

بِسْمِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# سوالات موضوعی نهایی

## حسابان ۲

(۱۹ دوره سوال نهایی حسابان ۲)

مؤلفین:

رقیه پيله‌ور نیار

میکائیل صدقی

تقدیم به

دیران فرهیخته‌ی ریاضی

و دانش‌آموزان برتر

و روح بلند مریم میرزاخانی

## فهرست مطالب

۷	مقدمه
۹	۱ تابع
۱۰	تبدیل نمودار توابع
۱۶	تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم
۲۷	۲ مثلثات
۲۸	تناوب و تنازانت
۳۵	معادلات مثلثاتی
۳۹	۳ حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت
۴۰	حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت
۵۹	۴ مشتق
۶۰	آشنایی با مفهوم مشتق
۶۷	مشتق پذیری و پیوستگی
۸۲	آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر
۸۵	۵ کاربردهای مشتق
۸۶	اکسترم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی
۹۵	جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن
۱۰۱	رسم نمودار تابع

## مقدمه

سپاس بی‌کران خداوندی را که انسان را آفرید و او را به زیور علم آراست شاکریم این توفیق را یافتیم مجموعه سوالات موضوعی نهایی حسابان ۲ را به صورت کتاب در آوریم. استفاده گسترده دانش‌آموزان و همکاران از این مجموعه سوالات و تشویق برخی همکاران مشوق ما در این راه بود.

کتاب حاضر شامل ۱۹ دوره سوالات نهایی حسابان ۲ از دی ۱۳۹۷ تا دی ۱۴۰۲ می‌باشد. مهمترین ویژگی منحصر به فرد این کتاب دسته‌بندی سوالات نهایی منطبق بر موضوعات کتاب درسی می‌باشد.

سوالات درس به درس تفکیک شده و به همراه نمره و تاریخ برگزاری آزمون دسته‌بندی شده است.

در ابتدای هر درس خلاصه درسنامه‌ای از کتاب برای یادآوری مطالب و فرمول‌ها آورده شده است.

حل سوالات نهایی سال‌های گذشته به ارتقاء نمره نهایی شما عزیزان کمک خواهد کرد.

توصیه ما به شما عزیزان این است که اول، کتاب درسی یا جزوه دبیرتان را با دقت بخوانید سپس به سراغ حل سوالات این کتاب بروید.

تا علاوه بر تمرین و تکرار مطالب کتاب، مفاهیم نیز در ذهنتان تثبیت شود.

نتیجه‌گیری از ریاضی سخت نیست کافی است سخت‌کوش باشید.

### سخنی با همکاران و اساتید محترم ریاضی

همکار عزیز از این که کتاب حاضر را به عنوان مرجع کلاس خود انتخاب کرده‌اید به خود می‌بالیم. شما می‌توانید با توجه به روند

تدریس‌تان در کلاس درس، با اتمام هر درس، سوالات مربوط به همان درس را به عنوان تکلیف به دانش‌آموزان بدهید. یا خودتان با

توجه به زمان کلاس تعدادی از سوالات را حین تدریس در کلاس حل کنید. تجربه ما در حل این سوالات در کلاس درس یا مهمتر از آن

در طول سال تحصیلی، تکلیف کردن حل این سوالات در منزل، ارتقا نمره نهایی دانش‌آموزان را ثابت کرده است.

از شما همکاران فرهیخته و دانشمند تقاضا داریم که کاستی یا نقایص کتاب و حتی غلط‌های املایی و چاپی را به ما در سایت

[math-pilevar.ir](http://math-pilevar.ir) اطلاع دهید تا در چاپ‌های بعدی مرتفع گردد.

با تشکر: پيله‌ور - صدقی



نمونه سوالات نهایی که در این کتاب به صورت موضوعی تفکیک شده است عبارتند از:

دی ۹۷	۱
خرداد ۹۸	۲
شهریور ۹۸	۳
دی ۹۸	۴
خرداد ۹۹	۵
خرداد ۹۹ خارج از کشور نوبت صبح	۶
خرداد ۹۹ خارج از کشور نوبت صبح	۷
شهریور ۹۹	۸
دی ۹۹	۹
خرداد ۱۴۰۰	۱۰
شهریور ۱۴۰۰	۱۱
دی ۱۴۰۰	۱۲
خرداد ۱۴۰۱	۱۳
شهریور ۱۴۰۱	۱۴
دی ۱۴۰۱	۱۵
خرداد ۱۴۰۲	۱۶
شهریور ۱۴۰۲	۱۷
دی ۱۴۰۲	۱۸



## تابع

- تبدیل نمودار توابع . . . . . ۱۰
- تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم . . ۱۶



## درس

۱

## تبدیل نمودار توابع

## خلاصه درسنامه

♦ رسم نمودار با استفاده از قرینه‌یابی، انتقال، انقباض و انبساط:

- (الف) برای رسم نمودار تابع  $y = -f(x)$  قرینه نمودار  $y = f(x)$  را نسبت به محور  $x$ ها به دست می‌آوریم.
- (ب) برای رسم نمودار تابع  $y = f(-x)$  قرینه نمودار تابع  $y = f(x)$  را نسبت به محور  $y$ ها به دست می‌آوریم.
- (پ) برای رسم نمودار تابع  $y = f(x-a)$ , ( $a > 0$ ) را به اندازه  $a$  واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم.
- (ت) برای رسم نمودار تابع  $y = f(x+a)$ , ( $a > 0$ ) را به اندازه  $a$  واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم.
- (ث) برای رسم نمودار تابع  $y = f(x) + b$ , ( $b > 0$ ) را به اندازه  $b$  واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.
- (ج) برای رسم نمودار تابع  $y = f(x) - b$ , ( $b > 0$ ) را به اندازه  $b$  واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.
- (چ) برای رسم نمودار تابع:  $y = f(kx)$

- (۱) اگر  $0 < k < 1$  باشد نمودار تابع  $y = f(x)$  را با نسبت  $\frac{1}{k}$  در راستای محور  $x$ ها منبسط می‌کنیم.
- (۲) اگر  $k > 1$  باشد نمودار تابع  $y = f(x)$  را با نسبت  $\frac{1}{k}$  در راستای محور  $x$ ها منقبض می‌کنیم.
- (۳) اگر  $k < 0$  باشد ابتدا نمودار  $y = f(kx)$  را به دست می‌آوریم سپس قرینه آن را نسبت به محور  $y$ ها پیدا می‌کنیم.

♦ خلاصه اینکه طول هر نقطه‌ی نمودار تابع  $y = f(x)$  را در  $\frac{1}{k}$  ضرب می‌نماییم ولی عرض آن نقطه را تغییر نمی‌دهیم.

(ح) برای رسم نمودار تابع  $y = kf(x)$

- (۱) اگر  $0 < k < 1$  باشد نمودار تابع  $y = f(x)$  را با نسبت  $k$  در راستای محور  $y$ ها منقبض می‌کنیم.
- (۲) اگر  $k > 1$  باشد نمودار تابع  $y = f(x)$  را با نسبت  $k$  در راستای محور  $y$ ها منبسط می‌کنیم.
- (۳) اگر  $k < 0$  باشد ابتدا نمودار تابع  $y = |k|f(x)$  را به دست می‌آوریم سپس قرینه آن را نسبت به محور  $x$ ها پیدا می‌کنیم.

♦ خلاصه اینکه عرض هر نقطه‌ی نمودار تابع  $y = f(x)$  را در  $k$  ضرب می‌نماییم ولی طول آن نقطه را تغییر نمی‌دهیم.



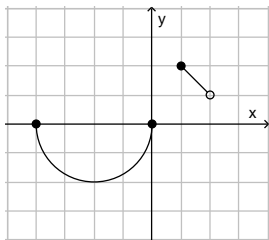
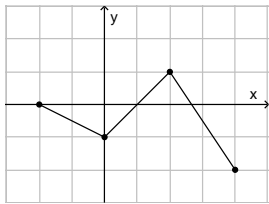
(خ) برای رسم نمودار تابع  $y = f(|x|)$  نمودار تابع  $y = f(x)$  را روی  $x$ ‌های مثبت رسم می‌کنیم و قرینه آن را نیز نسبت به محور  $y$  رسم می‌نماییم.

(د) برای رسم نمودار تابع  $y = |f(x)|$ ، نمودار تابع  $y = f(x)$  را رسم می‌کنیم و ابتدا قرینه قسمت‌هایی از نمودار  $y = f(x)$  را که زیر محور  $x$ ‌ها می‌باشد را نسبت به محور  $x$ ‌ها به دست آورده و سپس از قسمت زیر محور  $x$ ‌ها صرف نظر می‌کنیم.

# سوالات نهایی



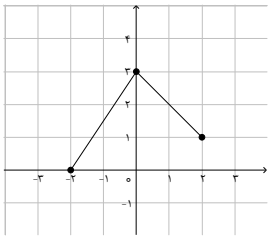
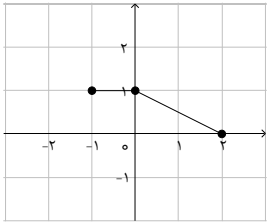
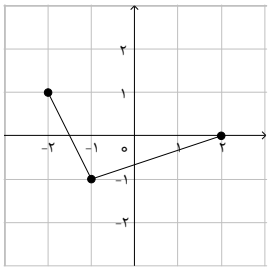
ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۱	نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = -3f\left(\frac{x}{2}\right) + 2$ را رسم کرده و سپس برد تابع $g(x)$ را تعیین کنید.	۱	دی ۱۴۰۲
۲	جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. الف) اگر برد تابع $y = \sqrt{x}$ بازه $[0, 2]$ باشد، برد تابع $y = 2 + \sqrt{x-2}$ برابر ..... است.	۰/۵	شهریور ۱۴۰۲
۳	نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = f(1-x) + 1$ را رسم کنید.	۱	شهریور ۱۴۰۲



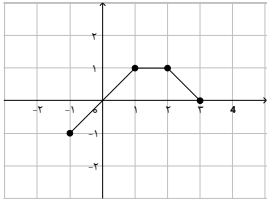
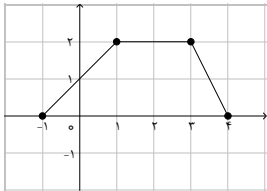
A = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta  
 \lim\_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1  
 \lim\_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0  
 \lim\_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1  
 \lim\_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1  
 \lim\_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a  
 \lim\_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{e^{bx} - 1} = \frac{a}{b}



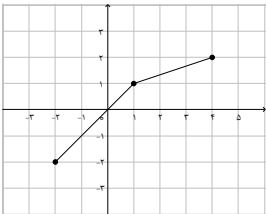
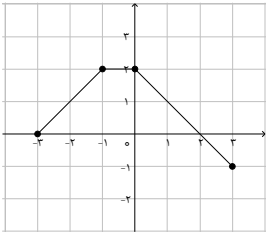
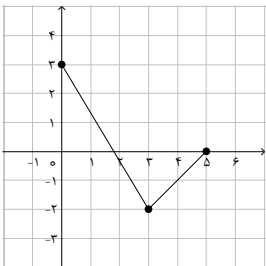


دی ۱۴۰۱	۰/۵	<p>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.</p> <p>الف) نقطه <math>(-۸, ۶)</math> روی نمودار <math>y = f(x)</math> با نقطه <math>(-۸, ۱۲)</math> روی نمودار <math>y = \frac{1}{۳}f(x)</math> متناظر است.</p> <p>ب) نمودار تابع <math>y = -(x-۳)^۳</math> را می‌توان با ۳ واحد انتقال نمودار <math>y = -x^۳</math> به سمت راست رسم کرد.</p>	۴
شهریور ۱۴۰۱	۱	<p>الف) نمودار تابع <math>f(x) = \sqrt{x}</math> را در بازه <math>[۰, ۴]</math> رسم کنید.</p> <p>به کمک نمودار <math>f(x)</math> نمودار تابع <math>g(x) = ۲f(x-۱)</math> را رسم کنید. سپس دامنه و برد <math>g</math> را تعیین کنید.</p>	۵
خرداد ۱۴۰۱	۱	<p>نمودار تابع <math>f</math> در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع <math>g(x) = f(x-۱)</math> را رسم کرده و دامنه و برد <math>g</math> را تعیین کنید.</p> 	۶
دی ۱۴۰۰	۱	<p>نمودار تابع <math>y = f(x)</math> به صورت زیر است. نمودار <math>g(x) = f(x-۱) + ۲</math> را رسم کرده و دامنه و برد <math>g(x)</math> را تعیین کنید.</p> 	۷
شهریور ۱۴۰۰	۱	<p>نمودار تابع <math>y = f(x)</math> به صورت زیر است. نمودار <math>g(x) = ۲f(x+۱)</math> را رسم کرده و دامنه و برد تابع <math>g</math> را تعیین کنید.</p> 	۸

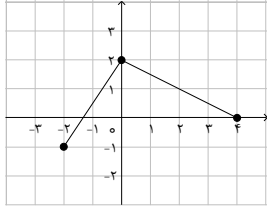
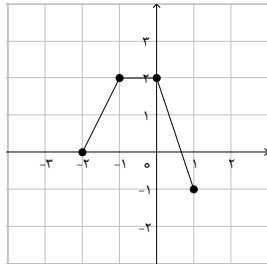
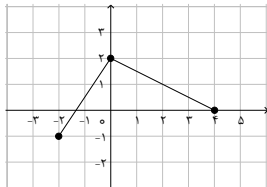


شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵	جای خالی را با عددی مناسب کامل کنید. اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از $y = f(x)$ ..... نمودار $y = f(x)$ در راستای محور $x$ ها به دست می‌آید.	۹
خرداد ۱۴۰۰	۱	نمودار تابع $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ را به کمک نمودار $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.	۱۰
دی ۹۹	۱	نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = f(2x - 1)$ را رسم، دامنه و برد آن را تعیین کنید. 	۱۱
شهریور ۹۹	۰/۵	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. اگر بازه $[-2, 1]$ دامنه‌ی تابع $f(x)$ باشد، دامنه تابع $f(3x + 1)$ برابر ..... است.	۱۲
شهریور ۹۹	۱	نمودار تابع زیر را به کمک نمودار $y = \cos x$ رسم کنید. $y = \cos(2x) - 1$	۱۳
خرداد ۹۹ خ	۰/۵	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. نقطه‌ی $(2, -1)$ در تابع $y = f(2x + 1) - 1$ متناظر با نقطه‌ی ..... در تابع $y = f(x)$ است.	۱۴
خرداد ۹۹ خ	۱	اگر نمودار $f$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x) = f(x - 1) + 2$ زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را بنویسید. 	۱۵



خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>نمودار تابع <math>y = (x + 2)^3</math> را می‌توان با ۲ واحد انتقال نمودار تابع <math>y = x^3</math> به سمت چپ، رسم کرد.</p>	۱۶
خرداد ۹۹	۱	<p>با توجه به نمودار تابع <math>f</math> که در شکل زیر آمده است. نمودار تابع <math>g(x) = f(2x) - 1</math> را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.</p> 	۱۷
دی ۹۸	۰/۲۵	<p>نمودار <math>f(x)</math> در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع <math>g(x) = f(2x + 1)</math> را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.</p> 	۱۸
شهریور ۹۸	۰/۵	<p>کوتاه پاسخ دهید.</p> <p>نمودار تابع <math>y = -f(x)</math>، قرینه نمودار تابع <math>y = f(x)</math> نسبت به کدام محور است؟</p>	۱۹
شهریور ۹۸	۱	<p>نمودار تابع <math>f</math> در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع <math>g(x) = f(3 - x)</math> را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.</p> 	۲۰



<p>۹۸ تیر ۱/۲۵</p>	<p>۲۱ نمودار تابع <math>f</math> در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع <math>g(x) = f(2x) - 1</math> را رسم کنید. سپس دامنه تابع <math>g</math> را تعیین کنید.</p> 	<p>۲۱</p>
<p>۹۸ خرداد ۰/۲۵</p>	<p>۲۲ درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. اگر <math>k &gt; 1</math> باشد، نمودار <math>y = f(kx)</math> از انبساط افقی <math>y = f(x)</math> در راستای محور <math>x</math>ها به دست می‌آید.</p>	<p>۲۲</p>
<p>۹۸ خرداد ۱</p>	<p>۲۳ نمودار تابع <math>y = f(x)</math> به صورت زیر است. نمودار <math>g(x) = 2f(x-1)</math> را رسم کرده و دامنه و برد آن را بنویسید.</p> 	<p>۲۳</p>
<p>۹۷ دی ۱/۵</p>	<p>۲۴ نمودار تابع <math>f</math> در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع <math>g(x) = -f(2x)</math> را رسم کنید. سپس دامنه و برد تابع <math>g</math> را تعیین کنید.</p> 	<p>۲۴</p>

## پاسخ سوالات موضوعی نهایی حسابان ۲



درس

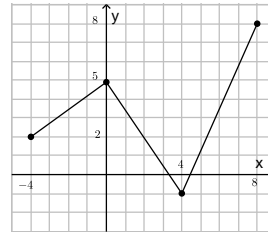
۱

تبدیل نمودار

۱- (صفحه ۱۲ کتاب)

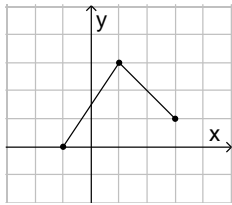
$$R = [-1, 8] \quad (0, 5)$$

(رسم شکل (0, 5))



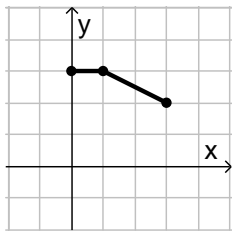
۶- (مشابه مثال صفحه ۵ کتاب)

$$D_g = [-1, 2]$$



۷- (مشابه تمرین ۳ صفحه ۸ کتاب)

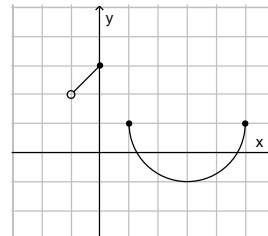
$$D_g = [0, 2]$$



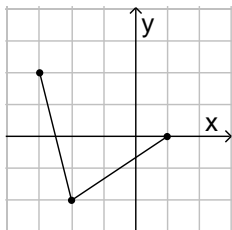
۲- [2, 4]

۳- صفحه ۱۲

(بارم هر قسمت رسم شکل (0, 5) نمره)



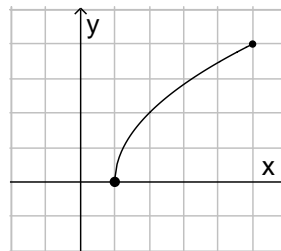
$$D_f = [-2, 1], \quad R_f = [-2, 2] \quad -8$$



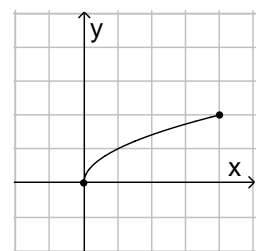
۴- الف) نادرست (ص ۱۰) ب) درست (ص ۱۴)

۵- مشابه کار در کلاس صفحه ۴

$$R_g = [0, 4], \quad D_g = [1, 5]$$



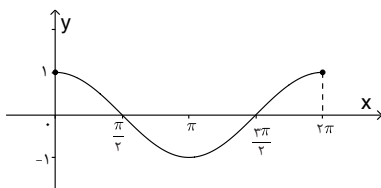
(ب)



(الف)

۹- انقباض افقی

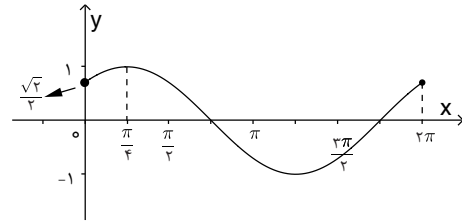
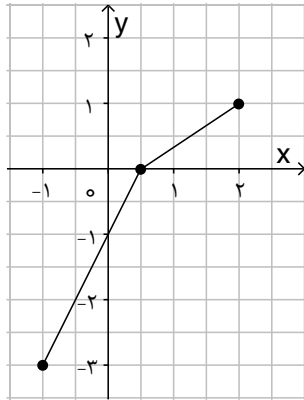
۱۰-



۱۶- درست

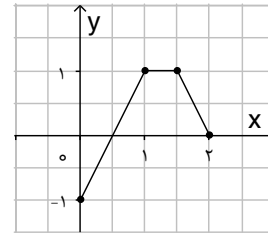
$D_g = [-1, 2]$      $R_g = [-3, 1]$

۱۷-



$D = [0, 2]$ ,     $R = [-1, 1]$

۱۱-

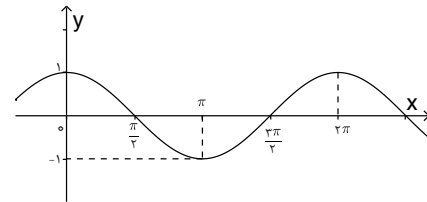
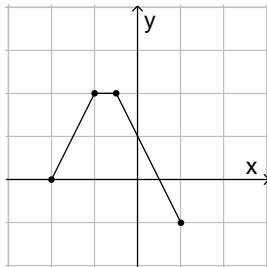


$[-1, 0]$

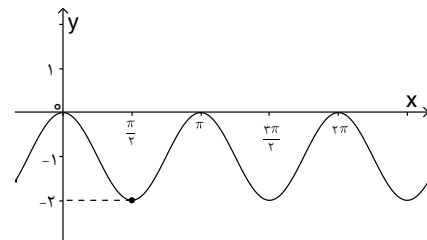
۱۲-

$D = [-2, 1]$      $R = [-1, 2]$

۱۸-



۱۳-



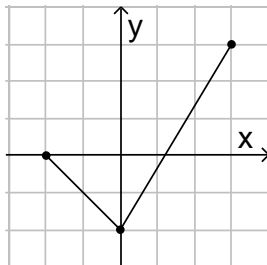
درس ۱

تبدیل توابع

۱۹- محور طولها

$D_g = [-2, 3]$

۲۰-



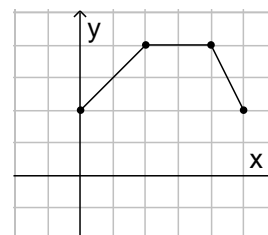
$(5, 0)$

۱۴-

۱۵- کافی است نمودار تابع  $f$  را یک واحد به جلو و سپس دو واحد به سمت بالا منتقل کنید.

$D_f = [-1, 4]$      $R_f = [0, 2]$

$D_g = [0, 5]$      $R_g = [2, 4]$

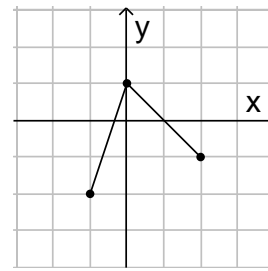
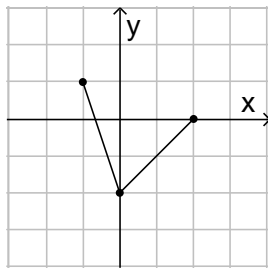


۲۱- برای رسم نمودار تابع  $g$ ، ابتدا انقباض افقی برای  $k = 2$  در راستای محور طولها سپس انتقال یک واحد رو به پایین در راستای محور عرضها

$D_g = [-1, 2]$

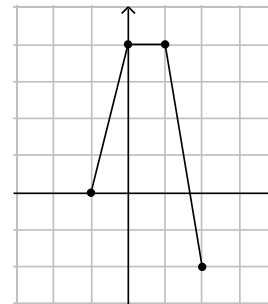


math-pilevar.ir



-۲۲ نادرست

$D_f = [-1, 2]$       $R_f = [-2, 4]$      -۲۳



$D_f = [-1, 2]$       $R_f = [-2, 1]$      -۲۴

درس ۱

تبدیل توابع