

کد کنترل

161

A

خارج از کشور



دفترچه شماره ۲



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود
امام خمینی (ره)

آزمون سراسری ورودی دانشگاه ها و مؤسسات آموزش عالی کشور سال ۱۴۰۱

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی
آزمون اختصاصی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	زمان پاسخ گویی
۱	ریاضیات	۵۰	۱۰۱	۱۵۰	۸۰ دقیقه

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می باشد و با منقلبن برابر مقررات راثار می شود.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضاء در مندرجات جدول ذیل، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب..... با شماره داوطلبی..... با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره سندلی خود را با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سوالات، نوع و کدکنترل درج شده بر روی دفترچه سوالات و پائین پاسخنامه ام را تأیید می‌نمایم.

امضاء:

۱۰۱- یک دانش آموز مربع‌هایی رسم می‌کند که مساحت هر مربع، ۹ برابر مساحت مربع رسم شده قبلی است. محیط این

مربع‌ها، تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند. قدر نسبت این دنباله، کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۱۰۲- نمودار تابع $y = 3x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3}$ در ناحیه دوم بر نیمساز آن ناحیه مماس است. طول رأس سهمی، کدام

است؟

- (۱) $-\frac{1}{18}$ (۲) $-\frac{5}{18}$ (۳) $-\frac{7}{6}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۱۰۳- اگر U مجموعه مرجع و $A' \cup B = A' \cap B'$ باشد، کدام مورد درست است؟

- (۱) $A = B$ (۲) $A = \emptyset$ (۳) $B = U$ (۴) $B = \emptyset$

۱۰۴- اگر A و B دو مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع U باشند، مجموعه $[(A \cap B) - B'] \cap [(A \cap B) \cup (A - B)]$ با کدام مجموعه برابر است؟

- (۱) A (۲) $\emptyset$ (۳) $A - B$ (۴) $A' - B'$

۱۰۵- ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ در کدام حالت زیر درست است؟

- (۱) p درست، q نادرست، r درست (۲) p نادرست، q نادرست، r نادرست
(۳) p درست، q درست، r نادرست (۴) p نادرست، q درست، r نادرست

۱۰۶- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 2(\alpha+1)x + 2\alpha - 1 = 0$ باشند، به ازای کدام مقدار α ، به ترتیب سه عدد α ، β و β تشکیل دنباله هندسی می‌دهند؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) ۱

۱۰۷- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^3 + kx^2 - 9x - 2 = 0$ ، $\alpha + \beta = 1$ و $\alpha\beta = -2$ باشد، مقدار k چقدر است؟

- (۱) $-\frac{27}{5}$ (۲) $\frac{27}{5}$ (۳) -۳ (۴) ۳

محل انجام محاسبات

۱۰۸- تابع با ضابطه $y = \sqrt{(x+1)^2} - |3x-6|$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه، کدام است؟

$$(1) -\frac{1}{2}x - 7, x \geq 2 \quad (2) -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}, x \leq 2$$

$$(3) -2x + 14, x \leq 2 \quad (4) -2x - \frac{14}{3}, x \geq 2$$

۱۰۹- نمودارهای دو تابع $y = |x+2| + |x-1|$ و $3y + x = 17$ در دو نقطه A و B متقاطع هستند. اندازه پاره خط AB، کدام است؟

$$(1) 2\sqrt{10} \quad (2) 4\sqrt{5} \quad (3) 2\sqrt{2} \quad (4) 4\sqrt{2}$$

۱۱۰- فاصله نقطه تقاطع تابع $y = x^3 + 3x - 12$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟

$$(1) 2\sqrt{3} \quad (2) \sqrt{3} \quad (3) 2\sqrt{2} \quad (4) \sqrt{2}$$

۱۱۱- اگر $a^2 + 9b^2 = 10ab$ باشد، مقدار $\log\left(\frac{a+2b}{4}\right)$ ، واسطه حسابی کدام دو جمله زیر است؟

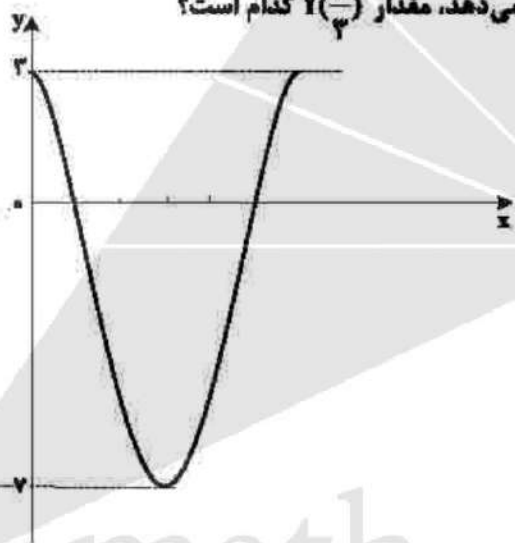
$$(1) \log a, \log 2b \quad (2) \log a, \log b$$

$$(3) \log \sqrt{a}, \log \sqrt{b} \quad (4) \log \sqrt{a}, \log \sqrt{2b}$$

۱۱۲- اگر انتهای کمان x در ربع سوم و $\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = 4$ باشد، مقدار صحیح $\tan \frac{x}{2}$ کدام است؟

$$(1) 2 \quad (2) -2 \quad (3) 2 \quad (4) -3$$

۱۱۳- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos x + b$ را نشان می‌دهد، مقدار $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ کدام است؟



$$(1) \frac{1}{2} \quad (2) \frac{11}{2}$$

$$(3) -\frac{1}{2} \quad (4) -\frac{11}{2}$$

۱۱۴- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{3\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{5\pi}{4}$

۱۱۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-3x} - \sqrt{2-5x}}{\sqrt{2-2\cos x}}$ کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۱۶- تابع $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & x > 0 \\ |b - x| & x = 0 \\ [x] - 2a & x < 0 \end{cases}$ یک تابع همواره پیوسته است. مقدار حقیقی $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{25}{16}$

۱۱۷- باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $p(x) = x^2 + 4x + 5$ برابر $x + 2$ است. اگر $f(1) = 13$ و $f(-1) = 11$ باشد، خارج‌قسمت این تقسیم کدام مورد می‌تواند باشد؟

- (۱) $-x + 2$ (۲) $2x - 1$ (۳) $2x - 2$ (۴) $-2x + 3$

۱۱۸- اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (بجز دسته اول) برابر بزرگ‌ترین عضو دسته قبل است؛ یعنی $\dots, \{5, 6, 7, 8\}, \{3, 4\}, \{1, 2\}$. میانه عضوهای دسته سیزدهم، کدام است؟

- (۱) $6144,5$ (۲) $6145,5$ (۳) $12289,5$ (۴) $12288,5$

۱۱۹- نقطه $A(-\frac{1}{4}, 3)$ محل تلاقی مجانب‌های نمودار $y = \frac{bx^2 + 7}{4x^2 + ax + 1}$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۱

۱۲۰- در کدام نقطه از منحنی $y = x^2 - 4x + 5$ ، خط مماس بر منحنی، بر $3y - 4x = 1$ عمود است؟

- (۱) $(-2, 17)$ (۲) $(-1, 10)$ (۳) $(1, 2)$ (۴) $(2, 1)$

محل انجام محاسبات

math-pilevar.ir

۱۲۱- اگر f تابع مشتق پذیر، $g(x) = f(\tan^2 x + \sqrt{2} \cos x)$ و $g'(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$ باشد، مقدار $f'(2)$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۱۲۲- در بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin x \cos 2x$ چند برابر آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin^2 x - \cos^2 x$ است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۲۳- نقاط $A(0, 0)$ و $B(1, 1)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ هستند. حاصل ab کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۶ (۳) ۳ (۴) ۶

۱۲۴- در یک معتب ۵ صندلی در یک ردیف قرار دارد. ۷ بیمار هم‌زمان وارد معتب می‌شوند. به چند طریق بیماران می‌توانند روی ۵ صندلی بنشینند، به طوری که دو نفر از آنها نخواهند کنار هم بنشینند؟

- (۱) ۱۵۶۰ (۲) ۱۸۰۰ (۳) ۲۰۴۰ (۴) ۲۲۸۰

۱۲۵- دو تاس همگن را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل یک عدد مضرب ۳ و مجموع دو عدد رو شده برابر ۷ است؟

- (۱) $\frac{1}{18}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۱۲۶- مجموعه $S = \{x, y, z, t, w\}$ ، فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A = \{x, y\}$ ، $B = \{x, y, z, t\}$ و

$C = \{x, y, w\}$ سه پیشامد از S هستند. اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B) = \frac{3}{5}$ باشد، مقدار $P(C)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{24}{35}$ (۲) $\frac{16}{35}$ (۳) $\frac{19}{35}$ (۴) $\frac{11}{35}$

۱۲۷- فرض کنید علی و حسن دو کماندار باشند که با احتمال‌های $\frac{5}{6}$ و $\frac{4}{5}$ به هدف می‌زنند. اگر هر کدام از آنها یک بار

تیراندازی کنند و بدانیم حداقل یک تیر به هدف اصابت کرده است، با کدام احتمال علی به هدف زده است؟

- (۱) $\frac{15}{19}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{17}{25}$

۱۲۸- از اعداد ۵ تا N ، پنج عدد ۹، ۲، ۵، ۸ و ۱۱ به تصادف انتخاب شده‌اند. برآورد نقطه‌ای N به کمک میانگین، کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۱۲۹- در یک مطالعه آماری ۸۳ داده جمع‌آوری شده است. اگر توان دوم انحراف از میانگین داده‌ها برابر ۱ یا صفر باشد،

حداقل چند داده با میانگین این داده‌ها برابر هستند؟

- (۱) صفر (۲) ۱۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۳۰- در مثلث متساوی الساقین ABC ، $\hat{A} = 80^\circ$ و عمود منصف‌های دو ساق مثلث، قاعده BC را در نقاط M و N قطع می‌کند. کوچک‌ترین زاویه مثلث AMN چند درجه است؟

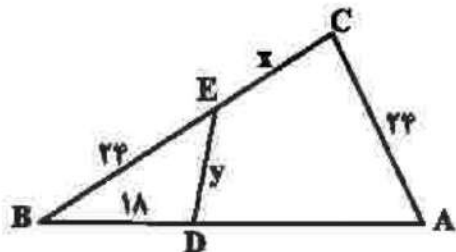
۳۰ (۴)

۲۵ (۳)

۲۰ (۲)

۱۵ (۱)

۱۳۱- در شکل زیر، $\hat{ECA} = \hat{BDE}$ و $AB = ۲۸$ است. مقدار $\frac{x}{y}$ کدام است؟



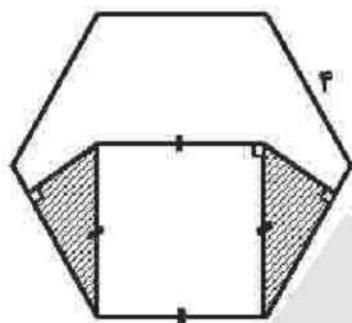
۱ (۱)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۲ (۴)

۱۳۲- در شش ضلعی منتظم زیر، مساحت ناحیه هاشور خورده چند سانتی متر مربع است؟



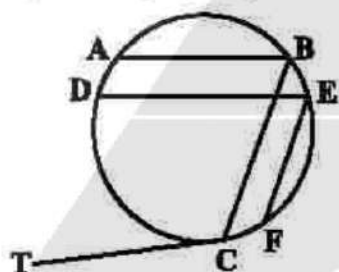
$\sqrt{3}$ (۱)

$2\sqrt{3}$ (۲)

$3\sqrt{3}$ (۳)

$4\sqrt{3}$ (۴)

۱۳۳- در شکل زیر، $AB \parallel DE$ و $EF \parallel BC$ است. اگر $\hat{AB} = 60^\circ$ ، $\hat{CD} = 100^\circ$ و $\hat{EF} = 80^\circ$ باشد، اندازه $\hat{BCT}$ چند درجه است؟



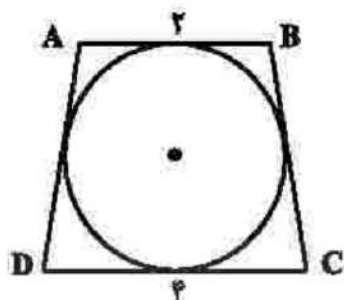
۹۰ (۱)

۹۵ (۲)

۱۰۰ (۳)

۱۱۰ (۴)

۱۳۴- در شکل زیر، دوزنقه متساوی‌الساقین ABCD بر دایره‌ای محیط شده است. مساحت این دایره کدام است؟



$$2\pi \quad (1)$$

$$4\pi \quad (2)$$

$$6\pi \quad (3)$$

$$8\pi \quad (4)$$

۱۳۵- طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر شعاع دایره بزرگ‌تر است. شعاع دایره بزرگ‌تر، چند برابر شعاع دایره کوچک‌تر است؟

$$\frac{16}{3} \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$\frac{8}{3} \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

۱۳۶- در مربع ABCD، نقطه $(4, 1)$ رأس A و عرض رأس‌های C و D به ترتیب ۱ و ۳ است. اگر بازتاب نقطه C نسبت به محور yها بر خودش منعطف شود، فاصله بازتاب نقطه D نسبت به قطر AC از مبدأ مختصات چقدر است؟

$$\sqrt{7} \quad (4)$$

$$\sqrt{17} \quad (3)$$

$$\sqrt{13} \quad (2)$$

$$\sqrt{5} \quad (1)$$

۱۳۷- اضلاع مثلثی با اعداد ۴، ۵ و ۶ متناسب است. نیمساز زاویه متوسط را رسم می‌کنیم. مساحت مثلث اصلی، چند برابر مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل از رسم این نیمساز است؟

$$2 \quad (4)$$

$$\frac{5}{2} \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

۱۳۸- ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ ، ماتریس همانی و α و β دو عدد حقیقی هستند که $\alpha A + \beta I = A^{-1}$. مقدار $\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

$$2 \quad (4)$$

$$-2 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$-4 \quad (1)$$

۱۳۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس A^T کدام است؟

$$[9 \ 5 \ -7] \quad (4)$$

$$[1 \ 0 \ -2] \quad (3)$$

$$[9 \ 12 \ 16] \quad (2)$$

$$[1 \ -1 \ 0] \quad (1)$$

۱۴۰- معادله دایره‌ای که بر دو دایره $x^2 - 8x + y^2 + 15 = 0$ و $x^2 - 2x + y^2 = 0$ مماس خارج است و مرکزش روی یکی از محورهای قرار دارد، کدام است؟

$x^2 + y^2 - 5x + 6 = 0$ (۲)	$x^2 + y^2 + 5x + 6 = 0$ (۱)
$4x^2 + 4y^2 + 20x + 25 = 0$ (۴)	$4x^2 + 4y^2 - 20x + 25 = 0$ (۳)

۱۴۱- فاصله دو کانون بیضی $x^2 + 4y^2 - 16y - 2x + 16 = 0$ ، کدام است؟

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)	$\sqrt{3}$ (۳)	$\frac{\sqrt{15}}{2}$ (۲)	$\sqrt{15}$ (۱)
--------------------------	----------------	---------------------------	-----------------

۱۴۲- معادله‌های هم‌نهمشی $ax \equiv 2n + 1$ و $ax \equiv n^2 + 3n$ دارای جواب هستند. سه برابر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و 5 ، کدام است؟

۳ (۴)	۶ (۳)	۹ (۲)	۱۵ (۱)
-------	-------	-------	--------

۱۴۳- رقم یکان عدد $(21 + 41 + \dots + 261)(1! + 3! + 5! + \dots + 25!)$ کدام است؟

۸ (۴)	۵ (۳)	۳ (۲)	۲ (۱)
-------	-------	-------	-------

۱۴۴- اگر y بزرگ‌ترین عدد سمرقمی باشد که در معادله سیاله خطی $15x + 21y = 9$ صدق کند، مقدار قرینه x کدام است؟

۱۳۹۰ (۴)	۱۳۹۱ (۳)	۱۳۹۹ (۲)	۱۳۹۸ (۱)
----------	----------	----------	----------

۱۴۵- گراف G با ۹ رأس، غیر تهی، غیر کامل و K -منتظم است. بیشترین مقدار K ، کدام است؟

۸ (۴)	۷ (۳)	۶ (۲)	۴ (۱)
-------	-------	-------	-------

۱۴۶- در گراف G ، مجموعه همسایگی باز هر رأس دارای ۲ عضو است. اگر $q(G) = 3q(\bar{G})$ باشد، مقدار $p(G)$ کدام است؟

۹ (۴)	۸ (۳)	۶ (۲)	۵ (۱)
-------	-------	-------	-------

۱۴۷- در گراف با درجه رأس‌های ۱، ۱، ۳، ۳، ۳، ۳، ۳، دوراس با کمترین درجه، غیر مجاورند. تعداد دورها به طول ۳ کدام است؟

۴ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)
-------	-------	-------	-------

۱۴۸- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 4$ کدام است؟

۱۸ (۴)	۳۱ (۳)	۲۰ (۲)	۲۵ (۱)
--------	--------	--------	--------

۱۴۹- در یک کلاس ۶۵ نفری، بیشترین مقدار n به گونه‌ای که مطمئن باشیم حداقل n نفر دارای ماه تولد یکسان هستند، کدام است؟

۸ (۴)	۷ (۳)	۵ (۲)	۶ (۱)
-------	-------	-------	-------

۱۵۰- در گراف G ، مجموعه همسایگی بسته هر رأس دارای ۴ عضو است. اگر $p(G) = 6$ باشد، مقدار $q(G)$ چقدر است؟

۱۰ (۴)	۱۲ (۳)	۱۵ (۲)	۹ (۱)
--------	--------	--------	-------

بہارِ خدا

پنج شری کنگر ریاضہ ۱۴۰۱ - خارج ثور

عارف حسن - سولہوی عارف

(مجموعہ، اللہ و ربانہ)

۱۰۱۔ گزینہ "۱"

در هر وجه مساحت را ۹ برابر می کنیم، یعنی طول ضلع را ۳ برابر می کنیم، پس در هر وجه مساحت هم ۳ برابر می شود.

(معادله ۱ و ۲)

۱۰۲۔ گزینہ "۳"

خط $x < 0$; $y = -x$ بر سه مرتبه است، پس معادله تقاطع جواب معادله است.

$$3x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3} = -x$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2mx + m + \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow \Delta = 4m^2 - 12m - 16 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 3m - 4 = (m-4)(m+1) = 0 \Rightarrow m = 4 \text{ یا } -1$$

جواب معادله بدین معادله است، پس m باید مثبت باشد.

$$\Rightarrow m = 4 \Rightarrow \text{معادله: } y = 3x^2 + 7x + \frac{16}{3}$$

طول این سطح $x = -\frac{7}{6}$ است.

(محلہ و معادله)

۱۰۶ - گزینه ۲

a با د رادع "خندس" α و β باشد

$$\Rightarrow a^2 = \alpha\beta \Rightarrow a^2 = 2a - 1 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

زبان a=1 معادله $x^2 + 4x + 1 = 0$ در جواب - حقیقی معکوس دارد.

(محلہ و معادله)

۱۰۷ - گزینه ۳

معادله درجه دوم، دو ریشه حقیقی دارد، پس ریشه سوم هم دارد، این ریشه را γ می نامیم.

ریشه حاصل ضرب این جواب: برابر $-\frac{1}{2} = -\frac{2}{4}$ است.

$$\Rightarrow -\alpha\beta\gamma = -(-2)\gamma = -\frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{4}$$

روش اول: $\gamma = -\frac{1}{4}$ را در معادله قرار دهیم:

$$4(-\frac{1}{4}) + k(\frac{1}{16}) + \frac{4}{4} - 2 = 0 \Rightarrow k = -3$$

روش دوم: مجموع جواب ها نیز برابر $1 - \frac{k}{4}$ است.

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 1 - \frac{1}{4} = -\frac{k}{4} \Rightarrow k = -3$$

(تابع)

۱۰۸ - گزینه ۲

$$y = |x+1| - 3|x-2| =$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} 2x - 5 & ; x < -1 \\ 4x - 5 & ; -1 \leq x < 2 \\ -2x + 7 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

تابع معکوس بازه $(-\infty, 2]$ برای است :

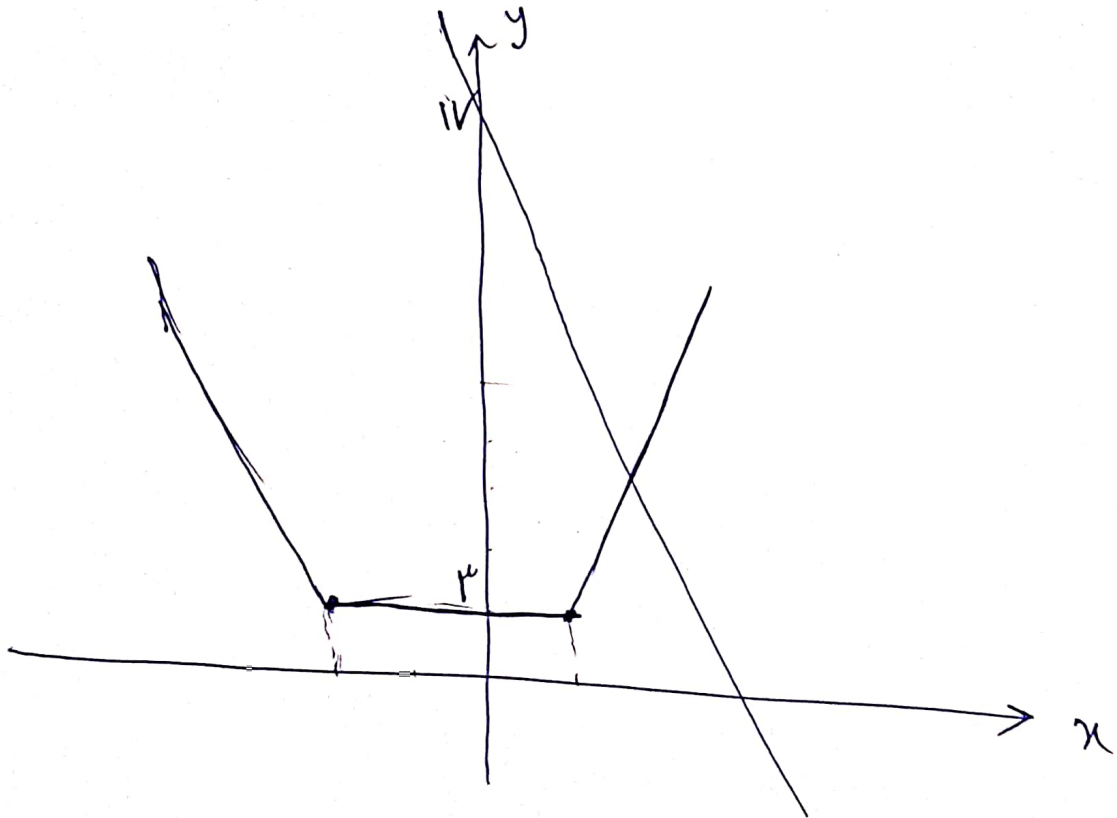
$$f(x) = -2x + 7 \quad ; \quad x \geq 2 \Rightarrow y \leq 3$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}(x-7) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \quad ; \quad x \leq 3$$

(حیرو معادله)

۱.۹ - گزینۀ ۱.

نمودار دو تابع را به صورت تقریبی رسم کنید :



خط $y = -2x + 7$ و $y = 2x + 1$ را رسم کنید.

قطعۀ رسم :

$$2x + 1 = \frac{-x + 7}{2} \Rightarrow 4x + 2 = -x + 7 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, 3)$$

$$-2x - 1 = \frac{-x + 7}{2} \Rightarrow -4x - 2 = -x + 7 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow B(-3, 3)$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

(تابع)

۱۱۰ - گزینه ۳ ..

تابع داده شده اکیداً صعودی است، پس وارن خود را در خط $y=x$ قطع کند. داریم:

$$x^3 + 2x - 12 = x \Rightarrow x^3 + 2x - 12 = 0$$

$x=2$ جواب معادله باشد:

$$x^3 + 2x - 12 = (x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

Δ < 0

پس $x=2$ تنها جواب حقیقی معادله مذکور است. معنی نقطه تقاطع تابع داده شده با وارنش $(2,2)$ است. فاصله این نقطه از مبدأ مختصات $2\sqrt{2}$ است.

(توابع نمایی و لگاریتمی)

۱۱۱ - گزینه ۲ ..

محسین رابطه $a^2 + 9b^2 = 10ab$ را در $4ab$ جمع می‌کنیم.

$$\Rightarrow a^2 + 4ab + 9b^2 = 14ab \Rightarrow (a+3b)^2 = 14ab$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+3b}{4}\right)^2 = ab$$

$$\Rightarrow \log \left(\frac{a+3b}{4}\right)^2 = \log ab$$

از طرفین لگاریتم می‌گیریم:

$$\Rightarrow 2 \log \left(\frac{a+3b}{4}\right) = \log a + \log b$$

یعنی نصف $\log \frac{a+3b}{4}$ برابر میانگین $\log a$ و $\log b$ است.

(مسئله ۱۱۲)

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = r \Rightarrow 1 - \sin x = r + r \sin x \Rightarrow \sin x = -\frac{r}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{مسئله}} \cos x = -\frac{r}{2} \Rightarrow \tan x = \frac{r}{r}$$

~~مسئله ۱۱۲~~

مسئله ۱۱۲

$$\tan x = \frac{r \tan \frac{x}{r}}{1 - \tan^2 \frac{x}{r}} = \frac{r}{r}$$

$$\Rightarrow r - r \tan^2 \frac{x}{r} = 1 \tan \frac{x}{r} \Rightarrow r \tan^2 \frac{x}{r} + 1 \tan x - r = 0$$

$$\Rightarrow \tan \frac{x}{r} = \frac{-1 \pm 10}{2} = -\frac{r}{2} \pm \frac{1}{r}$$

(مسئله ۱۱۳)

$$\left. \begin{aligned} f_{\max} &= |a| + b = r \\ f_{\min} &= -|a| + b = -r \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = -r, |a| = 0$$

مسئله ۱۱۳

$$\Rightarrow f(x) = 0 \cos x - r$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \cos \frac{\pi}{2} - r = \frac{0}{r} - r = -\frac{1}{r}$$

(ملاحظه)

۱۱۴ - گزینه ۲

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1$$

$$\Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} ; k \in \mathbb{Z}$$

جواب ۲: بازه $[0, \pi]$ عبارت از $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ به مجموع آن {
برابر $\frac{3\pi}{2}$ است.

(حد و پیوستگی)

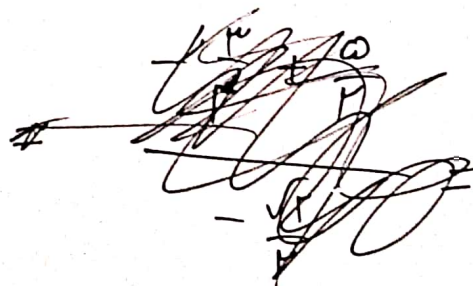
۱۱۵ - گزینه ۱

حقیقتات ساده‌ترین روشی است:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-3x} - \sqrt{2-5x}}{\sqrt{1-\sin^2 \frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-3x} - \sqrt{2-5x}}{-1 \sin \frac{x}{2}}$$

$$\stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-3}{2\sqrt{2-3x}} + \frac{5}{2\sqrt{2-5x}}}{-\cos \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{2}$$



(حد و پیوستگی)

۱۱۶ - گزینہ ۳

این تابع در $\mathbb{R}$ نامرکز نیست؛ پس وجود $[x]$ متصور طالع x

$x=0$ است، پس حد چپ و راست مقدار تابع در $x=0$ را می‌بینیم.

$$\text{حد چپ: } L^- = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ([x] - 2a) = -1 - 2a$$

$$\text{مقدار تابع: } f(0) = |b|$$

$$\begin{aligned} \text{حد راست: } L^+ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{2bx^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2bx^2} \\ &= \frac{\frac{x^2}{4}}{2bx^2} = \frac{1}{4b} \end{aligned}$$

$$\text{برابر: } -1 - 2a = |b| = \frac{1}{4b}$$

$$\Rightarrow |b| = \frac{1}{4b} \Rightarrow \begin{cases} 4b^2 = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} ; b > 0 \\ -4b^2 = 1 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -1 - 2a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow b - a = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

برابر پیوسته

(تابع)

۱۱۷ - گزینہ ۴

تابع مت $\alpha x + \beta$ در $x=1$ و $x=-1$:

$$f(x) = (x^2 + 2x + 5)(\alpha x + \beta) + x + 2$$

$$f(1) = 1 \cdot (\alpha + \beta) + 3 = 13 \Rightarrow \alpha + \beta = 10$$

$$f(-1) = 2(-\alpha + \beta) + 1 = 11 \Rightarrow -\alpha + \beta = 5$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \beta &= 10 \\ -\alpha + \beta &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta = 7, \alpha = 3$$

تابع مت $3x + 7$

(مجموعه، الگو و دنباله)

۱۱۸ - گزینه « ۱ »

۲, ۲, ۴, ۸, ...

تعداد اعداد رشته $\{$ به صورت زیر است :

پس می توان دنباله $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 2^{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$ را برابر تعداد اعداد رشته n ام در نظر گرفت و

رشته n میزیم $2^{12} = 4096$ عدد دارد.

$$\Rightarrow \text{رشته میزیم} = \{ 4097, 4098, \dots, 8192 \}$$

رشته اعداد رشته n میزیم را می توانیم $b_n = 4096 + n$; $1 \leq n \leq 4096$

در توجیه میسیم. میانگین این 4096 داده میانگین داده $4097, 4098, \dots, 8192$ است.

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{(4096 + 4097) + (4096 + 8192)}{2} = 4096 + 6144.5$$

$$\Rightarrow Q_2 = 9142.5$$

(حد و مشتاق - حد در بی نهایت)

۱۱۹ - گزینه « ۱ »

$y = 3$ جانب راست و $x = -\frac{1}{2}$ جانب چپ قائم است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{bx^2 + c}{x^2 + ax + 1} = \frac{b}{1} = 3 \Rightarrow b = 12$$

$$4(-\frac{1}{2})^2 + a(-\frac{1}{2}) + 1 = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = 3$$

(مشتق)

۱۲۰ - گزینه ۳

شیب خط $4y - 3x = 1$ برابر $\frac{1}{4}$ است، پس در نقطه مطلوب، شیب خط

۴ برابر برابر ۲ باشد.

$$\Rightarrow y' = 4x - 3 = -2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$$

نقطه مطلوب (۱، ۲) است.

(مشتق)

۱۲۱ - گزینه ۴

از مشتق داریم:

$$g'(x) = (2 \tan x (1 + \tan^2 x) + \sqrt{2} \sin x) f'(\tan^2 x + \sqrt{2} \cos x)$$

$$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 f'(2) = \sqrt{3} \Rightarrow f'(2) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(مشتق)

۱۲۲ - گزینه ۱

$$a = \frac{-1 - 0}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

بفرض شرط تابع اول:

$$y = \sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$$

$$b = \frac{1 - 0}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = -1$$

(کاربرد مشتق)

۱۲۳ - مسئله ۲

نقطه $A(0,0)$ نقطه انحراف از تابع است، پس تابع باید عمل x^2 را داشته باشد.
 زیرا $c=d=0$ ، $f(x) = ax^3 + bx^2$

$$B \in f \Rightarrow f(1) = a + b = 1 \quad (I)$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \xrightarrow{f'(1)=0} 3a + 2b = 0 \quad (II)$$

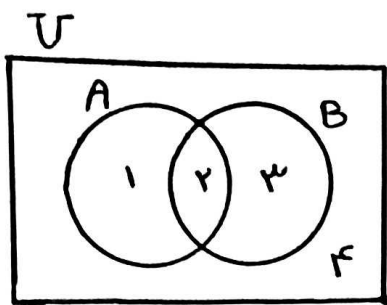
$$\xrightarrow{(I), (II)} a = -2, b = 3 \Rightarrow ab = -6$$

Amir

کاربرد

۱۴۰۱/۱۲/۱۲

پاسخ سوالات هندسه و گسسته آزمون خارج از کشور ۱۴۰۱



۱۰۳ - گزینه «د»

فرض کنید توانی موجود در نمودارون مجموعه ها A^U و B را مطابق شکل شماره گذاری کنیم. در این صورت داریم:

$$A' \cup B = \{3, 4\} \cup \{2, 3\} = \{2, 3, 4\}$$

$$A' \cap B' = \{3, 4\} \cap \{1, 4\} = \{4\}$$

$$A' \cup B = A' \cap B' \Rightarrow \{2, 3, 4\} = \{4\} \Rightarrow \{2, 3\} = \emptyset \Rightarrow B = \emptyset$$

۱۰۴ - گزینه «ا»

می دانیم $(A \cap B) \subseteq B$ پس $(A \cap B) - B = \emptyset$ است و در نتیجه مجموعه صورت سوال

$$\emptyset' \cap [(A \cap B) \cup (A \cap B')] = U \cap [A \cap \underbrace{(B \cup B')}_U]$$

$$= U \cap A = A$$

۱۰۵ - گزینه «ب»

با توجه به ارزش گزاره ها به تقلیل گزینه ها داریم:

$$(T \Rightarrow F) \wedge (F \Rightarrow T) \equiv F \wedge T \equiv F$$

گزینه «ا»:

$$(F \Rightarrow F) \wedge (F \Rightarrow F) \equiv T \wedge T \equiv T$$

گزینه «ب»:

$$(T \Rightarrow T) \wedge (T \Rightarrow F) \equiv T \wedge F \equiv F$$

گزینه «ج»:

$$(F \Rightarrow T) \wedge (T \Rightarrow F) \equiv T \wedge F \equiv F$$

گزینه «د»:

۱۲۴ - گزینه «۳»

تعداد کل حالت‌هایی که ۷ بیمار می‌توانند بروی ۵ صندلی بنشینند، برابر است با:

$$\binom{7}{5} \times 5! = \frac{7!}{5! \times 2!} \times 5! = \frac{7!}{2!} = 2520$$

حال باید حالت‌هایی که دو نفر خاص در بین این ۵ نفر بوده و کنار هم می‌نشینند را از تعداد کل حالت‌ها کم کنیم. در صورتی که دو نفر خاص انتخاب شده باشند، باید از ۵ نفر دیگر، ۳ نفر انتخاب کرد. این دو نفر را یک بسته در نظر می‌گیریم.

$$\frac{2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

مطابق شکل تعداد جایگشت‌ها برابر با $2! \times 4!$ است، پس تعداد حالت‌هایی که این دو نفر خاص کنار هم می‌نشینند، برابر است با:

$$\binom{5}{3} \times 2! \times 4! = 10 \times 2 \times 24 = 480$$

بنابراین تعداد حالات‌های مطلوب برابر است با:

$$2520 - 480 = 2040$$

۱۲۵ - گزینه «۲» برآب روئاس

تعداد اعضای نمونه برابر $n(S) = 36$ است. حالت‌های مطلوب که حداقل عدد

یک‌تاس مفرب ۳ و مجموع روئاس عدد ۷ باشد، عبارت اند از:

$$A = \{(1, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 1)\}$$

پس احتمال این پیامد برابر است با:

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(w) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(C) = P(\{x, y, w\}) = P(\underbrace{\{x, y\}}_A) + P(w) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

فرض کنید بیاموزهای اصابت تیرهای علی و حسن به هدف را به ترتیب با A و B نمایش دهیم. با توجه به مستقل بودن این رویدادها داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$= 0,6 + 0,4 - 0,6 \times 0,4 = 0,76$$

نسبت رابطه احتمال شرطی داریم:

$$P(A | A \cup B) = \frac{P[A \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0,6}{0,76} = \frac{15}{19}$$

میانگین اعداد ۰ تا N برابر است با:

$$\mu = \frac{0 + 1 + \dots + N}{N + 1} = \frac{\frac{N(N+1)}{2}}{N+1} = \frac{N}{2}$$

از طرفی میانگین نمونه برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{9 + 2 + 5 + 8 + 11}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

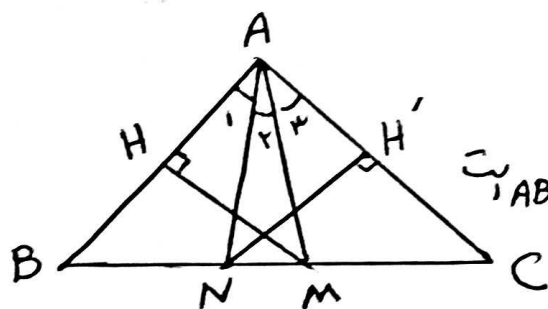
بنابراین برآورد نقطه‌ای N به کمک میانگین نمونه برابر است با:

$$\frac{N}{2} = 7 \Rightarrow N = 14$$

۱۲۹- گزینه ۴

با توجه به مقدار توان دوم انحراف از میانگین داده ها، خود مقدار انحراف از میانگین داده ها تنها می تواند یکی از اعداد صفر، ۱ یا (-۱) باشد. از طرفی مجموع انحراف از میانگین داده ها همواره برابر صفر است. با توجه به اینکه هر دو عدد ۱ و (-۱) فرد هستند و مجموع تعدادی فرد (۸۳ عدد) از اعداد فرد نمی تواند برابر یک عدد زوج (صفر) باشد، پس حداقل یکی از مقادیر انحراف از میانگین داده ها برابر صفر است.

۱۳۰- گزینه ۲



$$AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - 8^\circ}{2} = 5^\circ$$

بنا بر $AB = AC \Rightarrow M$ روی عمود منصف AB است $\Rightarrow AM = BM \Rightarrow \hat{BAM} = \hat{B} = 5^\circ$
 $\Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 5^\circ$ (۱)

بنا بر $AC = AB \Rightarrow N$ روی عمود منصف AC است $\Rightarrow AN = CN \Rightarrow \hat{CAN} = \hat{C} = 5^\circ$
 $\Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 5^\circ$ (۲)

$$(1), (2) \Rightarrow (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3) + \hat{A}_2 = 10^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_2 = 10^\circ - 8^\circ = 2^\circ$$

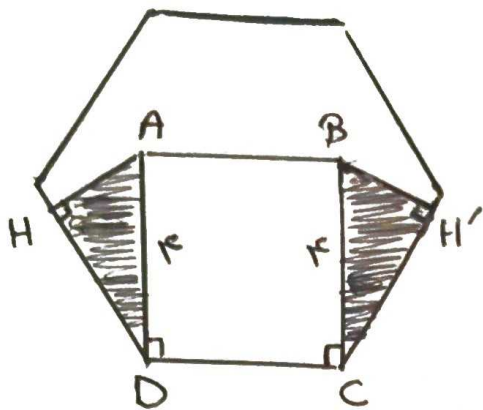
۱۳۱- گزینه ۱

دو مثلث ABC و EBD به طلیت تساوی دو زاویه متساوی هستند و داریم:

$$\frac{ED}{AC} = \frac{EB}{AB} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{y}{24} = \frac{24}{48} = \frac{18}{24+x}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{y}{24} &= \frac{1}{2} \Rightarrow y = 12 \\ \frac{18}{24+x} &= \frac{1}{2} \Rightarrow 24+x = 36 \Rightarrow x = 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x}{y} = 1$$

۱۲۲ - گزینه ۴



هر زاویه داخلی یک شش ضلعی منتظم برابر 120° است.

پس داریم:

$$\begin{aligned}\widehat{ADH} = \widehat{BCH'} &= 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ \\ \Rightarrow \widehat{DAH} = \widehat{CBH'} &= 6^\circ\end{aligned}$$

در یک مثلث قائم الزویه اندازه اضلاع روبرو به زوایای

30° و 6° به ترتیب برابر $\frac{1}{2}$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است، پس داریم:

$$AH = \frac{1}{2} AD = 2 \quad , \quad HD = \frac{\sqrt{3}}{2} AD = 2\sqrt{3}$$

$$S_{ADH} = S_{BCH'} = \frac{1}{2} AH \times HD = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت ناحیه هاشور} = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

۱۳۳ - گزینه ۳

فرض کنید $\widehat{BE} = x$ باشد. در این صورت داریم:

$$AB \parallel DE \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BE} = x$$

$$BC \parallel EF \Rightarrow \widehat{CF} = \widehat{BE} = x$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BE} + \widehat{EF} + \widehat{CF} + \widehat{CD} + \widehat{AD} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 4^\circ + x + 8^\circ + x + 100^\circ + x = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 3x = 120^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$$

$$\widehat{BCT} = \frac{\widehat{CD} + \widehat{AD} + \widehat{AB}}{2} = \frac{100^\circ + 40^\circ + 4^\circ}{2} = 100^\circ$$

(زاویه محاطی)

۱۳۴ - گزینه ۱

قطر دایره محیط یک ذوزنقه متساوی الساقین، واسطه هندسی بین طول‌های دو قاعده ذوزنقه است، پس داریم:

$$(2R)^2 = AB \times CD \Rightarrow 4R^2 = 2 \times 4 \Rightarrow R^2 = 2 \\ \Rightarrow \text{مساحت دایره} = \pi R^2 = 2\pi$$

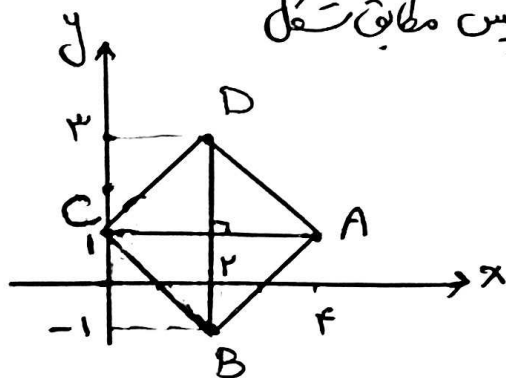
۱۳۵ - گزینه ۴

طول مماس مشترک دو دایره مماس خارج به شعاع‌های R و R' از رابطه $2\sqrt{RR'}$ به دست می‌آید، پس با فرض $R > R'$ داریم:

$$2\sqrt{RR'} = \frac{\sqrt{3}}{2} R \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4RR' = \frac{3}{4} R^2 \Rightarrow R = \frac{16}{3} R'$$

۱۳۶ - گزینه ۱

نقطه C روی محور y ها قرار دارد، پس مختصات آن به صورت $(0, a)$ است. قطرهای مربع $ABCD$ محور منصف یکدیگرند، پس مطابق شکل مختصات نقطه D به صورت $(2, 3)$ و در نتیجه



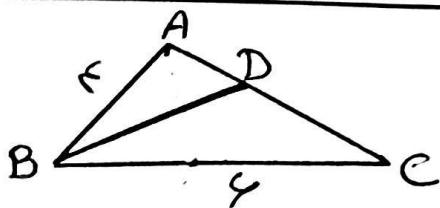
مختصات نقطه B به صورت $(-1, -2)$ است.

نقطه B با رتیب نقطه D نسبت به قطر AC

است، پس داریم:

$$QB = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

۱۳۷ - گزینه ۳



فرض کنید $BC=6$ و $AC=5$ و $AB=4$ باشد.

لایق قضیهٔ فیثاغورس زوایای داخلی داریم:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در فرج}} \frac{AD}{AC} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{5}{2} \\ \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{AC}{AD} = \frac{5}{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{A}^{-1} = \frac{1}{-\Delta} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad \text{گزینہ ۲، ۱۳۸}$$

$$\alpha A + \beta I = \bar{A}^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\alpha & 2\alpha \\ 4\alpha & -3\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\alpha + \beta & 2\alpha \\ 4\alpha & -3\alpha + \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

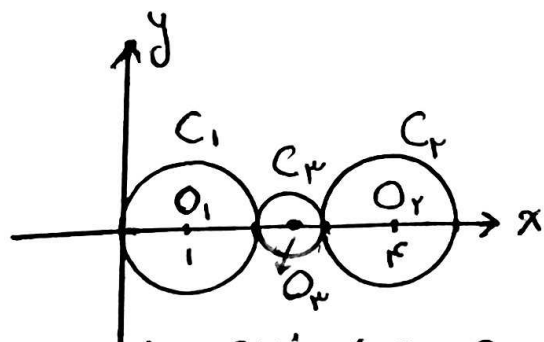
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5} \\ -\alpha + \beta = \frac{2}{5} \Rightarrow -\frac{1}{5} + \beta = \frac{2}{5} \Rightarrow \beta = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = 3$$

$$A^T \text{ سطراول} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{گزینہ ۱، ۱۳۹}$$

$$A^{TT} \text{ سطراول} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1: x^2 - 8x + y^2 + 15 = 0 \Rightarrow \text{مرکز: } O_1(4, 0), \text{ شعاع: } R_1 = \frac{1}{2} \sqrt{(-8)^2 - 4(15)} = 1 \quad \text{۱۴۔ گزینہ ۲، ۱۴۰}$$

$$C_2: x^2 - 2x + y^2 = 0 \Rightarrow \text{مرکز: } O_2(1, 0), \text{ شعاع: } R_2 = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2} = 1$$



مطابق شکل مرکز دائرہ C_3 (دائرہ مماس خارج C_1 و C_2)، نقطہ $O_3(\frac{5}{2}, 0)$ و شعاع آن $R_3 = \frac{1}{2}$ ہے، پس معادلہ آن یہ صورت زیر است:

$$(x - \frac{5}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - 5x + \frac{25}{4} + y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 - 5x + 6 = 0$$

۱۴۱ - گزینه ۳

$$x^2 + 4y^2 - 12y - 2x + 16 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 - 3y + 4) = 1$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y-2)^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{فاصله دو کانون} = 2c = \sqrt{3}$$

تذکر: این سؤال خارج از مباحث نظام جدید آموزش است.

۱۴۲ - گزینه ۴

فرض کنید $d = (a, 5)$ باشد. در این صورت با توجه به شرط جواب معادله هم‌رشتی

$$\left. \begin{aligned} (a, 5) \mid n^2 + 3n &\Rightarrow d \mid n^2 + 3n \xrightarrow{x^2} d \mid 2n^2 + 6n \\ (a, 5) \mid 2n+1 &\Rightarrow d \mid 2n+1 \xrightarrow{x^n} d \mid 2n^2 + n \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}}$$

$$d \mid 5 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 5$$

اما مقدار $d = 5$ قابل قبول نیست، چون مثلاً به ازای $n=1$ ، $5 \nmid n^2 + 3n$

و $5 \nmid 2n+1$ و در نتیجه تنها مقدار $d=1$ قابل قبول بوده و داریم:

$$3d = 3 \times 1 = 3$$

۱۴۳ - گزینه ۱

من داریم به ازای $5 \leq n$ ، $n \equiv 0 \pmod{5}$ است، پس داریم:

$$(1! + 3! + 5! + \dots + 25!)(2! + 4! + \dots + 26!)$$

$$\equiv (1 + 6 + 0 + \dots + 0)(2 + 4 + 0 + \dots + 0) \equiv 7 \times 6 \equiv 42 \equiv 2 \pmod{5}$$

۱۴۴- گزینه "۱"

$$15x + 21y = 9 \xrightarrow{\div 3} 5x + 7y = 3$$

$$\Rightarrow 7y \equiv 3 \Rightarrow 2y \equiv -2 \xrightarrow[\substack{\div 2 \\ (2, 5)=1}}{y \equiv -1} \Rightarrow y = 5k - 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$5x + 7(5k - 1) = 3 \Rightarrow 5x = -35k + 10 \Rightarrow x = -7k + 2$$

بزرگ‌ترین عدد سه رقمی ممکن برای y ، برابر ۹۹۹ است. در این صورت داریم:

$$5k - 1 = 999 \Rightarrow 5k = 1000 \Rightarrow k = 200$$

$$x = -7 \times 200 + 2 = -1398 \Rightarrow -x = 1398$$

۱۴۵- گزینه "۲"

می‌دانیم گراف فرد-منتظم از مرتبه فرد وجود ندارد، پس K حتماً عددی زوج است.
از طرفی گراف ۸-منتظم از مرتبه ۹، همان گراف کامل K_9 است،
پس حداکثر مقدار قابل قبول برای K ، برابر ۶ خواهد بود.

۱۴۶- گزینه "۴"

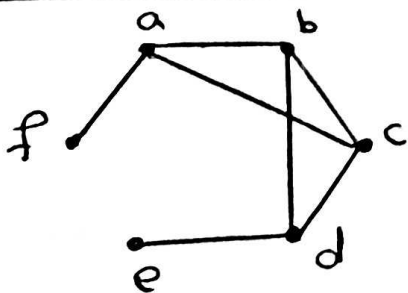
گراف G ، ۲-منتظم است. در این صورت گراف $\bar{G}$ ، $(p-3)$ منتظم بوده

و در نتیجه داریم:

$$q(\bar{G}) = 3q(G) \Rightarrow \frac{p(p-3)}{2} = 3 \times \frac{1p}{2} \Rightarrow p-3 = 6$$

$$\Rightarrow p = 9$$

۱۴۷- گزینه "۲"



اگر رئوس گراف را مطابق شکل نام‌گذاری کنیم،
آن‌گاه دورهای به طول ۳ عبارت‌اند از:
 $abca$ ، $bedb$

۱۴۸ - گزینه ۱

روش اول:

می‌توانیم $\sqrt{x_2}$ را با متغیری صحیح و نامنفی مانند y_2 جایگزین کنیم. در این صورت داریم:

$$x_1 + y_2 + x_3 + x_4 = 4 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها صحیح و نامنفی} = \binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$$

روش دوم:

x_2 به مقادیر مناسب اختصاص داده و در هر مرحله تعداد جواب‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 4 \Rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

$$x_2 = 4 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 2 \Rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$x_2 = 9 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$$

$$x_2 = 16 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{0+3-1}{3-1} = \binom{2}{2} = 1$$

$$\text{تعداد کل جواب‌ها} = 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35$$

۱۴۹ - گزینه ۱

طبق تعمیم اصل لانه کبوتری داریم: (تعداد لانه‌ها برابر تعداد ماه‌های سال یعنی $m=12$ است)

$$km+1 = 65 \xrightarrow{m=12} 12k+1 = 65 \Rightarrow 12k = 64$$

$$\Rightarrow k = \left\lfloor \frac{64}{12} \right\rfloor = 5$$

در این صورت بیشترین مقدار n ، برابر است با: $k+1=6$

۱۵۰ - گزینه ۱

طبق تعریف هم‌گسسته هر رأس، درجه هر رأس این گراف برابر ۳ و در نتیجه

$$\text{گراف ۳-منتظم است و داریم: } 2q = 3p \xrightarrow{p=6} 2q = 18 \Rightarrow q = 9$$