بسم الله الرحمن الرحیم

سوالات موضوعی نهایی

ریاضیات گسسته

(۲۰ دوره سوال نهایی)

مؤلفین:

رقیه پیله‌ور نیار

میکائیل صدقی

تقدیم به

دبیران فرهیخته‌ی ریاضی

و دانش‌آموزان برتر

و روح بلند مریم میرزاخانی

برای دریافت کامل فایل یا خرید کتاب به سایت
www.math-pilevar.ir
مراجعه کنید

فهرست مطالب

مقدمه

سپاس بی‌کران خداوندی را که انسان را آفرید و او را به زیور علم آراست شاکریم این توفیق را یافتیم مجموعه سوالات موضوعی نهایی ریاضیات گسسته را به صورت کتاب در آوریم. استفاده گسترده دانش‌آموزان و همکاران از این مجموعه سوالات و تشویق برخی همکاران مشوق ما در این راه بود.

کتاب حاضر شامل ۲۰ دوره سوالات نهایی ریاضیات گسسته از دی ۱۳۹۷ تا دی ۱۴۰۲ می‌باشد. مهمترین ویژگی منحصربه‌فرد این کتاب دسته‌بندی سوالات نهایی منطبق بر موضوعات کتاب درسی می‌باشد.

سوالات درس به درس تفکیک شده و به همراه نمره و تاریخ برگزاری آزمون دسته‌بندی شده است.

در ابتدای هر درس خلاصه درسنامه‌ای از کتاب برای یادآوری مطالب و فرمول‌ها آورده شده است.

حل سوالات نهایی سال‌های گذشته به ارتقاء نمره نهایی شما عزیزان کمک خواهد کرد.

توصیه ما به شما عزیزان این است که اول کتاب درسی یا جزوه دبیرتان را با دقت بخوانید سپس به سراغ حل سوالات این کتاب بروید.

تا علاوه بر تمرین و تکرار مطالب کتاب، مفاهیم نیز در ذهنتان تثبیت شود.

نتیجه‌گیری از ریاضی سخت نیست کافی است سخت‌کوش باشید.

سخنی با همکاران و اساتید محترم ریاضی

همکار عزیز از این که کتاب حاضر را به عنوان مرجع کلاس خود انتخاب کرده‌اید به خود می‌بالیم شما می‌توانید با توجه به روند تدریس‌تان در کلاس درس، با اتمام هر درس سوالات مربوط به همان درس را به عنوان تکلیف به دانش‌آموزان بدهید. یا خودتان با توجه به زمان کلاس تعدادی از سوالات را حین تدریس در کلاس حل کنید. تجربه ما در حل این سوالات در کلاس درس یا مهمتر از آن در طول سال تحصیلی، تکلیف کردن حل این سوالات در منزل، ارتقا نمره نهایی دانش‌آموزان را ثابت کرده است.

از شما همکاران فرهیخته و دانشمند تقاضا داریم که کاستی یا نقایص کتاب و حتی غلط‌های املایی و چاپی را به ما در سایت math-pilevar.ir اطلاع دهید تا در چاپ‌های بعدی مرتفع گردد.

با تشکر: پیله‌ور - صدقی

نمونه سوالات نهایی که در این کتاب به صورت موضوعی تفکیک شده است عبارتند از:

۱	دی ۹۷
۲	خرداد ۹۸
۳	خرداد ۹۸ خارج از کشور
۴	تیر ۹۸
۵	شهریور ۹۸
۶	دی ۹۸
۷	خرداد ۹۹
۸	خرداد ۹۹ خارج از کشور
۹	شهریور ۹۹
۱۰	دی ۹۹
۱۱	خرداد ۱۴۰۰
۱۲	شهریور ۱۴۰۰
۱۳	دی ۱۴۰۰
۱۴	خرداد ۱۴۰۱
۱۵	خرداد ۱۴۰۱ خارج از کشور
۱۶	شهریور ۱۴۰۱
۱۷	دی ۱۴۰۱
۱۸	خرداد ۱۴۰۲
۱۹	شهریور ۱۴۰۲
۱۹	دی ۱۴۰۲

۱

آشنایی با نظریه اعداد

درس ۱ استدلال ریاضی

خلاصه درسنامه

❖ استدلال ریاضی:

۱. اثبات مستقیم

۲. اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها

۳. برهان خلف

۴. مثال نقض

۵. اثبات بازگشتی

۱- اثبات مستقیم: اثبات‌هایی که در آنها بطور مستقیم از فرض شروع کنیم و با توجه به اطلاعات قبلی به حکم برسیم اثبات‌های مستقیم نامیده می‌شوند.

مثال

ثابت کنید مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

$$n+(n+۱)+(n+۲)=۳n+۳=۳(n+۱)$$

...

۲- اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها: گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همه موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم این نوع اثبات را اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها می‌گویند.

مثال

ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، $n^۲ - ۵n + ۷$ عددی فرد است.

حالت اول: فرض می‌کنیم n زوج است پس $n = ۲k$، $(k \in \mathbb{N})$

$$n^۲ - ۵n + ۷ = (۲k)^۲ - ۵(۲k) + ۷ = ۴k^۲ - ۱۰k + ۶ + ۱ = ۲(\underbrace{۲k^۲ - ۵k + ۳}_{k'}) + ۱ = ۲k' + ۱$$

حالت دوم: فرض می‌کنیم n فرد است پس $n = ۲k - ۱$، $(k \in \mathbb{N})$

$$n^۲ - ۵n + ۷ = (۲k - ۱)^۲ - ۵(۲k - ۱) + ۷ = ۴k^۲ - ۴k + ۱ - ۱۰k + ۵ + ۷$$

$$= ۴k^۲ - ۱۴k + ۱۳ = ۲(\underbrace{۲k^۲ - ۷k + ۶}_{k''}) + ۱ = ۲k'' + ۱$$

که باز هم حاصل یک عدد فرد است.

۳- برهان خلف (اثبات غیرمستقیم): گاهی برای اثبات یک گزاره، فرض می‌کنیم حکم نادرست است و به یک نتیجه غیرممکن و یا یک نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم پس فرض نادرست بودن حکم باطل بوده و درستی حکم ثابت می‌شود. این نوع اثبات را اثبات به روش برهان خلف یا غیرمستقیم می‌گوییم.

مثال

ثابت کنید برای هر عدد صحیح n، اگر $n^۲$ زوج باشد n نیز زوج است.

حل: فرض می‌کنیم n زوج نباشد (فرض خلف) پس فرد است در این صورت $n = ۲k + ۱$

$$n^۲ = (۲k + ۱)^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = ۲(\underbrace{۲k^۲ + ۲k}_{k'}) + ۱ = ۲k' + ۱ \quad \text{فرد}$$

و این متناقض با فرض مسئله است زیرا طبق فرض $n^۲$ زوج است پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۴- مثال نقض: به مثالی که برای رد کردن یک حکم کلی به کار می‌رود، مثال نقض می‌گویند. (به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است.)

مثال

برای حکم کلی زیر یک مثال نقض بیاورید.

«همه اعداد اول فرد هستند».

مثال نقض: عدد ۲ اول و زوج است.

۵- اثبات بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز): گاهی برای اثبات بعضی قضیه‌ها از حکم استفاده می‌کنیم و به یک نتیجه مطلق و درست می‌رسیم و برای تکمیل اثبات باید نشان دهیم که تمام مراحل انجام شده بازگشت‌پذیر هستند این نوع اثبات را اثبات بازگشتی می‌گوییم.

مثال

اگر $a > ۰$ ثابت کنید $a + \frac{۱}{a} \geq ۲$.

$$a + \frac{۱}{a} \geq ۲ \Leftrightarrow \frac{a^۲ + ۱}{a} \geq ۲ \Leftrightarrow a^۲ + ۱ \geq ۲a \Leftrightarrow a^۲ - ۲a + ۱ \geq ۰ \Leftrightarrow (a - ۱)^۲ \geq ۰$$

یک عبارت همیشه درست

سوالات نهایی

ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۱	در هر یک از موارد زیر، گزاره درست را اثبات و گزاره نادرست را با ارائه مثال نقض، رد کنید. الف) با اضافه کردن یک واحد به حاصل‌ضرب دو عدد زوج متوالی، حاصل، مربع کامل است. ب) حاصل‌ضرب هر عدد گویا در عدد گنگ، همواره عددی گنگ است.	۱/۵	دی ۱۴۰۲
۲	ثابت کنید مجموع مربعات هر دو عدد حقیقی همواره از قرینه حاصل‌ضرب آن‌ها کمتر نیست.	۱/۵	دی ۱۴۰۲

۳	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) حاصل‌ضرب هر عدد گویا، در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۲
۴	برای هر دو عدد حقیقی x و y، به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) نشان دهید: $۲x^۲ + ۲xy + y^۲ \geq ۴x - ۴$	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۲
۵	درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۲
۶	اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $x^۲ + y^۲ + ۱ \geq ۲xy - z^۲$	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۲
۷	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید: الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{۱}{x}$ نیز عددی گنگ است. ب) برای مقادیر حقیقی و ناصفر a و b به شرط آنکه $a + b \neq ۰$ تساوی $\frac{۱}{a+b} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}$ برقرار است.	۰/۵	دی ۱۴۰۱
۸	گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید: «برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $y^۲ + ۱ \geq -۲x(y + x + ۱)$»	۱	دی ۱۴۰۱
۹	هر یک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض کنید. الف: برای هر عدد طبیعی n، عدد $۲^n + ۱$ اول است. ب: مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.	۱	شهریور ۱۴۰۱

۱۰	اعدادی صحیحی هستند و $b_۳, b_۲, b_۱$ هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_۱ - b_۱)(a_۲ - b_۲)(a_۳ - b_۳)$ عددی زوج است. $a_۳, a_۲, a_۱$	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۱
۱۱	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) اگر $a > ۰$ باشد، آنگاه $a + \frac{۱}{a} \geq ۲$. پ) مربع هر عدد فرد، فرد است. ت) عدد حقیقی مانند x وجود دارد که $x^۳ < x^۲$.	۱	خرداد ۱۴۰۱ خ
۱۲	اگر n عددی فرد باشد، ثابت کنید $n^۲ - ۵n + ۷$ نیز عددی فرد است.	۱	خرداد ۱۴۰۱ خ
۱۳	ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج n، $n^۲ - ۵n + ۷$ عددی فرد است.	۱	خرداد ۱۴۰۱
۱۴	عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف) حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی (گویا، گنگ) است.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۰
۱۵	اگر α, β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.	۱/۵	دی ۱۴۰۰
۱۶	ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.	۱	شهریور ۱۴۰۰
۱۷	درست یا نادرست بودن گزاره زیر را مشخص کنید. هیچ عدد صحیحی مانند x, y وجود ندارد که رابطه $x^۲ + y^۲ = (x + y)^۲$ برقرار باشد.	۰/۵	خرداد ۱۴۰۰

۱۸	به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچکتر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است.	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۰
۱۹	گزاره درست را مشخص کرده و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه کنید. برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱، عدد $۲^n - ۱$ اول است.	۰/۲۵	دی ۹۹
۲۰	اگر α, β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.	۱/۵	دی ۹۹
۲۱	گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید. الف: مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب: اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.	۱/۷۵	خرداد ۹۹
۲۲	اگر x, y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq ۲$	۱	خرداد ۹۹
۲۳	با استفاده از روش برهان خلف، ثابت کنید اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{۱}{x}$ نیز عددی گنگ است.	۱	خرداد ۹۹ خ
۲۴	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید. الف: برای هر دو عدد حقیقی x, y داریم: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ ب: اگر a, b دو عدد حقیقی باشند و $ab = ۰$ آنگاه $a = ۰$ یا $b = ۰$ پ: اگر a, b داریم: $a < b \Leftrightarrow a^۲ < b^۲$ ت: حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.	۱	شهریور ۹۹
۲۵	ثابت کنید اگر a, b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$	۱/۲۵	شهریور ۹۹
۲۶	ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.	۱	خرداد ۹۸

۲۷	گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره هم‌ارز) ثابت کنید. برای هر دو عدد حقیقی نشان دهید: $x^۲ + y^۲ + ۱ \geq xy + x + y$	۱	خرداد ۹۸ خ
۲۸	اگر a, b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^۲ + b^۲$ زوج است.	۱	خرداد ۹۸ خ
۲۹	ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.	۱/۲۵	تیر ۹۸
۳۰	گزاره ی زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم ارز) ثابت کنید. برای هر عدد حقیقی $a > ۰$ داریم: $a + \frac{۱}{a} \geq ۲$	۱	تیر و دی ۹۸
۳۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید. الف: مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. ب: برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از یک، عدد $۲^n - ۱$ اول است.	۰/۵	شهریور ۹۸
۳۲	برای هر سه عدد حقیقی x, y, z ثابت کنید. $x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq xy + yz + xz$	۱/۵	شهریور ۹۸
۳۳	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $۴k + ۱$ مربع کامل است.	۰/۲۵	دی ۹۷
۳۴	اگر α, β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد. ثابت کنید $\alpha + ۲\beta$ گنگ است.	۱/۲۵	دی ۹۷
۳۵	گزاره ی زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم ارز) ثابت کنید. برای هردو عدد حقیقی x, y داریم: $x^۲ + y^۲ + ۱ \geq xy + x + y$	۱	دی ۹۷

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

ریاضیات گسسته

درس ۱ استدلال ریاضی

۱- الف) درست (۰/۲۵)

$$\underbrace{2k\times(2k+2)+1}_{(0/25)}=\underbrace{4k^2+4k+1=(2k+1)^2}_{(0/25)}$$

(مشابه قسمت ج کار در کلاس صفحه ۳)

ب) نادرست (۰/۲۵)

با در نظر گرفتن صفر به عنوان عدد گویا (۰/۲۵) و انتخاب هر عدد گنگی، حاصل‌ضرب صفر است که گویا می شود. (۰/۲۵)

(مشابه مثال آخر صفحه ۵)

۲- مثال ۳ صفحه ۷

$$\underbrace{a^2+b^2\ge -ab}_{(0/25)}\leftrightarrow\underbrace{a^2+b^2+ab\ge 0}_{(0/25)}$$

$$\leftrightarrow\underbrace{2a^2+2b^2+2ab\ge 0}_{(0/25)}$$

$$\leftrightarrow\underbrace{a^2+b^2+(a^2+b^2+2ab)\ge 0}_{(0/25)}$$

$$\leftrightarrow\underbrace{a^2+b^2+(a+b)^2\ge 0\ \text{همواره برقرار}}_{(0/25)}$$

۳- نادرست (۰/۲۵) (ص ۵)

۴- $2x^2+2xy+y^2\ge 4x-4$

$$\leftrightarrow\underbrace{x^2+2xy+y^2}_{(0/25)}+\underbrace{x^2-4x+4}_{(0/25)}\ge 0$$

$$\underbrace{(x+y)^2}_{(0/25)}+\underbrace{(x-2)^2}_{(0/25)}\ge 0$$

این رابطه‌همواره برقرار است (۰/۲۵)

۵- درست

۶- $x^2+y^2+1\ge 2xy-z^2$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy+z^2+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+z^2+1\ge 0$$ همواره بدیهی است

۷- الف) درست ب) نادرست

۸- $y^2+1\ge -2x(y+x+1)$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy+x^2+2x+1\ge 0$$

$$\Longleftrightarrow (x+1)^2+(x+y)^2\ge 0$$

$\Rightarrow$ این رابطه بازگشتی همواره بدیهی است

۹- الف: نادرست، مثال نقض $n=3$ (مشابه کار در کلاس صفحه ۳)

ب: درست، اثبات

$$a=2k+1$$

$$\Rightarrow a^2=(2k+1)^2=2\underbrace{(2k^2+2k)}_{k'}+1=2k'+1$$

۱۰- اگر $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است.

پس هر سه عامل (a_3-b_3) و (a_2-b_2) و (a_1-b_1) هم باید فرد باشند.

در نتیجه مجموع آنها هم باید فرد باشد.

اما با توجه به فرض مسئله: مجموع این سه عبارت برابر صفر است که عددی زوج است،

با توجه با تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۱۱- الف: نادرست

ب: درست

پ: درست

ت: درست

۱۲-

$$n=2k-1$$

$$\Rightarrow (2k-1)^2-5(2k-1)+7$$

$$=4k^2-4k+1-10k+5+7=4k^2-14k+13$$

$$=2\underbrace{(2k^2-7k+6)}_{k'}+1=2k'+1$$

۱۳- (مثال صفحه ۴)

$$n=2k \Rightarrow n^2-5n+7=4k^2-10k+6+1$$
$$=2\underbrace{\left(2k^2-5k+3\right)}_{q}+1=2q+1$$

۱۴- گنگ

۱۵- فرض خلف: $\alpha-\beta$ گویاست.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha-\beta=m\in Q\\ \alpha+\beta=n\in Q\end{array}\right\}\Rightarrow 2\alpha=m+n$$
$$\Rightarrow \alpha=\frac{m+n}{2}\Rightarrow \alpha\in Q$$ تناقض با فرض

۱۶- فرض کنید r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد، نشان می‌دهیم $x+r$ یک عدد گنگ است. فرض کنید که $x+r$ گنگ نباشد (فرض خلف). بنابراین عددی گویا است. از طرفی می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، گویاست. پس تفاضل $x+r$ و r باید عددی گویا باشد. یعنی $(r+x-r)\in Q$ و از آنجا $x\in Q$ که با فرض ما در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌گردد.

۱۷- نادرست

۱۸-

$$xy\le\frac{x^2+y^2}{2}\Leftrightarrow 2xy\le x^2+y^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0$$ گزاره همواره درست

۱۹- نادرست

۲۰- فرض خلف: $\alpha-\beta$ گویاست.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha-\beta=m\in Q\\ \alpha+\beta=n\in Q\end{array}\right\}\Rightarrow 2\alpha=m+n \Rightarrow \alpha=\frac{m+n}{2}$$
$$\Rightarrow \alpha\in Q$$ تناقض با فرض

۲۱- الف: نادرست

$\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}\in Q^c$ ، $\sqrt{2}+\left(-\sqrt{2}\right)=0\notin Q^c$

ب: درست

$$(2k+1)^2-1=4k^2+4k+1-1$$
$$=4\underbrace{k(k+1)}_{2q}=4\times 2q=8q$$

۲۲-

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2\Leftrightarrow\frac{x^2+y^2}{xy}\ge 2$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2\ge 2xy$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0$$

چون رابطه آخر همواره درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مساله درست است.

۲۳- فرض خلف: فرض کنید $\frac{1}{x}$ گنگ نباشد پس گویاست و

$$\frac{1}{x}=\frac{a}{b}, a,b\in Z, a,b\neq 0$$

با معکوس کردن این تساوی داریم:

$x=\frac{b}{a}$، پس x هم گویاست که این با فرض گنگ بودن x در تناقض است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۲۴- الف: نادرست ب: درست پ: نادرست ت: نادرست

۲۵-

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b\ge 2\sqrt{ab}$$
$$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\ge 0$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0$$

نابرابری آخر برای a,b نامنفی همیشه درست است. اثبات بازگشتی و حکم برقرار است.

۲۶- اگر دو عدد نامنفی باشند، حکم چنین خواهد بود $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b\ge 2\sqrt{ab}$$
$$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\ge 0$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0$$

چون تمام مراحل اثبات، بازگشت پذیر هستند لذا حکم درست است.

۲۷-

$$2x^2+2y^2+2\ge 2xy+2x+2y$$
$$\Leftrightarrow\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2-2y+1\right)$$

$$+\left(x^2-2xy+y^2\right)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2\geq 0$$

نامساوی بدست آمده همیشه درست است. چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، پس حکم مسئله درست است.

۲۸- با توجه به فرد بودن عدد ab نتیجه می‌گیریم هر دو عدد a , b فرد هستند، لذا با فرض صحیح بودن اعداد m و n می‌توان در نظر گرفت $a=2n-1$ و $b=2m-1$ بنابراین:

$$a^2+b^2=(2n-1)^2+(2m-1)^2$$
$$=4n^2-4n+1+4m^2-4m+1$$
$$=2\underbrace{\left(2n^2-2n+2m^2-2m+1\right)}_{k}=2k \qquad (k\in Z)$$

پس a^2+b^2 یک عدد زوج است.

۲۹- فرض کنید r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد، نشان می‌دهیم $x+r$ یک عدد گنگ است. فرض کنید که $x+r$ گنگ نباشد(فرض خلف). بنابراین عددی گویا است.از طرفی می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، گویاست. پس تفاضل $x+r$ و r باید عددی گویا باشد. یعنی $(r+x-r)\in Q$ و از آنجا $x\in Q$ که با فرض ما در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌گردد.

۳۰-

$$a+\frac{1}{a}\geq 2\Leftrightarrow a^2+1\geq 2a$$
$$\Leftrightarrow a^2-2a+1\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a-1)^2\geq 0$$

چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسئله درست است.

۳۱- الف: درست ب: نادرست

۳۲- ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz$$
$$\overset{\times 2}{\Longleftrightarrow} 2x^2+2y^2+2z^2\geq 2xy+2yz+2xz\Leftrightarrow$$
$$\left(x^2-2xy+y^2\right)+\left(y^2-2yz+z^2\right)$$
$$+\left(x^2-2xz+z^2\right)\geq 0\Leftrightarrow$$
$$(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\geq 0$$ همیشه درست

چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسئله درست است.

۳۳- درست

۳۴- اگر $\alpha+2\beta$ گنگ نباشد(فرض خلف) پس عددی گویا است. از طرفی طبق فرض $\alpha+\beta$ نیز عددی گویا است. می دانیم که تفاضل دو عدد گویا، گویا است. در نتیجه: $(\alpha+2\beta)-(\alpha+\beta)=\beta\in Q$
اما با توجه به فرض مسئله β گنگ است. با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۳۵- ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$x^2+y^2+1\geq xy+x+y$$
$$\overset{\times 2}{\Longleftrightarrow} 2x^2+2y^2+2\geq 2xy+2x+2y$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-2xy+y^2\right)+\left(x^2-2x+1\right)$$
$$+\left(y^2-2y+1\right)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\geq 0$$

همیشه درست

چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسئله درست است.