بسم الله الرحمن الرحیم

سوالات موضوعی نهایی

هندسه ۳

(۱۸ دوره سوال نهایی)

مؤلفین:

رقیه پیله‌ور نیار

میکائیل صدقی

تقدیم به

دبیران فرهیخته‌ی ریاضی

و دانش آموزان برتر

و روح بلند مریم میرزاخانی

برای دریافت کامل فایل یا خرید کتاب به سایت
www.math-pilevar.ir
مراجعه کنید

فهرست مطالب

مقدمه

سپاس بی‌کران خداوندی را که انسان را آفرید و او را به زیور علم آراست شاکریم این توفیق را یافتیم مجموعه سوالات موضوعی نهایی هندسه را به صورت کتاب در آوریم. استفاده گسترده دانش‌آموزان و همکاران از این مجموعه سوالات و تشویق برخی همکاران مشوق ما در این راه بود.

کتاب حاضر شامل ۱۸ دوره سوالات نهایی هندسه ۳ از دی ۱۳۹۷ تا دی ۱۴۰۲ می‌باشد. مهمترین ویژگی منحصربه‌فرد این کتاب دسته‌بندی سوالات نهایی منطبق بر موضوعات کتاب درسی می‌باشد.

سوالات درس به درس تفکیک شده و به همراه نمره و تاریخ برگزاری آزمون دسته‌بندی شده است.

در ابتدای هر درس خلاصه درسنامه‌ای از کتاب برای یادآوری مطالب و فرمول‌ها آورده شده است.

حل سوالات نهایی سال‌های گذشته به ارتقاء نمره نهایی شما عزیزان کمک خواهد کرد.

توصیه ما به شما عزیزان این است که اول، کتاب درسی یا جزوه دبیرتان را با دقت بخوانید سپس به سراغ حل سوالات این کتاب بروید.

تا علاوه بر تمرین و تکرار مطالب کتاب، مفاهیم نیز در ذهنتان تثبیت شود.

نتیجه‌گیری از ریاضی سخت نیست کافی است سخت‌کوش باشید.

سخنی با همکاران و اساتید محترم ریاضی

همکار عزیز از این که کتاب حاضر را به عنوان مرجع کلاس خود انتخاب کرده‌اید به خود می‌بالیم شما می‌توانید با توجه به روند تدریس‌تان در کلاس درس با اتمام هر درس، سوالات مربوط به همان درس را به عنوان تکلیف به دانش‌آموزان بدهید. یا خودتان با توجه به زمان کلاس تعدادی از سوالات را حین تدریس در کلاس حل کنید. تجربه ما در حل این سوالات در کلاس درس یا مهمتر از آن در طول سال تحصیلی، تکلیف کردن حل این سوالات در منزل، ارتقا نمره نهایی دانش‌آموزان را ثابت کرده است.

از شما همکاران فرهیخته و دانشمند تقاضا داریم که کاستی یا نقایص کتاب و حتی غلط‌های املایی و چاپی را به ما در سایت math-pilevar.ir اطلاع دهید تا در چاپ‌های بعدی مرتفع گردد.

با تشکر: پیله‌ور - صدقی

نمونه سوالات نهایی که در این کتاب به صورت موضوعی تفکیک شده است عبارتند از:

۱	دی ۹۷
۲	خرداد ۹۸
۳	تیر ۹۸
۴	شهریور ۹۸
۵	دی ۹۸
۶	خرداد ۹۹
۷	خرداد ۹۹ خارج از کشور
۸	شهریور ۹۹
۹	دی ۹۹
۱۰	خرداد ۱۴۰۰
۱۱	شهریور ۱۴۰۰
۱۲	دی ۱۴۰۰
۱۳	خرداد ۱۴۰۱
۱۴	شهریور ۱۴۰۱
۱۵	دی ۱۴۰۱
۱۶	خرداد ۱۴۰۲
۱۷	شهریور ۱۴۰۲
۱۸	دی ۱۴۰۲

۱

ماتریس و کاربردها

درس ۱
ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

خلاصه درسنامه

مفهوم ماتریس: هر آرایش مستطیل شکل از اعداد، در قالب سطر و ستون را یک ماتریس می‌نامند. هر ماتریس را با یک حرف بزرگ لاتین نامگذاری می‌کنند. مانند ماتریس زیر

$$M = \begin{array}{ccc} & & \\ \left[\begin{array}{ccc} ۲ & -۳ & ۵ \\ ۳ & ۰ & ۱ \end{array}\right] & \begin{array}{l} \text{سطر اول} \\ \text{سطر دوم} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & \text{ستون سوم} \end{array} & \end{array}$$

این ماتریس دارای دو سطر و سه ستون است. در اصطلاح گویند این ماتریس دارای مرتبه‌ی ۲×۳ است. هر یک از اعداد تشکیل دهنده‌ی ماتریس را درایه می‌نامند. اگر درایه k در سطر i و ستون j قرار دارد، می‌نویسند: $a_{ij} = k$

مثلاً در ماتریس فوق می‌توان نوشت: $a_{۲۳} = ۱$ و $a_{۱۲} = -۳$ و $a_{۲۲} = ۰$ و $a_{۲۱} = ۳$

ماتریس مربعی: اگر تعداد سطر و ستون‌های یک ماتریس برابر باشند، آن ماتریس را مربعی می‌نامند. هر ماتریس مربعی مانند یک چهارضلعی دارای دو قطر است. قطری که درایه‌های a_{ij} برای $i = j$ روی آن قرار دارند را قطر اصلی و دیگری را قطر فرعی می‌نامند.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

قطر فرعی   قطر اصلی   قطر فرعی   قطر اصلی

❖ معرفی چند ماتریس خاص

۱) **ماتریس سطری:** ماتریسی است که فقط یک سطر دارد. مانند ماتریس زیر

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۱ & ۵ \end{bmatrix}_{۱ \times ۴}$$

۲) **ماتریس ستونی:** ماتریسی است که فقط یک ستون دارد. مانند ماتریس زیر

$$B = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}_{۳\times ۱}$$

۳) **ماتریس صفر:** ماتریسی است که همه‌ی درایه‌های آن صفر باشند. مانند ماتریس زیر

$$O = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times ۳}$$

در این فصل ماتریس صفر را با نماد O نمایش می‌دهیم.

۴) **ماتریس قطری:** یک ماتریس مربعی است که همه‌ی درایه‌های خارج از قطر اصلی آن صفر باشند. مانند ماتریس زیر

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

۵) **ماتریس اسکالر:** یک ماتریس قطری است که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر باشند. مانند ماتریس‌های زیر

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

۶) **ماتریس همانی (واحد):** یک ماتریس مربعی می‌باشد که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن یک و بقیه‌ی درایه‌ها صفر هستند.

مانند ماتریس زیر

$$I_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times ۲} \qquad I_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times ۳}$$

برای دریافت کامل فایل یا خرید کتاب به سایت
www.math-pilevar.ir
مراجعه کنید

۷) **ماتریس پایین مثلثی:** یک ماتریس مربعی است که تمام درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر باشند. مانند ماتریس زیر

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۲ & ۰ \\ ۵ & ۶ & ۳ \end{bmatrix}$$

۸) **ماتریس بالا مثلثی:** یک ماتریس مربعی است که تمام درایه‌های پایین قطر اصلی آن صفر باشند. مانند ماتریس زیر

$$C = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

♦ **ماتریس‌های مساوی:** دو ماتریس را مساوی می‌گویند، هرگاه:

الف) هم مرتبه باشند.

ب) درایه‌های متناظر آنها نظیر به نظیر مساوی باشند. یعنی برای هر i و j

$$(A = B \leftrightarrow a_{ij} = b_{ij})$$

♦ **ضرب عدد در یک ماتریس (ضرب اسکالر):** برای ضرب یک عدد در یک ماتریس کافی است آن عدد را در تمام درایه‌های آن ماتریس ضرب کنیم.

♦ اگر تمام درایه‌های یک ماتریس را در عدد ۱− ضرب کنیم. ماتریس حاصل را ماتریس قرینه می‌نامند.

❖ اعمال روی ماتریس‌ها

♦ **جمع ماتریس‌ها:** دو ماتریس را وقتی می‌توان جمع کرد که هم مرتبه باشند. در این صورت درایه‌های نظیر به نظیر با هم جمع می‌شوند.

♦ **تفاضل ماتریس‌ها:** برای تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبه کافی است ماتریس اولی را با قرینه‌ی دومی جمع کنیم.

♦ **ضرب ماتریس‌ها:** دو ماتریس را وقتی می‌توان در هم ضرب کرد که تعداد ستون‌های ماتریس اولی برابر تعداد سطرهای ماتریس

دومی باشد. در این صورت هر درایه‌ی ماتریس حاصل ضرب را به شکل ضرب داخلی تعیین می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۵ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۵ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}_{۲\times ۳}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}_{۳\times ۲}=\begin{bmatrix} ۲(۱)+(-۱)(۲)+۴(۳) & ۲(۳)+(-۱)(۱)+۴(۲) \\ ۵(۱)+۲(۲)+۳(۳) & ۵(۳)+۲(۱)+۳(۲) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۱۲ & ۱۳ \\ ۱۸ & ۲۳ \end{bmatrix}_{۲\times ۲}$$

تذکر ۱. ضرب دو ماتریس خاصیت جابجایی ندارد. زیرا اگر $A\times B$ تعریف شود، ممکن است $B\times A$ قابل تعریف نباشد و ممکن است قابل تعریف باشد ولی حاصل برابر $A\times B$ نشود.

$$A\times B\neq B\times A$$

تذکر ۲. ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد.

$$A(BC)=(AB)C$$

تذکر ۳. ضرب ماتریس‌ها نسبت به جمع آنها توزیع‌پذیر است.

$$A(B+C)=AB+AC$$

تذکر ۴. اگر A یک ماتریس مربعی، I ماتریس همانی و r یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشند. در این صورت:

$$۱)A^{۱}=A \qquad ۲)A^{n}=A^{n-۱}\times A \qquad ۳)I^{n}=I \qquad ۴)(rA)^{n}=r^{n}A^{n}$$

تذکر ۵. خاصیت توزیع‌پذیری ضرب ماتریس‌ها نسبت به جمع ماتریس‌ها

یعنی اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ و $C=[c_{ij}]_{n\times p}$ سه ماتریس باشند. در این صورت

$$A(B+C)=AB+AC$$

تذکر ۶. خاصیت ضرب یک ماتریس در ماتریس واحد هم مرتبه‌ی آن

یعنی اگر A یک ماتریس مربعی مرتبه‌ی n باشد. در این صورت: $AI_n=I_nA=A$

تذکر ۷. خاصیت ضرب دو ماتریس دارای ضریب

یعنی اگر $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times n}$ دو ماتریس، و r و s دو عدد حقیقی باشند. در این صورت $(rA)(sB)=rs(AB)$

توجه. ممکن است حاصل‌ضرب دو ماتریس، ماتریس صفر باشد، ولی هیچکدام از ماتریس‌ها صفر نباشند.

توجه. قاعده‌ی حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد. $AB=AC \not\Rightarrow B=C$

سوالات نهایی

ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۱	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. در ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix} ۰ & -۳ \\ ۲ & ۲k-۱ \end{bmatrix}$، مقدار k برابر .... است.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۲
۲	اگر $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۲x-y \\ ۴ & z \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲x+y & ۳ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix}$ و $A=B$ باشند، حاصل $x^۲-۲y+z$ را به دست آورید.	۱	دی ۱۴۰۲
۳	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. اگر در ماتریس قطری تمام درایه‌های روی قطر اصلی باهم برابر باشند، آن را ماتریس .... می‌نامند.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۲

برای دریافت کامل فایل یا خرید کتاب به سایت
www.math-pilevar.ir
مراجعه کنید

۴	ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x+1 & y+2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید، اگر $A+B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مقادیر x و y را به‌دست آورید.	۰/۵	خرداد ۱۴۰۲
۵	الف) اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & m \\ n & m-2 \end{bmatrix}$ ماتریسی اسکالر باشد، مقادیر m و n را بیابید. ب) اگر $b_{ij} = \begin{cases} i+1 & i=j \\ j-2 & i<j \\ 1 & i>j \end{cases}$ و $B = [b_{ij}]_{3\times 3}$، ماتریس B را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. پ) ماتریس $(B^2 + 2I)$ را محاسبه کنید. (I ماتریس همانی مرتبه سه است)	۲/۲۵	دی ۱۴۰۱
۶	الف: اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 2x-1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، آنگاه مقدار x برابر با.................. است. ب: اگر $A = \begin{bmatrix} m+1 & 2 \\ 5 & 2n+4 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، با محاسبه m و n ماتریس $A+I$ رابیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است).	۲	شهریور ۱۴۰۱
۷	اگر دو ماتریس مربعی B و A به صورت $A = [3i-2j]_{3\times 3}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، الف: ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. ب: ماتریس B^2 را محاسبه کنید.	۱	شهریور ۱۴۰۱
۸	اگر B و A دو ماتریس مربعی مرتبه ۳ و تعویض پذیر باشند، ثابت کنید: $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$	۱	شهریور ۱۴۰۱
۹	عبارت زیر را کامل کنید. اگر ماتریس $\begin{bmatrix} m-1 & r \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد حاصل $m+1$ برابر با.................. است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۱

برای دریافت کامل فایل یا خرید کتاب به سایت
www.math-pilevar.ir
مراجعه کنید

۱۰	اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که $A \times B$ ماتریس قطری باشد.	۱	خرداد ۱۴۰۱
۱۱	ماتریس A مربعی مرتبه سه به صورت $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i=j \\ j & i>j \\ ۰ & i<j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد. الف) ماتریس A را به‌صورت آرایش مستطیلی بنویسید. ب) دترمینان ماتریس B را محاسبه کنید.	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۱
۱۲	جای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون............................... نامیده می‌شود.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۰
۱۳	اگر $A = \begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A = B$ در این صورت حاصل $x+$ $۲y+۳z$ را بدست آورید.	۱/۲۵	دی ۱۴۰۰
۱۴	جای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. ماتریس مربعی که همه درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس .... می‌گویند.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۰
۱۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر A و B دو ماتریس ۳ × ۳ دلخواه باشند آنگاه عبارت $(A+B)^۲ = A^۲ + ۲AB + B^۲$ همواره برقرار است.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۰
۱۶	اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، مقادیر b و a را طوری به دست آورید که حاصلضرب $A \times B$ ماتریس قطری باشد.	۱/۵	شهریور ۱۴۰۰

۱۷	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد، و $rA = rB$ آنگاه داریم $A = B$	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۰
۱۸	دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & m-۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ n+۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ m & ۰ & n \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند، اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل AB را محاسبه کنید.	۱	خرداد ۱۴۰۰
۱۹	حاصل‌ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی	۰/۲۵	دی ۹۹
۲۰	درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر برای ماتریس‌های متمایز A, B, C داشته باشیم $AB = AC$، آنگاه لزوما $B = C$ است.	۰/۲۵	دی ۹۹
۲۱	اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس ۳×۳ با درآیه‌های $a_{ij} = \begin{cases} i-j & i<j \\ ۲ & i=j \\ i+j & i>j \end{cases}$ باشد، درآیه‌های $a_{۱۲}$ و $a_{۳۱}$ و $a_{۳۳}$ را به دست آورید.	۰/۷۵	دی ۹۹
۲۲	مقادیر x, y را از معادله زیر به دست آورید. $[x \quad ۲] \times \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = [۴ \quad y-۲]$	۱	دی ۹۹
۲۳	اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر a, b را طوری بدست آوریدکه $A \times B$ ماتریس قطری باشد.	۱	دی ۹۹
۲۴	جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید. در ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ m-۱ & ۴ \end{bmatrix}$ مقدار m برابر .... است.	۰/۲۵	شهریور ۹۹

۲۵	اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-۱ & ۸ \\ ۳ & z+۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} y+۱ & x-۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ مساوی باشند مقدار $x+y+z$ رابیابید.	۱/۵	شهریور ۹۹
۲۶	معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix} \times [x \quad ۳] = ۰$ راحل کنید.	۱/۲۵	شهریور ۹۹
۲۷	اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۱ & b \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ a & ۲ \end{bmatrix}$، مقادیر b, a را طوری بدست آورید که حاصل ضرب $A\times B$ ماتریس قطری باشد.	۱/۲۵	خرداد ۹۹ خ
۲۸	درستی یا نادرستی گزاره زیر را معلوم کنید. ماتریس مربعی که تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند، ماتریس اسکالر نامیده می‌شود.	۰/۲۵	خرداد ۹۹ خ
۲۹	درجای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. اگر ماتریس A فقط از یک سطر تشکیل شده باشد (فقط دارای یک سطر باشد)آنگاه آن را یک ماتریس .... می‌نامیم.	۰/۲۵	خرداد ۹۹ خ
۳۰	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. اگر ماتریسی قطری باشد وتمام درایه‌های روی قطر اصلی باهم برابر باشند، آن را یک ماتریس......... می‌نامیم.	۰/۲۵	خرداد ۹۹
۳۱	درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در حالت کلی حاصل ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی دارد.	۰/۲۵	خرداد ۹۹
۳۲	در تساوی $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & ۱ \end{bmatrix} = ۰$ مقدار x را بیابید.	۱/۲۵	خرداد ۹۹
۳۳	اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد، $A^{۷}$ را بدست آورید.	۱/۲۵	دی ۹۸

برای دریافت کامل فایل یا خرید کتاب به سایت
www.math-pilevar.ir
مراجعه کنید

۳۴	ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\2&1&0\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}a+b&2&2\\2&2&-1\\2&-1&4a+b\end{bmatrix}$ را در نظربگیرید، مقادیر b,a را چنان بیابید که داشته باشیم: $A^2-B=\overline{O}$ ($\overline{O}$ ماتریس صفر است.)	۱/۲۵	دی ۹۸
۳۵	جای خالی را باعبارت مناسب پرکنید. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{4\times 3}$ که در آن $a_{ij}=\frac{2i}{j-1}$ باشد، درایه‌های واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس A برابر است با	۰/۲۵	دی ۹۸
۳۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. هر ماتریس اسکالر یک ماتریس قطری است.	۰/۲۵	دی ۹۸
۳۷	اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}2x&5\\z&1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}3&2x+y\\-2&1\end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $x+y+z$ رابیابید.	۱/۲۵	شهریور ۹۸
۳۸	در ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ و $a_{ij}=\begin{cases}i-2j & i<j\\ -i+j & i\geq j\end{cases}$ می‌باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A را بدست آورید.	۱	تیر ۹۸
۳۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر برای ماتریس‌های متمایز C,B,A داشته باشیم، $AB=AC$ آنگاه لزوماً $B=C$ است.	۰/۲۵	خرداد ۹۸
۴۰	در معادله ماتریسی $[3x \quad 2]\times\begin{bmatrix}1&-2\\-3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=0$ مقدار x را بیابید.	۱/۲۵	خرداد ۹۸
۴۱	جاهای خالی را یک کلمه مناسب پر کنید. الف: حاصل ضرب ماتریس خاصیت جابجایی .... ب: هر ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن باهم برابر باشند، را ماتریس .... می‌نامند.	۰/۵	دی ۹۷

برای دریافت کامل فایل یا خرید کتاب به سایت
www.math-pilevar.ir
مراجعه کنید

۴۲	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر دوم $A^{۳}$ برابر ۵ می‌باشد. ب) اگر $A^{۲}=A$ باشد، در این صورت داریم: $(A+I)^{۲}=I+۳A$	۱	دی ۹۷
۴۳	اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} ij & i>j \\ i^{۲} & i=j \\ ۲i-j & i<j \end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس $۲A-۳I$ را بدست آورید.	۱/۲۵	دی ۹۷
۴۴	اگر ضرب ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشد، حاصل $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ -x \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x & ۲ & -y \end{bmatrix}$ را بیابید.	۱/۵	دی ۹۷

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

هندسه ۳

درس ۱
ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

۱- $k=\frac{۱}{۲}$ (۲۵.۰) ص ۱۲

۲- ص ۲۰

$z=-۳$ (۰/۲۵)

$$\begin{cases} ۲x-y=۳ \\ ۲x+y=۵ \end{cases} \Rightarrow \underbrace{x=۲, y=۱}_{(۰/۵)} \rightarrow \underbrace{x^۲-۲y+z=-۱}_{(۰/۲۵)}$$

۳- اسکالر (۰/۲۵)

۴- $x=۲ \quad , \quad y=-۱$

۵- الف)

$m-۲=۰ \Rightarrow m=۲ \quad , \quad n=m=۲$

ب)

$$B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

پ)

$$(B^۲+۲I)=\begin{bmatrix} ۵ & ۱ & ۶ \\ ۶ & ۱۰ & ۸ \\ ۷ & ۷ & ۱۸ \end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۶ \\ ۶ & ۱۲ & ۸ \\ ۷ & ۷ & ۲۰ \end{bmatrix}$$

۶- الف: $۲x-۱=۵ \Rightarrow x=۳$

ب:

$$\begin{cases} m+۱=۰ \\ ۲n+۴=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-۱ \\ n=-۲ \end{cases}$$

$$A+I=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix}$$

۷- الف)

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۴ & ۲ & ۰ \\ ۷ & ۵ & ۳ \end{bmatrix}$$

ب)

$$B^۲=B\times B=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۶ \\ -۳ & ۷ & ۶ \\ -۲ & ۲ & ۷ \end{bmatrix}$$

۸-

$$(A-B)^۲=(A-B)(A-B)$$
$$=A^۲-AB-BA+B^۲$$
$$\xrightarrow{AB=BA} A^۲-۲AB+B^۲$$

۹- الف) دو

۱۰-

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۴+۳a & -۸+۲a \\ b-۳ & -۲b-۲ \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ۲a-۸=۰ \Rightarrow a=۴ \\ b-۳=۰ \Rightarrow b=۳ \end{cases}$$

۱۱-

الف) $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۴ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۶ \end{bmatrix}$

ب) $|B|=۳۹$

۱۲- یک ماتریس

۱۳-

$$A=B\Rightarrow \begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x=۳ \\ ۲x+y=۵ \\ z=-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۳}{۲} \\ y=۲ \end{cases}$$
$$\Rightarrow x+۲y+۳z=\frac{-۱}{۲}$$

۱۴- قطری

۱۵- نادرست

۱۶-

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۴+۳a & -۸+۲a\\ b-۳ & -۲b-۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-۸+۲a=۰\Rightarrow a=۴\\ b-۳=۰\Rightarrow b=۳\end{cases}$$

۱۷- درست

۱۸-

$$\begin{cases}m-۲=۰\Rightarrow m=۲\\ n+۱=۰\Rightarrow n=-۱\end{cases}$$

$$AB=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۱\\ ۲ & ۰ & -۱\\ ۳ & -۱ & ۲\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۴ & ۲ & ۲\\ ۶ & ۰ & -۳\\ ۹ & -۳ & ۶\end{bmatrix}$$

۱۹- ندارد

۲۰- نادرست

۲۱- $a_{۳۳}=۲\quad,\quad a_{۳۱}=۳+۱=۴\quad,\quad a_{۱۲}=۱-۲=-۱$

۲۲-

$$\begin{bmatrix}۲x & ۴x-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & y-۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲x=۴ & \Rightarrow x=۲\\ ۴x-۲=y-۲ & \Rightarrow y=۸\end{cases}$$

۲۳-

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴+۳a & -۸+۲a\\ b-۳ & -۲b-۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲a-۸=۰ & ۲a=۸\Rightarrow a=۴\\ b-۳=۰ & \Rightarrow b=۳\end{cases}$$

۲۴- $m=۱$

۲۵-

$$\begin{cases}x-۱=y+۱\\ x-۲=۸\\ z+۱=۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=۱۰, y=۸, z=۳\Rightarrow x+y+z=۲۱$$

۲۶-

$$\begin{bmatrix}x & ۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۱ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\ -۱\end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x-۳ & ۱۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\ -۱\end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow ۳x-۲۱=۰\Rightarrow x=۷$$

۲۷-

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴ & ۲\\ b & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۲ & a\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۱۲ & -۴+۲a\\ ۲b-۲ & -b-a\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-۴+۲a=۰\Rightarrow ۲a=۴\Rightarrow a=۲\\ ۲b-۲=۰\Rightarrow ۲b=۲\Rightarrow b=۱\end{cases}$$

۲۸- نادرست

۲۹- سطری

۳۰- اسکالر

۳۱- نادرست

۳۲-

$$\begin{bmatrix}۱ & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۲+x & ۴+۲x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}$$

$$=۴+۲x+۴+۲x=۰\Rightarrow x=-۲$$

۳۳-

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۲\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۰ & ۲\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & ۰\\ ۰ & -۲\end{bmatrix}$$

$$=-۲\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=-۲I$$

$$A^{۷}=(A^{۲})^{۳}.A=(-۲I)^{۳}.A$$

$$=-۸I^{۳}A=-۸A=-۸\begin{bmatrix}۰ & ۲\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$$

۳۴-

$$A^{۲}=B\Rightarrow\begin{bmatrix}۵ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۲ & -۱\\ ۲ & -۱ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b & ۲ & ۲\\ ۲ & ۲ & -۱\\ ۲ & -۱ & ۴a+b\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=۵ \\ ۴a+b=۵ \end{cases} \Rightarrow a=۰, b=۵$$

۳۵- ۶

۳۶- درست

۳۷-

$$A=B \Rightarrow \begin{cases} ۲x=۳ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲} \\ ۲x+y=۵ \Rightarrow y=۲ \\ z=-۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+y+z=\frac{۳}{۲}+۲+(-۲)=\frac{۳}{۲}$$

۳۸-

$$a_{۱۲}=۱-۲(۲)=-۳$$

$$a_{۲۲}=-۲+۲=۰ \quad , \quad a_{۳۲}=-۳+۲=-۱$$

$$a_{۱۲}+a_{۲۲}+a_{۳۲}=-۳+۰+(-۱)=-۴$$

۳۹- نادرست

۴۰-

$$\begin{bmatrix} ۳x-۶ & -۶x+۱۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow -۳x+۶-۶x+۱۲=۰$$

$$\Rightarrow -۹x+۱۸=۰ \Rightarrow x=۲$$

۴۱- الف: ندارد. ب: اسکالر

۴۲- الف: نادرست ب: درست

۴۳-

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۶ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$۲A-۳I=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۴ & ۸ & ۲ \\ ۶ & ۱۲ & ۱۸ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۲ \\ ۴ & ۵ & ۲ \\ ۶ & ۱۲ & ۱۵ \end{bmatrix}$$

۴۴-

$$A\times B=\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۴x+۳y & ۳x+۴y \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۴x+۶ & ۴y-۳ \\ ۳x+۸ & ۳y-۴ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=B\times A \Rightarrow \begin{cases} ۳x+۸=۵ \Rightarrow x=-۱ \\ ۳y-۴=۲ \Rightarrow y=۲ \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x & ۲ & -y \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ -x \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = -۳+۴-۲=-۱$$