اکنون زاویه ای مثل β پیدا کنید به طوری که $cot\ \beta > tan\ \beta$. از این تمرین چه نتیجه ای می گیرید ؟

مثال ۳۸ – زاویه ای مثل α پیدا کنید به طوری که $\sin\alpha > \cos\alpha$. اکنون زاویه ای مثل β پیدا کنید به طوری که $\cos\beta > \sin\beta$. از این تمرین چه نتیجه ای می گیرید ؟

نکته : برای هر زاویهٔ دلخواهِ θ داریم : $-۱ \le \cos\theta \le ۱$ و $-۱ \le \sin\theta \le ۱$

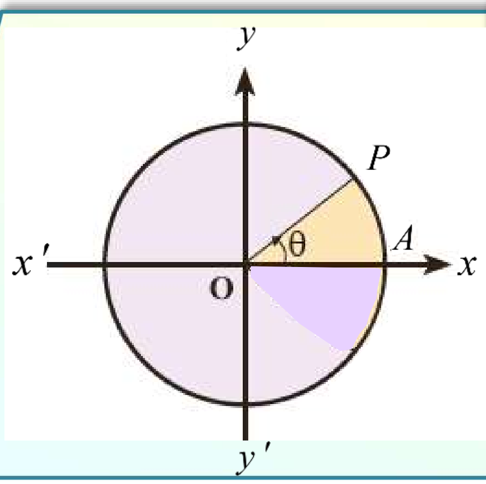
اما tan و cot محدودیتی ندارند و هر عدد حقیقی می توانند باشند .

مثال ۳۹ – از عبارت های زیر ، کدام درست و کدام نادرست است ؟

الف) $\sin\theta = \frac{۳}{۲}$ **ب)** $\tan\alpha = \frac{۳}{۲}$ **پ)** $\cos\beta = -۱$ **ت)** $\cot\beta = \frac{۱}{۷}$

ث) $\sin\theta = \frac{۲}{۳}$ **ج)** $\cos\delta = \frac{-۵}{۶}$ **چ)** $\sin\beta = ۵$ **ح)** $\cot\beta = ۱۰$

محاسبهٔ سایرِ نسبت های مثلثاتی از روی یک نسبت



اگر یکی از نسبت های مثلثاتی داده شده باشد ، با توجه به اینکه داریم :

$\boxed{x = \cos\theta}$ و $\boxed{y = \sin\theta}$ و همچنین رابطهٔ فیثاغورث $\boxed{x^۲ + y^۲ = ۱}$

می توان سایر نسبت ها را حساب کرد .

مثال ۴۰ – در هر یک از موارد زیر ، نسبت های مثلثاتی زاویه ای داده شده است . سایر نسبت های مثلثاتی را به دست آورید .

الف) $\cos \alpha = \frac{۳}{۷}$ (α در ربع چهارم)

ب) $\sin \beta = \frac{-۱}{۲}$ (β در ربع سوم)

پ) $\tan \theta = \frac{۳}{۴}$ (θ در ربع سوم)

مثال ۴۱ – اگر θ زاویه ای در ربع دوم مثلثاتی باشد و $sin\,\theta = \frac{۵}{۷}$ ، سایر نسبت های مثلثاتی θ را حساب کنید .

تکلیف – فرض کنید P روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد به طوری که $cos\,\alpha = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ می دانیم α در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد :

الف) مختصات نقطهٔ P را به دست آورید .

ب) سایر نسبت های مثلثاتی α را حساب کنید .

رابطهٔ شیب خط و تانژانت زاویه

مثال ۴۲ – الف) نمودار خط $y = ۲x - ۴$ را رسم کنید و زاویهٔ خط با جهت مثبت محور x ها را α بنامید .

ب) تانژانت زاویهٔ α را به دست آورید .

....

پ) شیب این خط را محاسبه کنید .

....

....

ت) از مقایسهٔ قسمت **(الف)** و **(ب)** چه نتیجه ای می گیرید ؟ توضیح دهید .

....

نتیجـــهٔ مهـــم

رابطهٔ شیب خط و تانژانت زاویه

شیب هر خط که محور افقی را قطع می کند ، برابر است با تانژانت زاویهٔ بین آن خط و جهت مثبت محور افقی .

به عبارت دیگر ، اگر α زاویه ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می سازد ،

آنگاه $\boxed{m = \tan \alpha}$ یا α شیب یا ضریب زاویهٔ خط

مثال ۴۳ – مشخص کنید هر کدام از خطوط زیر با جهت مثبت محور x ها ، چه زاویه ای می سازد ؟

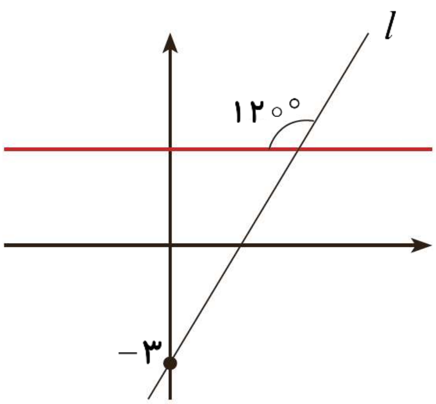
الف) $x + y = ۲$

ب) $۲y - ۳x = ۵$

مثال ۴۴ – معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با جهت مثبت محور xها ، ۳۰° است و از نقطهٔ $(۱ , ۰)$ می گذرد .

مثال ۴۵ – معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با جهت مثبت محور xها ، ۴۵° است و نقطهٔ $(۲ \, , \, ۰)$ روی آن قرار دارد .

مثال ۴۶ – با توجه به شکل زیر ، معادلهٔ خط l را به دست آورید .



روابط بین نسبت های مثلثاتی (اتحادهای مثلثاتی)

❊ **رابطه (اتحاد) شمارهٔ ۱ :**

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

نکته : از فرمول یا اتحاد شمارهٔ یک ، می توان دو فرمول دیگر به دست آورد . به صورت زیر :

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \begin{cases} \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \\ \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \end{cases}$$

❊ **رابطه (اتحاد) شمارهٔ ۲ :**

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

نکته : با توجه به اینکه تانژانت و کتانژانت معکوس یکدیگرند ، می توان روابط زیر را هم نتیجه گرفت :

$$\tan\alpha.\cot\alpha=1 \quad , \quad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha} \quad , \quad \tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha} \quad , \quad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

❊ **رابطه (اتحاد) شمارهٔ ۳ :**

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

❊ **رابطه (اتحاد) شمارهٔ ۴ :**

$$1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

توجه : به تمام رابطه های بالا ، اتحاد گفته می شود ، زیرا به ازاء هر (یعنی هر زاویه ای) همواره برقرارند .

نکته : برای تمام نسبت های مثلثاتی ، رابطه ای به صورت روبرو داریم :

$$\sin^2\alpha=(\sin\alpha)^2\neq\sin\alpha^2$$

برای سایر نسبت ها به همین صورت است .

مثال عددی :

مثال ۴۷ – مشخص کنید کدامیک از تساوی های زیر درست و کدام نادرست است ؟

الف) $\sin^{۴}\alpha+\cos^{۴}\alpha=۱$ ◯ **ب)** $\sin^{۲}\alpha-\cos^{۲}\alpha=۱$ ◯ **پ)** $\tan ۲۵^\circ=\frac{\sin ۲۵^\circ}{\cos ۲۵^\circ}$ ◯

ت) $۱+\cot^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$ ◯ **ث)** $\cot ۷^\circ=\frac{\cos ۷^\circ}{\cos ۸۳^\circ}$ ◯ **ج)** $\sin^{۲}۴۰^\circ=۱-\cos^{۲}۴۰^\circ$ ◯

چ) $\tan\theta^{۲}=\tan^{۲}\theta$ ◯ **ح)** $\sin^{۲}۲۵^\circ+\sin^{۲}۶۵^\circ=۱$ ◯

مثال ۴۸ – حاصل عبارت روبرو را به دست آورید .

$$\frac{\sin^{۲}۱۷^\circ+\cos ۶۰^\circ+\cos^{۲}۱۷^\circ}{\tan ۳۰^\circ\times\cot ۶۰^\circ}=$$

مثال ۴۹ – حاصل عبارت $\sin^{۲}\gamma+\sin ۲\gamma+\cos^{۲}\gamma$ را به ازاءِ $\gamma=۱۵^\circ$ حساب کنید .

مثال ۵۰ – عبارت های زیر را کامل کنید .

الف) اگر $\cot\alpha=۵$ باشد ، آنگاه $\tan\alpha=$ ....

ب) $\sin^{۲}۳^\circ+\cos^{۲}۳^\circ=$ ....

پ) اگر $\sin\beta=\frac{۲}{۷}$ و $\cos\beta=\frac{-۳\sqrt{۵}}{۷}$ باشد ، آنگاه β در ناحیهٔ مثلثاتی .... قرار دارد .

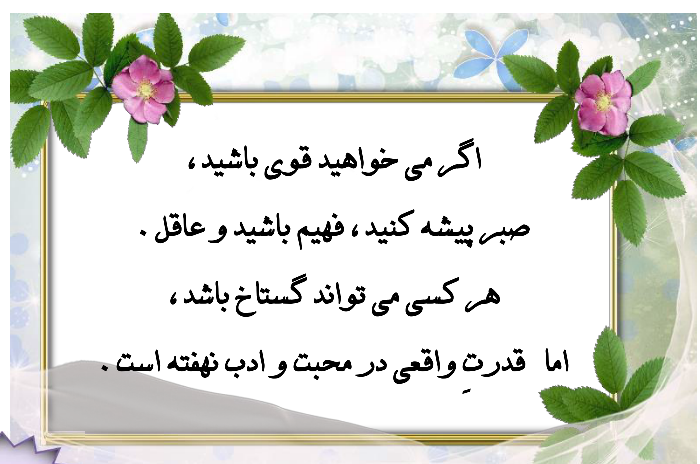
مثال ۵۱ – اگر α زاویه ای در ناحیۀ سوم مثلثاتی باشد و $sin\ \alpha = -\frac{۴}{۵}$ ، آنگاه سایر نسبت های مثلثاتی α را حساب کنید .

مثال ۵۲– فرض کنید β زاویه ای در ناحیۀ دوم مثلثاتی باشد و $cos\ \beta = -\frac{۳}{۵}$ ، آنگاه سایر نسبت های مثلثاتی β را حساب کنید .

مثال ۵۳ – اگر $sin\ ۱۳۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ، آنگاه نسبت های دیگر مثلثاتیِ زاویه ۱۳۵° را به دست آورید .

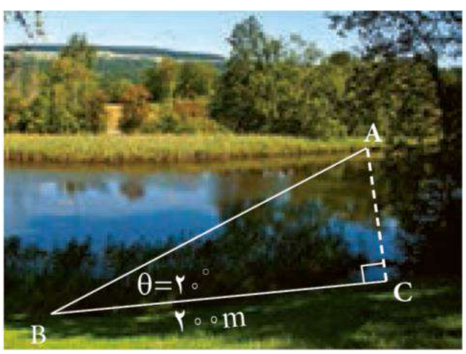
مثال ۵۴ – اگر $۹۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$ و $\tan\alpha = \frac{-۳}{۴}$ ، سایر نسبت های مثلثاتی α را حساب کنید .

مثال ۵۵ – اگر $\tan ۲۴۰^\circ = \sqrt{۳}$ ، سایر نسبت های مثلثاتی ۲۴۰° را به دست آورید .



مثال ۵۶ – اگر $\tan \alpha = \frac{-۴}{۳}$ ، و α زاویه ای در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی باشد ، نسبت های دیگر مثلثاتی زاویهٔ α را به دست آورید .

مثال ۵۷ – شخصی می خواهد عرض یک رودخانه را اندازه گیری کند . او ابتدا مطابق شکل ، نقطه ای چون C و سپس نقطه ای مانند A را در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می کند و به اندازهٔ ۲۰۰ متر از C به صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می کند تا به نقطهٔ B برسد . اگر زاویهٔ دید این شخص (از نقطهٔ B به نقطهٔ A) ۲۰° باشد و $\sin ۲۰^\circ \simeq ۰/۳۴$ ، او چگونه می تواند عرض رودخانه را محاسبه کند ؟ (پاسخ خود را تا دو رقم اعشار برحسب متر بنویسید)



مثال ۵۸ – با فرضِ با معنی بودنِ هر کسر ، درستی هر یک از تساوی های زیر را بررسی کنید .

الف) $\frac{۱}{\sin\theta}\times\tan\theta=\frac{۱}{\cos\theta}$

ب) $\frac{۱+\tan\alpha}{۱+\cot\alpha}=\tan\alpha$

پ) $\left(\frac{۱}{\cos\theta}+\tan\theta\right)(۱-\sin\theta)=\cos\theta$

ت) $\sin^{۴}\theta-\cos^{۴}\theta=\sin^{۲}\theta-\cos^{۲}\theta$

ث) $\frac{۱}{\cos\alpha}+\cot\alpha=\frac{\tan\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

ج) $\frac{۱}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{۱ + \sin x}$

چ) $\frac{\cos \theta}{۱ + \sin \theta} = \frac{۱ - \sin \theta}{\cos \theta}$

ح) $۱ - \frac{\cos^{۲} x}{۱ + \sin x} = \sin x$

مثال ۵۹ – با ضرب کردن طرفینِ اتحاد مثلثاتی زیر در $\cot \alpha$ ، یک اتحاد مثلثاتی بسازید ، سپس درستی آن را ثابت کنید .

$$۱ + \tan^{۲} \alpha = \frac{۱}{\cos^{۲} \alpha}$$

مثال ۶۰ – کدامیک از تساوی های زیر اتحاد است و کدام اتحاد نیست ؟ چرا ؟

الف) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin\alpha.\cos\alpha$

ب) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$

خیلی از آدم ها هستند که به شما می گویند :

نمیتوانی !

کاری که باید انجام دهید ، این است که برگردید و بگوئید :


بارم فصل ۲
در پایانی نوبت اول :
نمره ....