

ریاضی (۱)



نام و نام خانوادگی :

کلاس :

دیرستان :

سال تحصیلی : -

تهیه کننده : شهلا مرادوند

دیر ریاضی ناحیه ۲ اهواز



مجموعه ، الگو و دنباله

شماره صفحه



درس اول: مجموعه های متناهی و نامتناهی



درس دوم: متمم یک مجموعه



درس سوم: الگو و دنباله



درس چهارم: دنباله های حسابی و هندسی



مجموعه های اعداد



انسان در طول تاریخ بر حسب نیاز خود از مجموعه های مختلف اعداد استفاده کرده است.

یادآوری برخی از مجموعه های اعداد که در سال های قبل با آنها آشنا شدیم:

مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$

مجموعه اعدادی که نتوان آنها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد: $\mathbb{Q}'$

مجموعه اعداد حقیقی: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$



رابطه زیر مجموعه بودن بین این مجموعه ها : $Q' \subset R$ و $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$

به عبارت دیگر تمام مجموعه های اعدادی که تاکنون با آنها آشنا شده ایم ، زیر مجموعه هایی از اعداد حقیقی اند .

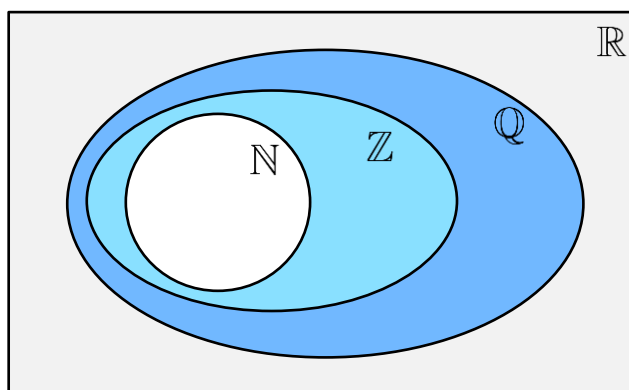
در نتیجه ، هر عدد دلخواهی را که در نظر بگیریم ، باید جایی روی محور اعداد حقیقی داشته باشد و همچنین هر نقطه روی این محور نشان دهنده یک عدد حقیقی مشخص است .



کار در کلاس

۱- الف) مجموعه $R - Q$ چه نام دارد؟

آن را روی شکل زیر هاشور بزنید و دو عضو دلخواه از آن را در ناحیه هاشور خورده بنویسید .



ب) دو عدد گویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشند و آنها را روی شکل مقابل در محل مناسب بنویسید .

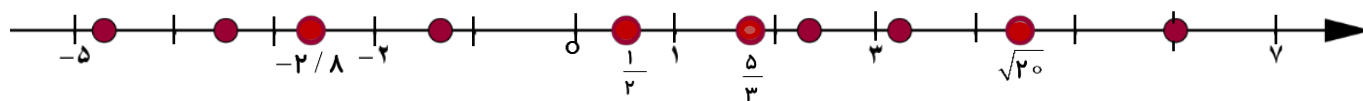
پ) اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید .

$$-9, -\frac{25}{3}, 2\sqrt{5}, \frac{2}{6}, \frac{\pi}{2}, 200, 0, \sqrt{17}$$

ت) مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی را با نمایش اعضا بنویسید .

ث) مجموعه $W - N$ چند عضو دارد؟

۲- هریک از اعداد داده شده را در یکی از جاهای مشخص شده روی محور بنویسید . $-\sqrt{2}, \pi, -4/9, 6, -\frac{7}{2}, 2/45$
کدام یک از این شش عدد گنگ اند ؟ زیر آنها خط بکشید .



زیر مجموعه هایی از R که مشخص کننده یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد را « بازه » یا « فاصله » می نامیم .

بازه ها





اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند ، به طوری که $a < b$ آنگاه جدول زیر را کامل کنید :

نمایش هندسی	نمایش مجموعه ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$		باز
			بسته
			نیم باز
			نیم باز

مثال ها

	$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$		



اگر a عدد حقیقی دلخواهی باشند ، جدول زیر را کامل کنید :

نمایش هندسی	نمایش مجموعه ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$		
		$[a, +\infty)$	نیم باز
		$(-\infty, a)$	
	$\mathbb{R}$		

مثال ها

	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$		



۱- توضیح دهید که $A = [-3, 2]$ و $B = \{-3, 2\}$ چه فرقی با هم دارند ؟

۲- توضیح دهید که $[-5, -3]$ شامل چه اعدادی هست ؟

۳- درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید .

- الف) $\frac{4}{3} \in \left[\frac{1}{2}, 2\right)$ ب) $-2 \in (-2, 0]$ پ) $0 \in (-2, 0]$ ت) $-2 \in \{-2, 0\}$
- ث) $-1 \in \{-2, 0\}$ ج) $[-1, 2] \subseteq (-1, 2)$ چ) $\{0, 1\} \subseteq [-1, 2]$ ح) $\emptyset \subseteq (-17, 0]$
- خ) $[2, 5) = (2, 5]$ د) $\sqrt{2} \in (0, 1)$ هـ) $\sqrt{2} \notin (0, 1)$

۴- درست یا نادرست بودن بازه های زیر را مشخص کنید و سپس درست بازه های نادرست را بنویسید .

- الف) ب) پ) ت) ث) ج)

۵- هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه های داده شده هستند . هر عدد را به بازه یا بازه های نظیر آن وصل کنید .

- -2 $\sqrt{3}$ -500 $\frac{-5}{4}$ $6/022 \times 10^{23}$ $0/2$
- $[1, 4]$ $(-\infty, -4)$ $[-2, 0)$ $[3, +\infty)$ $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right]$ $(-2, 3)$



انسان تنها می تواند با یادگیری رشد کند
و به انسانی بهتر و توانا تر تبدیل شود .



مثال ۱- حاصل هر یک از مجموعه های زیر را با رسم بازه های آنها روی یک محور به دست آورید .

الف) $(-3, 0) \cup (-2, 5] =$

ب) $(-\infty, 6] \cup (2, 9) =$

پ) $(3, +\infty) \cup (6, 10] =$

ت) $(-\infty, 1) \cup [1, +\infty) =$

ث) $(3, +\infty) - [2, 4) =$

ج) $[2, 4) - (3, +\infty) =$

چ) $(-1, 4] \cup (2, +\infty) =$

ح) $(-1, 4] \cap (2, +\infty) =$

خ) $(-\infty, -1] \cap [1, +\infty) =$

د) $(2, 3) - (2, +\infty) =$

د) $[2, 3] - (2, +\infty) =$

ر) $(-\infty, 2] \cap [2, +\infty) =$

ز) $(-2, 7] \cap [-2, +\infty) =$



مثال ۲- نمایش هندسی دو بازه $A = (-4, 2]$ و $B = (-1, 3]$ را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارت های زیر را به دست آورید .

الف) $A \cap B =$

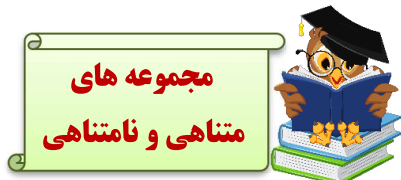
ب) $A \cup B =$

پ) $A - B =$

ت) $B - A =$



مثال ۳- مجموعه های $\mathbb{R} - \{3\}$ و $\mathbb{R} - \left\{-1, 0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع چند بازه بنویسید .



فعالیت فرض کنید A مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۴ و B مجموعه اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد . این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید و تعداد اعضای آنها را مشخص کنید .



مجموعه هایی را که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی است ، مجموعه های **متناهی** می نامیم .
و مجموعه هایی که تعداد اعضای آنها از هر عددی که در نظر بگیریم ، بزرگ تر است را مجموعه های **نامتناهی** می نامیم . یعنی نمی توان تعداد اعضای آن را با یک عدد بیان کرد .



۱- متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه های زیر را مشخص کنید .
درباره مجموعه های متناهی سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آنها را بنویسید .

مجموعه	نامتناهی	متناهی	تعداد اعضاء (در مورد مجموعه های متناهی)
مجموعه اعداد اول یک رقمی			
مجموعه انسان های روی زمین			
مجموعه اعداد طبیعی فرد			
مجموعه سلول های عصبی مغز یک انسان			
مجموعه تمام دایره های به مرکز مبدأ مختصات			
مجموعه دانش آموزان مدرسه شما			
مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی			
مجموعه درخت های جنگل های آمازون			
مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک			
مجموعه مضرب های طبیعی عدد ۱۰			
بازه $(۱, ۰)$			
مجموعه مولکول های موجود در یک مول مشخص از آب			

۲- دو مجموعهٔ متناهی نام ببرید .

۳- دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که یکی از آنها زیرمجموعهٔ دیگری باشد .

۴- دو مجموعهٔ نامتناهی مثل A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ بوده و $B - A$ تک عضوی باشد .

تذکر

تعداد اعضای برخی از مجموعه های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد ؛ با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آنها را به دست آورد .



فعالیت



(الف) $\frac{1}{3}$ عددی بین $\circ$ و 1 است . چهار عدد گویای دیگر از بازهٔ $(\circ, 1)$ بنویسید .

(ب) آیا می توان بین $\circ$ و 1 به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد ؟

(پ) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازهٔ $(\circ, 1)$ چه نتیجه ای می گیرید ؟

(ت) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن $\mathbb{Q}$ چه می توان گفت ؟

(ث) اگر A دارای یک زیر مجموعهٔ نامتناهی باشد ، آنگاه A یک مجموعه خواهد بود .

تمرین صفحه ۷



۱- فرض کنید U مجموعه تمام مضرب های طبیعی عدد ۵ باشد .

(الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید .

(ب) U متناهی است یا نامتناهی ؟

(پ) یک زیر مجموعه متناهی از U بنویسید .

(ت) دو زیر مجموعه نامتناهی مانند C و D از U بنویسید ؛ به طوری که $C \subseteq D$.

۲- متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه های زیر را مشخص کنید .

(الف) مجموعه اعداد طبیعی .

(ب) مجموعه شمارنده های طبیعی عدد ۳۶ .

(پ) بازه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$.

(ت) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$

(ث) مجموعه مضرب های طبیعی عدد 100 .

۳- دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه ای متناهی باشد .

۴- اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه ای متناهی باشد ، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی ؟



۲ تعریف مهم



در هر مبحث، مجموعه ای را که همهٔ مجموعه های مورد بحث، زیرمجموعهٔ آن باشند، **مجموعهٔ مرجع** می نامیم و آن را با U نشان می دهیم.

هرگاه U مجموعهٔ مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعهٔ $U - A$ را متمم A می نامیم و آن را با نماد A' نشان می دهیم.
به عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

مثال ۴ - فرض کنیم U نشان دهندهٔ مجموعهٔ تمام کتاب های کتابخانه آیت الله العظمی مرعشی نجفی (ره) و A مجموعهٔ کتاب های خطی آن باشد A' را همراه با رسم شکل نشان دهید.

الف) دو مجموعهٔ زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور نشان دهید.

فعالیت



$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$$

ب) A را با نمایش اعضا و B را به صورت یک بازه بنویسید.

پ) در مورد A ، اگر مجموعهٔ مرجع را $\mathbb{Z}$ در نظر بگیریم، A' را مشخص کنید.

ت) در مورد B با فرض این که $\mathbb{R}$ مجموعهٔ مرجع باشد، B' را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید.

۱- اگر U مجموعه شامل تمام استان های کشورمان باشد و A غیر ساحلی، آنگاه A' برابر چه مجموعه ای می شود ؟

۲- فرض کنیم U مجموعه تمام اتومبیل های پلاک گذاری شده کشور و B مجموعه اتومبیل های با پلاک فرد باشد . در این صورت B' چه مجموعه ای خواهد بود ؟

۳- با فرض آنکه $\mathbb{N}$ مجموعه مرجع باشد ، هر مجموعه را به متمم خودش وصل کنید .

$$\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

$$\{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, \dots\}$$

$$\{3, 6, 9, 12, \dots\}$$

$$\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

$$\{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

$$\{1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots\}$$

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$$

$$\{10, 11, 12, 13, 14, \dots\}$$

۴- U مجموعه مرجع و A زیرمجموعه دلخواهی از آن می باشد . طرف دوم تساوی های زیر را بنویسید .

الف) $\emptyset' =$

ب) $U' =$

پ) $A \cup A' =$

ت) $A \cap A' =$

۵- الف) اگر $\mathbb{Z}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم ، آنگاه $\mathbb{N}'$ را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید .

ب) اگر $\mathbb{R}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم ، در این صورت $\mathbb{N}'$ را روی محور نمایش دهید .



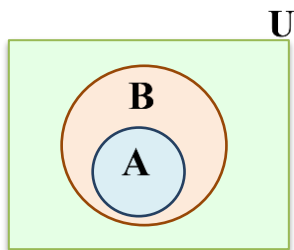
۶- فرض کنیم $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4\}$. ابتدا A' و B' را بنویسید و سپس جدول های زیر را کامل کنید. از هر قسمت چه نتیجه ای می گیرید؟

$A' =$	$B' =$
--------	--------

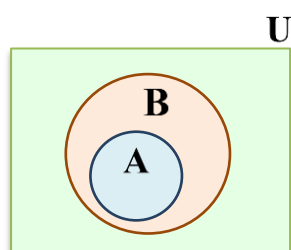
$(A')' =$	نتیجه (فرمول های مهم)
-----------	-----------------------

$A \cup B =$	$(A \cup B)' =$	$A' \cap B' =$	
$A \cap B =$	$(A \cap B)' =$	$A' \cup B' =$	

$A - B =$	$A - (A \cap B) =$	$A \cap B' =$	
-----------	--------------------	---------------	--



A' را هاشور بزنیید



B' را هاشور بزنیید

۷- الف) فرض کنیم $A \subseteq B \subseteq U$ که در آن U مجموعه مرجع است. در نمودارهای روبرو A' و B' را مشخص کنید و سپس تعیین کنید که آیا بین A' و B' هم رابطه زیرمجموعه بودن برقرار است؟ چگونه؟

ب) اگر $U = \{a, b, c, d, e\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, b, c\}$ ، در این صورت $A \subseteq B$ می باشد. با به دست آوردن A' و B' نشان دهید که بین A' و B' هم رابطه زیرمجموعه بودن برقرار است.

تعداد عضوهای
اجتماع دو مجموعه



۲ تعریف مهم



به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می گوئیم.

اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

نکته مهم:

مثال ۵- مجموعه شمارنده های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را A و B بنامید و سپس تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه را به کمک فرمول بیابید.

مثال ۶- یک تیم کوه نوردی متشکل از ۴ دانش آموز (آنیثا، زهرا، الناز، الهام) و ۳ دانشجو (فاطمه، معصومه، فرزانه) عضو یک مؤسسه طرفدار محیط زیست است. اعضای این تیم به طور داوطلبانه در روزهای جمعه هر هفته کوه های اطراف شهر خود را از وجود زباله پاک سازی می کنند. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه را به کمک فرمول بیابید.

مثال ۷- در یک کلاس ۲۵ نفری ، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند .

اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند ، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند .



مثال ۸- در یک کلاس ۳۱ نفری ، تعداد ۱۴ نفر از دانش آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو تئاترند .

اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند ، مطلوب است :

الف) تعداد دانش آموزانی که فقط عضو گروه سرودند .

ب) تعداد دانش آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند .



مثال ۹- اگر $n(A) = 15$ ، $n(A \cap B) = 5$ و $n(A \cup B) = 30$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید .



یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳ تا از فیلم های پویانمایی با مضمون طنز می باشند.



مطلوب است تعداد کل فیلم هایی که :
الف) پویانمایی یا طنزند .

ب) غیر پویانمایی و غیر طنزند .

تمرین صفحه ۱۲



۱- $\mathbb{R}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه های زیر را روی محور نشان دهید .

الف) $A = [-2, 3)$

ب) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

پ) $C = (0, +\infty)$

ت) $C = (-\infty, 1]$

۲- $\mathbb{N}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید .

الف) مجموعه ای نامتناهی مثل A مثال بنزید که A' هم نامتناهی باشد .

ب) مجموعه ای نامتناهی مثل B مثال بنزید که B' متناهی باشد .

پ) مجموعه ای متناهی مثل C مثال بنزید و C' را به دست آورید . C' متناهی است یا نامتناهی ؟

تمرین ۳ به عنوان مثال حل شد .

۴- اگر A و B زیرمجموعه هایی از مجموعه مرجع U باشند ، به طوری که $n(U) = 100$ ، $n(A) = 60$ ، $n(B) = 40$ و $n(A \cap B) = 20$ مطلوب است :

الف) $n(A \cup B)$

ب) $n(A \cap B')$

پ) $n(A' \cap B)$

ت) $n(A' \cap B')$

تمرین ۵ به عنوان مثال حل شد .



۶- در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره ای ، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده اند . همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده اند . چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته :

(الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده اند .

(ب) فقط از شرکت A خرید کرده اند .

(پ) دقیقا" از یکی از این دو شرکت خرید کرده اند .

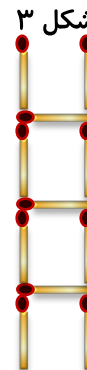
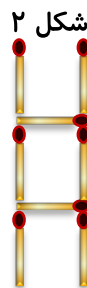
(ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده اند .



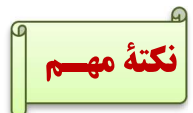


هر ساختار منظم از اعداد یا اشکال یا تصاویر یا ...

مثال ۱۰- به شکل های زیر و تعداد چوب کبریت های به کار رفته در هر یک از آنها توجه کنید :



شماره شکل : n	۱	۲	۳	۴	...	n	...
a_n : تعداد چوب کبریت ها					...	...	
رابطه بین n و a_n					...		...



* عبارت های a_1 و a_2 و a_3 و ... متغیرهای اندیس دار نامیده می شوند که مقادیر آنها به ترتیب ۵ و ۸ و ۱۱ و ... است .

به این اعداد ، جملات الگو هم گفته می شود .

یعنی :

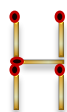
a_1	a_2	a_3	...	a_n
۵	۸	۱۱	...	



آیا می توانید جمله های عمومی دیگری برای شکل فوق بنویسید ؟

الف)

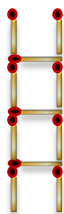
شکل ۱



شکل ۲

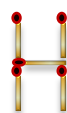


شکل ۳



ب)

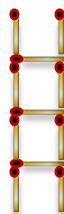
شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳



توجه: با ساده کردن

سؤال ۱ - به کمک رابطه $a_n = 3n + 2$ ، تعداد چوب کبریت های شکل بیستم را بیابید .

سؤال ۲ - مشخص کنید که چندمین شکل یا در مرحله چندم از شکل فوق ، تعداد چوب کبریت ها ۷۷ تا است ؟



تذکر: a_n را جمله عمومی الگو می نامیم ؛ چرا که این رابطه در واقع ساختار جملات الگو را مشخص می کند و به کمک آن می توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد .
به عبارت دیگر، در اختیار داشتن جمله عمومی یک الگو به معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگوست .



الگوهایی را که در آنها اختلاف هر دو جمله متوالی عددی ثابت است، **الگوهای خطی** می نامیم.

به طور کلی الگوهایی را که جمله عمومی آنها به صورت $t_n = an + b$ است، **الگوهای خطی** می نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.



a_1	a_2	a_3	a_4	
۵	۸	۱۱	۱۴	...

دلیل این نام گذاری، این است که اگر این نقاط را در صفحه مختصات مشخص کنیم، همه آن ها روی یک خط راست قرار می گیرند. به عبارت دیگر مختصات تمام نقاط در معادله یک خط صدق می کند.

در واقع اختلاف بین جملات متوالی الگو، در معادله خط به عنوان **شیب خط** ظاهر شده است که این مطلب همواره درست است.



مثال ۱۱ - کدامیک از موارد زیر، می تواند الگوی خطی داشته باشد؟ جمله عمومی آن را بنویسید.

الف) ۱، ۴، ۹، ۱۶، ...

ب) ...، -۳، -۱، ۱، ۳، ۵، ۷

مثال ۱۲- در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می باشند. جمله عمومی الگو را بیابید.

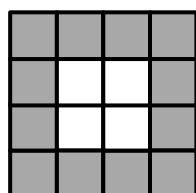


مثال ۱۳- در یک الگوی خطی، جملات هفتم و بیستم به ترتیب $b_7 = -13$ و $b_{20} = -65$ می باشند. جمله عمومی الگو را بیابید.

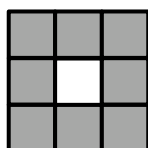


۱- شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.

شکل (۳)

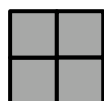


شکل (۲)



۸ مربع رنگی

شکل (۱)



۴ مربع رنگی

n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	...	n
b_n : تعداد مربع های رنگی						...	...
رابطه بین n و b_n						...	

۲- توضیح دهید که چرا این الگو یک الگوی خطی محسوب می شود؟

۳- با توجه به میزان افزایش جملات الگو، مقدار a در رابطه $b_n = an + h$ را بیابید و پس از حدس زدن مقدار h ، حاصل b_n را به دست آورید.

۴- شکل شماره ۲۵۰ دارای چند مربع رنگی است؟

۵- در چه مرحله ای از الگوی بالا ، تعداد مربع های رنگی برابر ۱۴۴ است؟

الگوهای غیر خطی



فعالیت



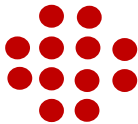
۱- در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید.

شکل (۱)



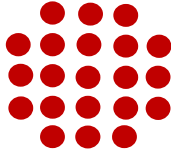
۵ نقطه

شکل (۳)



۱۲

شکل (۲)



n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
t_n : تعداد نقطه ها					...
رابطه بین n و t_n					...

۲- آیا این الگو یک الگوی خطی است؟ چرا؟

۳- دو جمله عمومی برای شکل فوق بنویسید و سپس نشان دهید هر دو با هم برابرند.

شکل (۱)



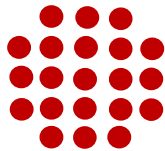
۵ نقطه

شکل (۳)



۱۲

شکل (۲)

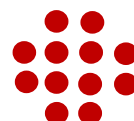


شکل (۱)



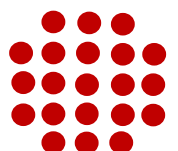
۵ نقطه

شکل (۳)



۱۲

شکل (۲)





تعریف: هر تعداد عدد را که پشت سرهم قرار می گیرند ، یک **دنباله** می نامیم . این اعداد ، **جملات دنباله** نامیده می شوند .

به عنوان نمونه :

یک دنباله است از نوع درجه زیرا

یک دنباله است از نوع درجه زیرا

یک دنباله است از نوع درجه زیرا



توجه: ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند .



کار در کلاس ۱- دو دنباله دلخواه مثال بزنید .

۲- جمله عمومی چند دنباله داده شده است . در هر مورد ، جاهای خالی را پر کنید .

الف) $a_n = n^2 - 1$: ۰ , ۳ , ... , ۱۵ , ۲۴

ب) $b_n = -n + ۴$: ۳ , ۲ , ۱ , ۰ , ... , -۲

پ) $c_n = -۱۳ + ۲n$: -۱۱ , ... , -۷ , ... , -۳

۳- در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است . در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید . همچنین در پنج مورد اول سعی کنید جمله

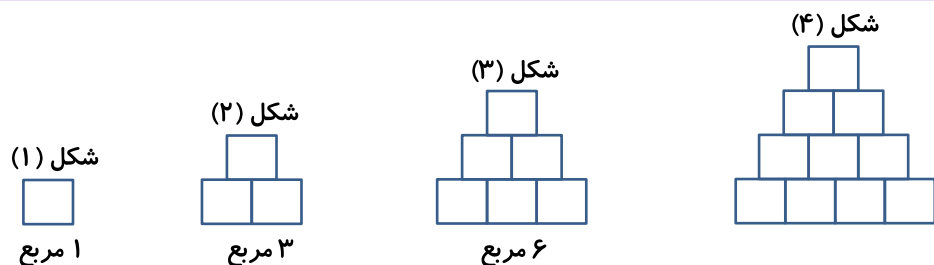
عمومی برای دنباله نیز حدس بزنید .

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	...	t_n	...
الف	-۱	-۲	-۳	-۴				...		...
ب	۱	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$				...		...
پ	۱	۴	۹	۱۶				...		...
ت	○/۱	○/○۱	○/○○۱	○/○○○۱				...		...
ث	-۱	۸	-۲۷	۶۴				...		...
ج	۵	۱۸	۳۱	۴۴				...		...
چ	-۲	۱	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$				...		...
ح	۱	۲	۴	۷				...		...
خ	۳	۱	۴	۱	۵			...		...
د	۱	۱	۲	۳	۵			...		...
ذ	۲	۳	۵	۷				...		...



آرزومند آن باش که چیزی غیر
از آنچه هستی باشی ، بکوش که
کمال آنچه هستی باشی .

۳- الگوی زیر را در نظر بگیرید .



الف) تعداد مربع ها در الگو را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید .

ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است ؟ چرا ؟

پ) جمله عمومی دنباله فوق را به دست آورید .

نکته :



ت) به کمک قسمت قبل ، حاصل عبارت زیر را به دست آورید .

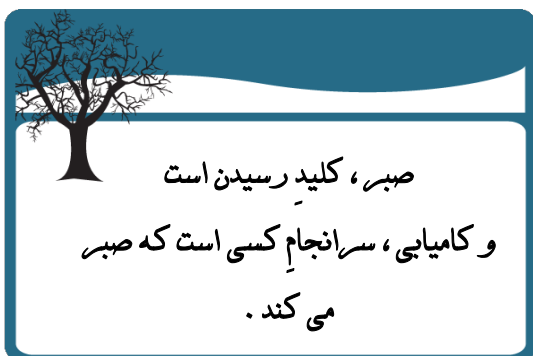
$$1 + 2 + 3 + \dots + n =$$



مثال ۱۴ - حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف) $1 + 2 + 3 + \dots + 21 =$

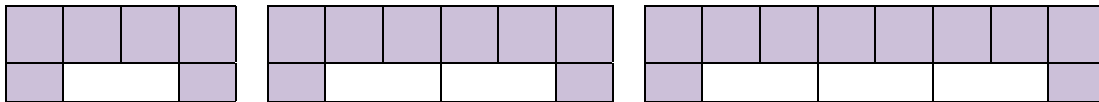
ب) $3 \times 9 \times 27 \times 81 \times \dots \times 3^{10} =$



تمرین صفحه ۲۰



۱- به الگوی زیر توجه کنید .



۶ کاشی تیره
۱ کاشی سفید

۸ کاشی تیره
۲ کاشی سفید

۱۰ کاشی تیره
۳ کاشی سفید

(الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی های تیره آن را مشخص کنید .

(ب) تعداد کاشی های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید .

(پ) اگر n تعداد کاشی های سفید و t_n تعداد کاشی های تیره باشد ، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید .

(ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید ، چند کاشی تیره لازم است ؟

(ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد ؟ اگر هست ، تعداد کاشی های سفید آن چندتا است ؟

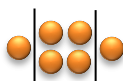
۲- الگوی زیر را در نظر بگیرید .

شکل (۱)



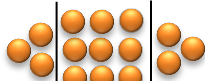
۱ نقطه

شکل (۲)



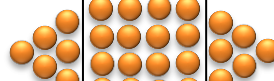
۶ نقطه

شکل (۳)



۱۵ نقطه

شکل (۴)



(الف) شکل بعدی را رسم کنید ، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید .

(پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد ؟

۳- جمله عمومی چند دنباله داده شده است . در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید .

(الف) $a_n = 4n$

(ب) $b_n = 3n + 1$

(پ) $c_n = n^2 + 2$

ت) $d_n = n^2 + n$

۴- برای هریک از دنباله های درجه دو زیر جمله عمومی را به دست آورید و سپس برای هر کدام ، یک الگوی هندسی نظیر کنید .

الف) $5, 8, 13, 20, 29, \dots$

ب) $5, 12, 22, 35, 51, \dots$



نام دیگر الگوهای عددی خطی ، دنباله های حسابی است . **به عبارت دیگر :**

دنباله ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) ، با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می آید ، یک **دنباله حسابی** نامیده می شود و به آن عدد ثابت ، قدر نسبت دنباله می گویند .

جملات یک دنباله حسابی به صورت زیر است :

$$t_1, \quad t_1 + d, \quad t_1 + 2d, \quad t_1 + 3d, \quad \dots$$

مثلا

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$



سال های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزاره سوم میلادی به بعد به صورت زیر است :
۲۰۰۰ , ۲۰۰۴ , ۲۰۰۸ , ۲۰۱۲ , ۲۰۱۶ , ۲۰۲۰ , ...

۱- آیا دنباله فوق ، یک دنباله حسابی است ؟ چرا؟

۲- جمله اول و قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید .

۳- نهمین دوره المپیک در این هزاره در چه سالی برگزار خواهد شد ؟

۴- جمله عمومی این دنباله را به دست آورید . و این بار به کمک فرمول حساب کنید نهمین دوره المپیک در این هزاره در چه سالی برگزار خواهد شد ؟

۵- بیست و چهارمین دور المپیک در هزاره سوم میلادی در چه سالی برگزار خواهد شد ؟

۶- در سال ۲۰۷۶ ، چندمین دوره المپیک در این هزاره برگزار خواهد شد ؟



۱- در دنباله های حسابی زیر با مشخص کردن قدرنسبت ، جاهای خالی را با جملات درست پر کنید و سپس جمله عمومی هر کدام را به دست آورید .

۵ (الف) , ۱۰ , ۱۵ , ۲۰ , , , , ...

ب) ۱، ۳، ۵، ۷، ، ، ، ...

پ) ۵، ۹، ۱۳، ۱۷، ، ، ، ...

ت) ۱۳، ۷، ۱، -۵، ، ، ، ...

ث) ، ، ، ۱۸، ۲۵، ...



دنیا، به شایستگی هایت پاسخ می دهد
نه به آرزوهایت .
پس، شایسته ی آرزوهایت باش!



۲- A و B دو شرکت عرضه کننده سیم کارت های تلفن همراه با شرایط زیرند :

سیم کارت های شرکت B
هزینه ثابت ماهانه : ۳۰۰۰ تومان
هزینه هر دقیقه مکالمه : ۲۰ تومان

سیم کارت های شرکت A
هزینه ثابت ماهانه : ۲۰۰۰ تومان
هزینه هر دقیقه مکالمه : ۳۰ تومان

فرض کنیم a_n نشان دهنده هزینه کل n دقیقه مکالمه ماهانه از طریق سیم کارت شرکت A و b_n هزینه مشابه برای استفاده از سیم کارت شرکت B باشد .

الف) مقدار a_n و b_n را بر حسب n بنویسید .

ب) جدول زیر را کامل کنید .

n : زمان مکالمه ماهانه (دقیقه)	۱	۴۰	۶۰	۱۱۰	۱۶۰
a_n : هزینه سیم کارت A	۲۰۳۰	۳۲۰۰	...	...	...
b_n : هزینه سیم کارت B	...	۳۸۰۰	...	...	...

پ) آیا a_n و b_n هر کدام می توانند جمله عمومی یک دنباله حسابی باشند ؟ چرا ؟

اگر جواب مثبت است ، قدرنسبت هر یک را مشخص کنید .

ت) سارا در هر ماه حدود یک ساعت و فاطمه ماهانه تقریباً ۱۵۰ دقیقه با تلفن همراه مکالمه می کنند . به هر یک از آنها کدام سیم کارت پیشنهاد می کنید ؟ چرا ؟



مثال ۱۵ - در دنباله حسابی روبرو ، جمله شانزدهم را به دست آورید .
... , ۲۵ , ۱۸ , ۱۱ , ۴



۱- الف) یک دنباله حسابی با قدرنسبت مثبت مثال بزنید که جمله چهارم آن 10 باشد.

ب) یک دنباله حسابی با قدرنسبت منفی مثال بزنید که جمله چهارم آن 10 باشد.

پ) دنباله ای حسابی مثال بزنید که تنها سه جمله مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند.



۲- الف) بین 18 و 62 سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند.

ب) بین 20 و 80 به تعداد مشخص شده در هر مورد واسطه حسابی درج کنید.

20		80
------	--	------

20			80
------	--	--	------

20				80
------	--	--	--	------

20					80
------	--	--	--	--	------

20						80
------	--	--	--	--	--	------

مثال ۱۶ - در یک دنباله ی حسابی جمله ی پنجم ۱۸ و جمله ی دوازدهم ۴۶ است . این دنباله را مشخص کنید .



مثال ۱۷ - در یک دنباله ی حسابی ، مجموع سه جمله ی اول ۳ و مجموع سه جمله ی بعدی آن ۳۹ است . دنباله را مشخص کنید .



مثال ۱۸ - الف) واسطه ی حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است ؟

ب) واسطه ی حسابی بین 2° و 3° چه عددی است ؟

پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه ای می گیرید ؟

$$b = \frac{a+c}{2}$$

یا

$$2b = a + c$$

شرط اینکه سه جمله متوالی a, b, c تشکیل دنباله حسابی بدهند، این است که :

که در اینصورت b را **واسطه حسابی** بین a و c می نامیم .

یعنی :

مثال ۱۹ - x را طوری بیابید که ۷ و $2x - 3$ و x سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند .



مثال ۲۰ - اگر $x + 11$ و $4x + 1$ و $3x - 1$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، با شروع از $3x - 1$ ، جمله بیستم دنباله را بیابید .

تمرین صفحه ۲۴



۱ - از بین دنباله های زیر، دنباله های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت، جمله بیست و یکم را بیابید ؟

الف) $3, 10, 17, 24, \dots$

ب) ۱, ۲, ۴, ۸, ...

پ) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \dots$

ت) ۱۰, ۷, ۴, ۱, ...

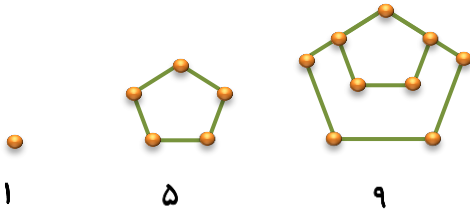
ث) $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots$

ج) ۲, ۲, ۲, ۲, ...

نکته: دنباله هایی مانند دنباله (ج) که تمام جملات با هم برابرند، دنباله ثابت نامیده می شوند. (دنباله های ثابت، دنباله هایی هستند حسابی با قدرنسبت صفر)

۲- در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به دست آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

۳- الف) دو جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیاید و نوع دنباله را مشخص کنید .



ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید .

پ) جمله چندم این دنباله ۳۹۷ است ؟

۴- مسئله زیر در پاپیروس رایند آمده است . آن را حل کنید .

« ۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم های دریافت شده ، دنباله حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم

بزرگ تر ، مساوی مجموع دو سهم کوچک تر باشد »

۵-الف) دنباله حسابی ۳۲۳، ...، ۱۱، ۸، ۵، چند جمله دارد؟

ب) دنباله حسابی $2^{\circ} + 3x$ ، ...، ۱۱، ۸، ۵، چند جمله دارد؟

۶- اگر $t_{14} - t_{20} = 9^{\circ}$ باشد، مقدار $t_{38} - t_{50}$ چند است؟

۷- در یک دنباله حسابی با جمله عمومی a_n ، حاصل $\frac{a_{13} - a_{23}}{a_{18} - a_5}$ را بیابید.



چیزهای خوب به سراغ کسانی میروند که صبر می کنند
اما چیزهای بهتر به سراغ کسانی میروند که برایش تلاش می کنند.

در بعضی از دنباله ها ، تفاضل جملات متوالی آن ثابت نیست (پس دنباله از نوع حسابی نیست) ، بلکه می بینیم که نسبت تقسیم هر دو جمله متوالی آن برابر عددی ثابت است . اینگونه دنباله ها را **دنباله های هندسی** می نامیم .

به عبارت دیگر :

دنباله هندسی ، دنباله ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیر صفر به دست می آید .

این عدد ثابت را **قدر نسبت دنباله** می نامیم . جمله اول هم باید غیر صفر باشد .

جملات یک دنباله هندسی به صورت زیر است :

$$t_1, \quad t_1 r, \quad t_1 r^2, \quad t_1 r^3, \quad \dots, \dots$$

مثلا

$$t_1, r \neq 0 \quad t_n = t_1 r^{n-1} \quad r \quad t_1 \quad n$$

مثال ۲۱ - از بین موارد زیر ، دنباله های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید .

الف) ۷ ، ۲۸ ، ۱۱۲ ، ۴۴۸ ، ...

ب) $۲\sqrt{۵}$, $۴\sqrt{۵}$, $۶\sqrt{۵}$, $۸\sqrt{۵}$, ...

پ) ۱ , $\frac{-۱}{۲}$, $\frac{۱}{۴}$, $\frac{-۱}{۸}$, ...

ت) ۵ , ۵ , ۵ , ۵ , ...

توجه :



نگار	نرگس
$r = \frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۳}$	$r = \frac{۹}{۳} = ۳$
$t_v = 9\left(\frac{۱}{۳}\right)^{v-1}$	$t_v = 9(۳)^{v-1}$
$= \frac{۱}{۸۱}$	$= ۶۵۶۱$

۱- نرگس و نگار برای محاسبه هفتمین جمله دنباله هندسی ۹ , ۳ , ۱ , ... روش های مقابل را به کار برده اند . کدام یک از آنها این مثال را درست حل کرده اند ؟ توضیح دهید .

۲- در دنباله های هندسی زیر ، قدر نسبت را مشخص کنید و دو جمله بعدی را بنویسید . سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید .

(الف) $a_n = ?$ و $2, 6, 18, 54, \square, \square, \dots$

(ب) $b_n = ?$ و $5, 10, 20, 40, \square, \square, \dots$

(پ) $c_n = ?$ و $6, -60, 600, -6000, \square, \square, \dots$

(ت) $d_n = ?$ و $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \square, \square, \dots$



۳- بین ۳ و ۴۸ ، یک عدد طوری پیدا کنید که سه عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی بدهند . آیا جواب یکتاست ؟

۴- جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنباله هندسی حاصل شود .

۱۰		۴۰۰۰
----	--	------

۱۰			۸۰۰۰۰
----	--	--	-------

۴					۹۷۲
---	--	--	--	--	-----



مثال ۲۲- در یک دنباله هندسی جمله سوم ۱۰ و جمله هفتم ۴۰ است . دنباله را مشخص کنید . آیا این دنباله افزایشی است ؟

$$b^2 = a.c$$

شرط اینکه سه جمله متوالی a, b, c تشکیل دنباله هندسی بدهند ، این است که :

که در اینصورت b را **واسطه هندسی** بین a و c می نامیم .

یعنی :

نکته

مثال ۲۳ - x را طوری بیابید که $1 - 2x$ و 5 و 3 سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند .



مثال ۲۴ - اگر 4 و a و 1 سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند و دنباله غیر صعودی باشد ، جمله هفتم را بیابید .

تمرین صفحه ۲۷



تمرین ۱ ، به عنوان مثال حل شد .

۲ - چند دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{4}{5}$ می توان ساخت ؟ دو مورد را بنویسید .

۳ - درستی یا نادرستی جمالت زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید :

(الف) هر دنباله ، یا حسابی است یا هندسی .

(ب) دنباله ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی .

۲, ۴, ۸, ...

۴- حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید :

۵- در دنباله هندسی ... , ۸, ۴, ۲, ۱, جمله چندم برابر با ۱۲۵۶ است ؟

۶- جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می باشند . دنباله را مشخص کنید .

۷- بنابر آمار منتشر شده از جانب پزشکی قانونی کشور ، آمار تلفات جاده ای از عدد ۲۷۷۵۹ نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۵۸۴ نفر در سال ۱۳۹۴ کاهش یافته است که نشان دهنده حدود ۵ درصد کاهش سالانه در این دهه است . اگر آمار حوادث رانندگی در کشور با همین سرعت کاهش یابد :

الف) پیش بینی می شود در هر یک از سال های منتهی به سال ۱۴۰۰ چند نفر از هم وطن های ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدهند ؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید .

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰
تعداد تلفات مورد انتظار							

ب) اعداد حاصل ، چه نوع دنباله ای تشکیل می دهند ؟

۸- علی دوچرخه ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید . فرض کنید قیمت دوچرخه دست دوم ، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد .

الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوچرخه اش را داشته باشد ، به چه قیمتی می تواند آن را بفروشد ؟

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه ای به دست می آید ؟

