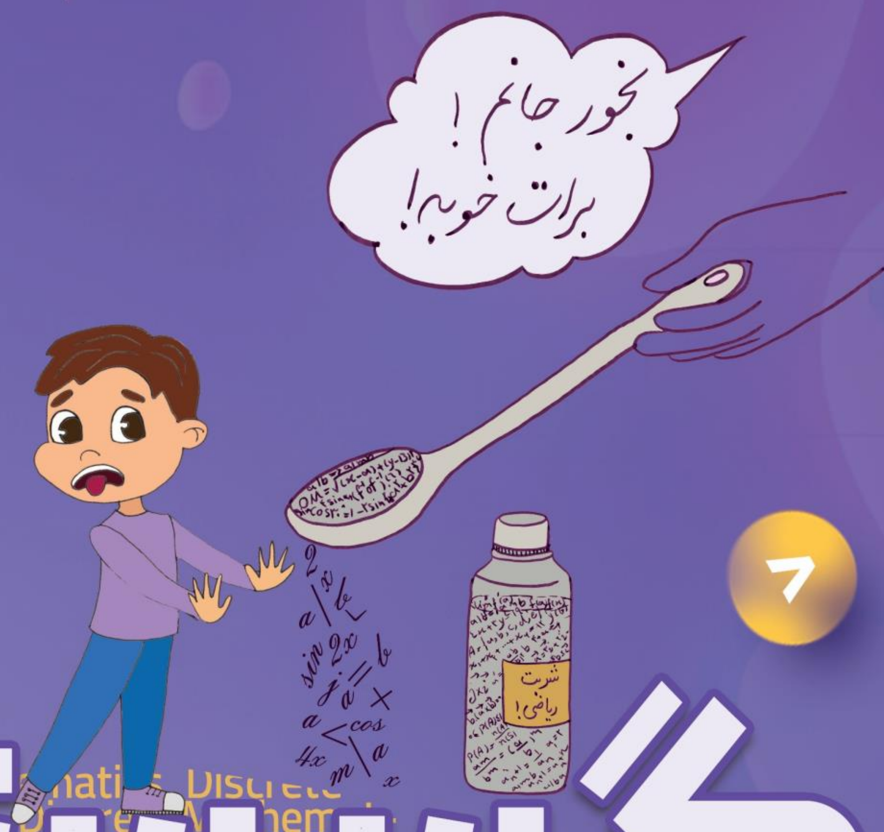

سوالات موضوعی نهایی

گسسته ریاضیات

مجموعه سؤالات نهایی ریاضیات گسسته

پایه دوازدهم رشته ریاضی فیزیک

پاسخ تشریحی

رقیه پیله ور - میکائیل صدقی

بسم الله الرحمن الرحیم

سوالات موضوعی نهایی (سمن)

ریاضیات گسسته

(۲۲ دوره سوال نهایی)

مؤلفین:

رقیه پیله‌ور نیار

میکائیل صدقی

سرشناسه	: پیله‌ور نیار، رقیه، ۱۳۶۰-
عنوان و نام پدیدآور	: سوالات موضوعی نهایی ریاضیات گسسته/مولفین رقیه پیله‌ور نیار، میکائیل صدقی.
مشخصات نشر	: اردبیل: گونش‌نگار، ۱۴۰۲.
مشخصات ظاهری	: ۱۱۷ ص.: جدول، نمودار ؛ ۲۲ × ۲۹ سم.
شابک	: ۱-۴۷-۵۵۱۳-۶۲۲-۹۷۸: ۲۰۰۰۰۰۰ ریال
وضعیت‌فهرست نویسی	: فیپای مختصر
شناسه افزوده	: صدقی، میکائیل، ۱۳۵۳-
شماره‌کتابشناسی ملی	: ۹۳۶۳۲۹۶
اطلاعات رکوردکتابشناسی	: فیپا

نام کتاب : سوالات موضوعی نهایی ریاضیات گسسته
مولفین : رقیه پیله‌ور و میکائیل صدقی
ناشر : انتشارات گونش‌نگار
طراح روجلد : رباب حامدسلطانی
رسم نمودارها : رقیه پیله‌ور و سحر طالبی
نوبت چاپ : ویرایش دوم، ۱۴۰۳
تیراژ : ۱۰۰۰ جلد
قیمت : ۲۰۰۰۰۰۰ ریال
شابک : ۹۷۸-۶۲۲-۵۵۱۳-۴۷-۱

آدرس: اردبیـــل، اول خیابان دانشگاه، روبروی اداره مخابرات، انتشارات گونش‌نگار

۰۹۱۴۳۵۸۵۶۲۸ ـــ ۰۴۵ -۳۳۵۲۳۳۵۹

www.gunashnegarpub.ir

تقدیم به

دبیران فرهیخته‌ی ریاضی

و دانش آموزان برتر

و روح بلند مریم میرزاخانی

فهرست مطالب

مقدمه

سپاس بی‌کران خداوندی را که انسان را آفرید و او را به زیور علم آراست شاکریم این توفیق را یافتیم مجموعه سوالات موضوعی نهایی ریاضیات گسسته را به صورت کتاب در آوریم. استفاده گسترده دانش‌آموزان و همکاران از این مجموعه سوالات و تشویق برخی همکاران مشوق ما در این راه بود.

کتاب حاضر شامل ۲۲ دوره سوالات نهایی ریاضیات گسسته از دی ۱۳۹۷ تا شهریور ۱۴۰۳ می‌باشد. مهمترین ویژگی منحصربه‌فرد این کتاب دسته‌بندی سوالات نهایی منطبق بر موضوعات کتاب درسی می‌باشد.

سوالات درس به درس تفکیک شده و به همراه نمره و تاریخ برگزاری آزمون دسته‌بندی شده است.

در ابتدای هر درس خلاصه درسنامه‌ای از کتاب برای یادآوری مطالب و فرمول‌ها آورده شده است.

حل سوالات نهایی سال‌های گذشته به ارتقاء نمره نهایی شما عزیزان کمک خواهد کرد.

توصیه ما به شما عزیزان این است که اول کتاب درسی یا جزوه دبیرتان را با دقت بخوانید سپس به سراغ حل سوالات این کتاب بروید. تا علاوه بر تمرین و تکرار مطالب کتاب، مفاهیم نیز در ذهنتان تثبیت شود.

نتیجه‌گیری از ریاضی سخت نیست کافی است سخت‌کوش باشید.

سخنی با همکاران و اساتید محترم ریاضی

همکار عزیز از این که کتاب حاضر را به عنوان مرجع کلاس خود انتخاب کرده‌اید به خود می‌بالیم شما می‌توانید با توجه به روند تدریس‌تان در کلاس درس، با اتمام هر درس سوالات مربوط به همان درس را به عنوان تکلیف به دانش‌آموزان بدهید. یا خودتان با توجه به زمان کلاس تعدادی از سوالات را حین تدریس در کلاس حل کنید. تجربه ما در حل این سوالات در کلاس درس یا مهمتر از آن در طول سال تحصیلی، تکلیف کردن حل این سوالات در منزل، ارتقا نمره نهایی دانش‌آموزان را ثابت کرده است.

از شما همکاران فرهیخته و دانشمند تقاضا داریم که کاستی یا نقایص کتاب و حتی غلط‌های املایی و چاپی را به ما در سایت math-pilevar.ir اطلاع دهید تا در چاپ‌های بعدی مرتفع گردد.

با تشکر: پیله‌ور - صدقی

نمونه سوالات نهایی که در این کتاب به صورت موضوعی تفکیک شده است عبارتند از:

۱	دی ۹۷
۲	خرداد ۹۸
۳	خرداد ۹۸ خارج از کشور
۴	تیر ۹۸
۵	شهریور ۹۸
۶	دی ۹۸
۷	خرداد ۹۹
۸	خرداد ۹۹ خارج از کشور
۹	شهریور ۹۹
۱۰	دی ۹۹
۱۱	خرداد ۱۴۰۰
۱۲	شهریور ۱۴۰۰
۱۳	دی ۱۴۰۰
۱۴	خرداد ۱۴۰۱
۱۵	خرداد ۱۴۰۱ خارج از کشور
۱۶	شهریور ۱۴۰۱
۱۷	دی ۱۴۰۱
۱۸	خرداد ۱۴۰۲
۱۹	شهریور ۱۴۰۲
۲۰	دی ۱۴۰۲
۲۱	خرداد ۱۴۰۳
۲۲	شهریور ۱۴۰۳

۱

آشنایی با نظریه اعداد

درس ۱
استدلال ریاضی

خلاصه درسنامه

استدلال ریاضی:

(۱) اثبات مستقیم
(۲) اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها
(۳) برهان خلف
(۴) مثال نقض
(۵) اثبات بازگشتی

۱- اثبات مستقیم: اثبات‌هایی که در آنها بطور مستقیم از فرض شروع کنیم و با توجه به اطلاعات قبلی به حکم برسیم اثبات‌های مستقیم نامیده می‌شوند.

مثال

ثابت کنید مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

$$n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$$

۲- اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها: گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همه موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم این نوع اثبات را اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها می‌گویند.

مثال

ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، n^2-5n+7 عددی فرد است.

حالت اول: فرض می‌کنیم n زوج است پس $n=2k$، $(k\in\mathbb{N})$

$$n^2-5n+7=(2k)^2-5(2k)+7=4k^2-10k+6+1=2(\underbrace{2k^2-5k+3}_{k'})+1=2k'+1$$

حالت دوم: فرض می‌کنیم n فرد است پس $n=2k-1$، $(k\in\mathbb{N})$

$$n^2-5n+7=(2k-1)^2-5(2k-1)+7=4k^2-4k+1-10k+5+7$$

$$=4k^2-14k+13=2(\underbrace{2k^2-7k+6}_{k''})+1=2k''+1$$

که باز هم حاصل یک عدد فرد است.

۳- برهان خلف (اثبات غیرمستقیم): گاهی برای اثبات یک گزاره، فرض می‌کنیم حکم نادرست است و به یک نتیجه غیرممکن و یا یک نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم پس فرض نادرست بودن حکم باطل بوده و درستی حکم ثابت می‌شود. این نوع اثبات را اثبات به روش برهان خلف یا غیرمستقیم می‌گوییم.

مثال

ثابت کنید برای هر عدد صحیح n، اگر $n^۲$ زوج باشد n نیز زوج است.

حل: فرض می‌کنیم n زوج نباشد (فرض خلف) پس فرد است در این صورت $n=۲k+۱$

$$n^۲=(۲k+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱=۲(\underbrace{۲k^۲+۲k}_{k'})+۱=۲k'+۱ \quad \text{فرد}$$

و این متناقض با فرض مسئله است زیرا طبق فرض $n^۲$ زوج است پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۴- مثال نقض: به مثالی که برای رد کردن یک حکم کلی به کار می‌رود، مثال نقض می‌گویند. (به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است.)

مثال

برای حکم کلی زیر یک مثال نقض بیاورید.

«همه اعداد اول فرد هستند». **مثال نقض:** عدد ۲ اول و زوج است.

۵- اثبات بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز): گاهی برای اثبات بعضی قضیه‌ها از حکم استفاده می‌کنیم و به یک نتیجه مطلق و درست می‌رسیم و برای تکمیل اثبات باید نشان دهیم که تمام مراحل انجام شده بازگشت‌پذیر هستند این نوع اثبات را اثبات بازگشتی می‌گوییم.

مثال

اگر $a>۰$ ثابت کنید: $a+\frac{۱}{a}\geq ۲$.

$$a+\frac{۱}{a}\geq ۲ \Leftrightarrow \frac{a^۲+۱}{a}\geq ۲ \Leftrightarrow a^۲+۱\geq ۲a \Leftrightarrow a^۲-۲a+۱\geq ۰ \Leftrightarrow (a-۱)^۲\geq ۰$$ یک عبارت همیشه درست

سوالات نهایی

ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۱	گزینه صحیح را انتخاب کنید: اگر $a,b\in\mathbb{R}$ کدامیک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟ ۱) $a<b \Leftrightarrow a^۲<b^۲$ ۲) $a<b \Leftrightarrow a^۳<b^۳$ ۳) $a<b \Leftrightarrow (a-b)^۲\geq ۰$ ۴) $a<b \Leftrightarrow a^۲<b^۳$	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۲	ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۳

۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. میانگین پنج عدد طبیعی همان عدد وسطی است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۴	با استفاده از اثبات بازگشتی نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم: $a^{۲}+b^{۲}\geq(a-۱)(b+۱)$	۱/۵	خرداد ۱۴۰۳
۵	در هر یک از موارد زیر، گزاره درست را اثبات و گزاره نادرست را با ارائه مثال نقض، رد کنید. الف) با اضافه کردن یک واحد به حاصل‌ضرب دو عدد زوج متوالی، حاصل، مربع کامل است. ب) حاصل‌ضرب هر عدد گویا در عدد گنگ، همواره عددی گنگ است.	۱/۵	دی ۱۴۰۲
۶	ثابت کنید مجموع مربعات هر دو عدد حقیقی همواره از قرینه حاصل‌ضرب آن‌ها کمتر نیست.	۱/۵	دی ۱۴۰۲
۷	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) حاصل‌ضرب هر عدد گویا، در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۲
۸	برای هر دو عدد حقیقی x و y، به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) نشان دهید: $۲x^{۲}+۲xy+y^{۲}\geq۴x-۴$	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۲
۹	درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۲
۱۰	اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $x^{۲}+y^{۲}+۱\geq۲xy-z^{۲}$	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۲
۱۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید: الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{۱}{x}$ نیز عددی گنگ است. ب) برای مقادیر حقیقی و ناصفر a و b به شرط آنکه $a+b\neq۰$ تساوی $\frac{۱}{b}+\frac{۱}{a}=\frac{۱}{a+b}$ برقرار است.	۰/۵	دی ۱۴۰۱
۱۲	گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید: «برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $y^{۲}+۱\geq-۲x(y+x+۱)$»	۱	دی ۱۴۰۱

۱۳	هر یک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض کنید. الف: برای هر عدد طبیعی n، عدد $۲^n + ۱$ اول است. ب: مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.	۱	شهریور ۱۴۰۱
۱۴	$a_۳, a_۲, a_۱$ اعدادی صحیحی هستند و $b_۳, b_۲, b_۱$ هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_۱ - b_۱)(a_۲ - b_۲)(a_۳ - b_۳)$ عددی زوج است.	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۱
۱۵	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) اگر $a > ۰$ باشد، آنگاه $a + \frac{۱}{a} \geq ۲$. پ) مربع هر عدد فرد، فرد است. ت) عدد حقیقی مانند x وجود دارد که $x^۳ < x^۲$.	۱	خرداد ۱۴۰۱ خ
۱۶	اگر n عددی فرد باشد، ثابت کنید $n^۲ - ۵n + ۷$ نیز عددی فرد است.	۱	خرداد ۱۴۰۱ خ
۱۷	ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج n، $n^۲ - ۵n + ۷$ عددی فرد است.	۱	خرداد ۱۴۰۱
۱۸	عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف) حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی (گویا، گنگ) است.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۰
۱۹	اگر α, β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.	۱/۵	دی ۱۴۰۰
۲۰	ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.	۱	شهریور ۱۴۰۰
۲۱	درست یا نادرست بودن گزاره زیر را مشخص کنید. هیچ عدد صحیحی مانند x, y وجود ندارد که رابطه $x^۲ + y^۲ = (x + y)^۲$ برقرار باشد.	۰/۵	خرداد ۱۴۰۰
۲۲	به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچکتر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است.	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۰
۲۳	گزاره درست را مشخص کرده و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه کنید. برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱، عدد $۲^n - ۱$ اول است.	۰/۲۵	دی ۹۹

۲۴	اگر α, β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.	۱/۵	دی ۹۹
۲۵	گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید. الف: مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب: اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.	۱/۷۵	خرداد ۹۹
۲۶	اگر x, y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq ۲$	۱	خرداد ۹۹
۲۷	با استفاده از روش برهان خلف، ثابت کنید اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{۱}{x}$ نیز عددی گنگ است.	۱	خرداد ۹۹ خ
۲۸	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید. الف: برای هر دو عدد حقیقی x, y داریم: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ ب: اگر a, b دو عدد حقیقی باشند و $ab = ۰$ آنگاه $a = ۰$ یا $b = ۰$ پ: اگر a, b داریم: $a < b \Leftrightarrow a^۲ < b^۲$ ت: حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.	۱	شهریور ۹۹
۲۹	ثابت کنید اگر a, b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$	۱/۲۵	شهریور ۹۹
۳۰	ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.	۱	خرداد ۹۸
۳۱	گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره هم‌ارز) ثابت کنید. برای هر دو عدد حقیقی نشان دهید: $x^۲ + y^۲ + ۱ \geq xy + x + y$	۱	خرداد ۹۸ خ
۳۲	اگر a, b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^۲ + b^۲$ زوج است.	۱	خرداد ۹۸ خ
۳۳	ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.	۱/۲۵	تیر ۹۸
۳۴	گزاره ی زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم ارز) ثابت کنید. برای هر عدد حقیقی $a > ۰$ داریم: $a + \frac{۱}{a} \geq ۲$	۱	تیر و دی ۹۸

۳۵	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید. الف: مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. ب: برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از یک، عدد $۲^n - ۱$ اول است.		۰/۵	شهریور ۹۸
۳۶	برای هر سه عدد حقیقی x, y, z ثابت کنید. $x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq xy + yz + xz$		۱/۵	شهریور ۹۸
۳۷	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $۴k + ۱$ مربع کامل است.		۰/۲۵	دی ۹۷
۳۸	اگر α, β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد. ثابت کنید $\alpha + ۲\beta$ گنگ است.		۱/۲۵	دی ۹۷
۳۹	گزاره ی زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم ارز) ثابت کنید. برای هردو عدد حقیقی x, y داریم: $x^۲ + y^۲ + ۱ \geq xy + x + y$		۱	دی ۹۷

یادداشت ضروری دانش‌آموز:

درس ۱
استدلال ریاضی

درس ۲
بخش‌پذیری در اعداد صحیح

خلاصه درسنامه

عدد صحیح b بر عدد صحیح $a \neq ۰$ بخش‌پذیر (تقسیم‌پذیر) است، هرگاه عددی صحیح مانند q یافت شود به طوری که $b = aq$.

بخش‌پذیری عدد صحیح b بر عدد صحیح $a \neq ۰$ را به صورت $a|b$ نشان می‌دهند به عبارت دیگر: $\boxed{a \mid b \xleftrightarrow{\exists q \in \mathbb{Z}} b = a \cdot q}$

برای مثال: ۱۲ | ۴ زیرا ۳ × ۴ = ۱۲

قرارداد: صفر بر صفر بخش‌پذیر است، زیرا عددی صحیح مانند q وجود دارد که $q \times ۰ = ۰$.

تذکر. صورت‌های مختلف بیان نماد بخش‌پذیری:

برای مثال: وقتی می‌نویسیم ۱۲ | ۴، چنین می‌خوانیم:

- ۱۲ بر ۴ بخش‌پذیر است.
- ۱۲ مضرب ۴ است.
- ۴ شمارنده (مقسوم‌علیه) ۱۲ است.
- ۴ سازه (عامل) ۱۲ است.
- ۴، ۱۲ را می‌شمارد (عاد می‌کند).

ویژگی‌های مهم بخش‌پذیری

ویژگی ۱: صفر بر هر عدد صحیح همواره بخش‌پذیر است. به عبارت دیگر: $\boxed{\forall a \in \mathbb{Z}; a \mid ۰}$ زیرا $۰ = a \times \underbrace{(۰)}_{q \in \mathbb{Z}}$

ویژگی ۲: هر عدد صحیح بر ۱ و ۱− بخش‌پذیر است. به عبارت دیگر: $\boxed{\forall a \in \mathbb{Z}; ۱|a, -۱|a}$

ویژگی ۳: هر عدد صحیح بر خودش و قرینه‌اش بخش‌پذیر است. به عبارت دیگر: $\boxed{\forall a \in \mathbb{Z}; a \mid a, -a \mid a}$

نتیجه: هر عدد صحیح (البته مخالف ۱ و ۱−) دست کم چهار شمارنده دارد (این چهار شمارنده عبارت‌اند از: ۱، ۱−، خودش و قرینه‌اش)

ویژگی ۴: اگر $a \mid b$، آن‌گاه: الف) $-a \mid b$ ب) $a \mid -b$ پ) $-a \mid -b$

نتیجه: ۱) گزاره شرطی $a \mid b \Rightarrow -a \mid b$

۲) گزاره شرطی $a \mid b \Rightarrow a \mid -b$

۳) علامت اعداد، تأثیری در بخش‌پذیری ندارد.

ویژگی ۵: برای دو عدد صحیح و غیر صفر a و b همواره داریم: $a \mid b \xrightarrow{b \neq ۰} |a| \leq |b|$

نتیجه: ۱) شمارنده‌های هر عدد طبیعی، همواره کوچکتر یا مساوی خود آن عدد طبیعی هستند.

۲) هیچ عدد طبیعی نمی‌تواند اعداد طبیعی کوچکتر از خود را بشمارد.

۳) اگر $a|b$ و $|a| > |b|$، آن‌گاه $b = ۰$.

ویژگی ۶: برای دو عدد صحیح و مخالف صفر a و b همواره داریم: $\boxed{(a|b \wedge b|a) \leftrightarrow |a| = |b|}$

نتیجه: (۱) اگر دو عدد طبیعی یکدیگر را بشمارند، آنگاه با هم برابرند و برعکس.

(۲) برای عدد صحیح a داریم: الف) $a|1 \leftrightarrow a=\pm 1$ ب) $0|a \leftrightarrow a=0$

ویژگی (۷): برای سه عدد صحیح و مخالف صفر a,b,c داریم: $\boxed{(a|b \wedge b|c) \Rightarrow a|c}$

ویژگی (۸): سمت راست نماد بخش‌پذیری را می‌توان در هر عدد صحیح ضرب کرد و یا به توان هر عدد طبیعی رساند. به عبارت دیگر اگر $a \neq 0$ و b اعداد صحیح باشند، داریم:

الف) $a|b \xrightarrow{\forall m\in\mathbb{Z}} a|mb$ ب) $a|b \xrightarrow{\forall n\in\mathbb{N}} a|b^n$

تذکر: (۱) ویژگی «الف» بیان می‌کند که اگر عددی، یک عدد صحیح را بشمارد، هر مضرب آن عدد صحیح را نیز می‌شمارد.

(۲) عکس گزاره‌های شرطی ویژگی ۸، همیشه درست نیستند. یعنی: $\forall n\in\mathbb{N}; a|b^n \not\Rightarrow a|b \quad , \quad \forall m\in\mathbb{Z}; a|mb \not\Rightarrow a|b$

برای این منظور به مثال‌های نقض مقابل توجه کنید: $8|4^2 \xrightarrow{n=2} 8\nmid 4$ و $8|4\times 6 \xrightarrow{m=4} 8\nmid 6$

حالت خاص اگر یک عدد اول، حاصل‌ضرب دو عدد صحیح را بشمارد، آنگاه حداقل یکی از آن دو عدد صحیح را می‌شمارد.

به عبارت دیگر اگر p عددی اول و a و b دو عدد صحیح باشند، داریم: $\boxed{p|ab \Rightarrow (p|a \vee p|b)}$

برای مثال: $3|6\times 9 \Rightarrow \begin{cases} 3|6 \\ 3|9 \end{cases}$ $\quad$ $3|6\times 5 \Rightarrow \begin{cases} 3|6 \\ 3\nmid 4 \end{cases}$

حالت خاص اگر یک عدد اول، توان nام یک عدد صحیح را بشمارد، آنگاه خود آن عدد را نیز می‌شمارد.

به عبارت دیگر اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشد، داریم: $\boxed{p|a^n \xrightarrow{\forall n\in\mathbb{N}} p|a}$

برای مثال: $4|6^2 \xrightarrow{\text{۴ اول نیست}} 4\nmid 6$، $\quad 3|6^2 \xrightarrow{\text{۳ اول است}} 3|6$

ویژگی (۹): اگر $a \neq 0$ و b دو عدد صحیح باشند، داریم: الف) $a|b \xleftrightarrow[(m\neq 0)]{\forall m\in\mathbb{Z}} ma|mb$ ب) $a|b \xleftrightarrow{\forall n\in\mathbb{N}} a^n|b^n$

نتیجه: اگر $a \neq 0$ و b اعدادی صحیح و m و n دو عدد طبیعی باشند، داریم: $\boxed{a|b \xrightarrow{m\leq n} a^m|b^n}$

برای مثال: (نادرست) $3|6 \Rightarrow 3^3|\underbrace{6^2}_{36}$ $\quad , \quad$ (درست) $3|6 \Rightarrow 3^3|6^4$

حالت خاص برای هر عدد صحیح a داریم: $\boxed{\forall m,n\in\mathbb{N}; m\leq n \Rightarrow a^m|a^n}$

برای مثال: $3^4|3^9$

ویژگی (۱۰): اگر عددی بر حاصل‌ضرب چند عدد صحیح غیرصفر بخش‌پذیر باشد، آنگاه بر هر کدام از آن‌ها نیز بخش‌پذیر است.

به عبارت دیگر برای اعداد صحیح $a_1\neq 0, a_2\neq 0, a_3\neq 0, \dots, b$ داریم: $\boxed{(a_1\cdot a_2\cdot a_3\dots)|b \Rightarrow (a_1|b \wedge a_2|b \wedge a_3|b \wedge \cdots)}$

ویژگی (۱۱): دو طرف دو یا چند بخش‌پذیری را می‌توان نظیر به نظیر در یکدیگر ضرب کرد.

به عبارت دیگر اگر $a, b \neq ۰$ و $c \neq ۰$ و d چهار عدد صحیح باشند، داریم:

$$\boxed{\begin{cases} a|b \\ c|d \end{cases} \Rightarrow ac|bd}$$

برای مثال:

$$\begin{cases} ۳|۶ \\ ۴|۸ \end{cases} \Rightarrow \underbrace{۳\times۴}_{۱۲}|\underbrace{۶\times۸}_{۴۸}$$

هشدار: عکس گزاره شرطی ویژگی ۱۱، همواره درست نیست. به عبارت دیگر:

$$\boxed{ac|bd \not\Rightarrow \begin{cases} a|b \\ c|d \end{cases}}$$

هشدار: دو طرف دو یا چند رابطه بخش‌پذیر را نمی‌توان نظیر به نظیر جمع (یا تفریق) نمود.

به عبارت دیگر اگر $a, b \neq ۰$ و $c \neq ۰$ و d اعدادی صحیح باشند، داریم:

$$\boxed{\begin{cases} a|b \\ c|d \end{cases} \not\Rightarrow (a\pm c)|(b\pm d)}$$

مثال نقض

$$\begin{cases} ۴|۱۲ \\ ۹|۱۸ \end{cases} \Rightarrow \underbrace{(۴+۹)}_{۱۳}\nmid\underbrace{(۱۲+۸)}_{۳۰} \quad , \quad \underbrace{(۴-۹)}_{-۵}\nmid\underbrace{(۱۲-۱۸)}_{-۶}$$

ویژگی (۱۲): اگر عددی دو عدد صحیح را بشمارد، آنگاه مجموع، تفاضل و حاصل‌ضرب آن دو عد را نیز می‌شمارد.

به عبارت دیگر برای اعداد صحیح $a, b \neq ۰$ و c داریم:

$$\boxed{(a|b \wedge a|c) \Rightarrow (a|(b\pm c) \wedge a|b\cdot c)}$$

برای مثال:

$$\begin{cases} ۳|۶ \\ ۳|۹ \end{cases} \Rightarrow ۳|\underbrace{۶+۹}_{۱۵} \quad , \quad ۳|\underbrace{۶-۹}_{-۳} \quad , \quad ۳|\underbrace{۶\times۹}_{۵۴}$$

هشدار: عکس گزاره شرطی ویژگی ۱۲، همیشه درست نیست. به عبارت دیگر:

برای اعداد صحیح $a, b \neq ۰$ و c داریم:

$$\begin{cases} a|bc \not\Rightarrow (a|b \wedge a|c) \\ a|(b\pm c) \not\Rightarrow (a|b \wedge a|c) \end{cases}$$

به مثال‌های نقض زیر توجه کنید:

$$\begin{cases} ۸|۴\times۶ \Rightarrow (۸\nmid۴ \wedge ۸\nmid۶) \\ ۲|(۵\pm۱) \Rightarrow (۲\nmid۵ \wedge ۲\nmid۱) \end{cases}$$

ویژگی (۱۳): اگر عددی دو عدد صحیح را بشمارد، آنگاه هر ترکیب خطی آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

به عبارت دیگر برای اعداد صحیح $a, b \neq ۰$ و c داریم:

$$\boxed{(a|b \wedge a|c) \xrightarrow{\forall m,n\in\mathbb{Z}} a|(mb\pm nc)}$$

مثال

اگر a عددی طبیعیِ بزرگ‌تر از یک باشد، به طوری که $a|۹k+۴$ و $a|۵k+۳$، آنگاه a همواره چگونه است؟ $(\forall k\in\mathbb{Z})$

پاسخ:

$$\begin{cases} a|۹k+۴ \xrightarrow{\text{ویژگی ۸}} a|۵(۹k+۴) \Rightarrow a|۴۵k+۲۰ \\ a|۵k+۳ \xrightarrow{\text{ویژگی ۸}} a|۹(۵k+۳) \Rightarrow a|۴۵k+۲۷ \end{cases} \xrightarrow[\text{(ویژگی ۱۲)}]{a \text{ تفاضل را می‌شمارد}} a|۷$$

از طرفی $a>۱$ عددی طبیعی است و چون شمارنده ۷ است، پس $a=۷$ قابل قبول است لذا a عددی اول است.

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م)

عددی‌که هر دو عدد صحیح را بشمارد و در بین تمام مقسوم‌علیه‌های مشترک آن دو عدد صحیح، از همه بزرگ‌تر باشد، **بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م)** آن دو عدد نامیده می‌شود. به عبارت دیگر:

عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌گوییم اگر و تنها اگر هر دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) $d|a \wedge d|b$ ب) $\forall m \in \mathbb{N}; (m|a \wedge m|b) \Rightarrow m \leq d$

• ب.م.م دو عدد صحیح a و b را با نماد (a,b) نشان می‌دهند.

برای مثال: $(۱۲,۱۸) = ۶$ است.

نتیجه ۱: ب.م.م دو عدد صحیح، در صورت وجود، همواره عددی طبیعی و یکتاست.

۲: اگر $a \neq ۰$ عددی صحیح باشد، آنگاه: $(a,۰) = |a|$

۳: علامت، تأثیری در محاسبه ب.م.م دو عدد صحیح ندارد. به عبارت دیگر اگر a و b دو عدد صحیح باشند، که حداقل یکی مخالف صفر است، آنگاه:

$(a,b) = (-a,b) = (a,-b) = (-a,-b)$

۴: ب.م.م دو عدد صحیح، از نظر قدرمطلقی از هر دو عدد، کوچک‌تر یا مساوی است. به عبارت دیگر برای دو عدد صحیح و غیر صفر a و b داریم:

$(a,b)|a \Rightarrow (a,b) \leq |a|, (a,b)|b \Rightarrow (a,b) \leq |b|$

مثال

اگر $a \in \mathbb{Z}$ باشد، آنگاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $۳a-۲$ و $۵a+۱$ کدام است؟

پاسخ: فرض کنیم $(۳a-۲, ۵a+۱)$، پس:

$$\begin{cases} d|۳a-۲ \Rightarrow d|۵(۳a-۲) \Rightarrow d|۱۵a-۱۰ \\ d|۵a+۱ \Rightarrow d|۳(۵a+۱) \Rightarrow d|۱۵a+۳ \end{cases} \xrightarrow{d \text{ تفاضل را می‌شمارد}} d|۱۳$$

با توجه به اینکه $d \in \mathbb{N}$، بنابراین $d=۱$ یا $d=۱۳$ است.

محاسبه ب.م.م دو عدد صحیح معلوم به کمک تجزیه

برای یافتن ب.م.م دو عدد صحیح، ابتدا هر دو عدد را به صورت تجزیه شده، می‌نویسیم، سپس **پایه‌های مشترک با توان کمتر** را در یکدیگر ضرب می‌کنیم.

برای مثال: برای یافتن ب.م.م دو عدد ۱۰۵ و ۳۵۰، داریم:

$$\begin{cases} ۱۰۵ = ۳^۱ \times ۵^۱ \times ۷^۱ \\ ۳۵۰ = ۲^۱ \times ۵^۲ \times ۷^۱ \end{cases} \Rightarrow (۱۰۵,۳۵۰) = ۵^۱ \times ۷^۱ = ۳۵$$

دو عدد نسبت به هم اول (متباین)

دو عدد را نسبت به هم اول می‌گوییم هرگاه ب.م.م آن‌ها برابر ۱ باشد و برعکس.

به عبارت دیگر برای دو عدد صحیح a و b (که حداقل یکی غیرصفر است)، داریم: $(a,b) = ۱ \Leftrightarrow$ a و b نسبت به هم اول‌اند (متباین‌اند)

برای مثال: دو عدد ۱۰ و ۲۱ نسبت به هم اول‌اند، زیرا $(۱۰,۲۱) = ۱$

نکات مهم اعداد نسبت به هم اول

نکته: ① عدد ۱ نسبت به هر عدد صحیح همواره اول است. به عبارت دیگر: $\boxed{\forall a \in \mathbb{Z}; (a, ۱) = ۱}$

نکته: ② هر دو عدد صحیح متوالی: نسبت به هم اول‌اند، به عبارت دیگر: $\boxed{\forall a \in \mathbb{Z}; (a, a+۱) = ۱}$

نکته: ③ اگر دو عدد صحیح نسبت به هم اول باشند، آنگاه شمارنده‌های آن‌ها نیز نسبت به هم اول‌اند. به عبارت دیگر:

$$\boxed{(a,b) = ۱ \xrightarrow[d|b]{c|a} (c,d) = ۱}$$

نکته: ④ اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشد، به طوری که $p \nmid a$، آنگاه $(p,a) = ۱$.

برای مثال: عدد اول ۷ را در نظر می‌گیریم، واضح است که $۷ \nmid ۱۰$، پس $(۷, ۱۰) = ۱$.

مضرب مشترک دو عدد صحیح

اگر عددی، بر دو عدد صحیح بخش‌پذیر باشد، مضرب مشترک آن دو عدد نامیده می‌شود. بنابراین:

عدد صحیح m، مضرب مشترک دو عدد صحیح و مخالف صفر a و b است اگر و تنها اگر $a|m$ و $b|m$.

برای مثال: عدد ۷۲ مضرب مشترک دو عدد ۱۲ و ۱۸ است. زیرا $۱۲|۷۲$ و $۱۸|۷۲$.

کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م)

عددی که بر هر دو عدد صحیح بخش‌پذیر است و در بین تمام مضرب‌های مشترک و مثبت آن دو عدد صحیح، از همه کوچک‌تر باشد، **کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م)** آن دو عدد نامیده می‌شود. بنابراین:

عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد صحیح و غیرصفر a و b می‌گوییم اگر و تنها اگر هر دو شرط زیر برقرار باشند:

$$\boxed{\text{الف)}\ a|c \wedge b|c \qquad \text{ب)}\ \forall m \in \mathbb{N}; (a|m \wedge b|m) \Rightarrow c \le m}$$

برای مثال: $[۱۲, ۱۸] = ۳۶$ است.

نتیجه ①: ک.م.م دو عدد صحیح، در صورت وجود، همواره عددی طبیعی و یکتا است.

حال خاص: اگر a عددی صحیح باشد، آنگاه: $[a, ۰] =$ وجود ندارد

زیرا عددی طبیعی یافت نمی‌شود که هم بر a و هم بر صفر بخش‌پذیر باشد. (توجه کنید که تنها صفر بر صفر بخش‌پذیر است، که صفر عددی طبیعی نیست.)

②: علامت تأثیری در محاسبه ک.م.م دو عدد صحیح ندارد. به عبارت دیگر اگر a و b دو عدد صحیح و مخالف صفر باشند. آنگاه:

$$[a,b] = [-a,b] = [a,-b] = [-a,-b]$$

③: ک.م.م دو عدد صحیح و غیرصفر،از هر دو عدد بزرگ‌تر یا مساوی است. به عبارت دیگر برای دو عدد صحیح و غیر صفر a و b داریم:

$$\boxed{a|[a,b] \Rightarrow a \le [a,b] \quad , \quad b|[a,b] \Rightarrow b \le [a,b]}$$

محاسبه ک.م.م دو عدد صحیح معلوم به کمک تجزیه

برای یافتن ک.م.م دو عدد صحیح، ابتدا هر دو عدد را به صورت تجزیه شده، می‌نویسیم. سپس **پایه‌های مشترک** و **غیرمشترک با توان بیشتر** را در یکدیگر ضرب می‌کنیم.

برای مثال: برای یافتن ک.م.م دو عدد ۷۲۰ و ۵۰۴ داریم:

$$\begin{cases} ۷۲۰ = ۲^۴ \times ۳^۲ \times ۵^۱ \\ ۵۰۴ = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۷^۱ \end{cases} \Rightarrow [۷۲۰, ۵۰۴] = ۲^۴ \times ۳^۲ \times ۵^۱ \times ۷^۱ = ۵۰۴۰$$

نتیجه: ک.م.م دو عدد نسبت به هم اول، با حاصل‌ضرب آن دو عدد برابر است و برعکس.

به عبارت دیگر برای دو عدد صحیح و مخالف صفر a و b داریم:

$$(a,b) = ۱ \Leftrightarrow [a,b] = |ab|$$

■ **قضیه تقسیم**

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، آن‌گاه اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r وجود دارند به طوری که:

$$\boxed{\underbrace{a = bq + r}_{\text{فرمول تقسیم}} \quad , \quad \underbrace{۰ \le r < b}_{\text{شرط تقسیم}}}$$

قضیه تقسیم، در واقع همان عملیات تقسیم است، که در دوران ابتدایی بدون آن که اعداد اعشاری یا کسری مورد استفاده قرار گیرند، آن را به صورت زیر یاد گرفتیم: (این تقسیم را تا جایی ادامه می‌دادیم که $r < b$ باشد.)

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \hline \vdots & q \\ r & \end{array} \xrightarrow{\text{امتحان درستی تقسیم}} a = b \cdot q + r$$

برای مثال: در تقسیم عدد ۳۵ بر عدد ۸ داریم:

$$\begin{array}{r|l} ۳۵ & ۸ \\ \hline -۳۲ & ۴ \\ ۳ & \end{array} \xrightarrow{\text{امتحان درستی تقسیم}} ۳۵ = ۸\underbrace{(۴)}_{q} + \underbrace{۳}_{r} \quad , \quad ۰ \le ۳ < ۸$$

مثال

اگر باقی‌مانده تقسیم عدد صحیح a بر دو عدد ۶ و ۸ به ترتیب ۳ و ۵ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۲۴ کدام است؟

پاسخ: اگر خارج قسمت تقسیم عدد صحیح a بر دو عدد ۶ و ۸ را به ترتیب q و q' در نظر بگیریم، طبق فرض مسئله داریم:

$$\begin{cases} a = ۶q + ۳, ۰ \le ۳ < ۶ \\ a = ۸q' + ۵, ۰ \le ۵ < ۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۶q + ۳ \xrightarrow{\times ۴} ۴a = ۲۴q + ۱۲ \\ a = ۸q' + ۵ \xrightarrow{\times ۳} ۳a = ۲۴q' + ۱۵ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۴a = ۲۴q + ۱۲ \\ ۳a = ۲۴q' + ۱۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفریق}} a = ۲۴\underbrace{(q - q')}_{q'' \in \mathbb{Z}} + \underbrace{(۱۲ - ۱۵)}_{-۳} \Rightarrow a = ۲۴q'' + (-۳)$$

اما از آن‌جایی‌که باقی‌مانده منفی قابل قبول نیست، پس:

$$a = ۲۴q'' + (-۳) \Rightarrow a = ۲۴q'' - ۲۴ + ۲۴ + (-۳) \Rightarrow a = ۲۴\underbrace{(q'' - ۱)}_{q''' \in \mathbb{Z}} + ۲۱ \Rightarrow a = ۲۴q''' + ۲۱$$

تذکر: هرگاه در عملیات مربوط به «تقسیم»، باقی‌مانده منفی پدید آمد، مقسوم‌علیه را اضافه و کم کنید.

نمایش اعداد صحیح به شکل‌های مختلف (افراز مجموعه اعداد صحیح)

در تقسیم هر عدد صحیح بر هر عدد طبیعی، به تعدادی برابر با همان عدد طبیعی، باقی‌مانده مختلف وجود دارد.

برای مثال: اگر a عددی صحیح‌باشد، آن‌گاه در تقسیم بر عدد ۳، در صورتی که خارج‌قسمت را عدد صحیح k در نظر بگیریم، طبق قضیه تقسیم داریم: $a = 3k + r, 0 \le r < 3$

به عبارت دیگر هر عدد صحیح به صورت $3k$ یا $3k+1$ یا $3k+2$ است $(k \in \mathbb{Z})$.

- به همین ترتیب در تقسیم هر عدد صحیح بر عدد ۴، مجموعه $\mathbb{Z}$ به صورت زیر افراز می‌گردد:

به عبارت دیگر هر عدد صحیح به صورت $4k$ یا $4k+1$ یا $4k+2$ یا $4k+3$ است $(k \in \mathbb{Z})$.

- در تقسیم هر عدد صحیح بر عدد ۵، مجموعه $\mathbb{Z}$ به صورت زیر افراز می‌شود:

به عبارت دیگر هر عدد صحیح به صورت $5k$ یا $5k+1$ یا $5k+2$ یا $5k+3$ یا $5k+4$ است $(k \in \mathbb{Z})$.

اعداد زوج و فرد

- اگر باقی‌مانده تقسیم یک عدد صحیح بر عدد ۲ برابر صفر باشد، آن عدد صحیح به صورت $2k$ نشان داده می شودو آن را **عدد زوج** می‌گویند.
- اگر باقی‌مانده تقسیم یک عدد صحیح بر عدد ۲ برابر ۱ باشد، آن عدد صحیح به صورت $2k+1$ نشان داده می‌شود و آن را **عدد فرد** می‌گویند.

هشدار: هر عدد فرد به صورت $2k-1$ نیز نمایش داده می‌شود.

نکته: ۱) مجموع و تفاضل تعدادی عددی زوج، همواره زوج است. به عبارت دیگر: (زوج) ± (زوج) ± ⋯ ± (زوج) = (زوج)

۲) مجموع و تفاضل یک عدد زوج و یک فرد، همواره فرد است. به عبارت دیگر: (زوج) ± (فرد) = (فرد)

۳) حاصل‌ضرب عدد زوج در هر عددی صحیح، همواره زوج است. به عبارت دیگر: (زوج) × ○ = (زوج)

سوالات نهایی

ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۴۰	جای خالی را با کلمه یا عبارت مناسب تکمیل کنید: اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$, $(p,a) =$	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۴۱	درستی و یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید: حاصل عبارت $([-12,-18],30)$ برابر ۶- است.(( ) نماد ب‌م‌م و [ ] نماد ک‌م‌م است)	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۳

۴۲	هرگاه a, b, c سه عدد صحیح و $a \neq ۰$ و $a \mid b$ و $a \mid c$ ثابت کنید: $a \mid b \pm c$	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۴۳	اگر a, b دو عدد صحیح و ab فرد باشد، باقی مانده $a^{۲} + b^{۲} - ۵$ بر ۸ را حساب کنید.	۱/۵	شهریور ۱۴۰۳
۴۴	ثابت کنید اگر $p \geq ۳$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = ۴k + ۱$ یا $p = ۴k + ۳$ نوشته می‌شود.	۰/۷۵	شهریور ۱۴۰۳
۴۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. $m \in \mathbb{Z} - \{۰\}$ آنگاه: $[m^{۵}, (m^{۳}, m^{۲})] = m^{۵}$	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۴۶	اگر a عددی طبیعی و داشته باشیم $a \mid ۷k + ۱$ و $a \mid ۴k + ۳$ ثابت کنید $a = ۱$ یا $a = ۱۷$.	۱	خرداد ۱۴۰۳
۴۷	اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب ۲ و ۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد a را بر ۲۰ بیابید.	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۴۸	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) اگر k عددی صحیح باشد، باقی‌مانده تقسیم $۱۹k - ۳۰۰$ بر ۱۹ برابر با .... است. ب) اگر a، b و c اعدادی طبیعی باشند که $a \mid b$ و $b \mid c$ در این صورت حاصل عبارت $([a, b], [a, c])$ برابر .... است.	۰/۵	دی ۱۴۰۲
۴۹	اگر $a \mid b$ و $b \neq ۰$ در این صورت ثابت کنید: $\lvert a \rvert \leq \lvert b \rvert$.	۱/۲۵	دی ۱۴۰۲
۵۰	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) برای اعداد صحیح a، b و c که $a \neq ۰$، اگر $a \mid b + c$ آنگاه $a \mid b$ یا $a \mid c$. ب) اگر داشته باشیم $(a, b) = ۱$ آنگاه می‌گوییم a و b نسبت به هم اول‌اند.	۰/۵	شهریور ۱۴۰۲
۵۱	به روش برهان خلف نشان دهید؛ اگر a عدد صحیح فرد باشد و $b \mid a + ۲$، آنگاه b نیز عددی فرد است.	۱	شهریور ۱۴۰۲
۵۲	اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به طوری که $۷ \mid ۲k + ۱$، ثابت کنید: $۴۹ \mid ۴k^{۲} - ۱۰k - ۶$	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۲

۵۳	درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. حاصل $(۳m+۱,۳m+۲)$ برابر ۱ می‌باشد.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۲
۵۴	اگر $a \mid ۲m+۳$ و $a \mid m+۷$ در این صورت چند مقدار صحیح و نامنفی برای a وجود دارد؟	۱	خرداد ۱۴۰۲
۵۵	باقی‌مانده تقسیم a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب برابر ۳ و ۴ می‌باشد، باقی‌مانده تقسیم a بر ۲۰ را محاسبه کنید. (با راه حل)	۱/۵	خرداد ۱۴۰۲
۵۶	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید: اگر $a\mid b+c$ آنگاه $a\mid b$ یا $a\mid c$.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۱
۵۷	اگر $a \neq ۰$ عددی صحیح و دو عدد $(۵m+۴)$ و $(۶m+۵)$ بر a بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید $a=\pm ۱$.	۱/۲۵	دی ۱۴۰۱
۵۸	اگر a و b عددی صحیح و فرد باشد، در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $(a^۲+b^۲+۵)$ را بر ۸ بیابید.	۱	دی ۱۴۰۱
۵۹	در جاهای خالی عبارت‌های مناسب بنویسید. الف) حاصل $([m^۲,m],m^۵)$ برابر با.................... است. ب) اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b داشته باشیم $(a,b)=۱$، می‌گوییم a و b............................ هستند.	۰/۵	دی ۱۴۰۱
۶۰	اگر عدد طبیعی a دو عدد $(۸k+۱۳)$ و $(۵k+۹)$ را عاد کند، ثابت کنید: $a=۱$ یا $a=۷$	۰/۷۵	شهریور ۱۴۰۱
۶۱	اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۷ به ترتیب ۳ و ۵ باشد، باقیمانده تقسیم عدد a را بر ۴۲ بیابید.	۱	شهریور ۱۴۰۱
۶۲	پاسخ صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف) اگر $a\mid b$ و $b\mid a$، آنگاه a برابر با $(\pm b - b)$ است. ب) اگر $(a,b)=d$، آنگاه برای هر $m>۰$ که $m\mid a$ و $m\mid b$ داریم: $(m\le d - m\ge d)$ پ) اگر برای دو عدد صحیح x و k داشته باشیم: $x=۴k+۳$ آنگاه $(x\in[۳]_۴ - x\in[۴]_۳)$	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۱ خ
۶۳	اگر $a>۱$ و $a\mid ۹k+۴$ و $a\mid ۵k+۳$، ثابت کنید a عددی اول است.	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۱ خ

۶۴	درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. الف) اگر $a\|b$ و $b\neq 0$، در این صورت $\|a\|>\|b\|$. ب) برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b اگر $(a\|c, b\|c)$ و $(\forall m>0, a\|m, b\|m \Rightarrow c\leq m)$ آنگاه $[a,b]=c$. ت) بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۴ و ۲− برابر ۲− است.	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۱
۶۵	اگر عدد مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد، به طوری که $5\|4k+1$ ، ثابت کنید $25\|16k^2+28k+6$	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۱
۶۶	عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف) اگر برای دو عدد صحیح a و b داشته باشیم $a\|b$، برای هر $m\in Z$ داریم: $(a\|mb, ma\|b)$ ب) اگر $a\|b$ آن گاه ب.م.م دو عدد a و b برابر با $(a, \|a\|)$ است.	۰/۵	دی ۱۴۰۰
۶۷	ثابت کنید باقی مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، برابر یک است.	۱/۵	دی ۱۴۰۰
۶۸	اگر در تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است.	۱/۲۵	دی ۱۴۰۰
۶۹	درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. الف) اگر $a\|b$ و m,n دو عدد طبیعی باشند که $m\leq n$، آن گاه $a^m\|b^n$. ب) اگر $a\|b$ آن گاه $(a,b)=a$.	۰/۵	شهریور ۱۴۰۰
۷۰	اگر $a>1$، $a\|9k+4$ و $a\|5k+3$، ثابت کنید a عددی اول است.	۱	شهریور ۱۴۰۰
۷۱	اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح $a+4$ یا $a+2$ یا a بر ۳ بخش پذیر است.	۱/۵	شهریور ۱۴۰۰
۷۲	درست یا نادرست بودن گزاره زیر را مشخص کنید. حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۰
۷۳	جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید. الف: a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a\|b$ آن گاه عدد ....، شمارنده عدد .... است. ب: m عددی صحیح است. حاصل $(2m, 6m^3)$ برابر با .... است.	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۰

۷۴	ثابت کنید اگر $p \geq 5$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 3$ و $p = 4k + 1$ نوشته می‌شود.	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۰
۷۵	گزاره‌های درست را مشخص کرده و برای گزاره‌های نادرست، مثال نقض ارائه کنید. برای دو عدد طبیعی a, b، اگر $a \mid b$ آن گاه $[a, b] = \lvert b \rvert$	۰/۲۵	دی ۹۹
۷۶	اگر باقیمانده تقسیم اعداد b, a بر ۱۷ برابر ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $(2a - 5b)$ بر ۱۷ را بیابید.	۱	دی ۹۹
۷۷	اگر a عدد طبیعی باشد، حاصل $(5a + 4, 2a + 3)$ را به دست آورید.	۱/۲۵	دی ۹۹
۷۸	اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $2a + 3$ بر ۸ را بدست آورید.	۱/۲۵	خرداد ۹۹
۷۹	اگر $n \in N$, $n \mid 9k + 7$ و $n \mid 7k + 6$، ثابت کنید $n = 5$ یا $n = 1$	۱	خرداد ۹۹
۸۰	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف: اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر aوb داشته باشیم $(a, b) = 1$، می‌گوییم a و b دو عدد .... هستند. ب: اگر $a \mid b$، مقدار $[a, b]$ برابر با .... است.	۱	خرداد ۹۹ خ
۸۱	اگر $a \mid 5m - 2$ و $a \mid 3m + 1$، برای a چند جواب طبیعی وجود دارد؟	۱/۲۵	خرداد ۹۹ خ
۸۲	اگر باقیمانده تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۱ برابر ۱۹ باشد، باقی مانده $2a - 1$ تقسیم بر ۳۱ را بدست آورید.	۱/۲۵	خرداد ۹۹ خ
۸۳	بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $4k$ و $16k^2 - 1$ را بیابید.	۰/۷۵	خرداد ۹۹ خ
۸۴	فرض کنیم n و a دو عدد طبیعی باشند به طوری که $a \mid 2n + 3$ و $a \mid 3n + 4$ نشان دهید $a = 1$	۱/۲۵	شهریور ۹۹
۸۵	ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 6k + 5$ یا $p = 6k + 1$ $(k \in W)$ نوشته می‌شود.	۱/۵	شهریور ۹۹
۸۶	اگر باقیمانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $(2m - 5n)$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.	۱/۲۵	شهریور ۹۹

math-pilevar.com

درس ۲

بخش‌پذیری

۸۷	اگر باقیمانده تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد. در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم عدد $5n-3m$ بر ۱۳ را بدست آورید.	۱/۵	خرداد ۹۸
۸۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $a^2 \mid b^3$ آنگاه $a\mid b$	۰/۲۵	خرداد ۹۸ خ
۸۹	حاصل عبارت مقابل کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ $([m^2, m], m^5) = \dots$ الف: m ب: m^0 ج: m^5 د: m^2	۰/۲۵	خرداد ۹۸ خ
۹۰	در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید. در تقسیم عدد ۱۲۷- بر ۱۵ باقیمانده برابر .... و خارج قسمت .... است.	۰/۵	خرداد ۹۸ خ
۹۱	اگر عددی مانند k در Z باشد به طوری که $5 \mid 4k+1$، ثابت کنید $25 \mid 16k^2+28k+6$	۱/۲۵	تیر ۹۸
۹۲	در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید. حاصل $[12,(6,8)]$ برابر .... خواهد شد.	۰/۵	تیر ۹۸
۹۳	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. مربع هر عدد فرد را می‌توان به صورت $8k-1$ نوشت. $(k \in Z)$	۰/۲۵	تیر ۹۸
۹۴	جای خالی را پر کنید. $[a,b]=c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند. ۱) $a\mid c$ و $b\mid c$ ۲) $\forall m>0$ و ...	۰/۵	شهریور ۹۸
۹۵	اگر باقیمانده تقسیم a بر دو عدد ۶ و ۵ به ترتیب ۳ و ۲ باشد، باقی مانده تقسیم عدد a را بر ۳۰ بیابید.	۱/۵	شهریور ۹۸
۹۶	اگر عدد طبیعی $a>1$ در دو شرط $a \mid 4k+9$ و $a \mid 6k+14$ صدق کند، مقدار a را بیابید.	۱	دی ۹۸
۹۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $a\mid b$ آنگاه $[a,b]=\lvert a\rvert$	۱	دی ۹۸

۹۸	فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $[۲۱a^۲, ۳۵a^۳]$ را بدست آورید.	۱	دی ۹۸
۹۹	اگر $a > ۱$ و $a\|۹k+۴\ ,\ a\|۵k+۳$ ثابت کنید a عددی اول است.	۱	دی ۹۷
۱۰۰	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اول‌اند.	۰/۲۵	دی ۹۷
۱۰۱	پاسخ سوال زیر را بدست آورید. دلیل پاسخ خود را به طورکامل بنویسید. اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b\|a+۲$ در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $a^۲+b^۲+۳$ را بر ۸ بیابید.	۱/۲۵	دی ۹۷

یادداشت ضروری دانش‌آموز: ....

درس ۲

بخش‌پذیری

درس ۳

همنهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

خلاصه درسنامه

دو عدد صحیح a و b را به پیمانه عدد طبیعی m همنهشت می‌گوییم هرگاه تفاضل a و b مضربی از m باشد (بخش‌پذیر باشد)

بنابراین برای دو عدد صحیح a و b و عدد طبیعی m، هرگاه $m|a-b$، در این صورت می‌گوییم:

«a یا b به پیمانه (سنج) m همنهشت است» و می‌نویسیم: $a\overset{m}{\equiv}b$

برای دو عدد صحیح a و b و عدد طبیعی m داریم: $\boxed{a\overset{m}{\equiv}b \Leftrightarrow m|a-b \text{ یا } a-b=mk\ (k\in\mathbb{Z})}$

برای مثال: $۳۳\overset{۴}{\equiv}۴۵$، زیرا $۴|\underbrace{(۴۵-۳۳)}_{۱۲}$. اما $۱۴\overset{۳}{\not\equiv}۲۷$، زیرا $۳\nmid\underbrace{(۲۷-۱۴)}_{۱۳}$

ویژگی‌های همنهشتی

ویژگی ①: هر عدد صحیح با هر پیمانه‌ای، با خودش همنهشت است. به عبارت دیگر: $\boxed{\forall a\in\mathbb{Z}\quad,\quad \forall m\in\mathbb{N}; a\overset{m}{\equiv}a}$

ویژگی ②: هر عدد صحیح به پیمانه خودش با صفر همنهشت است. به عبارت دیگر: $\boxed{\forall m\in\mathbb{Z}; m\overset{|m|}{\equiv}۰}$

ویژگی ③: همنهشتی خاصیت جابه‌جایی دارد. به عبارت دیگر برای اعداد صحیح a و b و عدد طبیعی m داریم: $\boxed{a\overset{m}{\equiv}b \Leftrightarrow b\overset{m}{\equiv}a}$

ویژگی ④: همنهشتی خاصیت تعدی دارد. به عبارت دیگر برای اعداد صحیح a, c و b و عدد طبیعی m داریم: $\boxed{a\overset{m}{\equiv}b \wedge b\overset{m}{\equiv}c) \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}c}$

برای مثال: $(\underset{۵|۱۲-۷}{۱۲\overset{۵}{\equiv}۷} \wedge \underset{۵|۷-۲}{۷\overset{۵}{\equiv}۲}) \Rightarrow \underset{۵|۱۲-۲}{۱۲\overset{۵}{\equiv}۲}$

ویژگی ⑤: دو طرف همنهشتی را می‌توان با هر عدد صحیح جمع یا تفریق کرد، بدون آنکه پیمانه تغییر کند.

به عبارت دیگر برای اعداد صحیح a, c و b و عدد طبیعی m داریم: $\boxed{a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow (a\pm c)\overset{m}{\equiv}(b\pm c)}$

برای مثال: $۱۷\overset{۵}{\equiv}۷ \xrightarrow{+۳} (۱۷+۳)\overset{۵}{\equiv}(۷+۳) \Rightarrow ۲۰\overset{۵}{\equiv}۱۰$

ویژگی ⑥: ضرب یک عدد صحیح را در دو طرف یک همنهشتی به دو صورت ممکن است: (a و b اعدادی صحیح و m عددی طبیعی است).

$$a\overset{m}{\equiv}b \xrightarrow{\forall c\in\mathbb{Z}} \begin{cases} ac\overset{m}{\equiv}bc & \text{(بدون تغییر پیمانه)} \\ ac\overset{m|c|}{\equiv}bc & \text{(با تغییر پیمانه)} \end{cases}$$

برای مثال: $۸\overset{۲}{\equiv}۶ \xrightarrow{\times ۳} \underbrace{۸\times ۳}_{۲۴}\overset{۲}{\equiv}\underbrace{۶\times ۳}_{۱۸}$ یا $\underbrace{۸\times ۳}_{۲۴}\overset{۲\times ۳}{\equiv}\underbrace{۶\times ۳}_{۱۸}$

تذکر: ویژگی ۶، دو شرطی نیست. به عبارت دیگر از $ac \overset{m}{\equiv} bc$، لزوماً نمی‌توان $a \overset{m}{\equiv} b$ نتیجه گرفت.

ویژگی ۷: دو طرف یک هم‌نهشتی را می‌توان بدون تغییر پیمانه، به توان هر عدد طبیعی رساند.

به عبارت دیگر برای اعداد صحیح a و b و عدد طبیعی m داریم:

$$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\forall n \in \mathbb{N}} a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

برای مثال: $۵ \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۵^۲ \overset{۳}{\equiv} ۲^۲$ (زیرا $۳|\underbrace{۲۵-۴}_{۲۱}$)

هشدار: عکس ویژگی (۷) همواره درست نیست. به عبارت دیگر ریشه گرفتن از دو طرف هم‌نهشتی، همواره امکان‌پذیر نیست.

ویژگی ۸: دو طرف دو (یا چند) هم‌نهشتی با پیمانه یکسان را می‌توان با هم جمع یا تفریق نمود و یا در یکدیگر ضرب کرد، بدون آنکه پیمانه تغییر کند. به عبارت دیگر، برای اعداد صحیح c, b, a و عدد طبیعی m داریم:

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a \pm c) \overset{m}{\equiv} (b \pm d) \\ ac \overset{m}{\equiv} bd \end{cases}$$

برای مثال: $\underbrace{(۱۵+۷)}_{۲۲} \overset{۵}{\equiv} \underbrace{(۱۰+۲)}_{۱۲}$ ، $\begin{cases} ۱۵ \overset{۵}{\equiv} ۱۰ \\ ۷ \overset{۵}{\equiv} ۲ \end{cases} \Rightarrow \underbrace{۱۵ \times ۷}_{۱۰۵} \overset{۵}{\equiv} \underbrace{۱۰ \times ۲}_{۲۰}$

ویژگی ۹: به یک طرف هم‌نهشتی می‌توان هر مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد.

به عبارت دیگر برای اعداد صحیح a و b و عدد طبیعی m داریم:

$$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\forall k \in \mathbb{Z}} a \overset{m}{\equiv} b \pm mk$$

برای مثال:

$$۲۵ \overset{۳}{\equiv} ۱۳ \Rightarrow ۲۵ \overset{۳}{\equiv} \underbrace{۱۳ + \overbrace{۵ \times ۳}}_{۲۸}$$

نتیجه ۱: هر مضرب از پیمانه، با صفر هم‌نهشت است. یعنی برای هر عدد طبیعی m داریم: $\forall k \in \mathbb{Z} : mk \overset{m}{\equiv} ۰$

۲: به دو طرف هم‌نهشتی نیز می‌توان هر مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد.

■ قضیه هم‌باقی‌ماندگی

دو عدد صحیح هم‌نهشت‌اند اگر و تنها اگر هر دو در تقسیم بر پیمانه، هم‌باقی‌مانده باشند.

به عبارت دیگر برای اعداد صحیح a و b و عدد طبیعی m داریم:

$a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow$ a و b در تقسیم بر m هم‌باقی‌مانده‌اند

برای مثال:

$$۱۲ \overset{۵}{\equiv} ۲۷$$

باقی‌مانده تقسیم ۱۲ بر ۵ برابر ۲ است. باقیمانده تقسیم ۲۷ بر ۵ برابر ۲ است.

نتیجه: هم‌نهشتی، به مفهوم هم‌باقی‌مانده شدن است.

ارتباط قضیه تقسیم و هم‌نهشتی

در قضیه‌تقسیم همواره هم‌نهشتی روبه‌رو برقرار است:

$$\text{مقسوم} \overset{\text{مقسوم‌علیه}}{\equiv} \text{باقی‌مانده}$$

به عبارت دیگر: اگر a عددی طبیعی باشد، آن‌گاه طبق قضیه تقسیم اعدادی صحیح و یکتا مانند q و r وجود دارند به طوری که:

$$\boxed{a = mq + r \xleftrightarrow{\circ \leq r < m} a \overset{m}{\equiv} r}$$

برای مثال: می‌دانیم باقی‌مانده تقسیم عدد ۲۷ بر ۵ برابر ۲ است، پس: $۲ \overset{۵}{\equiv} ۲۷ \Leftrightarrow ۲ + (\cdots)۵ = ۲۷$، زیرا $۵|(۲۷-۲)$

نتیجه: اگر در هم‌نهشتی $a \overset{m}{\equiv} s$، عدد s باقی‌مانده تقسیم a بر m نباشد، آن‌گاه برای یافتن باقی‌مانده تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی m:

(۱) در صورت منفی بودن عدد s، آنقدر پیمانه را به آن اضافه می‌کنیم، تا نامنفی و کوچک‌تر از پیمانه باشد که همان عدد باقی‌مانده تقسیم a بر m است.

برای مثال: در هم‌نهشتی $۹۳ \overset{۱۲}{\equiv} -۲۷$ (زیرا $۱۲|۹۳-(-۲۷)$)

واضح است که عدد -۲۷، باقی‌مانده تقسیم ۹۳ بر ۱۲ نیست (چرا؟). اکنون داریم:

$$۹۳ \overset{۱۲}{\equiv} -۲۷ \Rightarrow ۹۳ \overset{۱۲}{\equiv} \underbrace{-۲۷ + \overbrace{۳ \times ۱۲}}_{۹} \Rightarrow ۹۳ \overset{۱۲}{\equiv} ۹$$

یعنی باقی‌مانده تقسیم ۹۳ بر ۱۲ برابر ۹ است.

(۲) در صورتی که عدد s از پیمانه بزرگ‌تر باشد، آنقدر پیمانه را از آن کم می‌کنیم (پیمانه پیمانه از آن برمی‌داریم)، تا کوچک‌تر از پیمانه (و نامنفی) شود، که همان عدد باقی‌مانده تقسیم a بر m است.

برای مثال: در هم‌نهشتی $۴۶ \overset{۱۳}{\equiv} ۲۰$ (زیرا $۱۳|۴۶-۲۰$) واضح است که عدد ۲۰، باقی‌مانده تقسیم ۴۶ بر ۱۳ نیست (چرا؟). اکنون داریم:

$$۴۶ \overset{۱۳}{\equiv} ۲۰ \Rightarrow ۴۶ \overset{۱۳}{\equiv} \underbrace{۲۰ - ۱۳}_{۷} \Rightarrow ۴۶ \overset{۱۳}{\equiv} ۷$$

مثال

اگر باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد صحیح a و b بر عدد ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(۲a-۵b)$ بر ۱۷ کدام است؟

پاسخ: مطابق فرض، با توجه به ارتباط قضیه تقسیم و هم‌نهشتی، داریم:

$$a = ۱۷q + ۵ \Rightarrow a \overset{۱۷}{\equiv} ۵ \xrightarrow{\times ۲} ۲a \overset{۱۷}{\equiv} ۱۰ \quad , \quad b = ۱۷q' + ۳ \Rightarrow b \overset{۱۷}{\equiv} ۳ \xrightarrow{\times ۵} ۵b \overset{۱۷}{\equiv} ۱۵$$

از تفاضل دو هم‌نهشتی به دست آمده داریم:

$$۲a - ۵b \overset{۱۷}{\equiv} ۱۰ - ۱۵ \Rightarrow ۲a - ۵b \overset{۱۷}{\equiv} -۵$$

با افزودن پیمانه به عدد -۵، باقی‌مانده برابر با $۱۲ = ۱۷ + (-۵)$ است.

تکنیک: یافتن باقی‌مانده تقسیم اعداد به شکل a^n بر عدد طبیعی m به روش آزمون و خطا (روش ضرب‌های متوالی)

گام اول در این نوع مسائل ابتدا توانی از عدد پایه می‌یابیم (آزمون و خطا)، که به پیمانه داده شده با یک عدد کوچک (نظیر ۱، ۱− و صفر)، همنهشت شود.

برای مثال: می‌خواهیم باقی‌مانده تقسیم عدد $۳^{۹۸}$ بر عدد ۸۰ را بیابیم. برای این منظور به کمک آزمون و خطا (روش ضرب‌های متوالی) داریم:

$$۳^۱ \overset{۸۰}{\equiv} ۳ \quad , \quad ۳^۲ \overset{۸۰}{\equiv} ۹ \quad , \quad ۳^۳ \overset{۸۰}{\equiv} ۲۷ \quad , \quad \underbrace{۳^۴}_{۸۱} \overset{۸۰}{\equiv} ۱$$

گام دوم اکنون دو طرف هم‌نهشتی به دست آمده را به توان عددی مناسب می‌رسانیم، تا توان عدد پایه، به توان موردنظر مسئله نزدیک گردد یا مساوی با آن شود.

$$۳^۴ \overset{۸۰}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{توان } ۲۴} (۳^۴)^{۲۴} \overset{۸۰}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۴\times ۲۴} \overset{۸۰}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۹۶} \overset{۸۰}{\equiv} ۱$$

$$۳^{۹۶} \overset{۸۰}{\equiv} \xrightarrow{\times ۳^۲} ۳^۲ \times ۳^{۹۶} \overset{۸۰}{\equiv} ۳^۲ \Rightarrow ۳^{۹۸} \overset{۸۰}{\equiv} ۹$$

یعنی باقی‌مانده تقسیم عدد $۳^{۹۸}$ بر عدد ۸۰ برابر با ۹ است.

کاربرد هم‌نهشتی در مسائل گردشی (دوره‌ای)

مسائلی از قبیل روزهای هفته، ساعت و ماه که حالت گردشی داشته و با افزودن عدد ثابتی (۷روز، ۲۴ ساعت و ۱۲ ماه) به وضعیت و شرایط قبلی برمی‌گردند، به عنوان مثال‌هایی عملی از کاربرد هم‌نهشتی هستند.

مثال

اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

پاسخ: در این مسئله، روز شروعی، جمعه است. پس:

جمعه	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

اکنون روزهای موردنظر را محاسبه می‌کنیم. ۳۱ مردادماه، آخرین روز مرداد است لذا یک از مرداد ماه محسوب می‌شود. شهریورماه دارای ۳۱ روز، ماه‌های مهر، آبان، آذر و دی، هر کدام ۳۰ روز و تا روز یازدهم بهمن، ۱۱ روز داریم. بنابراین کل روزهای موردنظر عبارت‌اند از:

$$۱ + ۳۱ + ۴ \times ۳۰ + ۱۱ = ۱۶۳ \xrightarrow{\text{باقی‌مانده بر } ۷} ۱۶۳ \overset{۷}{\equiv} ۲$$

اما چون در این مسئله، تقویم قرار است به عقب برگردد، بنابراین عدد ۱۶۳− را به پیمانه ۷ درنظر می‌گیریم:

$$-۱۶۳ \overset{۷}{\equiv} -۲ \overset{۷}{\equiv} ۵ \xrightarrow{\text{طبق جدول}} \text{چهارشنبه}$$

❖ **کلاس (دسته) هم‌نهشتی:** مجموعه همه اعداد صحیح که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی m برابر با r می‌باشد، کلاس (دسته) هم‌نهشتی r به پیمانه m نامیده می‌شود. به عبارت دیگر:

$$\boxed{[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} | x \overset{m}{\equiv} r \quad \text{یا} \quad x = mk + r\}}$$

برای مثال: تمام دسته‌های هم‌نهشتی به پیمانه ۵ عبارت‌اند از: $[۰]_۵, [۱]_۵, [۲]_۵, [۳]_۵, [۴]_۵$

مثلاً منظور از $[۲]_۵$، مجموعه تمام اعداد صحیحی است که در تقسیم بر عدد ۵ باقی‌مانده ۲ دارند (همان اعداد به شکل $۵k + ۲$).

نکته: یک عدد صحیح متعلق به یک کلاس هم‌نهشتی است، اگر و تنها اگر به پیمانه داده شده با عدد آن کلاس هم‌نهشت باشد. به عبارت دیگر:

$$\boxed{a \in [r]_m \Leftrightarrow a \overset{m}{\equiv} r}$$

مثال

عدد ۱۳۹۸ به کدام کلاس هم‌نهشتی به پیمانه ۱۲ تعلق دارد؟

پاسخ: باید بررسی کنیم که باقی‌مانده تقسیم ۱۳۹۸ بر عدد ۱۲ برابر با چه عددی است. داریم:

$$۱۳۹۸ = ۱۲(۱۱۶) + ۶ \Rightarrow ۱۳۹۸ \overset{۱۲}{\equiv} ۶ \Rightarrow ۱۳۹۸ \in [۶]_{۱۲}$$

نکات تکمیلی هم‌نهشتی

نکته: ① اگر یک عدد طبیعی پیمانه را بشمارد، آنگاه می‌تواند به جای پیمانه قرار بگیرد (یعنی شمارنده‌های طبیعی پیمانه، می‌توانند به جای پیمانه قرار گیرند). به عبارت دیگر برای اعداد صحیح a و b و اعداد طبیعی m و n داریم:

$$\boxed{a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{n|m} a \overset{n}{\equiv} b}$$

برای مثال: $۲۴ \overset{۱۵}{\equiv} ۹ \xrightarrow{۵|۱۵} ۲۴ \overset{۵}{\equiv} ۹$

نکته: ② دو هم‌نهشتی یکسان با پیمانه‌های متفاوت

برای اعداد صحیح a و b و اعداد طبیعی m و n داریم:

$$\boxed{\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \overset{(m,n)}{\equiv} b \\ a \overset{[m,n]}{\equiv} b \end{cases}}$$

مثال

اگر باقی‌مانده‌های تقسیم عدد صحیح a بر ۹ و ۶ هر دو مساوی با ۴ باشد آنگاه باقی‌مانده تقسیم a بر ۱۸ کدام است؟

پاسخ: به کمک مطلب بالا داریم:

$$\begin{cases} a \overset{۶}{\equiv} ۴ \\ a \overset{۹}{\equiv} ۴ \end{cases} \xrightarrow{[۶,۹]=۱۸} a \overset{۱۸}{\equiv} ۴$$

نکته: ③ تقسیم دو طرف هم‌نهشتی بر یک عدد صحیح غیرصفر

■ **قضیه:** در تقسیم دو طرف هم‌نهشتی بر یک عدد صحیح (غیرصفر)، که عامل مشترک هر دو طرف می‌باشد، باید پیمانه آن هم‌نهشتی نیز بر ب.م.م پیمانه و عددی که از دو طرف حذف می‌گردد، تقسیم شود.

به عبارت دیگر برای اعداد صحیح a، b و $c \neq ۰$ و عدد طبیعی m داریم:

$$\boxed{ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow[(m,c)=d]{\div c} a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b}$$

برای مثال: $۴۸ \overset{۹}{\equiv} ۳۰ \xrightarrow[(۹,۶)=۳]{\div ۶} ۸ \overset{\frac{۹}{۳}}{\equiv} ۵$

حالت خاص

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow[(m,c)=1]{\div c} a \overset{m}{\equiv} b$$

به عبارت دیگر: قاعده حذف (تقسیم دو طرف هم‌نهشتی بر یک عدد صحیح)، برای هر عددی که نسبت به پیمانه اول باشد، همواره برقرار است.

برای مثال: $24 \overset{3}{\equiv} 6 \xrightarrow[(4,3)=1]{\div 4} 6 \overset{3}{\equiv} 3$

قاعده‌های بخش‌پذیری مهم

قاعده ۱: بخش‌پذیری بر ۳ و ۹

باقی‌مانده تقسیم هر عدد طبیعی بر ۳ یا ۹ برابر است با: باقی‌مانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳ یا ۹

به عبارت دیگر:

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0} \overset{3\ \text{یا}\ 9}{\equiv} \underbrace{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0}_{\text{مجموع ارقام}}$$

برای مثال: برای یافتن باقی‌مانده تقسیم عدد ۶۹۴۷۵۱۳۲ بر عدد ۳ داریم:

$$69475132 \overset{3}{\equiv} \underbrace{6}_{0} + \underbrace{9}_{0} + \underbrace{4}_{1} + \underbrace{7+5}_{12\to 0} + \overbrace{1 + \underbrace{3}_{0} + 2}^{3\to 0} \overset{3}{\equiv} 1$$

نتیجه: عددی بر ۳ یا ۹ بخش‌پذیر است که مجموع ارقام آن بر ۳ یا ۹ بخش‌پذیر باشد.

قاعده ۲: بخش‌پذیری بر ۱۱

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0} \overset{11}{\equiv} \underset{\text{رقم یکان}}{\underset{\downarrow}{a_0}} \ \underset{\text{رقم دهگان}}{\underset{\downarrow}{-a_1}} \ \underset{\text{رقم صدگان}}{\underset{\downarrow}{+a_2}} \ \underset{\cdots}{-a_3 + \cdots}$$

برای مثال: باقی‌مانده تقسیم عدد ۲۴۷۶۹۴۱ بر ۱۱ عبارت است از:

$$2476941 \overset{11}{\equiv} \underbrace{1 - 4 + 9 - 6 + 7 - 4 + 2}_{5} \overset{11}{\equiv} 5$$

قاعده ۳: بخش‌پذیری بر ۲، ۵ و ۱۰

باقی‌مانده تقسیم هر عدد طبیعی بر ۲، ۵ و ۱۰ برابر است با: باقی‌مانده تقسیم رقم یکان آن عدد بر ۲، ۵ و ۱۰.

به عبارت دیگر:

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0} \overset{2\ \text{یا}\ 5\ \text{یا}\ 10}{\equiv} \underbrace{a_0}_{\text{رقم یکان}}$$

زیرا می‌دانیم $\forall k \in \mathbb{N}; 10^k \overset{2\ \text{یا}\ 5\ \text{یا}\ 10}{\equiv} 0$ و لذا هر عدد طبیعی از رقم دهگان به بعد، بر ۲، ۵ و ۱۰ بخش‌پذیر است.

برای مثال: باقی‌مانده تقسیم عدد ۵۹۷۳۴۸ بر ۲، ۵ و ۱۰ عبارت است از:

$$597348 \overset{2}{\equiv} 8 \overset{2}{\equiv} 0 \quad , \quad 597348 \overset{5}{\equiv} 8 \overset{5}{\equiv} 3 \quad , \quad 597348 \overset{10}{\equiv} 8$$

مثال

رقم یکان عدد $A = ۱! + ۲! + ۳! + \cdots + ۵۰۰!$ کدام است؟

پاسخ: کافی است باقی‌مانده تقسیم عدد A را بر عدد ۱۰ بیابیم. برای این منظور ابتدا توجه کنید که:

$$\underbrace{۱!}_{۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۱,\ \underbrace{۲!}_{۲} \overset{۱۰}{\equiv} ۲,\ \underbrace{۳!}_{۶} \overset{۱۰}{\equiv} ۴,\ \underbrace{۵!}_{۱۲۰} \overset{۱۰}{\equiv} ۰ \xrightarrow{\times ۶} ۶! \overset{۱۰}{\equiv} ۰ \xrightarrow{\times ۷} ۷! \overset{۱۰}{\equiv} ۰ \xrightarrow{\times ۸} \cdots$$

بنابراین:

$$A \overset{۱۰}{\equiv} \underbrace{\underbrace{۱!}_{۱} + \underbrace{۲!}_{۲} + \underbrace{۳!}_{۶} + \underbrace{۴!}_{۴}}_{۱۳} + \underbrace{۵! + \cdots + ۵۰۰!}_{۰} \overset{۱۰}{\equiv} = ۱۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۳$$

یعنی رقم یکان عدد A برابر با ۳ است.

تکنیک: $\forall n \in \mathbb{N}; n \geq ۵ \Rightarrow n! \overset{۱۰}{\equiv} ۰$ (یعنی رقم یکان $n!$ برای nهای طبیعی بزرگ‌تر یا مساوی ۵، برابر صفر است).

مثال

اگر دو عدد $(۳a - ۵)$ و $(۴a - ۷)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(۹a + ۶)$ کدام است؟

پاسخ: دو عدد طبیعی که رقم یکان برابر دارند، یعنی باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر عدد ۱۰ یکسان است. به عبارت دیگر هر دو در تقسیم بر عدد ۱۰ هم باقی‌مانده و لذا هم‌نهشت‌اند. بنابراین طبق فرض داده شده، داریم:

$$۴a - ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۳a - ۵ \Rightarrow ۴a - ۳a \overset{۱۰}{\equiv} ۷ - ۵ \Rightarrow a \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\times ۹} ۹a \overset{۱۰}{\equiv} ۱۸ \overset{۱۰}{\equiv} ۸ \xrightarrow{+۶} ۹a + ۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۴$$

پس رقم یکان عدد $(۹a + ۶)$ برابر ۴ است.

معادله هم‌نهشتی

یک هم‌نهشتی به صورت $(a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N})\quad ax \overset{m}{\equiv} b$ با وجود مجهول (متغیر) x، **معادله هم‌نهشتی** نامیده می‌شود.

منظور از حل معادله هم‌نهشتی، پیدا کردن همه اعداد صحیحی است که به جای متغیر x در معادله صدق کند.

برای مثال: برای حل معادله هم‌نهشتی $x \overset{۵}{\equiv} ۳$، داریم:

$$x \overset{۵}{\equiv} ۳ \xrightarrow{\text{تعریف}} ۵ | x - ۳ \xrightarrow{r \in \mathbb{Z}} x - ۳ = ۵k \Rightarrow x = ۵k + ۳$$

بنابراین بی‌شمار عدد صحیح برای x وجود دارد. مثلاً به ازای $k = ۰$، $x = ۳$ و به ازای $k = ۱$، $x = ۸$ و به ازای $k = ۲$، $x = ۱۳$ و ... به دست می‌آید.

شرط وجود جواب یک معادله هم‌نهشتی

■ **قضیه:** معادله هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ جواب دارد اگر و تنها اگر $(a, m) | b$.

برای مثال: معادله هم‌نهشتی $۶x \overset{۹}{\equiv} ۲۰$ جواب ندارد، زیرا $\underbrace{(۶, ۹)}_{۳} \nmid ۲۰$ و معادله هم‌نهشتی $۴x \overset{۲}{\equiv} ۲۲$ جواب دارد. زیرا $\underbrace{(۴, ۲)}_{۲} | ۲۲$.

نتیجه: معادله هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ همواره جواب دارد اگر و تنها اگر $(a, m) = ۱$.

❖ حل معادله هم‌نهشتی (به کمک ویژگی‌های هم‌نهشتی)

ابتدا مضربی مناسب از پیمانه را به طرف معلوم معادله اضافه یا کم می‌کنیم تا بتوانیم دو طرف را بر ضریب مجهول تقسیم کنیم، سپس تعریف هم‌نهشتی را به کار می‌بریم.

برای مثال: برای حل معادله هم‌نهشتی $۲x \overset{۷}{\equiv} ۱$ داریم:

$$۲x \overset{۷}{\equiv} ۱+۷ \Rightarrow ۲x \overset{۷}{\equiv} ۸ \xrightarrow[(۷,۲)=۱]{\div ۲} x \overset{۷}{\equiv} ۴ \xrightarrow{\text{تعریف}} ۷|x-۴ \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} x-۴=۷k \Rightarrow x=۷k+۴$$

معادله سیاله

هر معادله‌ای که مجموعه جواب آن، از مجموعه اعداد صحیح در نظر گرفته شود، **معادله سیاله** نامیده می‌شود.

برای مثال: معادله سیاله $۴x+۳y=۸$، در مجموعه اعداد صحیح دارای یک جواب $(y=۰, x=۲)$ است. البته جواب‌های صحیح دیگری نیز دارد.

شرط وجود جواب یک معادله سیاله خطی

■ **قضیه:** معادله سیاله $ax+by=c$ جواب (صحیح) دارد، اگر و تنها اگر $(a,b)|c$.

برای مثال: معادله سیاله $۶x+۹y=۲۱$ جواب دارد، زیرا $\underbrace{(۶,۹)}_{۳}|۲۱$، معادله سیاله $۸x+۱۲y=۲۲$ جواب ندارد، زیرا $\underbrace{(۸,۱۲)}_{۴}\nmid ۲۲$.

❖ حل معادله سیاله خطی به کمک تبدیل به معادله هم‌نهشتی

هر معادله سیاله خطی دو متغیری را می‌توان به دو صورت به یک معادله هم‌نهشتی تبدیل کرد:

بنابراین به طور خلاصه می‌توان گفت:

$$ax+by=c \xrightarrow[(a,b,c\in\mathbb{Z}]{\text{تبدیل به هم‌نهشتی}} ax \overset{|b|}{\equiv} c \quad , \quad by \overset{|a|}{\equiv} c$$

برای مثال: برای حل معادله سیاله $۴x+۵y=۹$، به کمک تبدیل به معادله هم‌نهشتی داریم:

$$۴x+۵y=۹ \Rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۹ \Rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۹-۵ \Rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۴$$

$$\xrightarrow[(۵,۴)=۱]{\div ۴} x \overset{۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۵|x-۱ \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} x-۱=۵k \Rightarrow x=۵k+۱$$

اکنون با قرار دادن جواب به دست آمده برای x در معادله سیاله، داریم:

$$۴(۵k+۱)+۵y=۹ \Rightarrow ۲۰k+۴+۵y=۹ \Rightarrow ۲۰k+۵y=۵ \xrightarrow{\div ۵} ۴k+y=۱ \Rightarrow y=-۴k+۱$$

نتیجه: معادله سیاله خطی دو متغیری، جواب ندارد یا بی شمار جواب دارد.

مثال

مثال: به چند طریق می‌توان مبلغ ۱۷۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی و ۵۰۰۰ تومانی خرد کرد؟

پاسخ: اگر x را تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی و y را تعداد اسکناس‌های ۵۰۰۰ تومانی در نظر بگیریم، آنگاه معادله سیاله خطی $2000x+5000y=17000$ به دست می‌آید، اما چون x و y تعداد اسکناس‌ها را نشان می‌دهند، لذا اعداد صحیح و نامنفی (حسابی)اند.

پس باید تعداد جواب‌های حسابی این معادله سیاله رابیابیم. پس از ساده کردن این معادله سیاله به عدد ۱۰۰۰، داریم:

$$2x+5y=17 \xrightarrow{\text{تبدیل به معادله همنهشتی}} 2x \overset{5}{\equiv} 17 \overset{5}{\equiv} 2 \xrightarrow[(5,2)=1]{\div 2} x \overset{5}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} x=5k+1 \xrightarrow{\text{در معادله سیاله}} 2(5k+1)+5y=17$$

$$\Rightarrow 10k+2+5y=17 \Rightarrow 10k+5y=15 \xrightarrow{\div 5} 2k+y=3 \rightarrow y=-2k+3$$

$$k=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$$ (یک اسکناس ۲۰۰۰ تومانی و ۳ اسکناس ۵۰۰۰ تومانی)

$$k=1 \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$$ (۶اسکناس ۲۰۰۰ تومانی و یک اسکناس ۵۰۰۰ تومانی)

سوالات نهایی

ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۱۰۲	معادله $2x+1 \overset{13}{\equiv} 9x-1$ را حل کنید و تعداد جواب‌های دو رقمی طبیعی آنرا به دست آورید.	۱/۵	شهریور ۱۴۰۳
۱۰۳	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. تفاضل هر دو عدد دلخواه از مجموعه $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid x=4k+3\}$، مضرب ۴ است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۱۰۴	جواب‌های عمومی معادله سیاله $5x+9y=22$ را بدست آورید.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۳
۱۰۵	در هر یک از سوالات زیر، گزینه مناسب را انتخاب کنید. الف) عدد ۱۴۰۲ به کدام دسته همنهشتی به پیمانه ۷ تعلق دارد؟ ۱) $[5]$ ۲) $[2]$ ۳) $[0]$ ۴) $[1]$ ب) باقی‌مانده تقسیم عدد $(7^{100}-2^{100}-9^{100})$ بر ۱۴ کدام است؟ ۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۸ پ) کدام یک از معادلات همنهشتی زیر در مجموعه اعداد صحیح جواب ندارد؟ ۱) $6x \overset{9}{\equiv} 11$ ۲) $2x \overset{5}{\equiv} 3$ ۳) $5x \overset{7}{\equiv} 10$ ۴) $3x \overset{7}{\equiv} 10$	۰/۷۵	دی ۱۴۰۲

۱۰۶	رقم یکان عدد $A = ۲! + ۴! + ۶! + \cdots + ۱۰۰!$ را به دست آورید.	۱/۵	دی ۱۴۰۲
۱۰۷	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید. معادله همنهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a, m) \mid b$.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۲
۱۰۸	باقی مانده تقسیم عدد $A = ۶۳^{۱۴} + ۱$ را بر ۱۶ به دست آورید.	۱	شهریور ۱۴۰۲
۱۰۹	معادله همنهشتی $۱۴۰۲x \overset{۹}{\equiv} ۱۱$ را حل کنید.	۱/۵	شهریور ۱۴۰۲
۱۱۰	در معادله سیاله $۱۵x + ۱۹y = ۷$، بزرگترین عدد ۲ رقمی طبیعی که می‌توان برای x در نظر گرفت چه مقداری می‌باشد؟ (با راه حل)	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۲
۱۱۱	باقیمانده تقسیم عدد $۱! + ۲! + ۳! + ۴! + ۵! + \cdots + ۲۰۰!$ را بر ۱۵ بدست آورید. (! نماد فاکتوریل می‌باشد)	۱/۵	دی ۱۴۰۱
۱۱۲	معادله همنهشتی $۴x \overset{۶}{\equiv} ۱۰$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه جواب آن را بدست آورید.	۱	دی ۱۴۰۱
۱۱۳	ثابت کنید باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۹، برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹.	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۱
۱۱۴	دانش آموزی در یک آزمون علمی شرکت کرده است او به سوالات ۵ امتیازی و ۳ امتیازی پاسخ داده و مجموعا ۴۲ امتیاز کسب کرده است (پاسخ به هر سوال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد.) این دانش آموز به چه صورتهایی توانسته این امتیاز را کسب کند؟	۱/۷۵	شهریور ۱۴۰۱
۱۱۵	پاسخ صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. معادله همنهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر ($(a, b) \mid m$ – $(a, m) \mid b$)	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۱ خ
۱۱۶	بدون انجام عمل تقسیم، باقیمانده تقسیم عدد $A = ۱۳۵۸۱۱۲$ را بر ۹ تعیین کنید.	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۱ خ

درس ۳

همنهشتی

۱۱۷	اگر در یک سال اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۷ اسفند ماه در همان سال چه روزی است؟	۱	خرداد ۱۴۰۱ خ
۱۱۸	همه اعداد صحیح مانند a را بیابید که ۵ برابر آنها به علاوه ۹ بر ۱۱ بخشپذیر باشند.	۱	خرداد ۱۴۰۱ خ
۱۱۹	درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. برای هر دو عدد صحیح a و b و عدد طبیعی m، اگر باقیمانده تقسیم a بر m مساوی با r باشد، در اینصورت $a\overset{m}{\equiv}r$.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۱
۱۲۰	باقیمانده تقسیم عدد $A = ۲۷^{۲۰} + ۱۸$ را بر ۱۳ بیابید.	۱	خرداد ۱۴۰۱
۱۲۱	اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۱
۱۲۲	عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید. اگر $ac\overset{m}{\equiv}bc$ و $(c,m)=d$ آن گاه رابطه $(a\overset{m}{\equiv}b, a\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}b)$ برقرار خواهد بود.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۰
۱۲۳	معادله سیاله $۶x+۷y=۱۸۵$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۱/۷۵	دی ۱۴۰۰
۱۲۴	درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. الف: اگر $a\overset{m}{\equiv}b$، آنگاه باقی مانده تقسیم دو عدد b و a بر m مساوی‌اند. ب: منظور از حل معادله هم نهشتی، پیدا کردن همه جواب‌های حقیقی است که در معادله $ax\overset{m}{\equiv}b$ صدق کنند.	۰/۵	شهریور ۱۴۰۰
۱۲۵	اگر دوعدد $(۳a-۵)$ و $(۴a-۷)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(۹a+۶)$ را به دست آورید.	۱	شهریور ۱۴۰۰
۱۲۶	معادله سیاله $۵x+۲y=۱۸$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۱/۵	شهریور ۱۴۰۰
۱۲۷	باقیمانده تقسیم عدد $A=(۱۰۰۰)^{۲۵}\times ۹+۱۱$ را بر ۷ بیابید.	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۰

۱۲۸	معادله $۷x \overset{۴}{\equiv} ۱$ را حل کنید.	۱	خرداد ۱۴۰۰
۱۲۹	باقیمانده تقسیم $(۳۸^{۳۶}+۱۹)$ را بر ۴ به دست آورید.	۱/۲۵	دی ۹۹
۱۳۰	معادله همنهشتی $۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.	۱	دی ۹۹
۱۳۱	باقی‌مانده تقسیم $۷^{۳۰}$ بر ۱۵ را بدست آورید.	۱/۵	خرداد ۹۹
۱۳۲	معادله همنهشتی $۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۲$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۱/۲۵	خرداد ۹۹
۱۳۳	معادله سیاله $۴x+۳y=۱۹$ را در نظر بگیرید. الف: نشان دهید معادله سیاله فوق دارای جواب است. ب: جواب عمومی معادله سیاله داده شده را بیابید.	۱/۷۵	خرداد ۹۹ خ
۱۳۴	رقم یکان عدد $۲^{۱۱}+۷$ را بدست آورید.	۱/۲۵	شهریور ۹۹
۱۳۵	معادله سیاله $۲x+۵y=۱۹$ را حل کنید.	۱	شهریور ۹۹
۱۳۶	فرض کنیم $m\in N$، $a,\ b\in Z$ اگر $a\overset{m}{\equiv} b$ و $n\in N$ ثابت کنید: $a^n \overset{m}{\equiv} b^n$	۱	شهریور ۹۹
۱۳۷	اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد. در این صورت با استفاده از همنهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟	۱	خرداد ۹۸
۱۳۸	با تبدیل معادله سیاله ی خطی $۵x+۲y=۱۸$ به معادله ی هم نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.	۱/۵	خرداد ۹۸
۱۳۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. الف: اگر $a\overset{m}{\equiv} b$ و $n\|m$ آنگاه $a\overset{n}{\equiv} b$ ب: باقیمانده تقسیم عدد $A=۴۹۸۵۳۲۷$ بر عدد ۱۱ برابر ۶ است.	۰/۵	خرداد ۹۸ خ

۱۴۰	درجای خالی کلمه ی مناسب قرار دهید. اگر ۱۲ بهمن جمعه باشد، ۳۱ مرداد همان سال .... است.	۰/۲۵	خرداد ۹۸ خ
۱۴۱	جوابهای عمومی معادله سیاله ی خطی $۷x+۵y=۱۱$ را حل کنید.	۱	خرداد ۹۸ خ
۱۴۲	جواب عمومی معادله $۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۷$ را بدست آورید.	۱	تیر ۹۸
۱۴۳	باقیمانده تقسیم $۲۷^{۷}+۱۹$ را بر ۱۳ بیابید.	۱/۵	شهریور ۹۸
۱۴۴	با تبدیل معادله سیاله خطی $۲۰۰۰x+۵۰۰۰y=۲۹۰۰۰$ به معادله ی هم نهشتی و حل آن، جواب عمومی این معادله را بیابید.	۱/۵	شهریور ۹۸
۱۴۵	باقیمانده تقسیم $۱۳^{۲۲}$ را بر ۱۷ به دست آورید.	۱	دی ۹۸
۱۴۶	ثابت کنید می‌توان دو طرف یک رابطه همنهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد. به عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح a,b,c عدد طبیعی m، آنگاه $ac \overset{m}{\equiv} bc$	۱	دی ۹۸
۱۴۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. معادله همنهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است، اگر و تنها اگر $(a,b)\|m$	۰/۲۵	دی ۹۸
۱۴۸	جواب‌های عمومی معادله ی سیاله ی خطی $۹x+۱۳y=۷$ را بدست آورید.	۱/۵	دی ۹۸
۱۴۹	پاسخ سوال زیر را بدست آورید. دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید. باقیمانده تقسیم عدد $A=۱۰۰۰^{۱۳}\times ۱۲+۱۰$ بر ۷ را بدست آورید.	۱	دی ۹۷
۱۵۰	معادله همنهشتی $۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بدست آورید.	۱	دی ۹۷

یادداشت ضروری دانش آموز: ....

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

ریاضیات گسسته

درس ۱ — استدلال ریاضی

۱- گزینه ۲ (۰/۲۵) صفحه ۷

۲- راه‌حل اول: صفحه ۷

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \Leftrightarrow \underbrace{a+b \ge 2\sqrt{ab}}_{(0/25)} \Leftrightarrow \underbrace{a^2+b^2+2ab \ge 4ab}_{(0/25)}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{a^2+b^2-2ab \ge 0}_{(0/25)} \Leftrightarrow \underbrace{(a-b)^2 \ge 0}_{(0/25)}$$

رابطه اخیر همواره برقرار است. (۰/۲۵) (درصورت نوشتن رابطه‌های بالا بصورت یک طرفه و ذکر برگشت‌پذیر بودن رابطه‌ها نمره کامل تعلق گیرد.)

راه‌حل دوم:

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \Leftrightarrow \underbrace{a+b \ge 2\sqrt{ab}}_{(0/25)}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{a+b-2\sqrt{ab} \ge 0}_{(0/25)} \Leftrightarrow \underbrace{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0}_{(0/5)}$$

رابطه اخیر همواره برقرار است. (۰/۲۵) (درصورت نوشتن رابطه‌های بالا بصورت یک طرفه و ذکر برگشت‌پذیر بودن رابطه‌ها نمره کامل تعلق گیرد.)

۳- نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۸)

۴-

$$a^2+b^2 \ge ab+a-b-1 \quad (0/25)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2-2ab-2a+2b+2 \ge 0 \quad (0/25)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-1)^2+(b+1)^2 \ge 0 \quad (0/75)$$

(صفحه ۸)

این رابطه همواره برقرار است. (۰/۲۵) (درصورت اثبات یک طرفه رابطه‌ها و ذکر برگشت پذیر بودن آنها نمره کامل تعلق گیرد.)

۵- الف) درست (۰/۲۵)

$$\underbrace{2k \times (2k+2)+1}_{(0/25)} = \underbrace{4k^2+4k+1 = (2k+1)^2}_{(0/25)}$$

(مشابه قسمت ج کار در کلاس صفحه ۳)

ب) نادرست (۰/۲۵)

با در نظر گرفتن صفر به عنوان عدد گویا (۰/۲۵) و انتخاب هر عدد گنگی، حاصل‌ضرب صفر است که گویا می شود. (۰/۲۵)

(مشابه مثال آخر صفحه ۵)

۶- مثال ۳ صفحه ۷

$$\underbrace{a^2+b^2 \ge -ab}_{(0/25)} \leftrightarrow \underbrace{a^2+b^2+ab \ge 0}_{(0/25)}$$

$$\leftrightarrow \underbrace{2a^2+2b^2+2ab \ge 0}_{(0/25)}$$

$$\leftrightarrow \underbrace{a^2+b^2+(a^2+b^2+2ab) \ge 0}_{(0/25)}$$

$$\leftrightarrow \underbrace{a^2+b^2+(a+b)^2 \ge 0 \text{ همواره برقرار}}_{(0/25)}$$

۷- نادرست (۰/۲۵) (ص ۵)

۸-

$$2x^2+2xy+y^2 \ge 4x-4$$

$$\leftrightarrow \underbrace{x^2+2xy+y^2}_{(0/25)} + \underbrace{x^2-4x+4}_{(0/25)} \ge 0 \Rightarrow \underbrace{(x+y)^2}_{(0/25)} + \underbrace{(x-2)^2}_{(0/25)} \ge 0$$

این رابطه‌همواره برقرار است (۰/۲۵)

۹- درست

۱۰-

$$x^2+y^2+1 \ge 2xy-z^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy+z^2+1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+z^2+1 \ge 0 \quad \text{همواره بدیهی است}$$

۱۱- الف) درست ب) نادرست

۱۲-

$$y^2+1 \ge -2x(y+x+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy+x^2+2x+1 \ge 0 \Rightarrow\Longleftarrow (x+1)^2+(x+y)^2 \ge 0$$

$\Rightarrow$ این رابطه بازگشتی همواره بدیهی است

۱۳- الف: نادرست، مثال نقض $n=3$ (مشابه کار درکلاس صفحه ۳)

ب: درست، اثبات

$$a=2k+1 \Rightarrow a^2=(2k+1)^2=2\underbrace{\left(2k^2+2k\right)}_{k'}+1=2k'+1$$

۱۴- اگر $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است.

پس هر سه عامل (a_3-b_3) و (a_2-b_2) و (a_1-b_1) هم باید فرد باشند.

در نتیجه مجموع آنها هم باید فرد باشد.

اما با توجه به فرض مسئله: مجموع این سه عبارت برابر صفر است که عددی زوج است،

با توجه با تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۱۵- الف: نادرست

ب: درست

پ: درست

ت: درست

۱۶-

$$n = 2k - 1$$

$$\Rightarrow (2k-1)^2 - 5(2k-1) + 7$$

$$= 4k^2 - 4k + 1 - 10k + 5 + 7 = 4k^2 - 14k + 13$$

$$= 2\underbrace{\left(2k^2 - 7k + 6\right)}_{k'} + 1 = 2k' + 1$$

۱۷- (مثال صفحه ۴)

$$n = 2k \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1$$

$$= 2\underbrace{\left(2k^2 - 5k + 3\right)}_{q} + 1 = 2q + 1$$

۱۸- گنگ

۱۹- فرض خلف: $\alpha - \beta$ گویاست.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha - \beta = m \in Q \\ \alpha + \beta = n \in Q\end{array}\right\} \Rightarrow 2\alpha = m + n$$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{m+n}{2} \Rightarrow \alpha \in Q$ تناقض با فرض

۲۰- فرض کنید r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد، نشان می‌دهیم $x + r$ یک عدد گنگ است. فرض کنید که $x + r$ گنگ نباشد (فرض خلف). بنابراین عددی گویا است.از طرفی می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، گویاست. پس تفاضل $x + r$ و r باید عددی گویا باشد. یعنی $(r + x - r) \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض ما در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌گردد.

۲۱- نادرست

۲۲-

$$xy \le \frac{x^2 + y^2}{2} \Leftrightarrow 2xy \le x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \ge 0$$

$\Leftrightarrow (x - y)^2 \ge 0$ گزاره همواره درست

۲۳- نادرست

۲۴- فرض خلف: $\alpha - \beta$ گویاست.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha - \beta = m \in Q \\ \alpha + \beta = n \in Q\end{array}\right\} \Rightarrow 2\alpha = m + n \Rightarrow \alpha = \frac{m+n}{2}$$

$\Rightarrow \alpha \in Q$ تناقض با فرض

۲۵- الف: نادرست $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2} \in Q^c \quad , \quad \sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) = 0 \notin Q^c$

ب: درست

$$(2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4\underbrace{k(k+1)}_{2q} = 4 \times 2q = 8q$$

۲۶-

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \ge 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \ge 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \ge 2xy \Leftrightarrow (x - y)^2 \ge 0$$

چون رابطه آخر همواره درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مساله درست است.

۲۷- فرض خلف: فرض کنید $\frac{1}{x}$ گنگ نباشد پس گویاست و

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{b} \quad , \quad a, b \in Z \quad , \quad a, b \ne 0$$

با معکوس کردن این تساوی داریم:

$x = \frac{b}{a}$، پس x هم گویاست که این با فرض گنگ بودن x در تناقض است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۲۸- الف: نادرست ب: درست پ: نادرست ت: نادرست

۲۹-

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \ge 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \ge 0$$

نابرابری آخر برای a, b نامنفی همیشه درست است. اثبات بازگشتی و حکم برقرار است.

۳۰- اگر دو عدد نامنفی باشند، حکم چنین خواهد بود $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \ge 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \ge 0$$

چون تمام مراحل اثبات، بازگشت پذیر هستند لذا حکم درست است.

۳۱-

$$2x^2 + 2y^2 + 2 \ge 2xy + 2x + 2y$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(y^2 - 2y + 1\right) + \left(x^2 - 2xy + y^2\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \ge 0$$

نامساوی بدست آمده همیشه درست است. چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، پس حکم مسئله درست است.

۳۲- با توجه به فرد بودن عدد ab نتیجه می‌گیریم هر دو عدد a , b فرد هستند، لذا با فرض صحیح بودن اعداد m و n می‌توان در نظر گرفت $b=2m-1$ و $a=2n-1$

بنابراین:

$$a^2+b^2=(2n-1)^2+(2m-1)^2=4n^2-4n+1+4m^2-4m+1$$

$$=2\underbrace{\left(2n^2-2n+2m^2-2m+1\right)}_{k}=2k \qquad (k\in Z)$$

پس a^2+b^2 یک عدد زوج است.

۳۳- فرض کنید r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد، نشان می‌دهیم $x+r$ یک عدد گنگ است. فرض کنید که $x+r$ گنگ نباشد(فرض خلف). بنابراین عددی گویا است.از طرفی می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، گویاست. پس تفاضل $x+r$ و r باید عددی گویا باشد. یعنی $(r+x-r)\in Q$ و از آنجا $x\in Q$ که با فرض ما در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌گردد.

۳۴-

$$a+\frac{1}{a}\geq 2\Leftrightarrow\ a^2+1\geq 2a$$

$$\Leftrightarrow\ a^2-2a+1\geq 0\Leftrightarrow (a-1)^2\geq 0$$

چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسئله درست است.

۳۵- الف: درست　　ب: نادرست

۳۶- ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz$$

$$\overset{\times 2}{\Longleftrightarrow} 2x^2+2y^2+2z^2\geq 2xy+2yz+2xz\Leftrightarrow$$

$$\left(x^2-2xy+y^2\right)+\left(y^2-2yz+z^2\right)+\left(x^2-2xz+z^2\right)\geq 0\Leftrightarrow$$

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\geq 0$$ همیشه درست

چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسئله درست است.

۳۷- درست

۳۸- اگر $\alpha+2\beta$ گنگ نباشد(فرض خلف) پس عددی گویا است. از طرفی طبق فرض $\alpha+\beta$ نیز عددی گویا است. می دانیم که تفاضل دو عدد گویا، گویا است. در نتیجه:

$$(\alpha+2\beta)-(\alpha+\beta)=\beta\in Q$$

اما با توجه به فرض مسئله β گنگ است. با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۳۹- ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$x^2+y^2+1\geq xy+x+y\overset{\times 2}{\Longleftrightarrow} 2x^2+2y^2+2\geq 2xy+2x+2y$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-2xy+y^2\right)+\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2-2y+1\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\geq 0$$

همیشه درست

چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسئله درست است.

یادداشت ضروری دانش‌آموز: ....

درس ۲
بخش‌پذیری در اعداد صحیح

۴۰- ۱ (۰/۲۵) صفحه ۱۴

۴۱- نادرست (۰/۲۵) صفحه ۱۳

۴۲-

$$a|b \xrightarrow{\exists q\in\mathbb{Z}} b=aq \quad (۰/۲۵)$$
$$a|c \xrightarrow{\exists q'\in\mathbb{Z}} c=aq' \quad (۰/۲۵)$$
$$\xrightarrow{\pm} \underbrace{b\pm c = aq\pm aq' = a(q\pm q')}_{(۰/۵)} \to \underbrace{a|b\pm c}_{(۰/۲۵)}$$

۴۳- راه اول: ab فرد است لذا هر دو عدد a,b فرد می‌باشند.

$$\underbrace{\begin{matrix}a=۲k+۱\\ b=۲k'+۱\end{matrix}}_{(۰/۲۵)} \to a^۲+b^۲-۵=\underbrace{۴k^۲+۴k+۱+۴k'^۲+۴k'+۱-۵}_{(۰/۵)}$$
$$=\underbrace{\underbrace{۴k(k+۱)}_{۸q}+\underbrace{۴k'(k'+۱)}_{۸q'}}_{(۰/۵)}-۳$$
$$=۸q''-۳=\underbrace{۸q''-۳+۸-۸}_{۸(q''-۱)+۵}=۸t+۵\to r=۵ \quad (۰/۲۵)$$

راه دوم: ab فرد است لذا هر دو عدد a,b فرد می‌باشند.

$$\underbrace{\begin{matrix}a=۲k+۱\\ b=۲k'+۱\end{matrix}}_{(۰/۲۵)} \to \begin{matrix} a^۲ \overset{۸}{\equiv} ۱ & (۰/۲۵)\\ b^۲\overset{۸}{\equiv}۱ & (۰/۲۵)\end{matrix} \to \underbrace{a^۲+b^۲\overset{۸}{\equiv}۲}_{(۰/۲۵)}$$
$$\to \underbrace{a^۲+b^۲-۵\overset{۸}{\equiv}-۳}_{(۰/۲۵)}\overset{۸}{\equiv}۵\to r=۵ \quad (۰/۲۵)$$

۴۴- کافی است p را بر عدد ۴ تقسیم کنیم. در این صورت طبق قضیه تقسیم خواهیم داشت:

$$p=۴k, p=۴k+۱, p=۴k+۲, p=۴k+۳ \quad (۰/۲۵)$$

p در حالت‌های $p=۴k$، $p=۴k+۲$ عددی زوج است. (۰/۲۵) لذا با اول بودن آن تناقض دارد. فقط حالت‌های $p=۴k+۱$ و $p=۴k+۳$ باقی می‌ماند و حکم اثبات می‌شود. (۰/۲۵)

۴۵- نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۱۷)

۴۶-

$$a|۷k+۱\Rightarrow a|۲۸k+۴ \quad (۰/۲۵)$$
$$a|۴k+۳\Rightarrow a|۲۸k+۲۱ \quad (۰/۲۵)$$
$$\underbrace{a|۱۷\quad (a|-۱۷)}_{۰/۲۵} \xrightarrow{a\in N} a=۱ \text{ یا } a=۱۷ \quad (۰/۲۵)$$

(صفحه ۱۲)

۴۷- روش اول:

$$\begin{matrix}a=۴q_۱+۲\\a=۵q_۲+۳\end{matrix} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \begin{matrix}۵a=۲۰q_۱+۱۰ & (۰/۲۵)\\ ۴a=۲۰q_۲+۱۲ & (۰/۲۵)\end{matrix}$$
$$\Rightarrow \underbrace{a=۲۰(q_۱-q_۲)-۲}_{(۰/۲۵)}$$
$$a=۲۰q_۳+۱۸\Rightarrow r=۱۸ \text{ یا } r=-۲+۲۰=۱۸ \quad (۰/۲۵)$$

روش دوم:

$$\begin{matrix}a\overset{۴}{\equiv}۲\overset{۴}{\equiv}۱۸\\ a\overset{۵}{\equiv}۳\overset{۵}{\equiv}۱۸\end{matrix} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \underbrace{a=۴k+۱۸}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow \underbrace{۴k+۱۸\overset{۵}{\equiv}۱۸}_{(۰/۲۵)}$$
$$\Rightarrow \underbrace{k=۵t}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow a=۲۰t+۱۸\Rightarrow r=۱۸ \quad (۰/۲۵)$$

ص ۱۶

۴۸- الف) ۴ (۰/۲۵) (مثال صفحه ۱۴)

ب) b (۰/۲۵) (قسمت الف کار در کلاس صفحه ۱۳)

۴۹-

$$\underbrace{a|b\to b=aq, q\in Z}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow \underbrace{|b|=|a||q|}_{(۰/۲۵)}$$
$$\underbrace{q\in Z, q\neq ۰\Rightarrow |q|\geq ۱}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow\underbrace{|a||q|\geq|a|}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow\underbrace{|b|\geq|a|}_{(۰/۲۵)}$$

(ویژگی ۴ صفحه ۱۱)

۵۰- الف) نادرست (۰/۲۵) (ص ۱۱)

ب) درست (۰/۲۵) (ص ۱۳)

۵۱-

$$\underbrace{b=۲k}_{(۰/۲۵)}, \underbrace{b|a+۲\Rightarrow a+۲=bq}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow\underbrace{a=۲t}_{(۰/۲۵)}$$

که با فرض سوال در تناقض است. (۰/۲۵) (ص ۱۶)

۵۲-

$$۷|۲k+۱\Rightarrow\begin{cases}\underbrace{۴۹|۴k^۲+۴k+۱}_{(۰/۵)}\\ \underbrace{۴۹|۱۴k+۷}_{(۰/۵)}\end{cases}\Rightarrow\underbrace{۴۹|۴k^۲-۱۰k-۶}_{(۰/۲۵)}$$

۵۳- درست

۵۴-

$$\begin{cases} a\mid 2m+3 \\ a\mid m+7\end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} a\mid 2m+3 \\ a\mid 2m+14\end{cases}$$

$$\to a\mid 11 \to a=1,\ a=11$$

این سوال اشکال علمی دارد.

$$11\mid 2m+3 \xrightarrow{m=5} 11\nmid 13$$

یعنی $a=11$ به‌ازای تمام mها قابل قبول نیست.

$$a=11 \Rightarrow \begin{cases} 2m \overset{11}{\equiv} -3 \Rightarrow 12m \overset{11}{\equiv} -18 \overset{11}{\equiv} 4 \\ m \overset{11}{\equiv} -7 \Rightarrow m \overset{11}{\equiv} 4\end{cases} \Rightarrow m \overset{11}{\equiv} 4 \Rightarrow m \overset{11}{=} k+4$$

البته اگر بین یک و ۱۱ یا گفته بود ترکیب فعلی می‌شود ولی درکل در این سوال باید در مورد m بحث کرد.

۵۵-

$$\begin{cases} a=5q_1+4 \xrightarrow{\times 4} 4a=20q_1+16 \\ a=4q_2+3 \xrightarrow{\times 5} 5a=20q_2+15\end{cases}$$

$$\xrightarrow{-} a=20q-1 \to a=20q''+19$$

۵۶- نادرست

۵۷-

$$\left.\begin{matrix} a\mid 6(5m+4) \\ a\mid 5(6m+5)\end{matrix}\right\} \Rightarrow a\mid 5(6m+5)-6(5m+4)$$

$$\Rightarrow a\mid 1 \Rightarrow a=\pm 1$$

۵۸- می‌دانیم مربع هر عدد فرد، به صورت $8k+1$ $(k\in\mathbb{Z})$ میباشد پس داریم:

$$\begin{cases} a^2=8k+1 \\ b^2=8k'+1\end{cases} \Rightarrow$$

$$a^2+b^2+5=8k+1+8k'+1+5$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+5=8k''+7 \Rightarrow r=7$$

۵۹- الف) m^2 ب) نسبت به هم اول

۶۰-

$$\begin{matrix} a\mid 5k+9 \\ a\mid 8k+13\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a\mid 40k+72 \\ a\mid 40k+65\end{matrix} \Rightarrow$$

$$a\mid 7 \Rightarrow a=1 \vee a=7$$

۶۱-

$$\begin{cases} a=6q_1+3 \\ a=7q_2+5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a=42q_1+21 \\ 6a=42q_2+30\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=42(q_1-q_2-1)+33 \Rightarrow r=33$$

۶۲- الف: $\mp b$

ب: $m\le d$

پ: $x\in[3]_4$

۶۳-

$$\left.\begin{matrix} a\mid 9k+4 \xrightarrow{\times 5} a\mid 45k+20 \\ a\mid 5k+3 \xrightarrow{\times 9} a\mid 45k+27\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow a\mid (45k+20)-(45k+27) \Rightarrow a\mid 20-27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\mid -7 \xrightarrow{a>1} a=7$$

۶۴- الف) نادرست

ب) درست

ت) نادرست

۶۵-

$$\left.\begin{matrix} 5\mid 4k+1 \Rightarrow 25\mid 16k^2+8k+1 \\ 5\mid 4k+1 \Rightarrow 25\mid 20k+5\end{matrix}\right\} \overset{+}{\Longrightarrow} 25\mid 16k^2+28k+6$$

۶۶- الف: $a\mid mb$ ب: $|a|$

۶۷-

$$a=2k+1 \Rightarrow a^2=4k^2+4k+1$$

$$=4\underbrace{k(k+1)}_{2q}+1=4\times 2q+1=8q+1 \Rightarrow r=1$$

۶۸-

$$a=bq+r \quad , \quad 0\le r<b$$

$$\Rightarrow a-bq=r \Rightarrow \begin{cases} n\mid a \\ n\mid b\end{cases} \Rightarrow n\mid a-bq \Rightarrow n\mid r$$

۶۹- الف: درست ب: نادرست

۷۰-

$$a\mid 9(5k+3)-5(9k+4) \Rightarrow a\mid 27-20$$

$$\Rightarrow a\mid 7 \overset{a>1}{\Longrightarrow} a=7\in P$$

۷۱- طبق الگوریتم تقسیم داریم:

$a=3k$ که بر ۳ بخش‌پذیر است. یا

$a=3k+1 \Rightarrow a+2=3(k+1)$ که بر ۳ بخش‌پذیر است. یا

$a=3k+2 \Rightarrow a+4=3(k+2)$ که بر ۳ بخش‌پذیر است.

۷۲- درست

۷۳- الف: عدد a شمارنده عدد b است. ب: $2m$

-۷۴

عددی زوج است $1: p = 4k$

$2: p = 4k+1$

عددی زوج است $3: p = 4k+2 = 2(2k+1)$

$4: p = 4k+3$

درحالت ۱ و ۳، p عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم ۲ یا ۴ خواهند بود

-۷۵ درست

-۷۶

$$\left.\begin{array}{l} a = 17q+5 \xrightarrow{\times 2} 2a = 17\times 2q + 10 \\ b = 17q'+3 \xrightarrow{\times(-5)} -5b = -17\times 5q' - 15 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow 2a-5b = 17\times 2q + 10 - 17\times 5q' - 15$$

$$= 17\underbrace{(2q-5q'-1)}_{k} + 12 = 17k+12 \Rightarrow r = 12$$

-۷۷

$$(5a+4, 2a+3) = d \Rightarrow \begin{array}{l} d \mid 2a+3 \\ d \mid 5a+4 \end{array}$$

$$\Rightarrow d \mid -2(5a+4)+5(2a+3) \Rightarrow d \mid 7 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } d = 7$$

-۷۸

$$a = 4q+3$$

$$\Rightarrow 2a+3 = 8q+9 = 8(q+1)+1 = 8q'+1 \Rightarrow r = 1$$

-۷۹

$$\left.\begin{array}{l} n \mid 9k+7 \\ n \mid 7k+6 \end{array}\right\} \Rightarrow n \mid -63k-49+63k+54$$

$$\Rightarrow n \mid 5 \xrightarrow{n\in N} n = 1 \text{ یا } n = 5$$

-۸۰ الف: نسبت به هم اول   ب: $|b|$

-۸۱

$$\begin{array}{l} a \mid 5m-2 \\ a \mid 3m+1 \end{array} \Rightarrow a \mid -3(5m-2)+5(3m+1)$$

$$\Rightarrow a \mid -15m+6+15m+5 \Rightarrow a \mid 11 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } a = 11$$

-۸۲

$$a \overset{31}{\equiv} 19 \Rightarrow 2a \overset{31}{\equiv} 38 \overset{31}{\equiv} 7 \Rightarrow 2a-1 \overset{31}{\equiv} 6$$ باقیمانده

-۸۳

$$d = (4k, 16k^2-1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d \mid 4k \Rightarrow d \mid 16k^2 \\ d \mid 16k^2-1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow d \mid 16k^2 - (16k^2-1) \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1$$

-۸۴

$$\begin{array}{l} a \mid 3n+4 \\ a \mid 2n+3 \end{array} \Rightarrow a \mid -2(3n+4)+3(2n+3) \Rightarrow a \mid 1$$

$$\Rightarrow a = \pm 1 \xrightarrow{a\in N} a = 1$$

-۸۵ هرگاه p را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

۱) $p = 6k$

۲) $p = 6k+1$

۳) $p = 6k+2 = 2(3k+1)$

۴) $p = 6k+3 = 3(2k+1)$

۵) $p = 6k+4 = 2(k+2)$

۶) $p = 6k+5$

p در حالت‌های ۱ و ۳ و ۵ زوج و در حالت ۴، بر ۳ بخش‌پذیر است که با اول بودن p تناقض دارد. بنابراین فقط در حالات ۲ یا ۶، p می‌تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می‌شود.

-۸۶

$$\begin{array}{ll} m = 17q+5 & (q\in Z) \\ n = 17q'+3 & (q\in Z) \end{array} \Rightarrow (2m-5n) = 17(2q-5q') - 5$$

$$\Rightarrow (2m-5n) = 17(2q-5q'-1) + 12 \Rightarrow r = 12$$

-۸۷

$$\left\{\begin{array}{l} m = 13q_1+2 \\ n = 13q_2+9 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3m = 13(3q_1)+6 \\ 5n = 13(5q_2)+45 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow 5n-3m = 13q'+39 \Rightarrow 5n-3m = 13q'+3(13)$$

$$\Rightarrow 5n-3m = 13q''+0 \Rightarrow r = 0$$

-۸۸ نادرست

-۸۹ گزینه د، یعنی m^2 درست است.

-۹۰ باقیمانده ۸، خارج قسمت ۹- است.

-۹۱

$$\left.\begin{array}{ll} 5 \mid 4k+1 \Rightarrow 5^2 \mid (4k+1)^2 & \Rightarrow 25 \mid 16k^2+8k+1 \\ 5 \mid 4k+1 & \Rightarrow 25 \mid 20k+5 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow 25 \mid (16k^2+8k+1)+(20k+5) \Rightarrow 25 \mid 16k^2+28k+6$$

-۹۲ ۱۲

-۹۳ نادرست

-۹۴

$\forall m>0,\quad a|m,\quad b|m \Rightarrow c\le m$

-۹۵

$$\begin{cases} a=5q_1+2 \\ a=6q_2+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a=30q_1+12 \\ 5a=30q_2+15 \end{cases} \Rightarrow$$

$a=30q-3 \Rightarrow a=30q+27$

-۹۶

$$\begin{matrix} a|4k+9 \\ a|6k+14 \end{matrix} \Rightarrow a|-6(4k+9)+4(6k+14) \Rightarrow a|2 \xrightarrow{a>1} a=2$$

-۹۷ نادرست

-۹۸

$A=21a^2=3\times 7\times a^2$

$B=35a^3=5\times 7\times a^3 \Rightarrow [A,B]=105a^3$

-۹۹

$$\begin{matrix} a|9k+4 \\ a|5k+3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a|5(9k+4) \\ a|9(5k+3) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a|45k+20 \\ a|45k+27 \end{matrix}$$

$\Rightarrow a|-(45k+20)+(45k+27) \Rightarrow a|7 \xrightarrow{a>1} a=7$

-۱۰۰ درست

-۱۰۱ عدد a عددی فردی است. بنابراین $a+2$ عددی فرد است و $b|a+2$. بنابراین b نیز عددی فرد خواهد بود. می‌دانیم که مربع هر عدد فرد، مضربی از ۸ بعلاوه یک است.پس:

$a^2+b^2+3=(8m+1)+(8n+1)+3=8(m+n)+5 \Rightarrow r=5$

یادداشت ضروری دانش‌آموز:

درس ۳

هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

۱۰۲- صفحه ۲۵

$$9x-1 \overset{13}{\equiv} 2x+1 \to \underbrace{7x \overset{13}{\equiv} 2}_{(0/25)} \to 7x \overset{13}{\equiv} 2+2\times 13 = 28 \xrightarrow{+7} x \overset{13}{\equiv} 4 \quad (0/5)$$

$$\to \underbrace{x = 13k+4}_{(0/25)} \to \underbrace{10 \le 13k+4 \le 99}_{(0/25)} \to \frac{6}{13} \le k \le \frac{95}{13}$$

لذا معادله ۷ جواب دورقمی دارد. (۰/۲۵)

۱۰۳- درست (۰/۲۵) ص ۱۸

۱۰۴- روش اول:

$$\underbrace{5x \overset{9}{\equiv} 22}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{x \overset{9}{\equiv} 8}_{(0/5)} \Rightarrow x = 9k+8 \text{ یا } x = 9k-1 \quad (0/25)$$

$$\underbrace{\left.\begin{array}{c} 5(9k+8)+9y=22 \\ \text{یا} \\ 5(9k-1)+9y=22 \end{array}\right\}}_{(0/25)} \Rightarrow y = -2-5k \text{ یا } y = -5k+3 \quad (0/25)$$

روش دوم:

$$\underbrace{9y \overset{5}{\equiv} 22}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{y \overset{5}{\equiv} 3}_{(0/5)} \Rightarrow y = 5k+3 \text{ یا } y = 5k-2 \quad (0/25)$$

$$\underbrace{\left.\begin{array}{c} 5x+9(5k+3)=22 \\ \text{یا} \\ 5x+9(5k-2)=22 \end{array}\right\}}_{(0/25)} \Rightarrow x = -1-9k \text{ یا } x = -9k+8 \quad (0/25)$$

صفحه ۲۹

۱۰۵- الف) گزینه ۲ (۰/۲۵) (مشابه سوال ۱ صفحه ۲۹)

ب) گزینه ۱ (۰/۲۵) (مشابه سوال ۸ صفحه ۲۹)

پ) گزینه ۱ (۰/۲۵) (مشابه مثال سوم صفحه ۲۵)

۱۰۶-

$$\underbrace{A = 2!+4!+6!+\cdots+100!}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{A = 2!+4!+10k, k\in Z}_{(0/25)}$$

$$\underbrace{A \overset{10}{\equiv} 2+24+0}_{(0/5)} \Rightarrow \underbrace{A \overset{10}{\equiv} 26 \overset{10}{\equiv} 6}_{(0/5)}$$

مشابه سوال ۱۱ صفحه ۲۹

۱۰۷- درست (۰/۲۵) (ص ۲۵)

۱۰۸- ص ۲۱

$$\underbrace{63 \overset{16}{\equiv} -1}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{63^{14} \overset{16}{\equiv} 1}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{A \overset{16}{\equiv} 2}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{r = 2}_{(0/25)}$$

۱۰۹- ص ۳۰

$$\underbrace{(1+4+0+2)x \overset{9}{\equiv} 1+1 \Rightarrow 7x \overset{9}{\equiv} 2}_{(0/5)}\underbrace{7x \overset{9}{\equiv} -7}_{(0/25)}$$

$$\underbrace{\xrightarrow{(7,9)=1} x \overset{9}{\equiv} -1}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{x = 9k-1}_{(0/25)} \text{ یا } \underbrace{x = 9k+8}_{(0/25)}$$

۱۱۰-

$$15x \overset{19}{\equiv} 7 \Rightarrow 15x \overset{19}{\equiv} 7+(2\times 19)$$

$$\Rightarrow 15x \overset{19}{\equiv} 45 \xrightarrow{(15,19)=1} x \overset{19}{\equiv} 3$$

$$\Rightarrow x = 19k+3 \xrightarrow{k=5} x = 98$$

۱۱۱- میدانیم $1 \overset{15}{\equiv} 1!$ و $2 \overset{15}{\equiv} 2!$ و $6 \overset{15}{\equiv} 3!$ و $9 \overset{15}{\equiv} 4!$ و $0 \overset{15}{\equiv} 5!$ و... $0 \overset{15}{\equiv} 200!$ پس داریم:

$$1!+2!+3!+4!+5!+\cdots+200! \overset{15}{\equiv}$$

$$1+2+6+24+0+0+0+\cdots+0 \overset{15}{\equiv} 3$$

۱۱۲- چون $(4,6)|10$ معادله جواب دارد

$$4x \overset{6}{\equiv} 10 \Rightarrow 4x \overset{6}{\equiv} 4 \Rightarrow x \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow x = 3k+1$$

۱۱۳- عدد n رقمی $A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0}$ رابسط می‌دهیم و در همنهشتی به پیمانه ۹ به جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار می‌دهیم

$$A = 10^{n-1}\times a_{n-1}+\cdots+10^{2}a_2+10a_1+1a_0 \Rightarrow$$

$$A \overset{9}{\equiv} 1\times a_{n-1}+\cdots+1\times a_1+a_0$$

$$\Rightarrow A \overset{9}{\equiv} a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$$

۱۱۴-

$$5x+3y=42 \Rightarrow 5x \overset{3}{\equiv} 42 \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow x \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow$$

$$x = 3k \Rightarrow 5(3k)+3y = 42 \;\Rightarrow y = -5k+14$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$$

۱۱۵- $(a,m)|b$

۱۱۶- $۱+۳+۵+۸+۱+۱+۱+۲\overset{۹}{\equiv}۲۱\overset{۹}{\equiv}۳$

۱۱۷-

شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$(۲۹+۴\times۳۰+۷)\overset{۷}{\equiv}۱+۴\times۲+۰\overset{۷}{\equiv}۲$

هفت اسفند روز دوشنبه می‌باشد.

۱۱۸-

$۱۱|۵a+۹\Rightarrow ۵a+۹=۱۱k\Rightarrow ۵a=۱۱k-۹$

$\Rightarrow a=\frac{۱۱}{۵}k-\frac{۹}{۵}\qquad (k\in Z)$

۱۱۹- درست

۱۲۰-

$۲۷=۱۳\times۲+۱\Rightarrow ۲۷\overset{۱۳}{\equiv}۱$

$\Rightarrow (۲۷)^{۲۰}\overset{۱۳}{\equiv}۱\xrightarrow{+۱۸}۲۷^{۲۰}+۱۸\overset{۱۳}{\equiv}۱۹\Rightarrow ۱۹\overset{۱۳}{\equiv}۶\Rightarrow r=۶$

۱۲۱- فاصله ۱ مهر تا ۱۲ بهمن برابر است با: ۲۹ روز در مهرماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن؛ یعنی $۲۹+۳\times۳۰+۱۲=۱۳۱$. از طرفی $۱۳۱\overset{۷}{\equiv}۵$. بنابراین طبق جدول زیر ۱۲ بهمن پنجشنبه است.

شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۱۲۲- $a\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}b$

۱۲۳-

$۶x\overset{۷}{\equiv}۱۸۵=۲۳\times۷+۲۴\Rightarrow ۶x\overset{۷}{\equiv}۲۴$

$\xrightarrow{(۶,۷)=۱}x\overset{۷}{\equiv}۴\Rightarrow x=۷k+۴$

$\Rightarrow ۶(۷k+۴)+۷y=۱۸۵\Rightarrow y=-۶k+۲۳$

۱۲۴- الف: درست   ب: نادرست

۱۲۵-

$۴a-۷\overset{۱۰}{\equiv}۳a-۵\Rightarrow a\overset{۱۰}{\equiv}۲$

$\Rightarrow ۹a+۶\overset{۱۰}{\equiv}۲۴\overset{۱۰}{\equiv}۴\Rightarrow r=۴$

۱۲۶-

$۲y\overset{۵}{\equiv}۱۸\Rightarrow\xrightarrow[\div۲]{(۲,۵)=۱}y\overset{۵}{\equiv}۹\overset{۵}{\equiv}۴\Rightarrow y=۵k+۴$

$\Rightarrow ۵x+۲(۵k+۴)=۱۸\Rightarrow x=-۲k+۲$

۱۲۷- $۱۰۰۰\overset{۷}{\equiv}-۱\Rightarrow ۱۰۰۰^{۲۵}\times۹+۱۱\overset{۷}{\equiv}(-۱)^{۲۵}\times۹+۱۱\overset{۷}{\equiv}۲\Rightarrow r=۲$

۱۲۸-

$۷x\overset{۴}{\equiv}۱\Rightarrow ۷x\overset{۴}{\equiv}۴\times۵+۱\Rightarrow ۷x\overset{۴}{\equiv}۲۱$

$\xrightarrow[\div۷]{(۷,۴)=۱}x\overset{۴}{\equiv}۳\Rightarrow x=۴k+۳$

۱۲۹- $۳۸\overset{۴}{\equiv}۲\Rightarrow ۳۸^{۲}\overset{۴}{\equiv}۴\overset{۴}{\equiv}۰\Rightarrow ۳۸^{۳۶}\overset{۴}{\equiv}۰\,۱۹\overset{۴}{\equiv}۳\Rightarrow ۳۸^{۳۶}+۱۹\overset{۴}{\equiv}۳$

۱۳۰- $۸x\overset{۱۲}{\equiv}۲۰\overset{۱۲}{\equiv}۳۲\xrightarrow[\div۸]{(۸,۱۲)=۴}x\overset{\frac{۱۲}{۴}=۳}{\equiv}۴\Rightarrow x=۳k+۴$

۱۳۱- $۷^{۲}=۴۹\overset{۱۵}{\equiv}۴\Rightarrow ۷^{۴}\overset{۱۵}{\equiv}۱۶\overset{۱۵}{\equiv}۱\Rightarrow ۷^{۲۸}\overset{۱۵}{\equiv}۱\xrightarrow{\times۷^{۲}\overset{۱۵}{\equiv}۴}۷^{۳۰}\overset{۱۵}{\equiv}۴$

۱۳۲- $۵x\overset{۱۱}{\equiv}۲+(۱۱\times۳)\Rightarrow ۵x\overset{۱۱}{\equiv}۳۵\xrightarrow{(۵,۱۱)=۱}x\overset{۱۱}{\equiv}۷\Rightarrow x=۱۱k+۷$

۱۳۳- الف: $(۴,۳)=۱\Rightarrow ۱|۱۹$

ب:

$۴x+۳y=۱۹\Rightarrow ۴x\overset{۳}{\equiv}۱۹\overset{۳}{\equiv}۱\Rightarrow ۴x\overset{۳}{\equiv}۳+۱\Rightarrow ۴x\overset{۳}{\equiv}۴$

$\Rightarrow x\overset{۳}{\equiv}۱\Rightarrow x=۳k+۱$

$۴(۳k+۱)+۳y=۱۹\Rightarrow ۱۲k+۴+۳y=۱۹$

$\Rightarrow ۳y=-۱۲k+۱۵\Rightarrow y=-۴k+۵$

۱۳۴- $۲^{۵}\overset{۱۰}{\equiv}۲\Rightarrow ۲^{۱۰}\overset{۱۰}{\equiv}۲^{۲}\Rightarrow ۲^{۱۱}\overset{۱۰}{\equiv}۸\Rightarrow ۲^{۱۱}+۷\overset{۱۰}{\equiv}۱۵\overset{۱۰}{\equiv}۵$

رقم یکان برابر ۵ است.

۱۳۵-

$۲x\overset{۵}{\equiv}۱۹\overset{۵}{\equiv}۴\Rightarrow\xrightarrow{(۲,۵)=۱}x\overset{۵}{\equiv}۲\Rightarrow x=۵k+۲$

$\Rightarrow y=-۲k+۳$

۱۳۶-

$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m|a-b$

$\Rightarrow m|(a-b)\left(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+\cdots+b^{n-۱}\right)$

$\Rightarrow m|a^{n}-b^{n}\Rightarrow a^{n}\overset{m}{\equiv}b^{n}$

۱۳۷- روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می‌گیریم.۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ روز بهمن، فاصله ی اول مهر تا ۱۲ بهمن است. که روی هم ۱۳۱ روز می‌شوند. حال باقی مانده ی تقسیم ۱۳۱ بر۷ را تعیین می‌کنیم که برابر ۵ است. لذا ۱۲ بهمن متناظر

با روز پنجشنبه است.

شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۱۳۸-

$$5x+2y=18 \Rightarrow 2y \overset{5}{\equiv} 18 \xrightarrow{(2,5)=1} y \overset{5}{\equiv} 9$$

$$\Rightarrow y \overset{5}{\equiv} 5+4 \ \Rightarrow y \overset{5}{\equiv} 4 \xrightarrow{k\in Z} y=5k+4$$

$$5x+2y=18 \xrightarrow{y=5k+4} 5x+2(5k+4)=18 \Rightarrow x=-2k+2$$

۱۳۹- الف: درست   ب: درست

۱۴۰- چهارشنبه

۱۴۱-

$$7x \overset{5}{\equiv} 11 \Rightarrow 7x \overset{5}{\equiv} 11+2\times 5 \Rightarrow 7x \overset{5}{\equiv} 21$$

$$\xrightarrow{(7,5)=1} x \overset{5}{\equiv} 3 \Rightarrow x=5k+3, \quad (k\in Z)$$

$$7x+5y=11 \xrightarrow{x=5k+3} 7(5k+3)+5y=11$$

$$\Rightarrow y=-7k-2 \qquad (k\in Z)$$

۱۴۲-

$$4x \overset{5}{\equiv} 17 \Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 15+2 \Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 2+10$$

$$\Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 12 \xrightarrow{(4,5)=1} x \overset{5}{\equiv} 3 \ \Rightarrow x=5k+3$$

۱۴۳-

$$27 \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow 27^7 \overset{13}{\equiv} 1^7$$

$$\Rightarrow 27^7+19 \overset{13}{\equiv} 1+19 \Rightarrow 27^7+19 \overset{13}{\equiv} 20 \Rightarrow 27^7+19 \overset{13}{\equiv} 7$$

۱۴۴-

$$2x+5y=29 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 29 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 4$$

$$\Rightarrow x=5k+2 \Rightarrow y=-2k+5$$

۱۴۵-

$$13 \overset{17}{\equiv} -4 \Rightarrow 13^2 \overset{17}{\equiv} (-4)^2 \Rightarrow 13^2 \overset{17}{\equiv} 16$$

$$\xrightarrow{16 \overset{17}{\equiv} -1} 13^2 \overset{17}{\equiv} -1 \Rightarrow \left(13^2\right)^{11} \overset{17}{\equiv} (-1)^{11}$$

$$\Rightarrow 13^{22} \overset{17}{\equiv} -1 \Rightarrow 13^{22} \overset{17}{\equiv} -1+17 \Rightarrow 13^{22} \overset{17}{\equiv} 16 \Rightarrow r=16$$

۱۴۶-

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b \ \Rightarrow m|c(a-b) \Rightarrow m|ac-bc \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

۱۴۷- نادرست

۱۴۸-

$$13y \overset{9}{\equiv} 7 \xrightarrow{13 \overset{9}{\equiv} 4,\ 7 \overset{9}{\equiv} 16} 4y \overset{9}{\equiv} 16 \xrightarrow{(4,9)=1} y \overset{9}{\equiv} 4$$

$$\Rightarrow y=9k+4, \quad x=-13k-5$$

۱۴۹-

$$1000 \overset{7}{\equiv} 6 \xrightarrow{6 \overset{7}{\equiv} -1} 1000 \overset{7}{\equiv} -1$$

$$\Rightarrow 1000^{13} \overset{7}{\equiv} (-1)^{13} \Rightarrow 1000^{13} \overset{7}{\equiv} -1$$

$$\Rightarrow 1000^{13}\times 12 \overset{7}{\equiv} -1\times 12 \Rightarrow 1000^{13}\times 12 \overset{7}{\equiv} -12$$

$$\Rightarrow 1000^{13}\times 12+10 \overset{7}{\equiv} -12+10 \Rightarrow 1000^{13}\times 12+10 \overset{7}{\equiv} -2$$

$$\Rightarrow 1000^{13}\times 12+10 \overset{7}{\equiv} -2+7 \Rightarrow 1000^{13}\times 12+10 \overset{7}{\equiv} 5 \Rightarrow r=5$$

۱۵۰-

$$3x \overset{7}{\equiv} 13 \Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 6 \xrightarrow{(3,7)=1} x \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow x=7k+2$$

یادداشت ضروری دانش‌آموز: