

بخور جانم!
برات خوبه!

۶

سوالات
موضوعی
نهایی
(سمن)



۷

هندسه ۳

Mathematics . Discrete Mathematics
ics . Discrete Mathematics . Discrete

۸

۹

مجموعه سوالات نهایی هندسه ۳
پایه دوازدهم رشته ریاضی فیزیک

یاسخ
تشریحی

رقیه پيله ور - میکائیل صدقی

بِسْمِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

سوالات موضوعی نهایی (سمن)

هندسه ۳

(۲۷ دوره سوال نهایی)

math-pilevar.ir

مؤلفین:

رقیه پیلهور نیار

میکائیل صدقی

سرشناسه	: پيله‌ور نيار، رقيه، ۱۳۶۰-
عنوان و نام پديدآور	: سوالات موضوعی نهایی هندسه ۳/مolfین رقيه پيله‌ور نيار، ميكائيل صدقي.
مشخصات نشر	: اردبيل: گونش نگار، ۱۴۰۵.
مشخصات ظاهري	: ۱۲۶ ص.: جدول، نمودار؛ ۲۲ × ۲۹ س.م.
شابک	: ۹۷۸-۶۲۲-۵۵۱۳-۴۸-۸:
وضعیت فهرست نویسی	: فيپای مختصر
شناسه افزوده	: صدقي، ميكائيل، ۱۳۵۳-
شماره کتابشناسی ملی	: ۹۳۶۰۸۶۴:
اطلاعات رکورد کتابشناسی	: فيپا



نام کتاب	: سوالات موضوعی نهایی هندسه ۳
مolfین	: رقيه پيله‌ور و ميكائيل صدقي
ناشر	: انتشارات گونش نگار
طراح روجلد	: رباب حامدسلطانی
رسم نمودارها	: رقيه پيله‌ور و سحر طالبي
نوبت چاپ	: ویرایش چهارم، ۱۴۰۵
تیراژ	: ۱۰۰۰ جلد
قیمت	: ۷۵۰۰۰۰۰ ریال
شابک	: ۹۷۸-۶۲۲-۵۵۱۳-۴۸-۸:

آدرس: اردبیل، اول خیابان دانشگاه، روبروی اداره مخابرات، انتشارات گونش نگار

۰۹۱۴۳۵۸۵۶۲۸ — ۰۴۵ — ۳۳۵۲۳۳۵۹

www.gunashnegarpub.ir

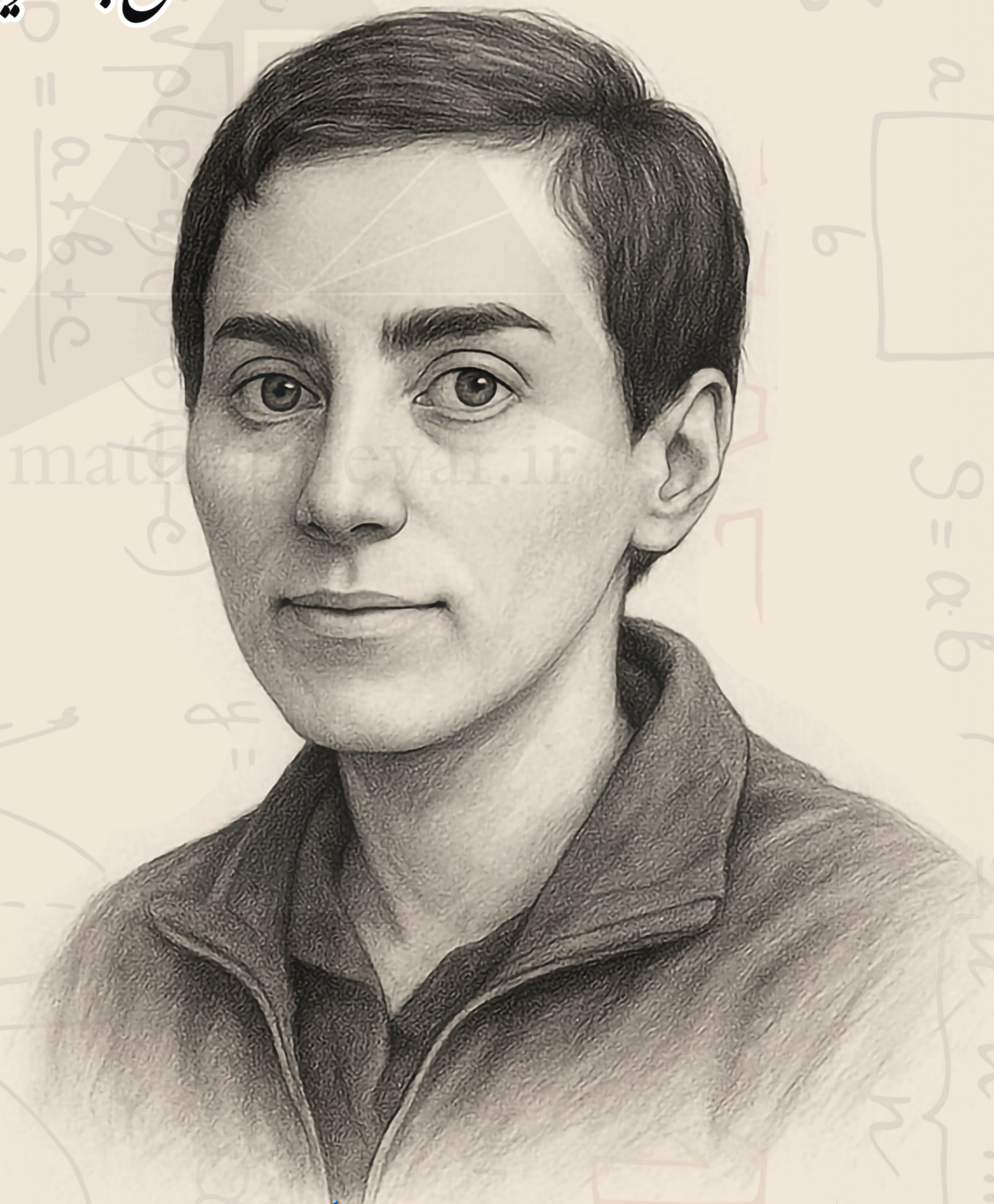
کلیه حقوق قانونی، مادی و معنوی برای مolfین و ناشر محفوظ است هیچ شخص حقوقی یا حقیقی حق تکثیر تمام یا قسمتی از این مجموعه را ندارد، در صورت مشاهده تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

تقديم به

دبيران فرهنگتهى رياضى

ودانش آموزان برتر

ودروح بلندمريم ميرزاخانسر



فهرست مطالب

۵	مقدمه
۷	۱ ماتریس و کاربردها
۸	 ماتریس و اعمال روی ماتریس ها
۸	 ماتریس
۲۱	 وارون ماتریس و دترمینان
۳۷	۲ آشنایی با مقاطع مخروطی
۳۸	 مقاطع مخروطی
۴۳	 دایره
۵۴	 بیضی
۶۴	 سهمی
۷۱	۳ بردارها
۷۲	 معرفی فضای R^3
۸۰	 ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها
۱۳۱	سوالات آزمون هماهنگ کشوری شهریور ۱۴۰۵ صبح
۱۴۱	سوالات آزمون هماهنگ کشوری شهریور ۱۴۰۵ عصر

مقدمه

کتابی که اکنون در دست دارید، حاصل سال‌ها تدریس، تجربه، تلاش مستمر، و همراهی صمیمانه با دانش‌آموزانی است که در مسیر امتحانات نهایی گام برداشته‌اند. آنچه پیش رو دارید، جامع‌ترین مجموعه‌ی سوالات نهایی هندسه ۳ پایه دوازدهم است؛ مجموعه‌ای که تمام سوالات رسمی برگزارشده از نخستین آزمون تا آخرین دوره (دی ۹۷ تا شهریور ۱۴۰۵) را بدون حذف، به‌صورت منظم، دسته‌بندی‌شده و درس‌به‌درس گردآوری کرده‌ایم تا دانش‌آموز با یک منبع کامل و مطمئن روبه‌رو باشد.

این مجموعه، برخاسته از دل کلاس‌های درس است. سال‌ها سوالات را به‌صورت جزوه‌های کلاسی حل و بررسی می‌کردیم، و تجربه نشان داد که کار با سوالات واقعی نهایی، مؤثرترین راه برای کسب نمره‌ی عالی است. با پیشنهاد همکاران ارجمند، این جزوه‌ها شکل کتاب به خود گرفت و خوشبختانه، در دو سال گذشته، با استقبال کم‌نظیری از سوی دبیران و دانش‌آموزان در سراسر کشور همراه شد. همین همراهی ارزشمند، انگیزه‌ای شد تا کتاب را در چاپ‌های بعدی با چینش بهتر، درس‌نامه‌های خلاصه و کاربردی، و طبقه‌بندی دقیق‌تر بازنگری و کامل‌تر کنیم.

در اینجا باید بر نکته‌ای کلیدی تأکید کنم:

به جرأت می‌توانم بگویم این مجموعه، تنها کتابی‌ست که تمام دانش‌آموزان، با هر سطح علمی و در هر نوع مدرسه‌ای، به آن نیاز دارند. تفاوتی ندارد که در مدرسه‌ای هیأت امنایی، نمونه دولتی، تیزهوشان یا عادی تحصیل می‌کنید؛ تأثیر نمرات نهایی در رتبه‌ی کنکور و تراز علمی برای همگان یکسان است. بنابراین، داشتن منبعی کامل از سوالات نهایی، نه یک انتخاب، بلکه یک ضرورت آموزشی برای همه دانش‌آموزان محسوب می‌شود. دانش‌آموز عزیز، این کتاب تنها یک مجموعه‌ی سوال نیست؛ نقشه‌ی راهی برای آمادگی کامل، مرور هدفمند، کاهش اضطراب امتحان و رسیدن به نتیجه‌ای مطلوب است. سوالات به ترتیب موضوعات کتاب درسی، همراه با نمره‌بندی، تاریخ برگزاری و نکات مهم جمع‌بندی شده‌اند تا مسیر یادگیری برایت هموارتر شود.

همکار محترم، این کتاب می‌تواند همراه آموزشی مؤثری در کلاس درس باشد. با توجه به ساختار منظم آن، می‌توانید از سوالات به‌عنوان تمرین، آزمون کلاسی، یا تکالیف هدفمند استفاده کنید. بی‌شک، حل این سوالات به‌صورت مستمر در طول سال تحصیلی، نقش مؤثری در ارتقای سطح علمی دانش‌آموزان دارد. در پایان، از همه‌ی همکاران فرهیخته‌ای که با انتخاب این مجموعه به‌عنوان مرجع کلاس خود، به ما اعتماد کردند، صمیمانه سپاس‌گزاریم. این همراهی ارزشمند، دلگرمی بزرگی در مسیر تألیف و ارتقای کیفیت این اثر بوده است.

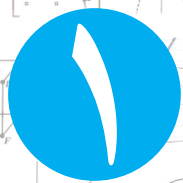
در صورت مشاهده‌ی هرگونه اشکال، پیشنهاد یا اصلاح، لطفاً از طریق وبسایت math-pilevar.ir ما را در جریان بگذارید تا در چاپ‌های آینده بهبودهای لازم اعمال گردد.

با تشکر: پيله‌ور - صدقی



نمونه سوالات نهایی که در این کتاب به صورت موضوعی تفکیک شده است عبارتند از:

دی ۹۷	۱
خرداد ۹۸	۲
تیر ۹۸	۳
شهریور ۹۸	۴
دی ۹۸	۵
خرداد ۹۹	۶
خرداد ۹۹ خارج از کشور	۷
شهریور ۹۹	۸
دی ۹۹	۹
خرداد ۱۴۰۰	۱۰
شهریور ۱۴۰۰	۱۱
دی ۱۴۰۰	۱۲
خرداد ۱۴۰۱	۱۳
شهریور ۱۴۰۱	۱۴
دی ۱۴۰۱	۱۵
خرداد ۱۴۰۲	۱۶
شهریور ۱۴۰۲	۱۷
دی ۱۴۰۲	۱۸
خرداد ۱۴۰۳	۱۹
شهریور ۱۴۰۳	۲۰
دی ۱۴۰۳	۲۱
خرداد ۱۴۰۴	۲۲
شهریور ۱۴۰۴	۲۳
دی ۱۴۰۴	۲۴
تیر و مرداد ۱۴۰۵	۲۵



ماتریس و کاربردها

- ۸ ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها
- ۸ ماتریس
- ۲۱ وارون ماتریس و دترمینان



درس

۱

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

خلاصه درسنامه

ماتریس



- هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی را که شامل تعدادی سطر و ستون باشد یک ماتریس می‌گوییم.
- هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایه آن ماتریس می‌گوییم.
- در حالت کلی اگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون باشد آن را به صورت $A_{m \times n}$ نمایش می‌دهیم و می‌گوییم A ماتریسی از مرتبه $m \times n$ است.
- برای هر درایه ماتریس دو اندیس تعریف می‌کنیم که اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستون آن را مشخص می‌کند به عبارت دیگر a_{ij} یعنی درایه روی سطر i ام و ستون j ام.
- اگر ماتریس A را به صورت $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ نمایش دهیم در این صورت به a_{ij} ، درایه عمومی ماتریس A می‌گوییم که در آن $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ تغییر می‌کند.

مثال

اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ ماتریس 3×4 باشد به طوری که برای $i = j$ داشته باشیم $a_{ij} = 7$ و برای $i > j$ داشته باشیم $a_{ij} = i + j$ و برای $i < j$ داشته باشیم $a_{ij} = i^2$ ، در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j & i > j \\ 7 & i = j \\ i^2 & i < j \end{cases}$$

عبارت سوال را به صورت مقابل خلاصه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

درایه‌های a_{11} ، a_{22} و a_{33} که در آن‌ها $i = j$ است برابر ۷ می‌باشند.

درایه‌های a_{12} ، a_{13} ، a_{14} ، a_{23} ، a_{24} و a_{34} که در آن‌ها $i < j$ است برابر i^2 می‌باشند.

درایه‌های a_{21} ، a_{31} و a_{32} که در آن‌ها $i > j$ است برابر $i + j$ می‌باشند.

مثال

اگر ماتریس A به صورت $A = [3i - 2j]_{3 \times 3}$ باشد آن را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

$$A = \begin{bmatrix} 3-2 & 3-4 & 3-6 \\ 6-2 & 6-4 & 6-6 \\ 9-2 & 9-4 & 9-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال

ماتریس A به صورت $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i + j & i = j \\ j & i > j \\ 0 & i < j \end{cases}$ است. این ماتریس را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

در درایه‌های a_{11} ، a_{22} و a_{33} ، $i = j$ است.

در درایه‌های a_{12} ، a_{13} و a_{23} ، $i < j$ است.

در درایه‌های a_{21} ، a_{31} و a_{32} ، $i > j$ است.

مثال

اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس 3×3 با درایه‌های $a_{ij} = \begin{cases} i-j & i < j \\ 2 & i = j \\ i+j & i > j \end{cases}$ باشد. درایه‌های a_{33} ، a_{31} و a_{12} را به دست آورید.

$$\begin{cases} a_{33} \xrightarrow{i=j} 2 \\ a_{31} \xrightarrow{i>j} 3+1=4 \\ a_{12} \xrightarrow{i<j} 1-2=-1 \end{cases}$$

مثال

در ماتریس $A = [a_{ij}]_{4 \times 3}$ که در آن $a_{ij} = \frac{2i}{j+1}$ باشد، درایه واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس A را بیابید.

ما به دنبال درایه a_{32} هستیم، پس:

$$a_{32} = \frac{2(3)}{2+1} = \frac{6}{3} = 2$$

معرفی چند ماتریس



- ۱) ماتریس مربعی: اگر در یک ماتریس تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد آن را یک ماتریس مربعی مرتبه n می‌گوییم.
- ۲) ماتریس سطری: اگر یک ماتریس فقط از یک سطر تشکیل شده باشد آن را یک ماتریس سطری می‌گوییم.
- ۳) ماتریس ستونی: اگر یک ماتریس فقط از یک ستون تشکیل شده باشد آن را یک ماتریس ستونی می‌گوییم.
- ۴) ماتریس قطری: اگر در یک ماتریس مربعی تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند آن را ماتریس قطری می‌گوییم (درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌تواند صفر باشند یا نباشند).

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ۵) ماتریس اسکالر: اگر یک ماتریس، قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند آن را ماتریس اسکالر می‌گوییم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = [3]$$

- ۶) ماتریس صفر: به ماتریسی که همه درایه‌های آن صفر باشند، ماتریس صفر می‌گوییم و آن را با نماد $\bar{O}$ نمایش می‌دهیم.
- ۷) ماتریس بالا مثلثی: اگر در یک ماتریس مربعی تمام درایه‌های زیر قطر اصلی برابر صفر باشند آن را ماتریس بالا مثلثی می‌گوییم.
- ۸) ماتریس پایین مثلثی: اگر در یک ماتریس مربعی تمام درایه‌های بالای قطر اصلی برابر صفر باشند آن را ماتریس پایین مثلثی می‌گوییم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

«ماتریس بالا مثلثی»

«ماتریس پایین مثلثی»

- ۹) ماتریس همانی: اگر در یک ماتریس اسکالر تمام درایه‌های روی قطر اصلی برابر ۱ باشند آن را ماتریس همانی یا ماتریس واحد می‌نامیم و آن را با

I نمایش می‌دهیم.

$$I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_{1 \times 1} = [1]$$



مثال

اگر ماتریس $\begin{bmatrix} r & m-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد حاصل $m+r$ را بیابید.

$$\begin{cases} r=1 \\ m-1=0 \Rightarrow m=1 \end{cases} \Rightarrow m+r=1+1=2$$

مثال

در ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ m-1 & 4 \end{bmatrix}$ مقدار m چقدر است؟

$$m-1=0 \Rightarrow m=1$$

تساوی بین دو ماتریس:

دو ماتریس هم‌مرتبه $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ با هم برابرند اگر و تنها اگر آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

مثال

اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-1 & 8 \\ 3 & z+1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} y+1 & x-2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ مساوی باشند مقدار $(x+y+z)$ را بیابید.

$$\begin{cases} x-2=8 \Rightarrow x=10 \\ y+1=x-1 \Rightarrow y=x-2 \xrightarrow{x=10} y=10-2=8 \Rightarrow x+y+z=10+8+3=21 \\ z+1=4 \Rightarrow z=3 \end{cases}$$

جمع و تفریق ماتریس‌ها

برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبه کافی است که درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم.

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس:

برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس A ، آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس A ضرب می‌کنیم.

قرینه یک ماتریس

اگر A یک ماتریس دلخواه باشد، قرینه ماتریس A از ضرب عدد (-1) در ماتریس A به دست می‌آید که آن را با $(-A)$ نشان می‌دهیم.

برخی از خواص جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس:

اگر A, B, C ماتریس‌های هم‌مرتبه و r و s اعدادی حقیقی باشند، داریم:

- | | | |
|----------------------------|-----------------------------|--|
| ۱) $A+B=B+A$ | ۴) $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$ | ۷) $(r \pm s)A = rA \pm sA$ |
| ۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$ | ۵) $r(A \pm B) = rA \pm rB$ | ۸) $rA = rB, r \neq 0 \Rightarrow A=B$ |
| ۳) $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ | ۶) $(r \pm s)A = rA \pm rB$ | ۹) $A=B \Rightarrow rA=rB$ |

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & m+1 \\ 2n+4 & 5 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد با محاسبه m و n ، ماتریس $A+I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است)

$$\begin{cases} m+1=0 \Rightarrow m=-1 \\ 2n+4=0 \Rightarrow n=-2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A+I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

مثال

دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید، آیا جمع دو ماتریس A و B تعریف می‌شود؟ چرا؟
خیر- زیرا دو ماتریس A و B هم‌مرتبه نیستند.

مثال

اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} i \cdot j & i > j \\ i^2 & i = j \\ 2i - j & i < j \end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس $2A - 3I$ را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad 2A - 3I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 8 & 2 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس‌ها

در حالت کلی دو ماتریس A و B زمانی ضرب‌پذیر هستند که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهاى ماتریس دوم برابر باشد به عبارت دیگر:

$$A_{m \times p} \times B_{p \times n} = C_{m \times n}$$

برابر برابر

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی:

اگر A ماتریس سطری و B ماتریس ستونی باشد برای پیدا کردن حاصل $A \times B$ ، کافی است هر درایه ماتریس A را در درایه نظیرش در ماتریس B ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کنیم، ببینید:

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}$$

ضرب ماتریس در ماتریس:

ماتریس $A_{m \times p}$ و $B_{p \times n}$ مفروضند. حاصل $A \times B$ ، ماتریسی مانند $C_{m \times n}$ است که هر درایه آن از ضرب یک سطر ماتریس A در یک ستون ماتریس

B به دست می‌آید به عبارت دیگر:

$$C = [A \text{ سطر } i \text{ ماتریس}] \begin{bmatrix} \text{ستون } j \text{ ماتریس } B \end{bmatrix}$$

مثال

مقادیر x و y را از معادله زیر به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} x & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & y-2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 4x-2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \\ 4x - 2 = y - 2 \xrightarrow{x=2} 6 = y - 2 \Rightarrow y = 8 \end{cases}$$

ماتریس $\begin{bmatrix} 2x & 4x-2 \end{bmatrix}$ باید با ماتریس $\begin{bmatrix} 4 & y-2 \end{bmatrix}$ برابر باشد:



مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ باشد مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل ضرب $A \times B$ ماتریسی قطری باشد.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

حال برای اینکه ماتریس حاصل، ماتریسی قطری باشد، باید:

$$\begin{cases} -8+2a=0 \Rightarrow a=4 \\ b-3=0 \Rightarrow b=3 \end{cases}$$

مثال

دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & m-2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ n+1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 0 & n \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ مفروضه اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد حاصل AB را محاسبه کنید.

می دانیم که A یک ماتریس قطری است، پس:

$$\begin{cases} m-2=0 \Rightarrow m=2 \\ n+1=0 \Rightarrow n=-1 \end{cases}$$

حال حاصل AB برابر است با:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ 9 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

خواص عمل ضرب ماتریس ها:



درس ۱

ماتریس

- در حالت کلی ضرب ماتریس ها خاصیت جابجایی ندارد. $AB \neq BA$
- اگر A ماتریس مربعی مرتبه n و I ماتریس واحد (همانی) مرتبه n باشد آنگاه ماتریس I عضو خنثی برای عمل ضرب است به عبارت دیگر: $AI = IA = A$
- ضرب ماتریس A در $(B \pm C)$ ، خاصیت توزیع پذیری یا پخش را دارد: $A(B \pm C) = AB \pm AC$
- ضرب ماتریس A در (BC) ، خاصیت شرکت پذیری را دارد: $A(BC) = (AB)C$
- در حالت کلی قانون حذف در ضرب ماتریس ها برقرار نیست به عبارت دیگر اگر برای ماتریس های متمایز A ، B و C داشته باشیم، $AB = AC$ ، آنگاه لزوماً $B = C$ نیست.

مثال

معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 3 \end{bmatrix} = 0$ را حل کنید.

ابتدا حاصل ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 3 \end{bmatrix}$ را محاسبه کرده و سپس آن را در ماتریس $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ضرب می کنیم:

$$\begin{bmatrix} x & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-3 & 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x-3 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-21 \end{bmatrix}$$

می دانیم که حاصل به دست آمده باید برابر صفر باشد، پس:

$$3x-21=0 \Rightarrow 3x=21 \Rightarrow x=7$$



توان در ماتریس

اگر A یک ماتریس مربعی باشد توان‌های صحیح و نامنفی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^0 = I$$

$$A^1 = A \times A^0 = A^0 \times A = A^0 \times A^1$$

$$A^1 = A$$

:

$$A^2 = A \times A$$

$$A^n = A \times A^{n-1} = A^{n-1} \times A = \dots$$

$$A^3 = A \times A^2 = A^2 \times A$$

ویژگی‌های توان در ماتریس

اگر A یک ماتریس مربعی باشد، داریم:

۱) $A^m \times A^n = A^n \times A^m = A^{(m+n)}$

۲) $(A^m)^n = (A^n)^m = A^{mn}$

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد ماتریس A^2 را به دست آورید.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد. ماتریس A^4 را به دست آورید.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -2I$$

$$A^4 = (A^2)^2 \times A = (-2I)^2 \times A = -8 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -16 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال

اگر ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a+b & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4a+b \end{bmatrix}$ باشند، مقادیر a و b را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$A^2 - B = \bar{O} \quad (\bar{O} \text{ ماتریس صفر است})$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - B = \bar{O} \Rightarrow A^2 = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4a+b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ 4a+b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=5 \end{cases}$$



مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقادیر m و n را طوری بیابید که رابطه $A^2 = mA + nI_2$ برقرار باشد. (I_2 ماتریس همانی است).

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$mA + nI_2 = m \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4m \\ 2m & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 4m \\ 2m & m+n \end{bmatrix}$$

می‌دانیم که رابطه $A^2 = mA + nI_2$ باید برقرار باشد، یعنی:

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 4m \\ 2m & m+n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} n = 8 \\ m = 1 \end{cases}$$

دو ماتریس تعویض‌پذیر:



می‌دانیم که در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ندارد حال اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند و $AB = BA$ باشد در این صورت دو ماتریس A و B تعویض‌پذیرند.

حال اگر A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند، در این صورت:

① $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ ② $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ③ $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

مثال

اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۳ و تعویض‌پذیر باشند، ثابت کنید: $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$$(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 - AB - BA + B^2 \xrightarrow[\substack{\text{تعویض‌پذیرند} \\ AB=BA}]{A, B} A^2 - 2AB + B^2$$

مثال

اگر $A^2 = A$ باشد در این صورت ثابت کنید: $(A+I)^2 = I + 3A$

می‌دانیم که A و I تعویض‌پذیرند، بنابراین:

$$(A+I)^2 = (A+I)(A+I) = A^2 + AI + IA + I^2 = A^2 + 2A + I \xrightarrow[\substack{A^2=A \\ \text{می‌دانیم}}]{A^2=A} A + 2A + I = 3A + I$$

مثال

اگر ضرب ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشد حاصل $\begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ را بیابید.

می‌دانیم که ضرب ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیر است، یعنی $AB = BA$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4x+3y & 3x+4y \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x+6 & 4y-3 \\ 3x+8 & 3y-4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+8=5 \Rightarrow x=-1 \\ 3y-4=2 \Rightarrow y=2 \end{cases}$$

حال حاصل خواسته شده برابر است با:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 + 4 - 2 = 0$$



سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (۱) در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ -4 & 9 & 6 \\ 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$، درایه سطر سوم و ستون دوم ماتریس، برابر ۸ است. (تیر و مرداد ۱۴۰۵) (۲) اگر A و B ماتریس‌های مربعی مرتبه ۳ باشند، آنگاه همواره داریم $A \times B = B \times A$. (تیر و مرداد ۱۴۰۵) (۳) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر است. (تیر و مرداد ۱۴۰۵) (۴) مجموع درایه‌های ماتریس همانی از مرتبه دو، برابر چهار است. (دی ۱۴۰۴) (۵) برای هر دو ماتریس دلخواه A و B، تساوی $AB = BA$ برقرار می‌باشد. (شهریور ۱۴۰۴) (۶) اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $a_{ij} = 2i - j^2$، در این صورت درایه a_{23} برابر ۵- است. (شهریور ۱۴۰۴) (۷) هر ماتریس مربعی یک ماتریس اسکالر است. (خرداد ۱۴۰۴) (۸) اگر هر ماتریس A تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر باشد، ماتریس A را مربعی می‌نامیم. (دی ۱۴۰۳) (۹) برای هر دو ماتریس مربعی هم مرتبه A و B، در حالت کلی رابطه $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ برقرار است. (شهریور ۱۴۰۳) (۱۰) اگر A ماتریس اسکالر و B ماتریس هم‌مرتبه A باشد، آنگاه حاصلضرب آنها تعویض‌پذیر است. (خرداد ۱۴۰۳) (۱۱) اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه $A^{1403} = I$. (خرداد ۱۴۰۳) (۱۲) اگر A و B دو ماتریس 3×3 دلخواه باشند آنگاه عبارت $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ همواره برقرار است. (شهریور ۱۴۰۰) (۱۳) اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد، و $rA = rB$ آنگاه داریم $A = B$ (خرداد ۱۴۰۰) (۱۴) اگر برای ماتریس‌های متمایز A, B, C داشته باشیم $AB = AC$، آنگاه لزوماً $B = C$ است. (دی ۹۹) (۱۵) ماتریس مربعی که تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند، ماتریس اسکالر نامیده می‌شود. (خرداد ۹۹ خارج) (۱۶) در حالت کلی حاصل ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی دارد. (خرداد ۹۹) (۱۷) هر ماتریس اسکالر یک ماتریس قطری است. (دی ۹۸) (۱۸) اگر برای ماتریس‌های متمایز A, B, C داشته باشیم $AB = AC$، آنگاه لزوماً $B = C$ است. (خرداد ۹۸) (۱۹) اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر دوم A^3 برابر ۵ می‌باشد. (دی ۹۷) (۲۰) اگر $A^2 = A$ باشد، در این صورت داریم: $(A + I)^2 = I + 3A$ (دی ۹۷)	۲۵/۰	



هر مورد ۲۵/۰	۲	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۱) با فرض $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ i + j^2 & i \neq j \end{cases}$، درایه a_{13} برابر است. (دی ۱۴۰۴) (۲) $A = \begin{bmatrix} a & a-4 \\ 0 & a+1 \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری است، در این صورت مقدار a برابر می باشد. (شهریور ۱۴۰۴) (۳) $A = \begin{bmatrix} m & 2-m \\ 0 & n \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر است. مقدار عددی n برابر می باشد. (دی ۱۴۰۳) (۴) دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ برابر است. (خرداد ۱۴۰۳) (۵) از تساوی ماتریسی $A \times B = A \times C$ که در آن A یک ماتریس مربعی است، با شرط نتیجه می شود $B = C$. (خرداد ۱۴۰۳) (۶) در ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2k-1 & 2 \end{bmatrix}$، مقدار k برابر است. (دی ۱۴۰۲) (۷) اگر در ماتریس قطری تمام درایه های روی قطر اصلی باهم برابر باشند، آن را ماتریس می نامند. (دی ۹۷، خرداد ۹۹، شهریور ۱۴۰۲) (۸) اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2x-1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، آنگاه مقدار x برابر با است. (شهریور ۱۴۰۱) (۹) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} r & m-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد حاصل $m+1$ برابر با است. (خرداد ۱۴۰۱) (۱۰) هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون نامیده می شود. (دی ۱۴۰۰) (۱۱) ماتریس مربعی که همه درایه های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس می گویند. (شهریور ۱۴۰۰) (۱۲) حاصل ضرب ماتریس ها خاصیت جابجایی (دی ۹۷ و دی ۹۹) (۱۳) در ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ m-1 & 4 \end{bmatrix}$ مقدار m برابر است. (شهریور ۹۹) (۱۴) اگر ماتریس A فقط از یک سطر تشکیل شده باشد (فقط دارای یک سطر باشد) آنگاه آن را یک ماتریس می نامیم. (خرداد ۹۹ خارج) (۱۵) در ماتریس $A = [a_{ij}]_{4 \times 3}$ که در آن $a_{ij} = \frac{2i}{j-1}$ باشد، درایه واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس A برابر است با (دی ۹۸)
تیر و مرداد ۱۴۰۵	۳	اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & x+y \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & x-y \\ z+1 & 3 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار x، y و z را بیابید.
دی ۱۴۰۴	۴	ماتریس های $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. ماتریس $-A + 2B$ را محاسبه کنید.



دی ۱۴۰۴	۱/۵	۵ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ b & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a & -6 \\ -2 & a \end{bmatrix}$. ماتریس $A \times B$ را محاسبه کنید و مقدار a را طوری به دست آورید که ماتریس حاصل اسکالر باشد.
شهریور ۱۴۰۴	۱	۶ اگر $A = \begin{bmatrix} 2x & 6 \\ x+y & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} y+2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $A = 2B$ ، در این صورت x و y را حساب کنید.
شهریور ۱۴۰۴	۱/۵	۷ اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، حاصل عبارت $AB + 2I$ را به دست آورید.
خرداد ۱۴۰۴	۱	۸ با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ، حاصل عبارت $A^2 + 2I$ را به دست آورید.
خرداد ۱۴۰۴	۱/۵	۹ دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-y & 9 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & x+y \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ مساوی هستند، مقادیر x ، y و z را به دست آورید.
دی ۱۴۰۳	۰/۲۵	۱۰ گزینه درست را در پاسخ برگ بنویسید. مقدار عددی a_{23} در ماتریس $A = [i - j]_{3 \times 3}$ کدام است؟ الف: ۱ - ب: ۱
دی ۱۴۰۳	۱/۵	۱۱ با فرض $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس A^{49} را محاسبه کنید.
شهریور ۱۴۰۳	۱/۲۵	۱۲ ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} -1 & m \\ -2 & m \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ چنان هستند که $C = 3A + 2B$ ماتریس قطری است. مقدار m و مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C را حساب کنید.
شهریور ۱۴۰۳	۱	۱۳ با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^5 را محاسبه کنید.
خرداد ۱۴۰۳	۱/۵	۱۴ اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} -1 & i-j > 1 \\ 0 & i-j = 1 \\ 1 & i-j < 1 \end{cases}$ باشد، ماتریس $A^2 - 2I$ را بدست آورید.



دی ۱۴۰۲	۱	۱۵	اگر $A = \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ و $A = B$ باشند، حاصل $x^2 - 2y + z$ را به دست آورید.
خرداد ۱۴۰۲	۰/۵	۱۶	ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x+1 & y+2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید، اگر $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مقادیر x و y را به دست آورید.
دی ۱۴۰۱	۲/۲۵	۱۷	الف) اگر $A = \begin{bmatrix} m & 0 \\ m-2 & n \end{bmatrix}$ ماتریسی اسکالر باشد، مقادیر m و n را بیابید. ب) اگر $b_{ij} = \begin{cases} i+1 & i=j \\ j-2 & i < j \\ 1 & i > j \end{cases}$ و $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ ، ماتریس B را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. پ) ماتریس $(B^2 + 2I)$ را محاسبه کنید. (I ماتریس همانی مرتبه سه است)
شهریور ۱۴۰۱	۱/۷۵	۱۸	اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & m+1 \\ 2n+4 & 5 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، با محاسبه m و n ماتریس $A + I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است).
شهریور ۱۴۰۱	۱	۱۹	اگر دو ماتریس مربعی A و B به صورت $A = [3i - 2j]_{3 \times 3}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، الف: ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. ب: ماتریس B^2 را محاسبه کنید.
شهریور ۱۴۰۱	۱	۲۰	اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۳ و تعویض پذیر باشند، ثابت کنید: $(A - B)^T = A^T - 2AB + B^T$
خرداد ۱۴۰۱	۱	۲۱	اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که $A \times B$ ماتریس قطری باشد.
خرداد ۱۴۰۱	۱/۲۵	۲۲	ماتریس A مربعی مرتبه سه به صورت $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i=j \\ j & i > j \\ 0 & i < j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد. الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. ب) دترمینان ماتریس B را محاسبه کنید.
دی ۱۴۰۰	۱/۲۵	۲۳	اگر $A = \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A = B$ در این صورت حاصل $x + 2y + 3z$ را به دست آورید.



شهریور ۱۴۰۰	۱/۵	۲۴	اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل ضرب $A \times B$ ماتریس قطری باشد.
خرداد ۱۴۰۰	۱	۲۵	دو ماتریس $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 0 & n \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & m-2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ n+1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ مفروضاند، اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل AB را محاسبه کنید.
دی ۹۹	۰/۷۵	۲۶	اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس 3×3 با درآیه‌های $a_{ij} = \begin{cases} i-j & i < j \\ 2 & i = j \\ i+j & i > j \end{cases}$ باشد، درآیه‌های a_{12} و a_{31} و a_{33} را به دست آورید.
دی ۹۹	۱	۲۷	مقادیر x, y را از معادله زیر به دست آورید. $\begin{bmatrix} x & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & y-2 \end{bmatrix}$
دی ۹۹	۱	۲۸	اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر a, b را طوری بدست آورید که $A \times B$ ماتریس قطری باشد.
شهریور ۹۹	۱/۵	۲۹	اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-1 & 8 \\ 3 & z+1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} y+1 & x-2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ مساوی باشند مقدار $x + y + z$ را بیابید.
شهریور ۹۹	۱/۲۵	۳۰	معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ را حل کنید.
خرداد ۹۹	۱/۲۵	۳۱	اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & a \end{bmatrix}$ مقادیر a, b را طوری بدست آورید که حاصل ضرب $A \times B$ ماتریس قطری باشد.
خرداد ۹۹	۱/۲۵	۳۲	در تساوی $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ مقدار x را بیابید.
دی ۹۸	۱/۲۵	۳۳	اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، A^7 را بدست آورید.



دی ۹۸	۱/۲۵	۳۴	ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a+b & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4a+b \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید، مقادیر a, b را چنان بیابید که داشته باشیم: $A^2 - B = \overline{O}$ (ماتریس صفر است).
شهریور ۹۸	۱/۲۵	۳۵	اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $x + y + z$ را بیابید.
تیر ۹۸	۱	۳۶	در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $a_{ij} = \begin{cases} i-2j & i < j \\ -i+j & i \geq j \end{cases}$ می‌باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A را بدست آورید.
خرداد ۹۸	۱/۲۵	۳۷	در معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ مقدار x را بیابید.
دی ۹۷	۱/۲۵	۳۸	اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} ij & i > j \\ i^2 & i = j \\ 2i-j & i < j \end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس $2A - 3I$ را بدست آورید.
دی ۹۷	۱/۵	۳۹	اگر ضرب ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشد، حاصل $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -x \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & 2 & -y \end{bmatrix}$ را بیابید.

یادداشت ضروری دانش‌آموز:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



درس

۲

وارون ماتریس و دترمینان

خلاصه درسنامه

دترمینان



به هر ماتریس مربعی می‌توان یک عدد حقیقی را نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود. حال اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه n باشد ($1 \leq n \leq 3$) در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A) = |A|$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$A = [k]_{1 \times 1} \Rightarrow |A| = k$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

مثال

دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را بدست آورید.

$$A = [-3] \Rightarrow |A| = -3$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (-10) - 12 = -22$$

روش اول: محاسبه‌ی دترمینان ماتریس 3×3 به روش بسط:

با توجه به درایه‌های یک سطر (یا ستون) دلخواه آنها می‌توان دترمینان یک ماتریس 3×3 را محاسبه کرد. فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{بسط بر حسب سطر اول}} |A| = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

توجه: برای محاسبه دترمینان ماتریس 3×3 در روش فوق، بسط را بر حسب هر سطر یا هر ستون دلخواه می‌توان انجام داد.

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{بر حسب سطر اول}} |A| = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (0) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2(15) - (-9) = 39$$



روش دوم: دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس های 3×3



در این روش (فقط برای ماتریس های 3×3 قابل استفاده است). دو ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش می نویسیم و $|A|$ برابر است با مجموع حاصل ضرب های درایه های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن (مطابق شکل)، منهای مجموع حاصل ضرب های درایه های واقع بر قطر فرعی A و دو قطر موازی با آن به صورت زیر:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix} \quad |A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

مثال

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

دترمینان ماتریس زیر را به کمک قاعده ی ساروس تعیین کنید.

$$|A| = ((3)(2)(4) + (5)(3)(-1) + (2)(4)(2)) - ((3)(3)(2) + (5)(4)(4) + (2)(2)(-1))$$

$$|A| = 24 - 15 + 16 - 18 - 80 + 4 = -69$$

مثال

$$|A| = 5|A| - 24 \Rightarrow 4|A| = 24 \Rightarrow |A| = 6$$

اگر $A = \begin{vmatrix} |A| & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ باشد در این صورت حاصل $|A|$ را بیابید.

مثال

اگر $A = [2i - 3j]_{3 \times 2}$ و $B_{2 \times 3} = \begin{cases} -1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$ باشد دترمینان ماتریس AB را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

حال با بسط برحسب سطر اول داریم:

$$|AB| = 4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 4(6) - 1(-6) + 5(-6) = 0$$

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد دترمینان ماتریس BA را بدست آورید.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 17 & 8 \end{bmatrix}$$

$$|BA| = 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 17 & 8 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 17 \end{vmatrix} = 3(-10) - 1(-10) - 1(-20) = 0$$

مثال

دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & m-2 \\ n+1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 0 & n \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد حاصل $|A| + |B|$ را بدست آورید.

می‌دانیم که ماتریس A ، یک ماتریس قطری است، پس:

$$\begin{cases} m-2=0 \Rightarrow m=2 \\ n+1=0 \Rightarrow n=-1 \end{cases}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{بسط بر حسب سطر اول}} |B| = 2(-1) - 1(2) + 1(-2) = -11$$

در نتیجه: $|A| + |B| = 2 - 11 = -9$.

نکات طلایی



۱) دترمینان هر ماتریس قطری، بالامتثلی و پایین مثلی با حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی، برابر است.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ x & b & 0 \\ y & z & c \end{vmatrix} = abc$$

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد مقدار $|A|$ برابر است با:

$$|A| = 2 \times (-3) \times 5 = -30$$

۲)

اگر دو ماتریس مربعی با هم برابر باشند، دترمینان آن‌ها هم با هم برابر است.

$$A = B \Rightarrow |A| = |B|$$



$$|AB| = |BA| = |A||B|$$

$$|A^m| = |A|^m$$

$$|kA| = k^n |A|$$

$$|A| = -abc$$

۳ اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، داریم:

۴ اگر A ماتریس مربعی باشد، داریم:

۵ اگر A یک ماتریس $n \times n$ و k عددی حقیقی باشد، داریم:

۶ اگر $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ باشد آنگاه:

۷ اگر A ماتریسی مربعی و وارون‌پذیر باشد، داریم: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

مثال

اگر A یک ماتریس 3×3 و $|A| = 5$ باشد آنگاه حاصل $|2A|$ را بدست آورید.

می‌دانیم A ماتریسی 3×3 است پس:

$$|2A| = (2)^3 |A| = 8 \times 5 = 40$$

مثال

اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $|A| = 5$ ، در این صورت حاصل $||A|A|$ را بیابید:

$$|A| = 5 \Rightarrow \underbrace{|A|}_{5} |A| = |5A| = (5)^3 |A| = 125 \times 5 = 625$$

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ در این صورت $|A^2|$ را بدست آورید:

می‌دانیم که برای محاسبه $|A^2|$ ، می‌توان حاصل $|A|^2$ را بدست آورد. از طرفی چون A ماتریس مثلثی است، پس:

$$|A| = (-2) \times (-3) \times (-5) = -30 \Rightarrow |A|^2 = (-30)^2 = 900$$

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & f \\ 0 & a & 0 \\ e & c & b \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد دترمینان ماتریس A را بیابید.

چون A ماتریسی اسکالر است پس:

$$\begin{cases} f = e = c = 0 \\ a = b = 2 \end{cases}$$

$$|A| = 2 \times a \times b = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

و دترمینان ماتریس A با حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی برابر است، یعنی:



مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد حاصل $|A^3|$ را محاسبه کنید.

ابتدا دترمینان ماتریس A را با بسط برحسب ستون اول به دست می‌آوریم (چرا ستون اول؟ چون صفر زیاد دارد خوب!)

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (0) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (0) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(4 - 3) - 0 + 0 = 2$$

می‌توانستی اینارو هم ننویسی

$$|A^3| = |A|^3 = (2)^3 = 8$$

حال برای محاسبه $|A^3|$ داریم:

مثال

اگر $2A = \begin{bmatrix} |A| & -4 \\ 1 & |A| \end{bmatrix}$ باشد در این صورت حاصل $|A^{-1}|$ را بیابید.

ابتدا دترمینان ماتریس $2A$ را پیدا می‌کنیم:

$$|2A| = (|A|^2 + 4) \xrightarrow{\substack{A \text{ ماتریسی } 2 \times 2 \\ |2A| = (2)^2 |A|}} |A|^2 - 4|A| + 4 = 0 \Rightarrow (|A| - 2)^2 = 0 \Rightarrow |A| = 2$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

حال حاصل $|A^{-1}|$ برابر است با:

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد حاصل $||A|A|$ را بیابید.

$$|A| = -(1 \times 2 \times (-1)) = 2$$

$$|A||A| = |A|^3 |A| = |A|^4 = 2^4 = 16$$

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $|A| + |B^2|$ را بیابید.

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 10 = 20$$

$$|B| = -6 \Rightarrow |B^2| = 36$$

$$|A| + |B^2| = 56$$

وارون ماتریس:



برای هر ماتریس مربعی مانند A ، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی مانند B است به طوری که:

$$A \times B = B \times A = I$$



در این صورت ماتریس B را وارون ماتریس A می‌گوییم و آن را با A^{-1} نمایش می‌دهیم. حال اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد در این صورت وارون ماتریس A (یعنی A^{-1}) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

توجه: شرط لازم و کافی برای اینکه A^{-1} وجود داشته باشد (A وارون‌پذیر باشد) این است که $|A| \neq 0$ باشد.

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس $A - 2I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است)

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - 2I| = 2$$

$$(A - 2I)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ باشد حاصل عبارت $(2A^{-1} - 3B^{-1})$ را بیابید.

$$|A| = 20 - 6 = 14 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|B| = 2 - (-15) = 17 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow 3B^{-1} = \frac{3}{17} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (2A^{-1} - 3B^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{-3}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-3}{17} & \frac{9}{17} \\ \frac{-15}{17} & \frac{-6}{17} \end{bmatrix}$$

مثال

مقدار m را طوری بیابید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} m & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد.

$$|A| = 2m - 4 = 0 \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2$$

برای اینکه ماتریس A وارون‌پذیر نباشد باید $|A| = 0$ باشد، یعنی:

ویژگی‌های وارون ماتریس:



اگر A ماتریس مربعی و وارون‌پذیر باشد، داریم:

۱) $(A^{-1})^{-1} = A$

۳) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

۲) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

۴) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

مثال

ماتریس $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ مفروض است، ماتریس A را به دست آورید.

می‌دانیم که $(A^{-1})^{-1} = A$ است پس باید وارون ماتریس A^{-1} را به دست بیاوریم:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A^{-1}| = 6 - (-2) = 8$$

$$(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

حل دستگاه دو معادله و دو مجهولی با استفاده از ماتریس وارون:



در حالت کلی هر دستگاه دو معادله و دو مجهولی به صورت $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ را می‌توان به شکل زیر نمایش داد که در آن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب، $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را ماتریس مجهولات و $B = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ را ماتریس مقادیر معلوم می‌گوییم، ببینید:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}}_B \Rightarrow AX = B$$

حال برای حل معادله ماتریسی $AX = B$ ، (به شرطی که A ماتریسی وارون‌پذیر باشد ($|A| \neq 0$))، با ضرب A^{-1} از سمت چپ در معادله $AX = B$ می‌توان مجهولات را به صورت زیر به دست آورد:

$$AX = B \xrightarrow{\text{از سمت چپ } \times A^{-1}} A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_I X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

مثال

دستگاه $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 3 + 10 = 13 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B \Rightarrow X = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -1 + 40 \\ 2 + 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

نکات طلایی



یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ از دو معادله تشکیل شده است که هر یک معادله یک خط هستند حال اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب این دستگاه باشد، داریم:

	دستگاه یک جواب یکتا دارد	$ A \neq 0$	دو خط متقاطع هستند	$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$
	دستگاه هیچ جوابی ندارد.	$ A = 0$	دو خط موازی هستند	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$
	دستگاه بی‌شمار جواب دارد.	$ A = 0$	دو خط برهم منطبق هستند.	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$



مثال

مقدار m را چنان بیابید که دستگاه

$$\begin{cases} mx + 3y = -3 \\ 4x + (m+4)y = 2 \end{cases}$$
 جواب نداشته باشد.
 می‌دانیم شرط اینکه دستگاه فوق جواب نداشته باشد این است که $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد:

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{m+4} \neq \frac{-3}{2}$$

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{m+4} \Rightarrow m(m+4) - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 2 \end{cases}, \quad \frac{3}{m+4} \neq -\frac{3}{2} \Rightarrow m \neq -6$$

 بنابراین تنها $m = 2$ قابل قبول است.

سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۴۰	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (۱) وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر به فرد است. (شهریور ۱۴۰۳) (۲) اگر $A_{n \times n}$ ماتریس دلخواه و I_n ماتریس همانی و $A^2 - A = I$ باشد، وارون ماتریس A برابر $(I - A)$ است. (دی ۱۴۰۲) (۳) هر ماتریس مربعی وارون پذیر است. (شهریور ۱۴۰۲) (۴) در دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$، اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد، دستگاه بی شمار جواب دارد. (شهریور ۱۴۰۱) (۵) اگر A یک ماتریس 3×3 و $A = 5$ باشد آنگاه $2A = 40$ است. (خرداد ۱۴۰۱) (۶) اگر A و B دو ماتریس 2×2 باشند، آنگاه: $AB = A B$ (دی ۱۴۰۰) (۷) اگر در دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$، $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد، دستگاه جواب منحصر به فرد دارد. (شهریور ۹۹) (۸) اگر A یک ماتریس 3×3 و $A = 2$ باشد، آنگاه $2A = 16$ است. (خرداد ۹۹) (۹) در دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$، اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب باشد و $A \neq 0$، در این حالت دستگاه هیچ جوابی ندارد. (شهریور ۹۸) (۱۰) در دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$، اگر داشته باشیم $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ در این حالت دستگاه هیچ جوابی ندارد. (تیر ۹۸)	۴۰	شهریور ۱۴۰۳
۴۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۱) اگر A یک ماتریس 3×3 و $A = 1$، در این صورت $2A = \dots$ برابر است. (شهریور ۱۴۰۴) (۲) دترمینان ماتریس مربعی A برابر ۲ می‌باشد. در این صورت مقدار A^{-1} برابر است. (دی ۱۴۰۳) (۳) اگر $A = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس A برابر است. (شهریور ۱۴۰۲)	۴۱	شهریور ۱۴۰۳



هر مورد ۲/۵	(۴) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 0 & f \\ 0 & a & 0 \\ e & c & b \end{bmatrix}$ اسکالر باشد، حاصل دترمینان ماتریس برابر است. (خرداد ۱۴۰۰) (۵) اگر A یک ماتریس 3×3 و $A = 5$ باشد، آنگاه $\left \frac{1}{2} A \right$ برابر است. (شهریور ۹۹) (۶) اگر $A = \begin{bmatrix} a & 8 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد، مقدار a برابر است. (خرداد ۹۹) (۷) اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $-A$ برابر است با (دی ۹۸) (۸) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار A برابر است با (شهریور ۹۸) (۹) دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با حاصل ضرب (تیر ۹۸) (۱۰) شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس مربعی A وارون پذیر باشد، آن است که دترمینان ماتریس A باشد. (خرداد ۹۸)	
تیر و مرداد ۱۴۰۵	۴۲ دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ را برحسب ستون دوم محاسبه نمایید.	۱
تیر و مرداد ۱۴۰۵	۴۳ دستگاه $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	۱/۵
تیر و مرداد ۱۴۰۵	۴۴ با در نظر گرفتن $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$، ماتریس A^7 را بیابید.	۱/۲۵
دی ۱۴۰۴	۴۵ در هر قسمت گزینه صحیح را از میان گزینه‌های داده شده انتخاب کنید و در پاسخ‌برگ بنویسید. الف) یک ماتریس 3×3 و $A = 3$ است. مقدار $2A$، برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ (دی ۱۴۰۴) ۶ (۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴)	۱
دی ۱۴۰۴	۴۶ الف) وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ را به دست آورید. ب) به ازای چه مقادیری از m، دستگاه $\begin{cases} (m+1)x + 3y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ یک دسته جواب منحصر به فرد دارد.	۱/۵



دی ۱۴۰۴	۱	۴۷	دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ را به روش <u>ساروس</u> محاسبه کنید.										
شهریور ۱۴۰۴	۱/۵	۴۸	دستگاه $\begin{cases} 3x - y = -6 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.										
شهریور ۱۴۰۴	۱	۴۹	دترمینان ماتریس مقابل را با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنید. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$										
خرداد ۱۴۰۴	۰/۷۵	۵۰	حاصل عبارت های ستون A را در ستون B انتخاب کنید و در پاسخ برگ بنویسید (یکی از اعداد ستون B اضافه است) <table><tr><th>B</th><th>A</th></tr><tr><td>۲</td><td>الف) مقدار عددی $2A$ در صورتی که $A_{2 \times 2} = 1$</td></tr><tr><td>۴</td><td>ب) مقدار عددی درایه b_{13} در ماتریس $B = [2j + i]_{3 \times 3}$</td></tr><tr><td>۵</td><td>پ) مقدار عددی $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$</td></tr><tr><td>۷</td><td></td></tr></table>	B	A	۲	الف) مقدار عددی $ 2A $ در صورتی که $ A_{2 \times 2} = 1$	۴	ب) مقدار عددی درایه b_{13} در ماتریس $B = [2j + i]_{3 \times 3}$	۵	پ) مقدار عددی $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$	۷	
B	A												
۲	الف) مقدار عددی $ 2A $ در صورتی که $ A_{2 \times 2} = 1$												
۴	ب) مقدار عددی درایه b_{13} در ماتریس $B = [2j + i]_{3 \times 3}$												
۵	پ) مقدار عددی $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$												
۷													
خرداد ۱۴۰۴	۱/۵	۵۱	دستگاه $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.										
خرداد ۱۴۰۴	۱	۵۲	مقدار m را چنان تعیین کنید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} m+1 & 2 \\ m & 3 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشند.										
دی ۱۴۰۳	۱	۵۳	دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ را بر حسب ستون اول به دست آورید.										
دی ۱۴۰۳	۱	۵۴	نشان دهید ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2A & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نیست.										



۵۵	۱۴۰۳ دی	۱/۵	$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات یک دستگاه خطی هستند. دستگاه معادلات را تشکیل دهید و مقدار m را طوری تعیین کنید که دستگاه بی‌شمار جواب داشته باشد.
۵۶	۱۴۰۳ شهریور	۱/۷۵	الف) اگر A ماتریس 2×2 و اسکالر باشد و $a_{22} = 3$ در این صورت A و $ A $ را بیابید. ب) دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ e & 0 & f \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ 0 & d & 0 \\ e & 0 & f \end{bmatrix}$ ، $(k$ عددی حقیقی است) را در نظر بگیرید. با محاسبه $ A $ و $ B $ نشان دهید که: $ B = k A $.
۵۷	۱۴۰۳ شهریور	۱/۵	دستگاه $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.
۵۸	۱۴۰۳ خرداد	۱	اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ و $ A^3 = -8$ باشد، حاصل $\frac{ A^{-1} }{ 3A }$ را بیابید.
۵۹	۱۴۰۳ خرداد	۱	دستگاه معادلات $\begin{cases} 3x + 7y = -4 \\ -5x + 2y = -7 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.
۶۰	۱۴۰۳ خرداد	۱	به ازای چه مقادیری از m دستگاه معادلات $\begin{cases} -4x + (m-3)y = 3 \\ 2x - \frac{m-3}{2}y = 1 \end{cases}$ یک جواب منحصر به فرد دارد.
۶۱	۱۴۰۲ دی	۲	ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} j-1 & i > j \\ i^2-j & i = j \\ 1-i & i < j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. الف) حاصل $A \times B$ را به دست آورید. ب) دترمینان ماتریس B را به دست آورید. (با روش دلخواه)
۶۲	۱۴۰۲ دی	۱/۲۵	دستگاه $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 2y - x = 1 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید. (تکرار در شهریور ۹۸)
۶۳	۱۴۰۲ دی	۱/۲۵	اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $ A = -2$ ، حاصل $ 2A + A^{-1} ^3$ را محاسبه کنید.
۶۴	۱۴۰۲ شهریور	۰/۲۵	ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} i^2-j & i > j \\ i+j & i \leq j \end{cases}$ داده شده است، ماتریس A^{-1} را به دست آورید.



شهریور ۱۴۰۲	۰/۲۵	۶۵	در تساوی $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ مقدار x را بیابید.
شهریور ۱۴۰۲	۱/۵	۶۶	اگر $3A = \begin{bmatrix} A & -5 \\ 1 & 4 A \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $ A^{-1} $ را محاسبه کنید.
شهریور ۱۴۰۲	۱/۲۵	۶۷	مقدار m را طوری بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx + 9y = m + 1 \\ 4x + my = -4 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.
خرداد ۱۴۰۲	۱/۲۵	۶۸	ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ معرفی شده است، مقدار k را طوری پیدا کنید که رابطه $k kA = 625$ برقرار باشد.
خرداد ۱۴۰۲	۱/۲۵	۶۹	در تساوی ماتریسی $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A را به دست آورید.
خرداد ۱۴۰۲	۱/۵	۷۰	اگر $A = \begin{bmatrix} A & 0 & 1 \\ 1 & A & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $ A $ را بیابید.
دی ۱۴۰۱	۱/۵	۷۱	اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، نشان دهید: $(5A)^{-1} = \frac{1}{5}A^{-1}$
دی ۱۴۰۱	۱	۷۲	با استفاده از ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها و ماتریس همانی I درستی رابطه زیر را ثابت کنید: $(A - 3I)^2 = A^2 - 6A + 9I$
دی ۱۴۰۱	۱/۲۵	۷۳	اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، حاصل $-\frac{1}{2}A^4$ را به دست آورید.
شهریور ۱۴۰۱	۱	۷۴	اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس $A - 2I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است).



شهریور ۱۴۰۱	۰/۷۵	۷۵	اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، $ A $ را بیابید.
خرداد ۱۴۰۱	۱/۲۵	۷۶	دستگاه $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 7x + 4y = 15 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.
دی ۱۴۰۰	۲	۷۷	اگر $A = [2i - 3j]_{3 \times 2}$ و $B = \begin{cases} -1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$ باشد، دترمینان ماتریس AB را به دست آورید.
دی ۱۴۰۰	۱/۵	۷۸	اگر ماتریس A ضرایب و X را ماتریس مجهولات و B را ماتریس معلومات دستگاه دو معادله و دو مجهولی $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -4x + 3y = 2 \end{cases}$ در نظر بگیریم، از تساوی $AX = B$ ماتریس X را به دست آورید.
دی ۱۴۰۰	۰/۷۵	۷۹	اگر A ماتریس 3×3 باشد، $ A = 4$ باشد، آنگاه $ A $ را به دست آورید.
شهریور ۱۴۰۰	۱/۷۵	۸۰	دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ در نظر بگیرید: الف: آیا جمع دو ماتریس B و A تعریف می‌شود؟ چرا؟ ب: حاصل $A \times B$ را بدست آورید.
شهریور ۱۴۰۰	۱	۸۱	ماتریس $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ مفروض است، ماتریس A را بدست آورید.
شهریور ۱۴۰۰	۱/۲۵	۸۲	مقدار m را طوری بیابید که دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ (m-1)x + y = 3 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.
خرداد ۱۴۰۰	۱/۵	۸۳	اگر $2A = \begin{bmatrix} A & -4 \\ 1 & A \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت حاصل $ A^{-1} $ را بیابید.
خرداد ۱۴۰۰	۱	۸۴	جواب دستگاه زیر را در صورت وجود، با استفاده از ماتریس وارون بیابید. $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$



دی ۹۹	۱/۲۵	۸۵ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ و اگر $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ و I_3 ماتریس همانی 3×3 باشد، حاصل عبارت زیر را بدست آورید. $ A \times B + 2I_3 $
دی ۹۹	۱/۵	۸۶ دستگاه مقابل را با استفاده از A^{-1} حل کنید. $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$
شهریور ۹۹	۱/۵	۸۷ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $ A + B^2 $ را بیابید.
شهریور ۹۹	۲	۸۸ اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقادیر n, m را بیابید که رابطه $A^2 = mA + nI_2$ برقرار باشد.
شهریور ۹۹	۲	۸۹ الف) به ازای چه مقداری از m دستگاه معادلات $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ mx + 6y = -4 \end{cases}$ فاقد جواب است؟ ب) دستگاه $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + 6y = -4 \end{cases}$ را با استفاده از A^{-1} حل کنید.
خرداد ۹۹ خ	۰/۷۵	۹۰ اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ ، در این صورت حاصل $ A A $ را بیابید.
خرداد ۹۹ خ	۱/۵	۹۱ دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس دستگاه را با استفاده از A^{-1} بیابید.
خرداد ۹۹	۱/۲۵	۹۲ الف) اگر $A = \begin{bmatrix} A & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $ A $ را بیابید. ب) ماتریس وارون A را حساب کنید.
خرداد ۹۹	۲	۹۳ الف) حدود m را طوری بیابید که دستگاه معادلات $\begin{cases} 2mx + 3y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ دارای جواب منحصر بفرد باشد. ب) جواب دستگاه مذکور را به ازای $m = 2$ با استفاده از ماتریس وارون محاسبه کنید.



۹۴	دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & m-2 \\ n+1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 0 & n \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل $ A + B $ را محاسبه کنید.	۱/۷۵	خرداد ۹۹
۹۵	اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ دو ماتریس باشند. دترمینان ماتریس BA را بدست آورید.	۱/۲۵	دی ۹۸
۹۶	جواب دستگاه زیر را در صورت وجود با استفاده از ماتریس وارون بیابید. $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$	۱/۲۵	دی ۹۸
۹۷	اگر ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i = j \\ i - j & i > j \\ j - i & i < j \end{cases}$ باشد. الف: حاصل ماتریس $A \times B$ را به دست آورید. ب: دترمینان ماتریس B را بدست آورید. $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$	۲	شهریور ۹۸
۹۸	مقدار m را طوری بیابید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} m & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد.	۰/۷۵	شهریور ۹۸
۹۹	اگر A ماتریس 3×3 باشد و $ A = 2$. حاصل $\left \frac{1}{ A } A \right $ را بیابید.	۱	تیر ۹۸
۱۰۰	دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر را به روش ماتریس وارون حل کنید. $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - y = 3 \end{cases}$	۱/۵	تیر ۹۸
۱۰۱	اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $ A^3 $ را محاسبه کنید.	۱	خرداد ۹۸
۱۰۲	مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx + 3y = -3 \\ 4x + (m+4)y = 2 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.	۱/۲۵	خرداد ۹۸
۱۰۳	اگر A ماتریس 3×3 باشد و $ A = -2$ ، حاصل $ A \cdot A $ را بیابید.	۰/۷۵	دی ۹۷



۱۰۴	دستگاه زیر به ازای چه مقادیر m دارای جواب منحصر به فرد می‌باشد.	۱	دی ۹۷
$\begin{cases} (m-3)x + 3y = m \\ 4x + (m+1)y = 2 \end{cases}$			

بدراشته ضروری دانش آموز:

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

هندسه ۳

درس

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

۱

$$\begin{bmatrix} 2x & 6 \\ x+y & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y+4 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{۰/۲۵}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2y+4 \\ x+y = 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x-y=2 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{x=1}_{\text{۰/۲۵}}, \underbrace{y=-1}_{\text{۰/۲۵}}$$

$$-۷ \quad AB + 2I = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -9 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{۰/۵}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -9 & -5 \end{bmatrix}, 2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, AB + 2I = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -9 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{۰/۵}$$

-۸ رادحل اول:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{۰/۵}$$

$$A^2 + 2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -8 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{۰/۲۵}$$

رادحل دوم:

$$A^2 + 2I = A(A + 2A^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \right) \quad \text{۰/۲۵}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 11 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -8 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{۰/۲۵}$$

$$-۹ \quad \begin{cases} x-y=3 \\ x+y=9 \\ z-1=5 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{x=6}_{\text{۰/۲۵}}, \underbrace{y=3}_{\text{۰/۲۵}}, \underbrace{z=6}_{\text{۰/۲۵}}$$

-۱۰ -۱ (۰/۲۵) صفحه ۱۱

$$-۱۱ \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I \quad (۰/۵)$$

- ۱-۱ درست (۰/۲۵) ۱۱ نادرست (۰/۵)
 ۲ نادرست (۰/۲۵) ۱۲ نادرست (۰/۲۵)
 ۳ درست (۰/۲۵) ۱۳ درست (۰/۲۵)
 ۴ نادرست (۰/۲۵) ۱۴ نادرست (۰/۲۵)
 ۵ نادرست (۰/۲۵) ۱۵ نادرست (۰/۲۵)
 ۶ درست (۰/۲۵) ۱۶ نادرست (۰/۲۵)
 ۷ نادرست (۰/۲۵) ۱۷ درست (۰/۲۵)
 ۸ درست (۰/۲۵) ۱۸ نادرست (۰/۲۵)
 ۹ نادرست (۰/۲۵) ۱۹ نادرست (۰/۵)
 ۱۰ درست (۰/۲۵) ۲۰ درست (۰/۵)

- ۱-۲ (۰/۲۵) ۹ دو (۰/۲۵)
 ۲ (۰/۲۵) ۴ یک ماتریس (۰/۲۵)
 ۳ (۰/۲۵) ۲ قطری (۰/۲۵)
 ۴ (۰/۵) ۱۴ ندارد (۰/۲۵)
 ۵ وارون‌پذیری A یا $|A| \neq 0$ (۰/۲۵) $m=1$ (۰/۲۵)
 ۶ $k = \frac{1}{2}$ (۰/۲۵) ۱۴ سطری (۰/۲۵)
 ۷ اسکالر (۰/۲۵) ۱۵ ۶ (۰/۲۵)
 ۸ $2x-1=5 \Rightarrow x=3$ (۰/۲۵)

$$-۳ \quad \begin{cases} x-y=5 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{x=4}_{\text{۰/۲۵}}, \underbrace{y=-1}_{\text{۰/۲۵}}, \underbrace{z+1=-1}_{\text{۰/۲۵}} \Rightarrow \underbrace{z=-2}_{\text{۰/۲۵}}$$

تذکر: در صورتی که عبارت $z+1=-1$ نوشته نشده باشد، ولی $z=-2$ نوشته شود، (۰/۵)
 نمره تعلق گیرد.

$$-۴ \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{۰/۵}$$

$$-۵ \quad \text{راه حل اول:} \quad A \times B = \begin{bmatrix} 2a-6 & -12+3a \\ ab-4 & -6b+2a \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{۰/۲۵} & \text{۰/۲۵} \\ \text{۰/۲۵} & \text{۰/۲۵} \end{matrix}$$

$$\underbrace{-12+3a=0}_{\text{۰/۲۵}} \Rightarrow \underbrace{a=4}_{\text{۰/۲۵}}$$

راه حل دوم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2a-6 & -12+3a \\ ab-4 & -6b+2a \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{۰/۲۵} & \text{۰/۲۵} \\ \text{۰/۲۵} & \text{۰/۲۵} \end{matrix}$$

$$\underbrace{2a-6=-6b+2a}_{\text{۰/۲۵}} \Rightarrow b=1, \underbrace{ab-4=0}_{\text{۰/۲۵}} \Rightarrow a=4$$



$$A^T - 2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$z = -3 \quad (0.25)$$

۱۵- ص ۲۰

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{x = 2, y = 1}_{(0.5)} \rightarrow \underbrace{x^2 - 2y + z = -1}_{(0.25)}$$

$$x = 2, \quad y = -1$$

۱۶-

$$\text{الف)} \quad m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2, \quad n = m = 2$$

۱۷-

$$\text{ب)} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{پ)} \quad (B^T + 2I) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 6 & 10 & 8 \\ 7 & 7 & 18 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 6 & 12 & 8 \\ 7 & 7 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} m + 1 = 0 \\ 2n + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = -2 \end{cases}$$

۱۸-

$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{الف)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

۱۹-

$$\text{ب)} \quad B^T = B \times B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(A - B)^T = (A - B)(A - B)$$

۲۰-

$$= A^T - AB - BA + B^T$$

$$\xrightarrow{AB=BA} A^T - 2AB + B^T$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 + 3a & -8 + 2a \\ b - 3 & -2b - 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 8 = 0 \Rightarrow a = 4 \\ b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

۲۱-

$$\text{الف)} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

۲۲-

$$(A^T)^{24} = (-I)^{24} \rightarrow A^{48} = I^{24} = I \quad (0.5) \rightarrow A^{48} = A^{48} \times A = I \times A = A \quad (0.5)$$

$$C = 3A + 2B = \begin{bmatrix} -3 & 3m \\ -6 & 3m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3m - 6 \\ 0 & 3m + 2 \end{bmatrix}$$

۱۲-

(اگر به صورت مستقیم ماتریس C محاسبه شده بود (0.75) نمره داده شود.)

$$3m - 6 = 0 \Rightarrow 3m = 6 \Rightarrow m = 2 \quad (0.25)$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌های قطر اصلی} = 9 \quad (0.25)$$

۱۳- روش اول:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I$$

$$\Rightarrow A^6 = A^T \times A^T = (2I) \times (2I) = 4I^2 = 4I \quad (0.25)$$

$$\Rightarrow A^8 = A \times A^6 = A \times (4I) = 4A \quad \text{یا} \quad A^8 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \quad (0.25)$$

روش دوم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I$$

$$\Rightarrow A^3 = A \times A^T = A \times (2I) = 2A \quad (0.25)$$

$$\Rightarrow A^8 = A^T \times A^3 = (2I) \times (2A) = 4A \quad \text{یا} \quad A^8 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \quad (0.25)$$

روش سوم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I$$

$$\Rightarrow A^3 = A \times A^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad (0.25)$$

$$\Rightarrow A^6 = A \times A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^8 = A \times A^6 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \quad (0.25)$$

در صورتی که دانش‌آموزان محترم با پنج بار متوالی ضرب ماتریس توان پنجم ماتریس را بدست آورده باشند، به پاسخ نمره کامل تعلق گیرد.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

۱۴-



$$\begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2+x & 4+2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 4+2x+4+2x=0 \Rightarrow x=-2$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ = -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -2I$$

$$A^T = (A^T)^T \cdot A = (-2I)^T \cdot A = -2I^T A = -2A = -2 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4a+b \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ 4a+b=5 \end{cases} \Rightarrow a=0, b=5$$

$$A=B \Rightarrow \begin{cases} 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \\ 2x+y=5 \Rightarrow y=2 \\ z=-2 \end{cases} \\ \Rightarrow x+y+z = \frac{3}{2} + 2 + (-2) = \frac{3}{2}$$

$$a_{12} = 1-2(2) = -3 \\ a_{22} = -2+2=0, \quad a_{32} = -3+2=-1 \\ a_{12} + a_{22} + a_{32} = -3+0+(-1) = -4$$

$$\begin{bmatrix} 3x-6 & -6x+12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\ \Rightarrow -3x+6-6x+12=0 \Rightarrow -9x+18=0 \Rightarrow x=2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \\ 2A-3I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 8 & 2 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

ب) $|B| = 39$

$$A=B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} 2x=3 \\ 2x+y=5 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow x+2y+3z = \frac{-1}{2}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -8+2a=0 \Rightarrow a=4 \\ b-3=0 \Rightarrow b=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-2=0 \Rightarrow m=2 \\ n+1=0 \Rightarrow n=-1 \end{cases}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ 9 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$a_{33}=2, \quad a_{31}=3+1=4, \quad a_{12}=1-2=-1$$

$$\begin{bmatrix} 2x & 4x-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & y-2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} 2x=4 \Rightarrow x=2 \\ 4x-2=y-2 \Rightarrow y=8 \end{cases}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} 2a-8=0 \Rightarrow a=4 \\ b-3=0 \Rightarrow b=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1=y+1 \\ x-2=8 \Rightarrow x=10, y=8, z=3 \Rightarrow x+y+z=21 \\ z+1=4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} x-3 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 3x-21=0 \Rightarrow x=7$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -4+2a \\ 2b-2 & -b-a \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} -4+2a=0 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow a=2 \\ 2b-2=0 \Rightarrow 2b=2 \Rightarrow b=1 \end{cases}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x+3y & 3x+4y \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad -39$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x+6 & 4y-3 \\ 3x+8 & 3y-4 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = B \times A \Rightarrow \begin{cases} 3x+8=5 \Rightarrow x=-1 \\ 3y-4=2 \Rightarrow y=2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x & 2 & -y \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -3+4-2=-1$$

بدراشته ضروری دانش آموز:



درس

۲

وارون ماتریس و دترمینان

$$X = A^{-1}B \Rightarrow X = \frac{1}{\underbrace{13}_{0.25}} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (0.25) \\ (0.25) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 & (0.25) \\ y = 2 & (0.25) \end{cases} \text{ یا}$$

تذکره ۱: در صورتی که تنها عبارت $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$ نوشته شود، نمره (۰.۲۵) تعلق گیرد.

تذکره ۲: (۰.۵) نمره بارم ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ، به صورت زیر تعلق گیرد:

برای قطر اصلی (۰.۲۵) نمره و برای قطر فرعی (۰.۲۵) نمره در نظر گرفته شود.

۴۴- نوشتار اول:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I \quad (0.5)$$

$$A^T = \underbrace{(A^T)^T \times A}_{0.5} = \underbrace{(-I)^T \times A}_{0.25} = \underbrace{-I \times A}_{0.25} = -A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

نوشتار دوم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I \quad (0.5)$$

$$A^T = \underbrace{A^T \times A^T \times A^T \times A}_{0.5} = \underbrace{(-I)^T \times A}_{0.25} = \underbrace{-I \times A}_{0.25} = -A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

تذکر: به نوشتارهای متفاوت دیگر که به درستی انجام شده باشد نمره به تناسب تعلق گیرد.

۴۵-۲۴ یا گزینه ۳

۴۶- الف)

$$A^{-1} = \frac{1}{\underbrace{2}_{0.25}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (0.25) \\ (0.25) \end{matrix}$$

الف: روش دوم

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a + c = 1 \\ 3b + d = 0 \\ 4a + 2c = 0 \\ 4b + 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -\frac{1}{4}, c = -2$$

- | | |
|--------------------|-------------------|
| ۴۰- ۱) درست (۰.۲۵) | ۶) درست (۰.۲۵) |
| ۲) نادرست (۰.۲۵) | ۷) نادرست (۰.۲۵) |
| ۳) نادرست (۰.۲۵) | ۸) درست (۰.۲۵) |
| ۴) نادرست (۰.۲۵) | ۹) نادرست (۰.۲۵) |
| ۵) درست (۰.۲۵) | ۱۰) نادرست (۰.۲۵) |

- | | |
|-------------------------|----------------------------------|
| ۴۱- ۱) -۸ (۰.۲۵) | ۶) -۶ (۰.۲۵) |
| ۲) $\frac{1}{2}$ (۰.۲۵) | ۷) -۸ (۰.۲۵) |
| ۳) -۱ (۰.۲۵) | ۸) -۳۰ (۰.۲۵) |
| ۴) ۸ (۰.۲۵) | ۹) درایه‌های روی قطر اصلی (۰.۲۵) |
| ۵) $\frac{5}{8}$ (۰.۲۵) | ۱۰) غیرصفر (۰.۲۵) |

۴۲- نوشتار اول:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{-2 \times (-7) + 0 + 5 \times 11}_{0.25} = \underbrace{69}_{0.25}$$

نوشتار دوم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 5 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \underbrace{-2 \times (-3) + 0 + 5 \times 11}_{0.25} = \underbrace{69}_{0.25}$$

نوشتار سوم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{(-1)^3 \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^4 \times 0 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{0.5} + \underbrace{(-1)^5 \times (-5) \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}_{0.25} = \underbrace{69}_{0.25}$$

تذکره ۱: در صورتی که عبارت $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times 0 \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + (-1)^4 \times 0 \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ نوشته نشود یا به جای آن تنها عدد صفر نوشته شود، نمره‌ای کسر نگردد.

تذکره ۲: در صورتی که دترمینان ماتریس به جای محاسبه برحسب ستون دوم، برحسب سطر دوم به درستی محاسبه شود، (۰.۵) نمره تعلق گیرد.

تذکره ۳: در صورتی که محاسبه دترمینان ماتریس با استفاده از روش ساروس یا برحسب سطر یا ستون دیگر محاسبه شود، به جواب درست آخر (۰.۲۵) نمره تعلق گیرد.

۴۳-

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$



$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

نوشتار دوم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 14 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3(m+1) - 2m = 0 \Rightarrow 3m+3-2m = 0 \Rightarrow m = -3$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (-1)^3 \times 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^3$$

$$\times 0 \times \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^4 \times (-3) \times \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = (-32) + 0 + 12 = (-20)$$

همچنین در این سوال، اگر دانش آموز به صورت زیر پاسخ دهد، نیز نمره تعلق گیرد.

$$|A| = (-1)^3 \times 2 \times (0 - 16) + (-1)^3 \times 0 \times (-1 + 8) + (-1)^4 \times (-3) \times (-4 - 0) = (-32) + 0 + 12 = (-20)$$

$$|A| = |2A| \times 1 - (0 \times 1) \rightarrow |A| = |2A| \quad (0.5)$$

$$\rightarrow |A| = 4|A| \rightarrow |A| = 0 \quad (0.25)$$

در نتیجه ماتریس A وارون پذیر نیست. (0.25)

$$\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ 2x + my = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{m-1}{2} = \frac{1}{m} = \frac{2}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m = 4 \Rightarrow m = 2 \\ 4m - 4 = 4 \Rightarrow m = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ 2x + my = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{m-1}{2} = \frac{1}{m} = \frac{2}{4} \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -1 \Rightarrow \frac{-2}{2} = \frac{1}{-1} \neq \frac{2}{4} \\ m = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \end{cases} \quad m = 2 \text{ قابل قبول است.} \quad (0.25)$$

$$\text{الف: } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 9$$

$$d = \frac{3}{2}, A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{ب: روش اول} \quad \begin{vmatrix} m+1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{یا} \quad m+1-6 \neq 0 \Rightarrow m \neq 5$$

$$\text{ب: روش دوم} \quad \frac{m+1}{2} \neq \frac{3}{1} \Rightarrow m \neq 5$$

$$|A| = (6-4+0) - (-6+0-2) = 10$$

$$\text{یا} \quad |A| = (2) - (-8) = 10$$

$$\text{روش اول: } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 7$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{روش دوم: } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -7 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$|A| = (4-9-8) - (-8-12+3) = -13+17 = 4$$

۵۰- الف) ۴ (صفحه ۳۱) ب) ۷ (صفحه ۲۱) پ) ۲ (صفحه ۳۰)

(هر مورد (0.25))

۵۱- نوشتار اول:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 7$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad (0.5)$$

$$\text{الف) } A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 3 \\ 4 & 11 & -5 \end{bmatrix} \quad (0.75)$$

$$\text{ب) } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \underbrace{(-1 + 1 - 8)}_{(0.25)} - \underbrace{(-2 - 2 + 2)}_{(0.25)} = \underbrace{-6}_{(0.25)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad -62$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6-4} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad (0.25) \quad (0.25) \quad (0.25)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (0.5)$$

$$|2A| + |A^{-1}|^3 = \underbrace{2^3|A|}_{(0.25)} + \underbrace{|A|^{-3}}_{(0.5)} = \underbrace{8(-2)}_{(0.25)} + \underbrace{\frac{1}{-8}}_{(0.25)} = \underbrace{-\frac{129}{8}}_{(0.25)} \quad -63$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -1 \quad (0.5) \quad (0.25)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad (0.5)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x-2 & -3 \end{bmatrix}}_{(0.25)} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 2x - 3}_{(0.5)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 & (0.25) \\ x = 3 & (0.25) \end{cases} \quad -65$$

$$\underbrace{|3A|}_{(0.25)} = \underbrace{3|A|^3}_{(0.25)} + 5 \Rightarrow \underbrace{4|A|^3}_{(0.25)} - \underbrace{9|A|}_{(0.25)} + 5 = 0 \quad -66$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |A| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = 1 & (0.25) \quad (0.25) \\ |A| = \frac{5}{4} \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{4}{5} & (0.25) \quad (0.25) \end{cases}$$

$$\frac{m}{4} = \frac{9}{m} \neq \frac{m+1}{-4} \Rightarrow \underbrace{m^2 = 36}_{(0.25)} \Rightarrow \begin{cases} m = 6 & \text{ق.ق.} & (0.25) \\ m = -6 & \text{ق.ق.} & (0.25) \end{cases} \quad -67$$

$$\text{ب) } \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ e & 0 & f \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \underbrace{(adf + 0 + 0) - (edc + 0 + 0)}_{0.5} = adf - edc$$

$$\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ 0 & d & 0 \\ e & 0 & f \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = \underbrace{kadf - kcdc}_{0.5} = \underbrace{k(adf - edc)}_{0.25} = k|A|$$

چنانچه مقدار دترمینان ماتریس‌های A و B به روش بسط نسبت به یک سطر یا ستون به دست آمده باشد هر دو مورد 0.5 نمره و به مقایسه و نتیجه‌گیری هم 0.25 نمره تعلق گیرد.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 6 - 4 = 2, \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad -57$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 & (0.25) \\ y = 2 & (0.25) \end{cases}$$

نگارشی دیگر:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 6 - 4 = 2, \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad (0.25) \quad (0.5)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 & (0.25) \\ y = 2 & (0.25) \end{cases}$$

$$|A^3| = |A|^3 = -8 \Rightarrow |A| = -2 \quad (0.25) \quad -58$$

$$\frac{|A^{-1}|}{|3A|} = \frac{\frac{1}{|A|}}{3^3|A|} = \frac{1}{3^4|A|} \quad (0.25) \quad (0.25)$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{41} \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (0.5) \quad (0.5) \quad -59$$

-60 روش اول: به ازای هیچ مقدار m (0.25)

$$\frac{-4}{2} \neq \frac{m-3}{-(m-3)} \Rightarrow -2 \neq -2 \quad (0.75)$$

روش دوم: به ازای هیچ m ای دترمینان زیر مخالف صفر نمی‌شود. (0.25)

$$\begin{vmatrix} -4 & m-3 \\ 2 & -\frac{m-3}{2} \end{vmatrix} = -4(-\frac{m-3}{2}) - 2(m-3) = 0 \quad (0.75)$$



$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |AB| = 4(6) - 1(-6) + 5(-6) = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad -78$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$|A|A| = |4A| = 4^2|A| = 4^4 \quad -79$$

۸- الف: خیر، زیرا دو ماتریس هم مرتبه نیستند.

$$\text{ب) } A \times B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -4 & 6 & -4 \\ -8 & 11 & -6 \end{bmatrix}, \quad |A \times B| = 0$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A^{-1}| = 8 \quad -81$$

$$A = (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{2}{m-1} = \frac{m}{1} \neq \frac{1}{3} \quad -82$$

$$\Rightarrow m(m-1) = 2 \Rightarrow m = -1, m = 2$$

$$|2A| = (|A|^2 + 4) \Rightarrow (|A| - 2)^2 = 0 \quad -83$$

$$\Rightarrow |A| = 2 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad -84$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3+8} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 1, y = -1$$

$$|A| = (4 - 9 - 4) - (-4 - 12 + 3) = -9 + 13 = 4 \quad -85$$

$$|B| = -6$$

$$|A \times B| + |2I_3| = |A| \times |B| + 8|I| = -24 + 8 = -16$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 1$$

$$k|kA| = k(k^3|A|) = k^4 \times 1 = 625 \Rightarrow k = \pm 5$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad -89$$

$$= \frac{1}{15-14} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 17 & -9 \end{bmatrix}$$

$$|A| = |A|(|A| - 2) + 1(2) \Rightarrow |A|^2 - 3|A| + 2 = 0 \quad -90$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |A| = 1 \\ |A| = 2 \end{cases}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{5} A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix} \quad -91$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 15 & -5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow (\Delta A)^{-1} = \frac{1}{-50} \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$(A - 3I)^T = (A - 3I)(A - 3I) \quad -92$$

$$= A^T - 3AI - 3IA + 9I^T \xrightarrow{AI=IA=A, I^T=I} A^T - 6A + 9I$$

$$|A| = 2, \quad \left| -\frac{1}{2} A^T \right| = \left(-\frac{1}{2} \right)^2 |A|^T = -2 \quad -93$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad -94$$

$$|A - 2I| = 2 \Rightarrow (A - 2I)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2 \Rightarrow ||A|A| = |A|^3|A| = |A|^4 = 16 \quad -95$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \times B \quad -96$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad -97$$

۹۱- دستگاه مورد انتظار به صورت زیر است.

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = 3 \times 2 - (-5) \times 4 = 26$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow x = 2, y = 1$$

۹۲- الف: گیریم که $|A| = d$ باشد، در این صورت:

$$\text{ب) } A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\frac{2m}{2} \neq \frac{3}{-1} \Rightarrow m \neq -3$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -10 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 1, y = -1$$

$$\begin{cases} m - 2 = 0 \\ n + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 2, n = -1$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & m-2 \\ n+1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 0 & n \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |B| = 2(-1) - 1(7) + 1(-2) = -11$$

$$|A| + |B| = 2 + (-11) = -9$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 17 & 8 \end{bmatrix}$$

-۸۶

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 3 + 10 = 13 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \times B = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -1 + 40 \\ -2 + 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 3, y = 2$$

-۸۷

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 10 = 20$$

$$|B| = 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times (-2) = -6 \Rightarrow |B^2| = 36$$

$$|A| + |B^2| = 20 + 36 = 56$$

-۸۸

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = A \times A$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^T = mA + nI_2 = m \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4m \\ 2m & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n & 4m \\ 2m & m+n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} n = 8 \\ m = 1 \end{cases}$$

-۸۹

$$\text{الف) } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ m & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6 + 2m = 0 \Rightarrow m = -3$$

$$\text{ب) } A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 1, y = -1$$

-۹۰

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ -4 & 4 & 5 & -4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = (-10 + 0 + 0 + 0) - (0 + 0 - 8) = -2$$

$$||A|A| = |-2A| = (-2)^3 |A| = -8 \times (-2) = 16$$

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{m+4} \neq \frac{-3}{2} \quad -102$$

$$\Rightarrow m(m+4) - 12 = 0 \Rightarrow m = -6, m = 2$$

از طرفی $-6 \neq m \Rightarrow m \neq -6$ پس فقط $m = 2$ قابل قبول است.

$$||A|.A| = |-2.A| = (-2)^3 |A| = -8(-2) = 16 \quad -103$$

$$\begin{vmatrix} m-2 & 3 \\ 4 & m+1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) - 12 \neq 0 \quad -104$$

$$\Rightarrow m \neq 5, m \neq -3 \Rightarrow m \in R - \{5, -3\}$$

بداراشت ضروری دانش آموز:

$$|BA| = 3(-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 17 & 8 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$- 1(-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 17 \end{vmatrix}$$

$$|BA| = 3(-10) - 1(-10) - 1(-20) = -30 + 10 + 20 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 13 \neq 0 \quad -96$$

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 3, y = 2$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad -97$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 1 & 10 & 11 \\ 19 & 5 & 22 \end{bmatrix}$$

$$|B| = 2(-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+ 0(-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2(15) - 1(-9) + 0(-6) = 39$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2m - 4 = 0 \Rightarrow m = 2 \quad -98$$

$$\left| \frac{1}{|A|} A \right| = \left| \frac{1}{2} A \right| = \left(\frac{1}{2} \right)^3 |A| = \frac{1}{8} \times 2 = \frac{1}{4} \quad -99$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -5 \neq 0 \quad -100$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 2, y = -1$$

$$|A| = 2(4-3) = 2 \Rightarrow |A^3| = |A|^3 = 8 \quad -101$$

«مجموعه کتاب‌های سمن»



math-pilevar.ir



انتشارات گونش نگار



math-pilevar.ir

@plv.math



978-622-5513-48-8