

بخور جانم!
برات خوبه!

۶

سوالات
موضوعی
نهایی
(سمن)



۷

ریاضی ۳

۶

۶

مجموعه سوالات نهایی ریاضی ۳
پایه دوازدهم رشته علوم تجربی

پاسخ
تشریحی

رقیه پيله ور - میکائیل صدقی

بِسْمِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

سوالات موضوعی نهایی (سمن)

ریاضی ۳

(۲۰ دوره سوال نهایی)

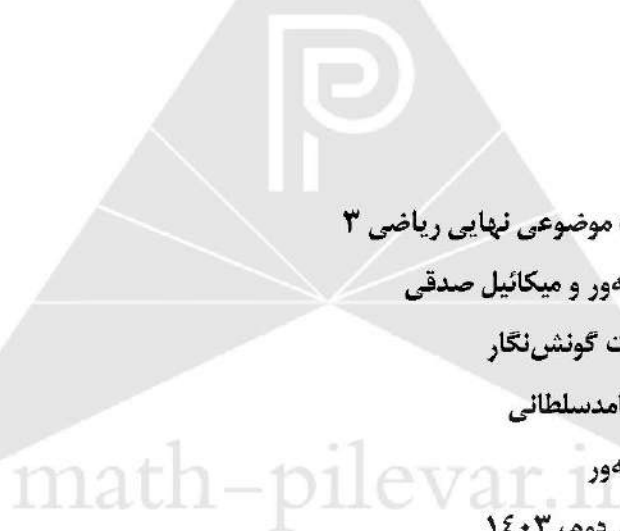
math-pilevar.ir

مؤلفین:

رقیه پیلهورنبار

میکائیل صدقی

سرشناسه	: پيله‌ور نيار، رقيه، ۱۳۶۰-
عنوان و نام پديدآور	: سوالات موضوعی نهایی ریاضی ۳/مؤلفین رقيه پيله‌ور نيار، ميكائيل صدقي.
مشخصات نشر	: اردبیل: گونش‌نگار، ۴۰۲.
مشخصات ظاهري	: ۱۶۱ ص: جدول. نمودار؛ ۲۲ × ۲۹ س.م.
شابک	: ۷-۴۵-۵۵۱۳-۶۲۲-۹۷۸: ۲۳۰۰۰۰۰ ريال
وضعیت فهرست نویسی	: فیپای مختصر
شناسه افزوده	: صدقي، ميكائيل، ۱۳۵۳-
شماره کتابشناسی ملی	: ۹۳۹۱۸۰۷
اطلاعات رکورد کتابشناسی	: فیپا



- ◀ نام کتاب : سوالات موضوعی نهایی ریاضی ۳
- ◀ مؤلفین : رقيه پيله‌ور و ميكائيل صدقي
- ◀ ناشر : انتشارات گونش‌نگار
- ◀ طراح روجلد : رباب حامدسلطانی
- ◀ رسم نمودارها : رقيه پيله‌ور
- ◀ نوبت چاپ : ویرایش دوم، ۱۴۰۳
- ◀ تیراژ : ۱۰۰۰ جلد
- ◀ قیمت : ۲۳۰۰۰۰۰ ريال
- ◀ شابک : ۷-۴۵-۵۵۱۳-۶۲۲-۹۷۸

آدرس: اردبیل، اول خیابان دانشگاه، روبروی اداره مخابرات، انتشارات گونش‌نگار

۰۹۱۴۳۵۸۵۶۲۸ — ۰۴۵-۳۳۵۲۳۳۵۹

www.gunashnegarpub.ir

کلیه حقوق قانونی، مادی و معنوی برای مؤلفین و ناشر محفوظ است هیچ شخص حقوقی یا حقیقی حق تکثیر تمام یا قسمتی از این مجموعه را ندارد. در صورت مشاهده تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

تقدیم بہ

دیران فرہختہ ریاضی

و دانش آموزان برتر

و روح بلند مریم میرزاخانی

math-pilevar.ir



فهرست مطالب

۷	مقدمه
۹	۱ تابع
۱۰	 توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی
۱۷	 ترکیب توابع
۲۸	 تابع وارون
۳۳	۲ مثلثات
۳۴	 تناوب و تنازات
۴۲	 معادلات مثلثاتی
۴۹	۳ حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت
۵۰	 حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت
۶۴	۴ مشتق
۶۵	 آشنایی با مفهوم مشتق
۷۱	 مشتق‌پذیری و پیوستگی
۸۶	 آهنگ تغییر
۹۰	۵ کاربرد مشتق
۹۱	 اکسترم‌های تابع
۹۹	 بهینه‌سازی
۱۰۳	۶ هندسه
۱۰۴	 تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی
۱۱۳	 دایره



مقدمه

سپاس بی‌کران خداوندی را که انسان را آفرید و او را به زیور علم آراست شاکریم این توفیق را یافتیم مجموعه سوالات موضوعی نهایی ریاضی ۳ را به صورت کتاب در آوریم. استفاده گسترده دانش‌آموزان و همکاران از این مجموعه سوالات و تشویق برخی همکاران مشوق ما در این راه بود. کتاب حاضر شامل ۲۰ دوره سوالات نهایی ریاضی ۳ از دی ۱۳۹۷ تا شهریور ۱۴۰۳ می‌باشد. مهمترین ویژگی منحصر به فرد این کتاب دسته‌بندی سوالات نهایی منطبق بر موضوعات با کتاب درسی می‌باشد.

سوالات درس به درس تفکیک شده و به همراه نمره و تاریخ برگزاری آزمون دسته‌بندی شده است. در ابتدای هر درس خلاصه درسنامه‌ای از کتاب برای یادآوری مطالب و فرمول‌ها آورده شده است. حل سوالات نهایی سال‌های گذشته به ارتقاء نمره نهایی شما عزیزان کمک خواهد کرد. توصیه ما به شما عزیزان این است که اول، کتاب درسی یا جزوه دبیرتان را با دقت بخوانید سپس به سراغ حل سوالات این کتاب بروید. تا علاوه بر تمرین و تکرار مطالب کتاب، مفاهیم نیز در ذهنتان تثبیت شود. نتیجه‌گیری از ریاضی سخت نیست کافی است سخت‌کوش باشید.

سخنی با همکاران و اساتید محترم ریاضی

همکار عزیز از این که کتاب حاضر را به عنوان مرجع کلاس خود انتخاب کرده‌اید به خود می‌بالیم شما می‌توانید با توجه به روند تدریس‌تان در کلاس درس با اتمام هر درس سوالات مربوط به همان درس را به عنوان تکلیف به دانش‌آموزان بدهید. یا خودتان با توجه به زمان کلاس تعدادی از سوالات را حین تدریس در کلاس حل کنید. تجربه ما در حل این سوالات در کلاس درس یا مهمتر از آن در طول سال تحصیلی، تکلیف کردن حل این سوالات در منزل، ارتقاء نمره نهایی دانش‌آموزان را ثابت کرده است.

از شما همکاران فرهیخته و دانشمند تقاضا داریم که کاستی یا نقایص کتاب و حتی غلط‌های املایی و چاپی را به ما در سایت math-pilevar.ir اطلاع دهید تا در چاپ‌های بعدی مرتفع گردد.

با تشکر: پيله‌ور - صدقی

برای خرید فایل pdf کتاب به سایت math-pilevar.ir مراجعه کنید.





نمونه سوالات نهایی که در این کتاب به صورت موضوعی تفکیک شده است عبارتند از:

دی ۹۷	۱
خرداد ۹۸	۲
شهریور ۹۸	۳
دی ۹۸	۴
خرداد ۹۹	۵
خرداد ۹۹ خارج از کشور نوبت صبح	۶
خرداد ۹۹ خارج از کشور نوبت عصر	۷
شهریور ۹۹	۸
دی ۹۹	۹
خرداد ۱۴۰۰	۱۰
شهریور ۱۴۰۰	۱۱
دی ۱۴۰۰	۱۲
خرداد ۱۴۰۱	۱۳
شهریور ۱۴۰۱	۱۴
دی ۱۴۰۱	۱۵
خرداد ۱۴۰۲	۱۶
شهریور ۱۴۰۲	۱۷
دی ۱۴۰۲	۱۸
خرداد ۱۴۰۳	۱۹
شهریور ۱۴۰۳	۲۰



تابع

توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی ۱۰
ترکیب توابع ۱۷
تابع وارون ۲۸



درس

۱

توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

خلاصه درسنامه

تابع درجه سوم



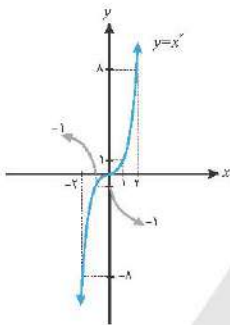
تابع چند جمله‌ای: هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را یک تابع چند جمله‌ای از درجه n می‌گوییم که در آن $a_0, a_1, \dots, a_n$ اعداد حقیقی، n عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ است.

۱ دامنه‌ی همه‌ی تابع‌های چند جمله‌ای، $\mathbb{R}$ است.

۲ اگر در یک تابع چند جمله‌ای، n بزرگ‌ترین توان موجود برای x باشد، تابع را چند جمله‌ای درجه‌ی n ام می‌گوییم.

برای مثال: $f(x) = x^3 + x + 4$ ، یک تابع چند جمله‌ای درجه‌ی سوم و $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ هم تابعی چند جمله‌ای از درجه‌ی چهارم است....

۳ تابع‌های ثابت، همانی و خطی، تابع چند جمله‌ای محسوب می‌شوند.



تابع $y = x^3$: تابع $y = x^3$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه ۳ است که نمودار آن به صورت مقابل می‌باشد: با توجه به نمودار، دامنه و برد این تابع برابر $\mathbb{R}$ است. همچنین این تابع، یک به یک و وارون‌پذیر می‌باشد. از دیگر ویژگی‌های این تابع آن است که نمودار آن نسبت به مبدأ مختصات متقارن می‌باشد.

مقایسه نمودارهای توابع $y = x^2$ و $y = x^3$



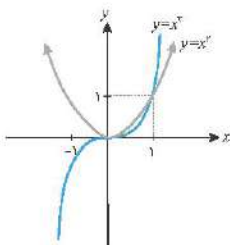
اعداد بین صفر و ۱، ویژگی جالبی دارند: هرچه توانشان را بیشتر کنید، حاصلشان کمتر می‌شود. مثال: $(0.1)^2 = 0.01$ ، $(0.1)^4 = 0.0001$ ولی برای اعداد بزرگتر از ۱، روال معمولی است؛ توان بیشتر، حاصل بیشتر می‌دهد. مثال: $2^2 = 4$ ، $2^4 = 16$

$$b > 1 \xrightarrow{m > n} b^m > b^n$$

و

$$0 < a < 1 \xrightarrow{m > n} a^m < a^n$$

نکته:



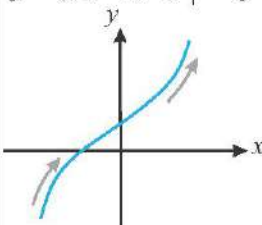
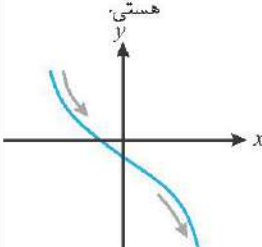
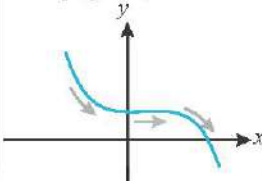
از آنجا که نمودار هر دو از نقطه‌ی $(1, 1)$ می‌گذرند، رفتار $y = x^3$ و $y = x^2$ را قبل از $x = 1$ و بعد از آن، با توجه به مطلب بالا بررسی می‌کنیم. $y = x^3$ برای x های مثبت، حرکتش را از زیر $y = x^2$ شروع می‌کند و پس از رسیدن به نقطه‌ی $x = 1$ ، می‌رود بالای $y = x^2$.

توابع صعودی و توابع نزولی



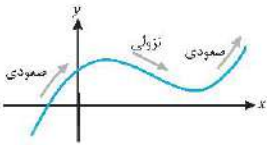
در یک تقسیم‌بندی کلی همه‌ی تابع‌هایی که می‌شناسیم، از نظر رفتار، در یکی از پنج دسته‌ی زیر قرار می‌گیرند:

- ۱ صعودی ۲ نزولی ۳ اکیداً صعودی ۴ اکیداً نزولی ۵ غیریکنوا

تابع	به بیان فارسی	تشخیص از روی زوج مرتبها	تعریف ریاضی: برای هر x_1 و x_2 عضو مجموعه‌ی I به طوری که $I \subseteq D_f$	وضعیت نمودار
۱ اکتشافی صعودی	وقتی مقدار x ها زیاد می‌شود، مقدار y های نظیر آن‌ها هم زیاد می‌شود.	اگر زوج مرتبها را طوری مرتب کنید که x ها از کوچک به بزرگ نوشته شده باشند، y ها هم باید از کوچک به بزرگ باشند. $\{(1, 10), (2, 11), (3, 15), (4, 19)\}$	در $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ در مقایسه‌ی دو نقطه با طول نامساوی روی نمودار تابع، عرض بیشتر برای نقطه‌ای با طول بیشتر است...	اگر از سمت چپ، قلم را روی نمودار بگذارید و روی آن حرکت کنید، مدام در حال بالا رفتن هستی. 
۲ اکتشافی نزولی	وقتی مقدار x ها زیاد می‌شود، y های نظیر آن‌ها کم می‌شود.	اگر زوج مرتبها را طوری مرتب کنید که x ها از کوچک به بزرگ نوشته شده باشند، y ها از بزرگ به کوچک قرار می‌گیرند. $\{(1, 20), (2, 14), (3, 9), (4, 8)\}$	در $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ در مقایسه‌ی دو نقطه با طول نامساوی روی نمودار تابع، عرض بیشتر برای نقطه‌ای با طول کمتر است....	اگر از سمت چپ، قلم را روی نمودار بگذارید و روی آن حرکت کنید، مدام در حال پایین رفتن هستی. 
۳ فقطی	وقتی مقدار x ها زیاد می‌شود، y های نظیر آن‌ها کم نمی‌شود؛ y ها یا زیاد می‌شوند یا درجا می‌زنند و مساوی قبلی می‌شوند...	اگر زوج مرتبها را طوری مرتب کنید که x ها از کوچک به بزرگ نوشته شده باشند، هر y ، یا از y قبلی خود بزرگ‌تر است یا با آن مساوی. $\{(1, 10), (2, 11), (3, 11), (4, 17)\}$	دو نقطه $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ با طول متفاوت روی نمودار تابع، یا عرض مساوی دارند یا نقطه‌ای که طول بیشتر دارد، عرض بیشتری هم خواهد داشت...	اگر از سمت چپ، قلم را روی نمودار بگذارید و روی آن حرکت کنید، یا بالا می‌روی یا روی خط صاف حرکت می‌کنی. 
۴ فقطی	وقتی مقدار x ها زیاد می‌شود، y های نظیر آن‌ها زیاد نمی‌شود؛ y ها یا کم می‌شوند یا درجا می‌زنند و مساوی قبلی می‌شوند....	اگر زوج مرتبها را طوری مرتب کنید که x ها از کوچک به بزرگ نوشته شده باشند، هر y ، یا از y قبلی خود کوچک‌تر است یا با آن مساوی. $\{(1, 20), (2, 20), (3, 16), (4, 11)\}$	دو نقطه $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ با طول متفاوت روی نمودار تابع، یا عرض مساوی دارند یا نقطه‌ای که طول بیشتر دارد، عرض کمتری خواهد داشت...	اگر از سمت چپ، قلم را روی نمودار بگذارید و روی آن حرکت کنید، یا پایین می‌روی یا روی خط صاف حرکت می‌کنی. 



تعریف تابعی را که در دامنه‌ی خود، در محدوده‌هایی صعودی و در محدوده‌هایی دیگر نزولی باشد، غیریکنوا می‌گوییم. آهنگ رفتاری تابع غیریکنوا تغییر می‌کند: گاهی بالا می‌رود و گاهی هم پایین.



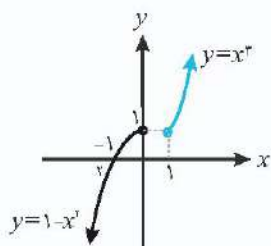
تعریف ۱ به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، می‌گوییم تابع اکیداً یکنوا.
 ۲ به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم تابع یکنوا.

یکنوا		اکیداً یکنوا	
نزولی هست؛ ولی اکیداً صعودی نه!	صعودی هست؛ ولی اکیداً صعودی نه!	اکیداً نزولی و نزولی	اکیداً صعودی و صعودی

نکته:

۱. فرق تابع صعودی با اکیداً صعودی در این است که تابع غیراکید در محدوده‌ای از دامنه‌ی خود، ثابت می‌شود یا در دامنه‌ی خود نقطه‌های هم‌عرض دارد.
۲. فرق تابع نزولی با اکیداً نزولی در این است که تابع غیراکید در محدوده‌ای از دامنه‌ی خود، ثابت می‌شود یا در دامنه‌ی خود نقطه‌های هم‌عرض دارد.
۳. تابع ثابت، هم صعودی محسوب می‌شود، هم نزولی.

مثال



تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ 1-x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ روی دامنه‌اش چگونه است؟

پاسخ: اگر از چپ به راست قلم را حرکت دهید می‌فهمید که تابع صعودی است. به خاطر وجود دو نقطه‌ی هم‌عرض $(0, 1)$ و $(1, 1)$ اکیداً صعودی نیست!

رفتار تابع‌های f و f^{-1}

در آخر می‌خواهیم ببینیم رفتار f^{-1} چگونه از رفتار f دستور می‌گیرد...

۱. اگر f اکیداً صعودی باشد، f^{-1} هم اکیداً صعودی خواهد بود و برعکس.
۲. اگر f اکیداً نزولی باشد، f^{-1} هم اکیداً نزولی خواهد بود و برعکس.
۳. اگر f به یک به یک باشد، f^{-1} هم یک به یک خواهد بود و برعکس.



توابع صعودی و نزولی



صعودی و نزولی بودن برخی از توابع معروف

ضابطه	$y = \cos x$	$y = \frac{1}{x}$	$f(x) = c$
نمودار			
تابع	$(0, \pi)$ نزولی اکید $(\pi, 2\pi)$ صعودی اکید	در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است اما در حالت کلی در $\mathbb{R}$ غیر یکنواست.	هم صعودی و هم نزولی است اما صعودی یا نزولی اکید نیست.
ضابطه	$y = \sin x$	$y = 2^x$, $y = \log_2 x$	$y = (\frac{1}{2})^x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$
نمودار			
تابع	$(0, \frac{\pi}{2})$ صعودی اکید $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ نزولی اکید $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ صعودی اکید	اکیداً صعودی و اکیداً یکنوا	اکیداً نزولی و اکیداً یکنوا
		$y = a^x$ و $y = \log_a x$	

نکته: در توابع نمایی و لگاریتمی اگر $a > 1$ باشد توابع صعودی و اگر $0 < a < 1$ باشد توابع نزولی‌اند.

مثال

تابع $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$ در بازه $[k, +\infty)$ یکنوا است. حدود k کدام است؟



$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow k \geq \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

مثال

به ازای کدام مقدار a هر دو تابع $y = (-2a+7)x + 1$ و $y = (\frac{a-1}{2})^x$ اکیداً صعودی‌اند؟

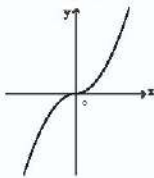
$$\left. \begin{aligned} \frac{a-1}{2} &> 1 \Rightarrow a-1 > 2 \Rightarrow a > 3 \\ -2a+7 &> 0 \Rightarrow -2a > -7 \Rightarrow a < \frac{7}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 < a < \frac{7}{2}$$

مثال

مشخص کنید کدام تابع اکیداً یکنوا نیست؟

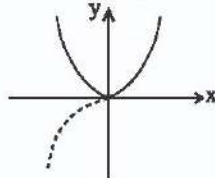
۲) $f(x) = x|x|$

اکیداً یکنوا است.



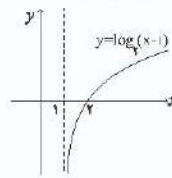
۳) $f(x) = x^2|x|$

غیر یکنوا است.



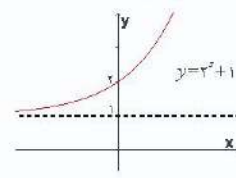
۲) $f(x) = \log_4^{(x-1)}$

اکیداً یکنوا است.



۱) $f(x) = 2^x + 1$

اکیداً یکنوا است.



نکته: ۱) اگر توابع f, g هر دو صعودی باشند، $f + g$ نیز صعودی است.

۲) اگر توابع f, g هر دو نزولی باشند، $f + g$ نیز نزولی است.

۳) اگر تابع f صعودی و g نزولی باشد، $f - g$ صعودی است.

۴) اگر تابع f اکیداً صعودی و g صعودی باشد، $f + g$ نیز اکیداً صعودی است.

سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۱	جمله زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. تابع هم صعودی و هم نزولی است.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۲	نمودار تابع $y = -x^3 + 2$ را رسم کنید و صعودی یا نزولی بودن آن را مشخص کنید.	۰/۷۵	شهریور ۱۴۰۳
۳	جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. تابع $g(x) = x^2 - 4x + 5$ در بازه $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a برابر است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۴	به کمک انتقال نمودار تابع $y = x^3$ نمودار تابع $f(x) = (x-2)^3 + 1$ را رسم کنید.	۰/۵	خرداد ۱۴۰۳
۵	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) تابع $y = \sqrt{3}x^3 - \pi x + 1$ یک تابع چندجمله‌ای است. ب) تابع $y = \frac{1}{x}$ در دامنه‌اش یکنواست.	۰/۵	شهریور ۱۴۰۲



۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. بی‌شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۲
۷	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف: تابع $y = 2x(1 - 3x^2) + 1$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه سوم است. ب: نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $(0, 1)$ پایین‌تر از، نمودار تابع $y = x^3$ است.	۰/۵	دی ۱۴۰۱
۸	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) تابع $f(x) = \sqrt{x} - x^2$ یک تابع درجه دوم است. ب) تابع $f(x) = x^3$ ، تابعی اکیداً صعودی است.	۰/۵	خرداد ۱۴۰۱
۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $y = \sqrt{x} - \frac{3}{4}x$ یک چندجمله‌ای از درجه ۳ است.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۰
۱۰	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب را انتخاب کنید. نمودار تابع $f(x) = x^3$ در بازه $(0, 1)$ ، از نمودار تابع $g(x) = x^2$ قرار دارد. (بالتر - پایین‌تر)	۰/۲۵	دی ۱۴۰۰
۱۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف: دامنه توابع چند جمله‌ای برابر R است. ب: تابع با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است.	۰/۵	شهریور ۱۴۰۰
۱۲	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. در بازه $(0, 1)$ نمودار تابع $y = x^3$ نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد.	۰/۲۵	دی ۹۹
۱۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع ثابت در یک بازه هم صعودی هم نزولی است.	۰/۲۵	خرداد ۹۹
۱۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. الف: تابع $y = x $ در تمام دامنه‌اش صعودی است	۰/۲۵	خرداد ۹۹ خ
۱۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $y = 2x^5 - 4x^3 + \sqrt{7}x^2$ یک تابع چند جمله‌ای نیست.	۰/۲۵	خرداد ۹۹ خ
۱۶	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. تابع اکیداً یکنوا، همواره هستند.	۰/۲۵	شهریور ۹۹



۹۸ خرداد ۹۸	۰/۲۵	۱۷ در جای خالی گزینه مناسب داخل پراشتز قرار دهید. تابع $y = (x+3)^3$ در دامنه خود (صعودی-نزولی) است.
۹۸ شهریور ۹۸	۰/۲۵	۱۸ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $y = -x^3 + 2$ در دامنه تعریفش صعودی است.
۹۸ دی و خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵	۱۹ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابعی که در یک بازه هم صعودی هم نزولی محسوب می‌شود، تابع نامیده می‌شود.
۹۷ تیر ۹۷	۰/۲۵	۲۰ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

یدداشت ضروری دانش آموز:

درس ۱

توابع چند جمله‌ای

math-pilevar.ir

درس

۲

ترکیب توابع

خلاصه درسنامه

ترکیب دو تابع

اگر f و g دو تابع باشند به طوری که برد تابع f دامنه تابع g اشتراک ناتهی داشته باشند. تابع $(g \circ f)(x)$ را با نماد $(g \circ f)(x)$ نمایش می‌دهیم و تابع $g \circ f$ را تابع مرکب می‌نامیم، به عبارت دیگر: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

دامنه تابع مرکب:

دامنه تابع مرکب $g \circ f$ مجموعه x هایی است که هم زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱- x در دامنه f قرار داشته باشد.

۲- $f(x)$ در دامنه g قرار داشته باشد.

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

بنابراین دامنه تابع $g \circ f$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

به صورت مشابه دامنه تابع $f \circ g$ به صورت زیر است:

و همچنین:

مثال

اگر $f = \{(0, -1), (5, 2), (3, 5), (-2, 4)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, -1), (2, 0), (-1, 4), (5, -7)\}$ تابع $g \circ f$ را در صورت امکان بنویسید.

$$\left. \begin{aligned} (g \circ f)(0) &= g(f(0)) = g(-1) = 4 \\ (g \circ f)(5) &= g(f(5)) = g(2) = 0 \\ (g \circ f)(3) &= g(f(3)) = g(5) = -7 \\ (g \circ f)(-2) &= g(f(-2)) = g(4) \end{aligned} \right\} \rightarrow g \circ f = \{(0, 4), (5, 0), (3, -7)\}$$

تعریف نشده: $(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(4)$

مثال

دو تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ مفروضند در صورت وجود دامنه $f \circ g$ را بدون تشکیل ضابطه تعیین کرده و ضابطه $g \circ f$ را مشخص کنید.

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} \quad D_g = [1, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x-1} \neq 2\} = \{x \geq 1 \mid x-1 \neq 4\} = \{x \geq 1 \mid x \neq 5\} = [1, 5) \cup (5, +\infty)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2} - 1} = \sqrt{\frac{x+1-x+2}{x-2}} = \sqrt{\frac{3}{x-2}}$$

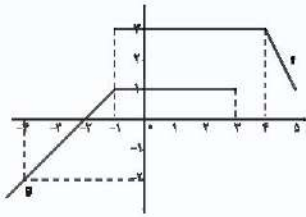
نکته: ترکیب ۲ تابع خاصیت جابجایی ندارد و $f \circ g$ در حالت کلی با $g \circ f$ مساوی نیست.

$$f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$$



مثال

نمودار روبرو توابع f و g را نشان می‌دهد. مقادیر زیر را در صورت وجود پیدا کنید.



الف) $(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(0) = 1$

ب) $(f \circ g)(-4) = f(g(-4)) = f(-2) = 0$ تعریف نشده

ج) $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(1) = 1$

د) $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = 1$

برای مثال: با توجه به ضابطه‌های f و g معادله داده شده را حل کنید.

الف) $f(x) = x^2 + 2x$ ، $g(x) = x^2 - 1$ ، $(g \circ f)(x) = 8$

حل:

$$(g \circ f)(x) = 8 \Rightarrow g(f(x)) = 8 \Rightarrow (x^2 + 2x)^2 - 1 = 8 \Rightarrow (x^2 + 2x)^2 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases} \\ x^2 + 2x = -3 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = -8 < 0 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

مثال

اگر $f(x) = x^3 + 3$ و $(f \circ g)(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ باشد ضابطه تابع $g(x)$ را پیدا کنید.

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^3 + 3 \\ (f \circ g)(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2 \end{cases} \Rightarrow (g(x))^3 + 3 = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$$

$$(g(x))^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \Rightarrow (g(x))^3 = (x-1)^3 \Rightarrow g(x) = x-1$$

برای مثال: تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید.

روش ۱: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$g(x) = x^2 + 1$

$(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

روش ۲: $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

$g(x) = x^2$

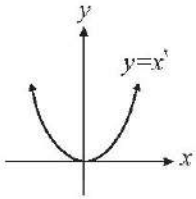
$(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

تبدیل نمودار تابع



برای رسم بسیاری از توابع نیاز به روش‌های پیچیده نیست. اگر نمودار یک تابع را در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم به کمک برخی از تبدیل‌ها، نمودار توابع دیگری را رسم کنیم.

رسم نمودار تابع‌های معروف



از معروف‌ترین توابع، تابع سهمی است. که سال‌های گذشته با آن آشنا شده‌اید.

در سوالات نهایی توابع زیادی مطرح می‌شوند که علاوه بر سهمی مهم‌ترین آن‌ها عبارت‌اند از:

$y = \sin x$	$y = x $	$y = \frac{1}{x}$	$y = \sqrt{x}$	$y = x^3$
در بازه‌ی $[0, 2\pi]$				

$y = b^x$	$y = a^x$	$y = \log_b x$	$y = \log_a x$	$y = \cos x$
$0 < b < 1$	$a > 1$	$0 < b < 1$	$a > 1$	در بازه‌ی $[0, 2\pi]$

رسم تابع با کمک انتقال و ...، ساختن تابع‌های جدید

مثال	تأثیر بر نمودار (روش رسم)	تغییر انجام شده
	$a > 0$ است: نمودار تابع را به اندازه‌ی a واحد به بالا منتقل کنید. $a < 0$ است: نمودار تابع را به اندازه‌ی a واحد به پایین منتقل کنید.	$f(x) + a$ کل تابع با عدد ثابت a جمع یا منها شده است.
	$b > 0$ است: نمودار تابع را به اندازه‌ی b واحد به سمت چپ منتقل کنید. $b < 0$ است: نمودار تابع را به اندازه‌ی b واحد به سمت راست منتقل کنید.	$f(x + b)$ در ضابطه تابع x شما با عدد ثابت b جمع یا منها شده است.
	تابع بدون هیچ تغییری در x و البته بدون انتقال، کشیده می‌شود طوری که همه‌ی y های قبلی، k برابر می‌شوند.	$kf(x)$ تابع در عدد ثابت k ضرب شده است. ($k > 0$)



نکته: ۱ محل تلاقی نمودار تابع‌های f و kf با محور x ها یکسان است.

۲ (x_0, y_0) در تابع f تبدیل می‌شود به (x_0, ky_0) در تابع kf ...

۳ در نمودار $y = kf(x)$ ؛

اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار تابع f در امتداد محور y ها با ضریب k فشرده می‌شود؛ انقباض عمودی

- اگر $k > 1$ باشد، نمودار تابع f در امتداد محور y ها با ضریب k کشیده می‌شود؛ انبساط عمودی

تغییر انجام شده	تأثیر بر نمودار (روش رسم)	مثال
$-f(x)$ تابع در منفی ضرب شده است.	تابع را نسبت به محور x ها قرینه کنید.	
$ f(x) $ کل تابع داخل قدرمطلق قرار گرفته است.	بخشی از تابع که بالای محور x هاست، سر جای خودش می‌ماند و قسمتی که پایین محور x هاست، نسبت به محور x ها قرینه کنید.	

از آنجا که تبدیل شدن $y = f(x)$ به $y = f(kx)$ فقط روی دامنه تأثیر می‌گذارد ($kx \in D_f$) و هیچ ربطی به عرض نقاط نمودار ندارد، برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ از کلمات انبساط و انقباض در راستای محور x ها استفاده می‌کنیم.

درس ۲

ترکیب توابع

تابع مطلوب	نحوه کشیدن نمودار از روی $y = f(x)$	مثال
۱ $y = f(kx)$ با فرض $k > 0$	هر نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ را اینطوری می‌کشیم: x در $\frac{1}{k}$ ضرب شود و y اش تغییر نکند! $(a, b) \in f(x) \Rightarrow (\frac{a}{k}, b) \in f(kx)$	
	$k > 1$ (انبساط افقی) انگار نمودار $f(x)$ در راستای محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود. $0 < k < 1$ (انبساط افقی) انگار نمودار $f(x)$ در راستای محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود.	
۲ $y = f(x)$	هر بخشی از نمودار تابع را که سمت چپ محور y هاست، حذف می‌کنیم و بخشی که در سمت راست محور y ها باقی مانده، نگه می‌داریم قرینه‌اش را هم نسبت به محور y ها رسم می‌کنیم.	

نکته: برای رسم $f(-x)$ اول نمودار $y = f(x)$ را رسم کن و بعد نمودار آن را نسبت به محور y ها قرینه کن.

♦ انتقال نمودار تابع در حالت کلی

❶ فرض کنید می‌خواهید از روی نمودار تابع $y = f(x)$ به نمودار $y = f(bx + c)$ برسید. ($b \neq 0$)

برای مثال: با داشتن تابع $y = f(x)$ بخواهیم نمودار تابع $y = f(2x + 3)$ را رسم کنیم...

ترتیب مراحل	اثر روی نقطه	مثال برای حالت $y = f(x) \rightarrow y = f(2x + 3)$
اول هر x را منهای c کرده و بعد هر x را در $\frac{1}{b}$ ضرب کنید.	$(x_0, y_0) \rightarrow (\frac{x_0 - c}{b}, y_0)$	$(7, 5) \rightarrow (2, 5)$ $2x + 3 = 7 \Rightarrow x = \frac{7-3}{2} = 2$

❷ فرض کنید می‌خواهید از روی نمودار تابع $y = f(x)$ به نمودار تابع $y = af(x) + d$ برسید. ($a \neq 0$)

برای مثال: با داشتن نمودار تابع $y = f(x)$ بخواهیم نمودار تابع $y = 2f(x) + 3$ را رسم کنیم...

ترتیب مراحل	اثر روی نقطه	مثال برای حالت $y = f(x) \rightarrow y = 2f(x) + 3$
اول هر y را در a ضرب کرده و بعد هر y را با d جمع کنید.	$(x_0, y_0) \rightarrow (x_0, ay_0 + d)$	$(7, 5) \rightarrow (7, 13)$ $(5 \times 2) + 3$

نکته: در تبدیل نمودار تابع $y = f(x)$ به $y = af(bx + c) + d$ ، ترتیب عملیات به صورت زیر است:

$$y = f(x) \rightarrow y = af(bx + c) + d$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 ۲ ۳ ۱ ۴

برای مثال: در انتقال $y = f(x) \rightarrow y = 2f(3x + 4) + 5$ داریم:

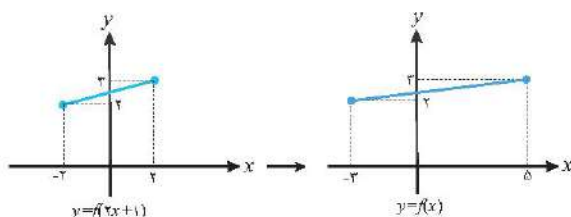
$$(x_0, y_0) \rightarrow (\frac{x_0 - 4}{3}, 2y_0 + 5)$$

❸ حالا فرض کنید می‌خواهید از روی نمودار انتقال یافته‌ی $y = f(x)$ به نمودار آن برسید؛ مثلاً نمودار تابع $y = f(2x + 1)$ را به شما داده‌اند و قرار است نمودار $y = f(x)$ را مشخص کنید...

▪ رسیدن به نمودار $y = f(x)$ ؛ با داشتن نمودار تابع $y = f(2x + 1)$ برای رسیدن به نمودار تابع $y = f(x)$ ، اول هر x را در ۲ ضرب کنید و بعد هر x را به اضافه‌ی ۱ کنید...

نکته: اگر خواستید با داشتن نمودار تابع $y = f(bx + c)$ ($b \neq 0$) به نمودار $y = f(x)$ برسید؛ دستور داخل پرانتز را عیناً اجرا کنید! یعنی هر x ضربدر b و بعد هر x به اضافه‌ی c

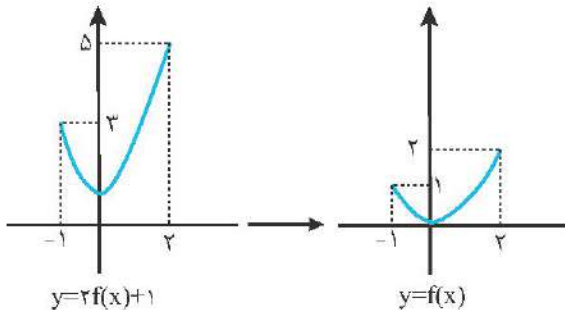
برای مثال:



در آخر فرض کنید با داشتن نمودار $y = 2f(x) + 1$ ، می‌خواهید به نمودار تابع $y = f(x)$ برسید؛ اول از هر y یک واحد کم می‌کنید و بعد هر y را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنی....



نکته: اگر خواستید با داشتن نمودار $y = af(x) + d$ ($a \neq 0$) به نمودار $y = f(x)$ برسید؛ از راست به چپ و با عملیات مخالف حرکت کنید! یعنی هر y منهای d و بعد هر y تقسیم بر a



برای مثال:

نکته: در تابع $y = mf(ax+b) + n$ ، مقادیر a و b روی دامنه و مقادیر m و n روی برد تأثیر دارند.

نکته: اگر $D_f(x) = [m, n]$ باشد، برای محاسبه $D_{f(ax+b)}$ ، کافی است نامعادله $m \leq ax+b \leq n$ را حل کرده، سپس محدوده x را به دست آوریم که همان دامنه $f(ax+b)$ می‌باشد.

نکته: اگر $D_{f(ax+b)} = [m, n]$ باشد، برای محاسبه $D_{f(x)}$ ، کافی است از نامساوی $m \leq x \leq n$ ، محدوده $ax+b$ را به دست آوریم.

مثال

اگر دامنه تابع $f(x)$ برابر $[-1, 7]$ باشد، دامنه تابع $-2f(3x+1)$ را بدست آورید.

حل. کافی است نامعادله $-1 \leq 3x+1 \leq 7$ را حل کنیم:

$$-1 \leq 3x+1 \leq 7 \Rightarrow -2 \leq 3x \leq 6 \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq x \leq 2 \Rightarrow D_{-2f(3x+1)} = \left[-\frac{2}{3}, 2\right]$$

مثال

اگر دامنه تابع $y = f(2x-3)$ برابر $[-1, 2]$ باشد، دامنه تابع $y = f(x)$ را بدست آورید.

$$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow -5 \leq 2x-3 \leq 1 \Rightarrow D_{f(x)} = [-5, 1]$$

حل.

سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۲۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $y = f(x)$ با دامنه $\mathbb{R}$ مفروض است. برد تابع‌های $y = f(3x)$ و $y = f(5x)$ یکسان است.	۰/۲۵	۱۴۰۳ شهریور



شماره	۱	۱۴۰۳	۲۲	اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ باشند آنگاه D_{fog} را با استفاده از تعریف به دست آورید.
شماره	۰/۷۵	۱۴۰۳	۲۳	در شکل روبه‌رو تابع f رسم شده است. الف) نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = f(2x)$ را رسم کنید. ب) مقدار $g \circ f(0)$ را بدست آورید.
شماره	۰/۲۵	۱۴۰۲	۲۴	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) نمودار تابع $y = f(\frac{x}{3})$ از انقباض افقی نمودار تابع $y = f(x)$ به دست می‌آید.
شماره	۰/۲۵	۱۴۰۲	۲۵	جای خالی را با عدد مناسب پر کنید. الف) اگر $f(x) = \frac{ x }{1+ x }$ مقدار $f \circ f(1)$ برابر است.
شماره	۱	۱۴۰۲	۲۶	نمودار تابع f به صورت مقابل است. دامنه و برد تابع $g(x) = 2f(-x)$ را بنویسید.
شماره	۰/۵	۱۴۰۲	۲۷	نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را ابتدا سه واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم، ضابطه تابع جدید را بنویسید.
شماره	۰/۷۵	۱۴۰۲	۲۸	اگر $f(g(x)) = 4x^2 + 1$ و $f(x) = \frac{x}{4} - 1$ ، آنگاه ضابطه تابع $g(x)$ را بیابید.
شماره	۱/۲۵	۱۴۰۲	۲۹	اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = x-1$ ، آنگاه: الف) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب) ضابطه تابع $f \circ g$ را بنویسید.
شماره	۰/۲۵	۱۴۰۲	۳۰	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. نقطه $(-2, 4)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ می‌باشد. نقطه متناظر آن روی نمودار تابع $y = f(2x)$ برابر است.



دی ۱۴۰۱	۱/۲۵	۳۱ اگر $g(x) = \sqrt{x+3}$ و $f(x) = 7 - 4x^2$ باشد: الف: دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب: مقدار $(g \circ f)(1)$ را محاسبه کنید.															
دی ۱۴۰۱	۰/۷۵	۳۲ اگر دامنه تابع $y = f(x)$ برابر $[-1, 3]$ و برد آن $(0, 2]$ باشد دامنه و برد تابع $y = f(\frac{x}{4})$ را بیابید.															
شهریور ۱۴۰۱	۲	۳۳ نمودار تابع f به صورت روبه‌رو است: الف) نمودار تابع $g(x) = 2f(x-1)$ را رسم کنید. ب) دامنه تابع g را به دست آورید.															
شهریور ۱۴۰۱	۰/۷۵	۳۴ اگر $f = \{(0, -1), (5, 9), (3, 7), (-2, 4)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, -1), (9, 0), (-1, 4), (7, 7)\}$ تابع $g \circ f$ را در صورت وجود بنویسید.															
خرداد ۱۴۰۱	۰/۵	۳۵ برد تابع f بازه $[-3, 1]$ است. برد تابع $y = -2f(3x-1) + 3$ کدامیک از موارد زیر است؟ الف) $[-8, 0]$ ب) $[-12, 0]$ پ) $[1, 9]$ ت) $[-10, 2]$															
خرداد ۱۴۰۱	۰/۷۵	۳۶ اگر ورودی ماشین مقابل ۳ باشد، مقدار خروجی آن چقدر است؟ خروجی $\rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} \rightarrow x \rightarrow 2x-2$ ورودی															
دی ۱۴۰۰	۰/۲۵	۳۷ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آنگاه $(f \circ g)(4) = 5$															
شهریور ۱۴۰۰	۰/۷۵	۳۸ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x + 1$ را ابتدا دو واحد به سمت پایین سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحله آخر نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. ضابطه y نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید.															
شهریور ۱۴۰۰	۱/۵	۳۹ با توجه به جدول زیر، مقادیر خواسته شده را به دست آورید. الف: $g \circ f(1)$ ب: $(f \circ (f+g))(0)$															
		<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>-۱</td> <td>۰</td> <td>۱</td> <td>۲</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>۰</td> <td>-۱</td> <td>۲</td> <td>-۵</td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>۴</td> <td>-۲</td> </tr> </table>	x	-۱	۰	۱	۲	$f(x)$	۰	-۱	۲	-۵	$g(x)$	۲	۳	۴	-۲
x	-۱	۰	۱	۲													
$f(x)$	۰	-۱	۲	-۵													
$g(x)$	۲	۳	۴	-۲													



۴۰	با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار تابع $y = f(-x) + 2$ را رسم کنید.		۰/۷۵ خرداد ۱۴۰۰
۴۱	اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد، الف: دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب: مقدار $g \circ f(2)$ را تعیین کنید.		۱/۲۵ خرداد ۱۴۰۰
۴۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. دامنه تابع با ضابطه $y = kf(x)$ همان دامنه تابع $y = f(x)$ است.		۰/۷۵ دی ۹۹
۴۳	با توجه به نمودارهای تابع f و g به سوالات زیر پاسخ دهید. الف: مقدار $f \circ g(-1)$ را محاسبه کنید. ب: اگر $g(3t-1) = 0$ باشد مقدار t را بدست آورید. پ: با محدود کردن دامنه f ، بازه‌ای را مشخص کنید که تابع f یک به یک شود.		۱/۵ دی ۹۹
۴۴	نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. الف: نمودار تابع $y = 3f(\frac{1}{3}x)$ را رسم کنید. ب: دامنه تابع $y = 3f(\frac{1}{3}x)$ را تعیین کنید.		۰/۷۵ خرداد ۹۹
۴۵	اگر $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(x) = 3x - 4$ ضابطه تابع $g(x)$ را بدست آورید.		۱ خرداد ۹۹ و خرداد ۹۹ خ
۴۶	اگر $f(x) = \sqrt{4-2x}$ و $g(x) = x^2 + 2x - 1$ باشد. الف: دامنه تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب: مقدار $g \circ f(2) - \frac{f}{g}(0)$ را تعیین کنید.		۲ خرداد ۹۹



۴۷	در جای‌های خالی عبارت مناسب قرار دهید. الف: اگر برد تابع f برابر $[-1, 4]$ باشد آنگاه برد تابع $y = 2f(x)$ برابر با است. ب: اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ باشد، آنگاه $(f \circ g)(4) = \dots\dots\dots$	۰/۵	خرداد ۹۹
۴۸	اگر $5 - x^2 = f(x)$ و $g(x) = \sqrt{x+6}$ باشد، دامنه $f \circ g$ را بدست آورید.	۰/۷۵	خرداد ۹۹
۴۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. دامنه تابع با ضابطه $y = -kf(\frac{x}{p})$ همان دامنه تابع $y = -kf(x)$ می‌باشد.	۰/۷۵	خرداد ۹۹
۵۰	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. الف: اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin x$ باشند، آنگاه $g \circ f(x) = \sqrt{\sin x}$ خواهد بود.	۰/۲۵	خرداد ۹۹
۵۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. دامنه تابع با ضابطه $y = kf(x)$ همان دامنه تابع $y = f(x)$ است.	۰/۲۵	شهریور ۹۹
۵۲	اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد. الف: دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب: ضابطه $f \circ g$ را بنویسید.	۲	شهریور ۹۹
۵۳	نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = \frac{1}{3}f(2x)$ را رسم کنید.	۰/۵	شهریور ۹۹
۵۴	دو تابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید. دامنه ی تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.	۱	خرداد ۹۹
۵۵	با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار $y = \frac{1}{4}f(4x)$ را رسم کنید.	۰/۵	خرداد ۹۸
۵۶	اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد، دامنه ی تابع $f \circ g(x)$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.	۱/۲۵	شهریور ۹۸



۵۷	۰/۵		۹۸	نمودار $y = f(x)$ به صورت زیر است. با استفاده از آن نمودار $y = -2f(\frac{1}{3}x)$ را رسم کنید.
۵۸	۰/۲۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. برد تابع $y = kf(x)$ با ضابطه $y = f(x)$ همان برد تابع $y = f(x)$ است.	۹۸	
۵۹	۱/۵	اگر $f(x) = x^2 - 5$ و $g(x) = \sqrt{x+6}$ باشد، الف: دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب: با محدود کردن دامنه تابع f، تابعی وارون پذیر بسازید.	۹۸	
۶۰	۰/۵	در جای خالی عبارت مناسب بنویسید. تابع $h(x) = (2x^2 - 5x + 1)^3$ به صورت ترکیب دو تابع $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ و $g(x) = \dots$ است.	۹۷	
۶۱	۰/۵	توابع $f(x) = \frac{x+3}{2x}$ و $g(x) = 3x - 1$ را در نظر بگیرید. دامنه $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.	۹۷	
۶۲	۰/۷۵		۹۷	با استفاده از نمودار تابع f نمودار تابع $y = f(\frac{x}{3}) - 2$ را رسم کنید.

یادداشت ضروری دانش آموز: math-pilevar.ir



درس

۳

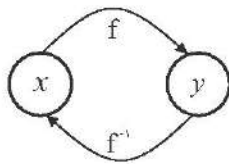
تابع وارون

خلاصه درسنامه

تابع وارون



تابع وارون: اگر f تابعی یک به یک باشد، معکوس‌پذیر و معکوس تابع f به صورت زیر است:



$$f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\} \quad D_{f^{-1}} = R_f \quad D_f = R_{f^{-1}}$$

$$\forall x \in D_{f^{-1}} \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in D_f \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = x$$

ترکیب هر تابع با تابع معکوس خود حتماً تابع همانی است. و اگر $f(a) = b$ آنگاه $f^{-1}(b) = a$.

نکته: ۱) نمودار توابع f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ متقارن‌اند.

۲) نمودار f و f^{-1} در صورت تقاطع عموماً یکدیگر را روی خط $y = x$ قطع می‌کنند. (نه همیشه)

۳) ممکن است نمودار f و f^{-1} برهم منطبق باشند. مانند: $y = \frac{1}{x}$ و یا یکدیگر را قطع نکنند. مانند:

$$f^{-1}(x) = \log_2^x, \quad f(x) = 2^x$$

برای مثال: آیا تابع $f = \{(1, 5), (3, 7), (2, 5)\}$ وارون‌پذیر است؟

حل: خیر زیرا یک به یک نیست (دو مولفه دوم مساوی دارد)

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

پیدا کردن ضابطه تابع وارون



شرط اینکه تابعی وارون‌پذیر باشد آن است که یک به یک باشد و برعکس. برای بدست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع مانند f ابتدا طبق فرمول $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ یک به یک بودن را بررسی می‌کنیم سپس در معادله $y = f(x)$ ابتدا x را برحسب y محاسبه کرده سپس با تبدیل y به x و برعکس، ضابطه تابع $y = f^{-1}(x)$ را بدست می‌آوریم.

مثال

ثابت کنید تابع $y = f(x) = \sqrt{2x+3}$ وارون‌پذیر است سپس ضابطه تابع وارون آن را بیابید.

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم یک به یک است.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{2x_1+3} = \sqrt{2x_2+3} \Rightarrow 2x_1+3 = 2x_2+3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

یک به یک است.

$$y = \sqrt{2x+3} \Rightarrow y^2 = 2x+3 \Rightarrow y^2 - 3 = 2x \Rightarrow x = \frac{y^2 - 3}{2} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 3}{2}$$

مثال

ثابت کنید تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1$ در دامنه‌اش وارون‌پذیر است سپس ضابطه تابع وارون آن را بیابید.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 \Rightarrow f(x) = (x-1)^3 + 1$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1-1)^3 + 1 = (x_2-1)^3 + 1 \Rightarrow (x_1-1)^3 = (x_2-1)^3 \Rightarrow x_1-1 = x_2-1$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \text{یک به یک است}$$

$$y = (x-1)^3 + 1 \Rightarrow y-1 = (x-1)^3 \Rightarrow x-1 = \sqrt[3]{y-1} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1} + 1 \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1$$

مثال

اگر $f(x) = 3ax - 5$ و نقطه $(4, 3)$ روی نمودار تابع f^{-1} باشد: اولاً مقدار a را بدست آورید. ثانیاً: ضابطه تابع وارون f را پیدا کنید.

$$(4, 3) \in f^{-1} \Rightarrow (3, 4) \in f \Rightarrow f(3) = 4 \Rightarrow 3a(3) - 5 = 4 \Rightarrow 9a = 9 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

$$\Rightarrow f(x) = 3x - 5 \Rightarrow y = 3x - 5 \Rightarrow y + 5 = 3x \Rightarrow x = \frac{y+5}{3} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$$



تذکر مهم: ترکیب هر تابع با وارون خودش برابر تابع همانی است یعنی:

۱) $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$

۲) $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$

برای مثال: $f(x) = -\sqrt{x-8}$ و $g(x) = x^2 + 8$ ($x < 0$) وارون یکدیگرند زیرا:

$$f(g(x)) = -\sqrt{x^2 + 8 - 8} = -\sqrt{x^2} = -|x| = -(-x) = x$$

درس ۲

تابع وارون

۲) دامنه توابع $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ همان دامنه تابع درونی است

۱) $D_{f^{-1} \circ f} = D_f = R_{f^{-1}}$

۲) $D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f$

۳) اگر f و g دو تابع وارون‌پذیر باشند آن‌گاه:

۱) $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

۲) $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

مثال

اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = x^3 + 1$ باشد مقادیر زیر را پیدا کنید.

الف) $(f^{-1} \circ g^{-1})(1)$ ب) $(f \circ g)^{-1}(7)$ ج) $(f \circ f)^{-1}(9)$

حل) ابتدا ضابطه f^{-1} و g^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = 2x + 3 \Rightarrow y = 2x + 3 \Rightarrow y - 3 = 2x \Rightarrow x = \frac{y-3}{2} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

$$g(x) = x^3 + 1 \Rightarrow y = x^3 + 1 \Rightarrow y - 1 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1} \Rightarrow y = g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

الف) $(f^{-1} \circ g^{-1})(1) = f^{-1}(g^{-1}(1)) = f^{-1}(0) = -\frac{3}{2}$

ب) $(f \circ g)^{-1}(7) = (g^{-1} \circ f^{-1})(7) = g^{-1}(f^{-1}(7)) = g^{-1}(4) = \sqrt[3]{4-1} = 1$

ج) $(f \circ f)^{-1}(9) = (f^{-1} \circ f^{-1})(9) = f^{-1}(f^{-1}(9)) = f^{-1}(3) = \frac{3-3}{2} = 0$



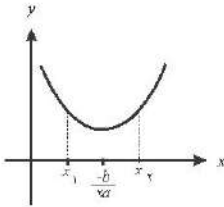
وارون تابع‌هایی که یک به یک نیستند...!



تابعی که یک به یک نباشد، وارون‌پذیر هم نخواهد بود، اما می‌توانیم محدوده‌ای برای x بگذاریم تا در این محدوده، تابع یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر

شود. یکی از مهم‌ترین تابع‌های این فرمی، تابع درجه‌ی دوم است: $y = ax^2 + bx + c$

$y = ax^2 + bx + c$ برای x های بزرگتر یا مساوی $-\frac{b}{2a}$ یا برای x های کوچکتر یا مساوی $-\frac{b}{2a}$ وارون‌پذیر است.



برای مثال: بزرگترین بازه‌ای که تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ در آن وارون‌پذیر بدست آورید.

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 5 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2(2)} = 2, \quad (-\infty, 2] \text{ یا } [2, +\infty)$$

نکته: برای محاسبه ضابطه وارون توابع درجه ۲ از مربع کامل کردن استفاده می‌کنیم.

مثال

برای تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ، $x < \frac{3}{2}$ ضابطه‌ی تابع وارون را بدست آورید.

$$y = (x^2 - 3x + \frac{9}{4}) - \frac{9}{4} + 1 = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4} \Rightarrow y + \frac{5}{4} = (x - \frac{3}{2})^2 \xrightarrow{\text{جذر}}$$

$$\sqrt{y + \frac{5}{4}} = |x - \frac{3}{2}| \xrightarrow{x < \frac{3}{2}} \sqrt{y + \frac{5}{4}} = \frac{3}{2} - x \Rightarrow x = \frac{3}{2} - \sqrt{y + \frac{5}{4}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3}{2} - \sqrt{x + \frac{5}{4}}$$

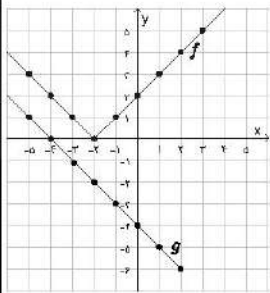
...

سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۶۳	فرض کنید $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ و $g(x) = x^3 - 1$ باشند. در این صورت $(g \circ f)^{-1}(7)$ را بیابید.	۰/۷۵	شهریور ۱۴۰۳
۶۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در تابع $f(x) = 4 + \sqrt{x-1}$ دامنه تابع $(f^{-1} \circ f)(x)$ برابر $[1, +\infty)$ است.	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۳
۶۵	تابع $f(x) = \sqrt{x+4} - 1$ را در نظر بگیرید. دامنه و ضابطه تابع وارون آن را بیابید.	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۲



۶۶	ضابطه و دامنه تابع وارون تابع زیر را به دست آورید.	۱/۵	دی ۱۴۰۲
	$f(x) = -x^2 - 2; x \geq 0$		
۶۷	اگر دامنه تابع $f(x) = x^2 + 4x + 3$ برابر $[-2, +\infty)$ باشد، ضابطه و دامنه تابع وارون را به دست آورید.	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۲
۶۸	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x-1}$ باشد، مقدار $(f \circ f^{-1})(5)$ برابر با است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۲
۶۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. هر تابع یکنوا، یک به یک است.	۰/۲۵	تیر ۱۴۰۱
۷۰	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. الف: اگر $f(x) = 2x^3 - 1$ باشد، حاصل $f^{-1}(15)$ برابر است.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۱
۷۱	در جای خالی عبارات مناسب قرار دهید. الف) ضابطه تابع وارون $y = x^3$ برابر است.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۱
۷۲	در جای خالی عدد یا عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. الف) اگر $f = \{(2, 3), (3, 5)\}$ باشد، حاصل $f^{-1}(3)$ برابر است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۱
۷۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. دو تابع $f(x) = -\frac{7}{4}x - 3$ و $g(x) = -\frac{2x+7}{6}$ وارون یکدیگرند.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۰
۷۴	الف) با توجه به نمودار توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید. $(g \circ f)(-1)$ $(g^{-1} \circ f^{-1})(2)$ ب) نمودار تابع $f(x) - 3$ را رسم کنید.	۲	دی ۱۴۰۰
			



شعبه ریاضی ۱۴۰۰	۰/۲۵	۷۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^3$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}$ وارون یکدیگرند.
دی ۹۹	۱	۷۶	ضابطه وارون تابع $g(x) = -5 - \sqrt{3x+1}$ را به دست آورید.
خرداد ۹۹	۱/۲۵	۷۷	الف: وارون تابع $y = \sqrt{x+2}$ را بدست آورید. ب: با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ یک تابع یک به یک به دست آورید.
خرداد ۹۹	۱/۲۵	۷۸	نشان دهید توابع $f(x) = \frac{-8x+3}{2}$ و $g(x) = \frac{3-2x}{8}$ وارون یکدیگرند.
شعبه ریاضی ۹۹	۱	۷۹	ضابطه وارون تابع $f(x) = -\frac{7}{2}x - 3$ را بدست آورید.
شعبه ریاضی ۹۸	۱	۸۰	اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^2$ باشد، مقدار $(f^{-1} \circ g^{-1})(5)$ را بدست آورید.
خرداد ۹۸	۰/۲۵	۸۱	درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید. دو تابع $f(x) = -\frac{2x+6}{7}$ و $g(x) = \frac{-7}{2}x - 3$ (درست، نادرست)
دی ۹۸	۱	۸۲	نشان دهید توابع $f(x) = 3x - 4$ و $g(x) = \frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند.
دی ۹۸	۰/۵	۸۳	اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^2$ باشد، مقدار $(f^{-1} \circ g^{-1})(5)$ را بدست آورید.

یادداشت ضروری دانش آموز:



مثلثات

۳۴	تناوب و تناوبات
۴۲	معادلات مثلثاتی



درس

۱

تناوب و تانژانت

خلاصه درسنامه

تابع متناوب



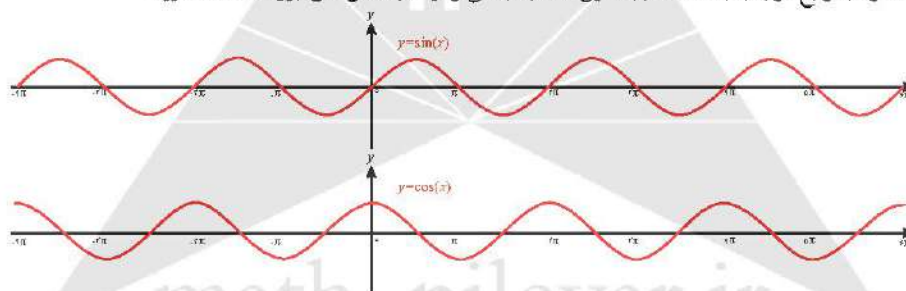
اگر نمودار یک تابع طوری باشد که همواره قسمتی از نمودار به طور مرتب و منظم تکرار شود، به آن تابع، متناوب و به کوچکترین فاصله‌ای که تابع در آن تکرار می‌شود، دوره تناوب تابع گویند.

تعریف تعریف ریاضی تابع متناوب: تابع f را متناوب می‌نامیم، هرگاه عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم:

$$x + T \in D_f, \quad f(x + T) = f(x)$$

کوچکترین عدد T با این خاصیت را دوره تناوب تابع f می‌نامند.

با توابع مثلثاتی $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصله 2π روی محور x ها یکسان است ($\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x$ و $\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x$) به عبارتی اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در بازه‌ای به طول 2π داشته باشیم، با تکرار این تکه می‌توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می‌توانید در شکل‌های زیر مشاهده نمایید.



دوره‌ی تناوب تابع‌های مثلثاتی

دوره‌ی تناوب	ضابطه‌ی کلی تابع	
$T = \frac{2\pi}{ a }$	$f(x) = k \sin(ax + b) + t$	۱
$T = \frac{2\pi}{ a }$	$f(x) = k \cos(ax + b) + t$	۲
$T = \frac{\pi}{ a }$	$f(x) = k \tan(ax + b) + t$	۳
$T = \frac{\pi}{ a }$	$f(x) = k \sin^n(ax + b) + t$	۴
$T = \frac{\pi}{ a }$	$f(x) = k \cos^n(ax + b) + t$	۵
$T = \frac{2\pi}{ a }$	$f(x) = k \sin^{n-1}(ax + b) + t$	۶
$T = \frac{2\pi}{ a }$	$f(x) = k \cos^{n-1}(ax + b) + t$	۷

تأثیر توان و قدرمطلق بر دوره‌ی تناوب

- ۱ اگر نسبت مثلثاتی سینوس و کسینوس دارای توان زوج یا قدرمطلق باشد، دوره‌ی تناوب آن، نصف حالتی است که این‌ها را نداشته باشد!
- ۲ اگر نسبت مثلثاتی دارای توان فرد باشد، هیچ تأثیری بر دوره‌ی تناوبش ندارد، به طور کلی توان و قدرمطلق روی تناوب و کتناوب اثری ندارد.

مثال

دوره‌ی تناوب تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = 3 \sin(\frac{x}{4}) - 1$ را بدست آورید.

$$f(x) = 3 \sin(\frac{x}{4}) - 1 \xrightarrow{x \text{ ضرب } = \frac{1}{4}} T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$$

دوره‌ی تناوب، وقتی عبارت‌های مثلثاتی با هم جمع و منها شده‌اند!

نکته: اگر تابعی از مجموع یا تفاضل چند تابع مثلثاتی تشکیل شده باشد و این مجموع یا تفاضل قابل ساده شدن و یا تبدیل به یک تابع مثلثاتی نباشد در این صورت دوره تناوب تابع برابر است با کوچکترین مضرب مشترک بین دوره تناوب‌ها

مثال

دوره تناوب تابع $y = \tan 2x + \sin 3x + \sin 4x$ را بدست آورید.

$$y_1 = \tan 2x \Rightarrow T_1 = \frac{\pi}{2} \quad y_2 = \sin 3x \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{3} \quad y_3 = \sin 4x \Rightarrow T_3 = \frac{2\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6} \quad \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{6} \quad \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6}$$

مخرج‌ها را مشترک می‌کنیم:

$$T = \frac{12\pi}{6} = 2\pi \text{ است پس } ۱۲ \text{ برابر } ۳ \text{ و } ۴ \text{ برابر } ۱۲ \text{ است پس } ۱۲\pi$$

مثال

دوره تناوب تابع $y = \sin \frac{2}{3}x + \cos \frac{3}{4}x$ را بیابید.

$$y_1 = \sin \frac{2}{3}x \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = \frac{6\pi}{2} = 3\pi \quad y_2 = \cos \frac{3}{4}x \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi}{3}$$

$$T = \frac{36\pi}{3} = 12\pi \text{ می‌باشد پس: } ۳۶ \text{ برابر } ۹ \text{ و } ۴ \text{ برابر } ۳۶ \text{ می‌باشد پس: } ۱۲\pi$$

نکته: بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی $y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$ با قرار دادن ۱ یا -۱ به جای سینوس

و کسینوس به دست می‌آید پس:

$$\max(y) = |a| + d, \quad \min(y) = -|a| + d$$

برای مثال:

$$y = -2 \cos x + 3 \Rightarrow \begin{cases} \max(y) = |-2| + 3 = 5 \\ \min(y) = -|-2| + 3 = 1 \end{cases}, \quad y = 4 \sin x - 1 \Rightarrow \begin{cases} \max(y) = |4| - 1 = 3 \\ \min(y) = -|4| - 1 = -5 \end{cases}$$

بدست آوردن پارامترهای a, b, c

در تابع $y = a \sin(bx) + c$ و $y = a \cos bx + c$ وقتی نمودار آن داده شود.



موج سینوسی

در موج سینوسی همواره داریم:

$$f(t) = a \sin(bt) + c$$

$|a| = \frac{\max - \min}{2}$ $|b| = \frac{2\pi}{T}$ $c = \frac{\max + \min}{2}$

برای موج کسینوسی هم همینطور...

جهت حرکت نمودار تابع‌های $y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$ با شرط $0 \leq c < \frac{\pi}{2}$ در شروع رسم از $x = 0$ به صورت

زیر است:

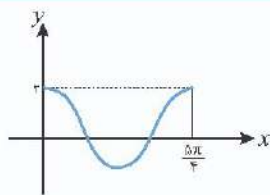
نمودار $y = a \sin(bx + c)$		نمودار $y = a \cos(bx + c) + d$	
$ab > 0$	$ab < 0$	علامت a مثبت	علامت a منفی
در شروع از $x = 0$ به بالا می‌رود. [شبهه $y = \sin x$]	در شروع از $x = 0$ به پایین می‌رود. [شبهه $y = -\sin x$]	در شروع از $x = 0$ به پایین می‌رود. [شبهه $y = \cos x$]	در شروع از $x = 0$ به بالا می‌رود. [شبهه $y = -\cos x$]

در حالت کلی نکات زیر را به خاطر بسپارید:

نکته: در تابع $y = a \sin bx + c$ اگر a و b هم‌علامت باشند آن‌گاه با شروع از $x = 0$ ، نمودار به صورت $\cup$ می‌شود (یعنی نمودار در ابتدا صعودی است). اما اگر a و b غیر هم‌علامت باشند، آن‌گاه با شروع از $x = 0$ نمودار به صورت $\cap$ در می‌آید (یعنی نمودار در ابتدا نزولی است).

نکته: در تابع $y = a \cos bx + c$ اگر a مثبت باشد آن‌گاه با شروع از $x = 0$ ، نمودار به صورت $\cap$ می‌شود (یعنی نمودار در ابتدا نزولی است). اما اگر a منفی باشد، آن‌گاه با شروع از $x = 0$ نمودار به صورت $\cup$ در می‌آید (یعنی نمودار در ابتدا صعودی است). حتماً توجه دارید که چون $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ پس علامت b تاثیری روی نمودار ندارد.

مثال



اگر قسمتی از نمودار تابع $y = b \cos ax$ به صورت روبه‌رو باشد، حاصل $\frac{b}{a}$ را بدست آورید.

حل) دوره تناوب $y = b \cos ax$ برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ می‌باشد. با توجه به نمودار داده شده، دوره تناوب $y = b \cos ax$ برابر $\frac{5\pi}{4}$ است، بنابراین:

$$\frac{2\pi}{|a|} = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow |a| = \frac{8}{5} \Rightarrow a = \pm \frac{8}{5}$$

تابع از نقطه $(0, 3)$ می‌گذرد، بنابراین داریم:

$$f(0) = 3 \Rightarrow 3 = b \cos 0 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{3}{\pm \frac{8}{5}} = \pm \frac{15}{8}$$



غیر از این که حاصل $\tan \alpha$ می شود $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ، می خواهیم جا و علامت تانژانت و نحوه‌ی مشخص کردن آن را در دایره‌ی مثلثاتی، به طور مستقل بررسی کنیم:

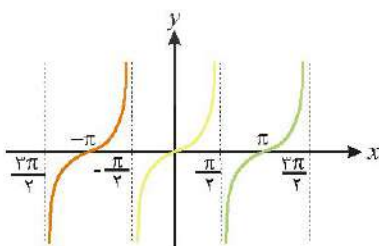
	محور تانژانت و جهت آن خطی را در سمت راست دایره‌ی مثلثاتی، بر این دایره مماس می‌کنیم؛ این خط با جهت مثبت رو به بالا، محور تانژانت خواهد بود.
	مبدأ محور تانژانت نقطه‌ی A است؛ جایی که محور تانژانت و کسینوس برخورد دارند. علامت آن بالای A، تانژانت مثبت و پایین هم تانژانت منفی است؛
	مبدأ برای تانژانت نقطه‌ی A است. اگر انتهای کمانی OM باشد، OM را امتداد دهید تا محور تانژانت را قطع کند. وقتی نقطه‌ی برخورد روی محور تانژانت مشخص شد، مثل N، از A تا N می‌شود تانژانت آن زاویه، البته با لحاظ کردن علامت..... تانژانت در ناحیه‌های اول و سوم مثبت و در ناحیه‌های دوم و چهارم منفی است: $\tan \beta < 0, \tan \alpha > 0$
	چگونگی مشخص کردن تانژانت یک زاویه روی محور آن (دید هندسی تانژانت)

نقاطی که تانژانت تعریف نشده دارد



در دور اول دایره مثلثاتی، انتهای کمان زاویه‌های $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ روی محور y هاست که موازی با محور تانژانت است و این یعنی انتهای کمان آن‌ها محور تانژانت را قطع نمی‌کند؛ پس تانژانت این دو زاویه و هر زاویه‌ای که پس از دور زدن در دایره‌ی مثلثاتی، روی این‌ها بیفتد، تعریف نشده است.

نکته: در حالت کلی: $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \tan \alpha$ تعریف نشده $(k \in \mathbb{Z})$.



نکته: نمودار تابع $y = \tan x$ به صورت مقابل است، با توجه به نمودار:

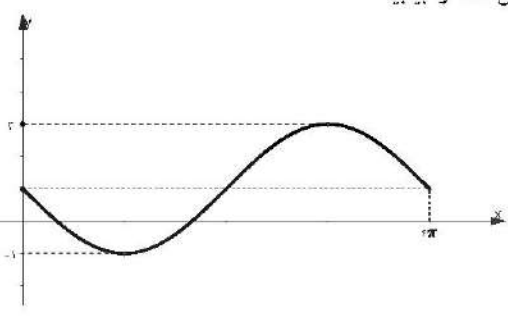
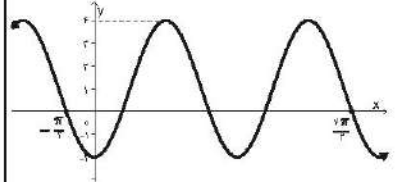
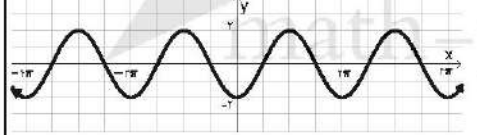
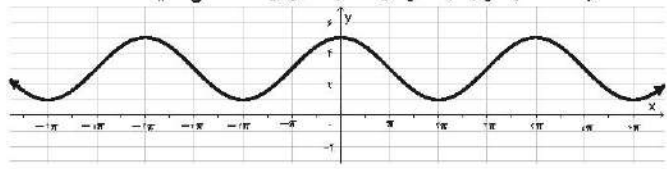


- ۱) نمودار تابع تانژانت در بازه‌های $\dots, (-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}), (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}), (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}), \dots$ تکرار می‌شود. از آن جایی که طول هر یک از این بازه‌ها برابر π است پس $y = \tan x$ ، تابعی متناوب با دوره تناوب $T = \pi$ است.
- ۲) این تابع در هر یک از بازه‌های $\dots, (-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}), (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}), (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}), \dots$ اکیداً صعودی است؛ اما در کل $\mathbb{R}$ تابعی غیریکتوا است.
- ۳) این تابع محور x ها را در $x = k\pi$ که $k \in \mathbb{Z}$ قطع می‌کند. (یعنی در این نقاط مقدار تابع برابر صفر است)
- ۴) دامنه تابع برابر $R - \left\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ و برد آن برابر $\mathbb{R}$ است.
- ۵) در حالت کلی، دوره تناوب تابع $y = \tan ax$ از رابطه $T = \frac{\pi}{|a|}$ به دست می‌آید.

سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۸۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $y = \tan x$ در بازه $(\pi, 2\pi)$ صعودی است.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۸۵	نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ به صورت زیر است. ضابطه‌ی آن را مشخص کنید.	۱	شهریور ۱۴۰۳
۸۶	با توجه به محورهای کسینوس و تانژانت، اگر $\frac{\pi}{4} < a < \frac{\pi}{3}$ باشد آنگاه مقادیر $\cos a$ و $\tan a$ را با هم مقایسه کنید.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۸۷	اگر بیشترین و کمترین مقدار تابع $y = a \sin(\lambda x) + c$ به ترتیب ۹ و ۳ باشد. الف) مقادیر $ a $ و c را بیابید. ب) دوره تناوب تابع را بدست آورید.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۳
۸۸	مقدار ماکزیمم تابع $f(x) = a \cos \frac{x}{4} + 3$ برابر ۶ می‌باشد. $ a $ و دوره تناوب را به دست آورید.	۱	دی ۱۴۰۲
۸۹	دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. $y = \sqrt{3} - \sin(\frac{\pi}{4}x)$	۱/۵	شهریور ۱۴۰۲

۹۰	نمودار زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin bx + 1$ است. حاصل ab را بیابید.	۱/۲۵ خرداد ۱۴۰۲	
۹۱	نمودار تابع با ضابطه $y = a \cos bx + c$ به صورت زیر رسم شده است. مقادیر a و b و c را بدست آورید.	۱/۷۵ دی ۱۴۰۱	
۹۲	دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 3 \cos(\pi x) + 2$ را به دست آورید.	۱/۵ شهریور ۱۴۰۱	
۹۳	معادله یک تابع سینوسی $y = a \sin(bx) + c$ را بنویسید که برد آن $[-4, 4]$ و دوره تناوب اصلی آن ۲ است.	۱ خرداد ۱۴۰۱	
۹۴	نمودار زیر برای تابعی با ضابطه $f(x) = a \cos bx + c$ است. با دقت به شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص کنید.	۱/۵ دی ۱۴۰۰	
۹۵	معادله یک تابع سینوسی $y = a \sin(bx) + c$ را بنویسید که مقدار ماکزیمم آن ۵ و مقدار مینیمم آن -۱ و دوره تناوب آن 8π است.	۱ شهریور ۱۴۰۰	
۹۶	نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $y = a \cos bx + c$ است. با توجه به نمودار، ضابطه آن را مشخص کنید.	۱ خرداد ۱۴۰۰	



۹۷	الف: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را بدست آورید. (راه حل نوشته شود). ب: مقدار عددی $\sin 15^\circ$ را محاسبه کنید.	$y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$	۱/۷۵	دی ۹۹
۹۸	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. برد تابع $y = \tan x$ برابر است.		۰/۲۵	خرداد ۹۹
۹۹	دوره تناوب و مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را بدست آورید.	$y = \sqrt{3} + \cos \frac{\pi}{4} x$	۰/۷۵	خرداد ۹۹
۱۰۰	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. مقدار مینیمم تابع $y = 3 \sin(2x) - 2$ برابر ۵- است.		۰/۲۵	خرداد ۹۹ خ
۱۰۱	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. دوره تناوب اصلی $y = \tan \alpha$ برابر می باشد.		۰/۲۵	خرداد ۹۹ خ
۱۰۲	اگر در یک تابع مثلثاتی دوره تناوب 4π و مقدار ماکزیمم ۱- و مقدار مینیمم ۷- باشد، تابع سینوسی آن را بنویسید.		۱	خرداد ۹۹ خ
۱۰۳	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد است.		۰/۲۵	خرداد ۹۹ خ
۱۰۴	دوره تناوب و مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را بدست آورید.	$y = 3 \sin(2x) - 2$	۱/۲۵	خرداد ۹۹
۱۰۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. برد تابع $y = \tan x$ برابر بازه $[-1, 1]$ است.		۰/۲۵	شهریور ۹۹
۱۰۶	دوره تناوب و مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را بدست آورید. (راه حل نوشته شود).	$y = \pi \sin(-x) + 1$	۱/۲۵	شهریور ۹۹

شعبه ۹۸	۱	دوره تناوب و مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $y = -3 \cos 2\pi x + 1$ را بدست آورید.	۱۰۷
شعبه ۹۸	۰/۲۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. دوره تناوب تابع $y = \tan x$ برابر 2π است.	۱۰۸
شعبه ۹۸	۰/۵	دوره تناوب و مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 1 - 2 \sin(\frac{-\pi}{3}x)$ را بدست آورید.	۱۰۹
شعبه ۹۸	۰/۲۵	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. دوره تناوب تابع $y = \tan x$ برابر است.	۱۱۰
شعبه ۹۸	۱/۲۵	دوره تناوب و مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را بدست آورید. (راه حل نوشته شود). $y = -\pi \sin(\frac{x}{\pi}) - 2$	۱۱۱
شعبه ۹۷	۱/۵	الف: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 2 - 3 \sin 4x$ را بدست آورید. ب: دامنه تابع $f(x) = \tan(2x)$ را بدست آورید.	۱۱۲

یادداشت ضروری دانش آموز:

math-pilevar.ir



درس

۲

معادلات مثلثاتی

خلاصه درسنامه

نسبت‌های مثلثاتی 2α



فرمول سینوس 2α و نتیجه‌های آن

۱) فرمول سینوس 2α : $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$$2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 2 \times 15^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

برای مثال:

۲) نگاهی فراتر به فرمول سینوس 2α :

ب) $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$

الف) $\sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha$

مثال

حاصل عبارت $A = 2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ \cos 15^\circ$ را بیابید.

$$A = 2 \times \underbrace{2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ}_{\sin 150^\circ} \cos 15^\circ$$

$$A = 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

فرمول‌های طلایی و نتیجه‌های آن



$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

تذکره: موقع به کارگیری فرمول‌های طلایی، کمان نصف می‌شود...



♦ فرمول کسینوس 2α

با استفاده از فرمول‌های طلایی ۳ رابطه زیر را می‌توان بدست آورد.

۱) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

۲) $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

۳) $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

♦ کاربردهای سینوس و کسینوس 2α

کاربرد	روش کار
پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های غیرمعروف ($15^\circ, 22.5^\circ, 67.5^\circ, 75^\circ$)	زاویه‌ای که خودش معروف نیست ولی دو برابرش معروف است را α بگیرید و بعد با نوشتن فرمول کسینوس 2α و جای‌گذاری، کسینوس α را پیدا کنید؛ به دست آوردن بقیه‌ی نسبت‌ها را هم از قبل بلدید...

برای مثال: مقدار سینوس 15° را بدست آورید.

$$\sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos(2 \times 15^\circ)}{2} = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

دقت کنید 15° در ربع اول و سینوس در ربع اول مثبت است.

معادلات مثلثاتی

به معادله‌ی که در آن نسبت مثلثاتی داشته باشیم معادله مثلثاتی گفته می‌شود.

ساده‌ترین معادلات مثلثاتی، چهار معادله زیر هستند که به بررسی جواب‌های آن‌ها می‌پردازیم:

- ۱ $\sin x = k \quad (-1 \leq k \leq 1)$
- ۲ $\cos x = k \quad (-1 \leq k \leq 1)$
- ۳ $\tan x = k \quad (k \text{ هر مقدار حقیقی می‌تواند باشد})$
- ۴ $\cot x = k \quad (k \text{ هر عدد حقیقی می‌تواند باشد})$

برای حل این نوع معادلات دو روش ۱ هندسی (رسم نمودار) و ۲ استفاده از دایره مثلثاتی وجود دارد.

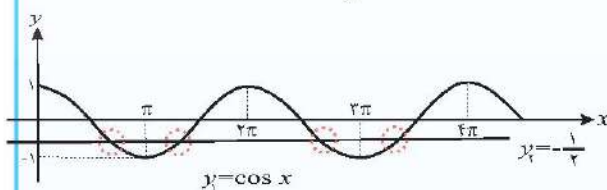
تذکره. از روش هندسی، بیشتر برای پیدا کردن تعداد جواب‌های معادله استفاده می‌کنیم.

مثال

معادله $2 \cos x + 1 = 0$ چند جواب در بازه $[0, 4\pi]$ دارد؟

پاسخ: با استفاده از روش هندسی تعداد جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم، برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم. معادله را به صورت $\cos x = k$ تبدیل می‌کنیم:

$$2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \underbrace{\cos x}_{y_1} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{y_2}$$



حال نمودارهای y_1 و y_2 را رسم می‌کنیم و تعداد نقاط تلاقی این نمودار در بازه $[0, 4\pi]$ را پیدا می‌کنیم: $y_1 = \cos x, y_2 = -\frac{1}{2}$
نقاط برخورد y_1 و y_2 تا است؛ پس معادله $2 \cos x + 1 = 0$ در بازه $[0, 4\pi]$ ۴ جواب دارد.



از روش دایره مثلثاتی زمانی استفاده می‌کنیم که به مقدار جوابها نیاز داریم. در این روش روی دایره مثلثاتی کمان‌هایی را پیدا می‌کنیم که نسبت مثلثاتی آن، برابر با عدد (k) باشد.

معادلات	دایره مثلثاتی	جواب کلی	مثال
$\sin x = k$ $-1 \leq k \leq 1$		k ابتدا زاویه‌ای را پیدا می‌کنیم که سینوس آن برابر $\sin \alpha = k$ است، مانند α . $\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$	$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ $\sin x = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{6}$ $\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{6}) \\ = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}$
$\cos x = k$ $-1 \leq k \leq 1$		زاویه‌ای که کسینوس آن k است را پیدا می‌کنیم $\cos \alpha = k$ $\cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \end{cases}$ $\Rightarrow x = 2k\pi + \alpha$	$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{6}$ $\frac{\alpha = \frac{\pi}{6}}{\alpha = \frac{\pi}{6}} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

حالت‌های خاص

۱ $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$		۲ $\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	
۳ $\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$		۴ $\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$	
۵ $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$		۶ $\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi$	

روش‌های حل معادله‌های مثلثاتی

اصلی‌ترین روش‌های موجود برای حل یک معادله‌ی مثلثاتی را به صورت زیر دسته بندی می‌کنیم؛ (u و v عبارت‌هایی برحسب x هستند).

روش حل معادله	فرم معادله	حالت	
با این که v خودش مجهول است، اما فرم کلی جواب‌ها را می‌نویسیم، انگار که v معلوم است. بعد با حل معادله‌ای برحسب x ، آن را پیدا می‌کنیم.	$\sin u = \sin v$	دو نسبت مثلثاتی هم‌نام، مساوی شده‌اند...	۱
	$\cos u = \cos v$		
با متمم کردن یکی از کمان‌ها، مثل حالت بالا می‌شود! $\sin u = \sin(\frac{\pi}{2} - v)$ یا $\cos(\frac{\pi}{2} - u) = \cos v$	$\sin u = \cos v$	دو نسبت مثلثاتی غیر هم‌نام، مساوی شده‌اند...	۲
با روش Δ یا تجزیه، نسبت مثلثاتی را در می‌آوریم و بعد هم فرم کلی جواب‌ها و ... انگار در ابتدا داریم: $aA^2 + bA + c = 0$	$a \sin^2 u + b \sin u + c = 0$ $a \cos^2 u + b \cos u + c = 0$	معادله برحسب یک نسبت مثلثاتی درجه دوم است...	۳

مثال

جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x = \cos x$ را بدست آورید.

$$\cos 3x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \\ 3x = 2k\pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

اجتماع جواب‌های به دست آمده برابر $x = \frac{k\pi}{2}$ است.

مثال

جواب کلی معادله $\sin 2x = \cos x$ را بدست آورید.

حل) می‌توانیم با استفاده از تساوی $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ سمت راست معادله را به سینوس تبدیل کنیم:

$$\sin 2x = \cos x \Rightarrow \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ 2x = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{2} - x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

حل معادلات مثلثاتی با ظاهر درجه دوم

برای حل معادلات مثلثاتی با ظاهر درجه دوم، با دو حالت کلی زیر مواجه می‌شویم:

- ۱) اگر نسبت‌های مثلثاتی یکسان باشند، می‌توانیم با استفاده از اتحادهای جبری، معادله را به صورت ضرب چند عامل بنویسیم.
- ۲) اگر در معادله، هم سینوس و هم کسینوس وجود داشته باشد، ابتدا عبارت را برحسب نسبت مثلثاتی یکسان می‌نویسیم و سپس آن را تجزیه می‌کنیم.

چیزی که در معادله‌ی مثلثاتی می‌بینید	کاری که باید انجام بدهید...
$\sin^2 u$ به همراه $\cos^2 u$ $\sin u$ به همراه $\cos^2 u$	با اتحاد مثلثاتی $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ ، نسبت مثلثاتی توان دو را هم‌جنس دیگری کنید.
$\cos^2 u$ در کنار $\sin u$ $\cos u$ در کنار $\cos^2 u$	با اتحاد $\cos^2 u = 1 - \sin^2 u$ ، تمامی نسبت‌های مثلثاتی موجود می‌شوند $\sin u$. با اتحاد $\cos^2 u = 2 \cos^2 u - 1$ ، تمامی نسبت‌های مثلثاتی موجود می‌شوند $\cos u$.
$\sin 2u$ در کنار $\cos u$ یا $\sin u$	$2 \sin u \cos u = \sin 2u$ یا $\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u$

مثال

برای حل معادله مثلثاتی $\cos^2 x + \sin x = -2$ با استفاده از رابطه $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ معادله را برحسب $\sin x$ می‌نویسیم:

$$(1 - \sin^2 x) + \sin x = -2 \Rightarrow 2 \sin^2 x - \sin x - 3 = 0 \xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

مثال

برای حل معادله مثلثاتی $\sin 2x - 2 \cos x = 0$ از رابطه $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ استفاده می‌کنیم:

$$2 \sin x \cos x - 2 \cos x = 0 \Rightarrow 2 \cos x (\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۱۱۳	معادله‌ی مثلثاتی زیر را حل کنید. $\cos 2x - 13 \cos x - 6 = 0$	۱/۵	شهریور ۱۴۰۳
۱۱۴	جای خالی را با عبارت یا عدد مناسب کامل کند. مقدار عددی عبارت $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$ برابر است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۱۱۵	جواب‌های معادله $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ را در بازه $(0, \pi)$ بدست آورید.	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۱۱۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. فقط دو زاویه وجود دارد که مقدار کسینوس آن $\frac{2}{5}$ باشد.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۲
۱۱۷	جای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید. اگر α یک زاویه حاده و $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ حاصل $\cos 2\alpha$ برابر است.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۲
۱۱۸	جواب معادله مثلثاتی $2 \sin 4x = 1$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ هستند؟	۱/۵	دی ۱۴۰۲
۱۱۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. خط $y = \frac{1}{2}$ نمودار تابع $y = \sin x$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ در یک نقطه قطع می‌کند.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۱۲۰	معادله مثلثاتی $2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را حل کنید.	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۱۲۱	جواب(های) معادله مثلثاتی $\cos 2x - \cos x = 0$ را در بازه $(0, \pi)$ مشخص کنید.	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۳
۱۲۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. مقدار عددی عبارت $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$ برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۱

درس ۲
معادلات مثلثاتی



۱۳۳	۱	دی ۱۴۰۱	نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ و خط به معادله $y = \frac{1}{4}$ در دستگاه مختصات زیر، رسم شده است. طول نقاط برخورد آنها را بیابید.
۱۳۴	۱/۵	شهریور ۱۴۰۱	معادله زیر را حل کنید. $\cos 2x - 3 \sin x + 4 = 0$
۱۳۵	۱	خرداد ۱۴۰۱	معادله مثلثاتی $\sin(2x) = \sin x$ را حل کنید.
۱۳۶	۱/۵	تیر ۱۴۰۰	معادله مثلثاتی $\cos(2x) - \sin x + 1 = 1$ را حل کنید.
۱۳۷	۱	شهریور ۱۴۰۰	مثلثی با مساحت $8\sqrt{3}$ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه ی دو ضلع این مثلث به ترتیب ۴ و ۸ سانتی متر باشند، آن گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟
۱۳۸	۱	شهریور ۱۴۰۰	حاصل عبارت $4 \sin x \cos x \cos 2x$ را به ازای $x = 7/5^\circ$ را محاسبه نمایید.
۱۳۹	۱	خرداد ۱۴۰۰	معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.
۱۴۰	۱/۲۵	دی ۱۴۰۰	معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.
۱۴۱	۱	خرداد ۹۹	معادله مثلثاتی $\cos x(2 \cos x - 9) = 5$ را حل کنید.
۱۴۲	۱/۵	خرداد ۹۹ خ	معادله مثلثاتی زیر را حل کنید. $2 \sin 3x - \sqrt{2} = 0$



۱۳۳	اگر $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه حاده باشد، $\cos(2\alpha)$ را بدست آورید.	۰/۵	خرداد ۹۹ خ
۱۳۴	الف: جواب معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را بدست آورید. ب: مقدار $\sin(15^\circ)$ را بدست آورید.	۱/۵	خرداد ۹۹ خ
۱۳۵	معادله مثلثاتی $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$ را حل کنید.	۱/۵	شهریور ۹۹
۱۳۶	مقدار $\sin 15^\circ$ را بیابید.	۱	شهریور ۹۹
۱۳۷	معادله مثلثاتی $\cos 2\alpha - \sin \alpha + 1 = 1$ را حل کرده، جوابهای کلی آن را بنویسید.	۱/۲۵	خرداد ۹۸
۱۳۸	الف: مقدار $\sin 22/5^\circ$ را بدست آورید. ب: معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کرده و جوابهای کلی آن را بنویسید.	۱	شهریور ۹۸
۱۳۹	معادله مثلثاتی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.	۱/۵	دی ۹۸
۱۴۰	معادله مثلثاتی $\sin x - \cos(2x) = 0$ را حل کنید.	۱/۵	دی ۹۷

math-pilevar.ir

یادداشت ضروری دانش آموز:



حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت ۵۰



درس

۲ و ۱

حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

خلاصه درسنامه

یادآوری قضیه تقسیم:

اگر چندجمله‌ای $f(x)$ را بر $g(x)$ تقسیم کنیم و خارج قسمت تقسیم بشود $q(x)$ و باقی‌مانده هم $r(x)$ ، آن وقت می‌توان همواره نوشت:

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

نکته: در هر تقسیم درجه‌ی باقی‌مانده از درجه‌ی مقسوم‌علیه، کمتر است.

محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $ax + b$



اگر خواستید باقی‌مانده‌ی تقسیم یک چندجمله‌ای، مثل $f(x)$ را بر $ax + b$ پیدا کنید، این مراحل را اجرا کنید:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

۱) مقسوم‌علیه را مساوی صفر قرار دهید و ریشه‌ای را پیدا کنید.

۲) حالا ریشه‌ی به دست آمده برای x را در عبارت مقسوم جای‌گذاری کرده و ساده کنید، عدد حاصل می‌شود باقی‌مانده ...

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \xrightarrow{x-2=0 \Rightarrow x=2} f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 2 \Rightarrow r = -2 = \text{باقی‌مانده}$$

برای مثال:

نتیجه: باقی‌مانده چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ می‌شود: $f(-\frac{b}{a})$

تعریف اگر در تقسیم $f(x)$ بر $g(x)$ ، باقی‌مانده‌ی تقسیم صفر شود، اصطلاحاً می‌گوییم $f(x)$ بر $g(x)$ بخش‌پذیر یا تقسیم‌پذیر است.

شرط بخش‌پذیری چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ ، این است که $f(-\frac{b}{a}) = 0$ شود.

برای مثال: چندجمله‌ای $f(x) = 4x^3 - 13x - 6$ بر $x - 2$ بخش‌پذیر است، چون:

$$f(x) = 4x^3 - 13x - 6 \xrightarrow{x-2=0 \Rightarrow x=2} f(2) = 4(2)^3 - 13(2) - 6 \Rightarrow r = 32 - 26 - 6 = 0$$

یعنی بخش‌پذیر است

همسایگی



تعریف یک بازه‌ی باز از اعداد حقیقی را که شامل عدد x_0 باشد، یک همسایگی برای x_0 می‌گوییم. به عبارت دیگر: اگر $x_0 \in (a, b)$ باشد، در

این صورت (a, b) را یک همسایگی x_0 می‌نامیم.



انواع همسایگی‌ها

برای عدد x_0 سه همسایگی خاص به شکل زیر تعریف می‌شود:

توضیح فارسی	شکل ریاضی ($r > 0$)	مثال نمونه برای $x_0 = 2$
همسایگی چپ بازه‌ای است باز که فقط اعداد کوچک‌تر از x_0 را شامل می‌شود.	$(x_0 - r, x_0)$ 	$(-3, 2) = \{x -3 < x < 2\}$
همسایگی راست بازه‌ای است باز که فقط اعداد بزرگ‌تر از x_0 در آن هستند.	$(x_0, x_0 + r)$ 	$(2, 3) = \{x 2 < x < 3\}$
همسایگی محذوف بازه‌ای شامل اعداد بزرگ‌تر و کوچک‌تر از x_0 است که فقط خود x_0 در آن نیست.	$(a, x_0) \cup (x_0, b)$ 	$(1, 3) - \{2\} = (1, 2) \cup (2, 3)$

مثال

اگر بازه $(a-3, 2a+1)$ همسایگی عدد یک باشد، حدود a را بیابید.

$$a-3 < 1 < 2a+1 \Rightarrow \begin{cases} a-3 < 1 \rightarrow a < 4 \\ 2a+1 > 1 \rightarrow 2a > 0 \rightarrow a > 0 \end{cases} \cap \rightarrow 0 < a < 4$$

حد توابع کسری وقتی به صورت $\frac{0}{0}$ درمی‌آید:

صفرها دو دسته‌اند: ۱) صفر مطلق (خود صفر)

۲) صفر نسبی یا حدی ($0^\pm$)

با توجه به دو دسته بودن صفرها، پس ۴ نوع $\frac{0}{0}$ داریم:

نوع اول: $\frac{0}{0}$ مخرج کسر صفر مطلق پس حد وجود ندارد.

برای مثال: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{[x]} = \frac{0}{0}$ مخرج کسر صفر مطلق است پس حد وجود ندارد.

نوع دوم: $\frac{0^\pm}{0}$ مخرج کسر صفر مطلق پس حد وجود ندارد.

برای مثال: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{[x]} = \frac{0^+}{0^+}$ صفر حدی / صفر مطلق مخرج کسر صفر مطلق است پس حد وجود ندارد. (نمودار در همسایگی راست صفر تعریف نشده است.)

نوع سوم: $\frac{0}{0^\pm}$ صورت صفر مطلق و مخرج غیر صفر (صفر حدی) پس حد کسر صفر می‌شود.

برای مثال: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} = \frac{[0^+]}{0^+} = \frac{0^+}{0^+} = 0$ حد مطلق / حدی

نوع چهارم: $\frac{0^\pm}{0^\pm}$ به این حالت، حالت مبهم می‌گوییم و باید رفع ابهام شود.



برای مثال: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = \frac{(-3)^2 - 9}{(-3)^2 + 3(-3)} = \frac{0}{0}$ حالت مبهم و باید رفع ابهام شود.

؟ چگونه رفع ابهام $\frac{0}{0}$ را انجام دهیم:

الف) رفع ابهام $\frac{0}{0}$ وقتی صورت و مخرج هر دو چندجمله‌ای باشند.

وقتی $x \rightarrow a$ و تابع جبری با حالت $\frac{0}{0}$ مواجه شده است، یعنی هم صورت و هم مخرج عامل $x - a$ دارند. در این حالت برای رفع ابهام، باید به کمک اتحادها و تجزیه‌ی عبارت‌های جبری، این عامل $x - a$ را در صورت و مخرج ایجاد کرده و ساده کنید. بعد از ساده کردن می‌توانید عددگذاری کنید و به ازای $x = a$ حاصل حد را پیدا کنید ...

برای مثال: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x+3)} = 2$

مثال

حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x - 6}{x^2 - 4x - 12}$ را بدست آورید. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-6)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{x-6} = \frac{-2-3}{-2-6} = \frac{5}{8}$

تذکره: هرگاه نتوانیم با اتحادها یا فاکتورگیری عامل ابهام را ایجاد کنیم، چاره‌ای جزء تقسیم آن عبارت بر عامل ابهام نداریم. در این صورت به جای آن عبارت حاصل ضرب $(x - a)$ (همان مقسوم‌علیه) در خارج قسمت را می‌نویسیم.

مثال

حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^2 - 2x}$ را بدست آورید. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^3 + 2x^2 + 2x + 4)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^3 + 2x^2 + 2x + 4)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}{x} = \frac{8 + 8 + 4 + 4}{2} = 12$

ب) رفع ابهام $\frac{0}{0}$ وقتی صورت یا مخرج و یا هر دو شامل عبارات رادیکالی هستند.

در این حالت از مفهوم گویا کردن و اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر استفاده می‌کنیم. به این صورت که

۱) عبارت رادیکالی با فرجه ۲ (قرجه زوج): از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

برای مثال:

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x - 2)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2)(\sqrt{x} + 1) = 3 \times 2 = 6$

۲) عبارت رادیکالی با فرجه ۳ (فرجه فرد): از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم.

یادآوری:

$$(\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^r} \mp \sqrt[n]{ab} + \sqrt[n]{b^r}) = a \pm b$$

$$(\sqrt[n]{a} \pm b)(\sqrt[n]{a^r} \mp b\sqrt[n]{a} + b^r) = a \pm b^r$$

برای مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - x} \times \frac{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - 1^3}{(x^2 - x)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x(x-1) \times 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{3x} = \frac{1}{3}$$

تذکر: مرحله‌ی ضرب مزدوج یا ضرب لنگه‌ی اتحاد چاق و لاغر باعث رفع ابهام نمی‌شود و فقط رادیکال را برای ما از بین می‌برد. قطعاً مرحله‌ی بعد، تجزیه یا تقسیم است تا بتوانیم عامل‌های صفرشونده را ایجاد کرده و ساده کنیم ...

حدی که قدرمطلق یا جزء صحیح دارد ...

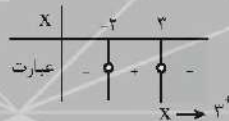
اگر کسر شما شامل قدرمطلق یا جزء صحیح باشد، ابتدا باید آن‌ها را بردارید و بعد رفع ابهام کنید ...

نکته: ۱) باید قدرمطلق را در مجاورت $x = a$ تعیین علامت کنیم.

برخورد با چالش قدرمطلق اینطوری است که به طور مناسب و برحسب علامتش برداشته می‌شود و خود عبارت یا قرینه‌اش از قدرمطلق خارج می‌شود.

برای مثال: حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|6+x-x^2|}{x^2-9}$ را حساب می‌کنیم.

$$6+x-x^2=0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{-2} = -2, 3 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$



$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|6+x-x^2|}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-(6+x-x^2)}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2-x-6}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+2}{x+3} = \frac{3+2}{3+3} = \frac{5}{6}$$

۲) جزء صحیح را در نقطه تعیین مقدار می‌کنیم

جزء صحیح از مسئله خارج می‌شود و همیشه به جایش یک عدد می‌ماند ...

مثال

حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x+[-x]}{x^2-x}$ را بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2-x|[x]}{|x|-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(2-x)[2^+]}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2) \times 2}{x-2} = 2$$

برای مثال:

حد بی‌نهایت

تعریف: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ یعنی می‌توانیم $f(x)$ را هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبت بزرگتر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم. (فرض می‌کنیم f در هر دو طرف a تعریف شده باشد)



تعریف $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$: یعنی می‌توانیم $f(x)$ را هر قدر بخواهیم از هر عدد منفی کوچک‌تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم. (فرض می‌کنیم f در هر دو طرف a تعریف شده باشد).
حد بی‌نهایت در نمودار توابع مختلف ممکن است به یکی از صورت‌های زیر می‌باشد:

حدهای نامتناهی دو طرف هم‌علامتی هم‌علامت‌اند.		حد چپ و راست هم‌علامت نیستند.	
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

$$\frac{\text{عدد حقیقی غیر صفر}}{\text{صفر}} = \infty$$

چه حدهایی نامتناهی می‌شوند؟

تذکر: وقتی می‌گوییم مخرج صفر شود، منظورمان صفر حدی است، یعنی مخرج دقیقاً خود صفر نمی‌شود بلکه حد صفر دارد ...

نکته: وقتی با کسری مواجه شده‌اید که صورتش صفر نیست و مخرجش صفر است، جواب حد را ∞ بنویسید، اما یادتان باشد، مرحله‌ی مهم بعدی پیدا کردن علامت ∞ است؛ علامت ∞ بستگی به علامت صورت و مخرج دارد. از آن‌جا که صورت کسر، عددی حقیقی و معلوم است در نتیجه علامتش هم مشخص است؛ اما برای مخرج معمولاً نیاز به تعیین علامت دارید، به خصوص وقتی که x در همسایگی یک طرفه‌ی a قرار گرفته باشد، یعنی $x \rightarrow a^+$

برای مثال اگر در محاسبه حد به حالت $\frac{\text{عدد حقیقی غیر صفر}}{\text{صفر}} = \infty$ رسیدید، بلافاصله مخرج را تعیین علامت کنید...

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 1}{x - 3} \xrightarrow{\text{تعیین علامت مخرج}} \frac{9 - 1}{3 - 3} = \frac{8}{0} = \infty \quad \begin{array}{c|c} x & \\ \hline x-3 & - \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{مخرج منفی بوده} \\ \text{صورت مثبت است} \end{array} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 1}{x - 3} = \frac{+8}{0^-} = -\infty$$

■ وضعیت کلی حدهای نامتناهی

$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$	$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$	$\frac{\text{عدد غیر صفر}}{\text{صفر}} = \infty$
$\frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$	$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$	

مثال

حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^2 - 4x - 5}{x^2 - x - 6}$ کدام است؟ پاسخ:

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2, 3 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|c} x & \\ \hline x^2 - x - 6 & + \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{مخرج مثبت بوده} \\ \text{صورت مثبت است} \end{array} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^2 - 4x - 5}{x^2 - x - 6} = \frac{+1}{0^+} = +\infty$$

مثال

اگر مخرج کسری که بعد از عددگذاری به فرم $\frac{\text{عدد غیر صفر}}{\text{صفر}}$ درآمد، عبارت مثلثاتی بود، برای تعیین علامت مخرج، ببینید با میل کردن x به a از سمت داده شده، عبارت مخرج در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی واقع می‌شود و حدوداً چقدر می‌شود...

حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{\cos x}$ کدام است؟

پاسخ:

تعیین علامت مخرج: $\cos x \rightarrow 0^-$ در ناحیه سوم منفی است

تعیین ناحیه: ناحیه سوم

در دایره‌ی مثلثاتی $x \rightarrow \frac{3\pi}{2}$ از $\frac{3\pi}{2}$ کمی کم کن!

$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{\cos x} = \frac{+1}{0^-} = -\infty$

حد در بی‌نهایت

معنای حد تابع، وقتی حد در بی‌نهایت مطرح است: اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ شود، معنایش این است که وقتی x را بسیار بزرگ کنید (طوری که از هر عدد قابل تصویری که در ذهن بیاید هم بیشتر باشد)، آن وقت $f(x)$ به عدد ℓ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. هم چنین $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ، یعنی $f(x)$ می‌تواند به هر اندازه‌ی دلخواهی به عدد ℓ نزدیک شود، مشروط به این که قدر مطلق x به اندازه‌ی کافی بزرگ انتخاب شود ولی خود x منفی باشد ...

اما ممکن است حد تابع در بی‌نهایت، نامتناهی شود؛ این طوری: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ معنای این جمله هم این است که اگر x را بزرگ و بزرگ‌تر کنیم، $f(x)$ بسیار بزرگ می‌شود و از هر چه فکرش را هم بکنیم، بیشتر می‌شود. و به همین ترتیب برای بقیه‌ها نیز می‌توان مدلسازی کرد.

پیدا کردن حد تابع وقتی $x \rightarrow \pm\infty$

مهمترین ابزار ما برای محاسبه‌ی حد در بی‌نهایت، این است: $r > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{k}{x^r} = 0$

برای مثال اگر x با هر توان گویا و مثبتی در مخرج باشد و صورت کسر هم عددی حقیقی باشد، حد این تابع در ∞ می‌شود صفر ...

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x^2} = 0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2}} = 0$$

روش تستی پیدا کردن حد در بی‌نهایت، هم‌ارزی پرتوان

اگر در یک چندجمله‌ای، x^m دارای بیشترین توان باشد، در این صورت x^m را پرتوان آن چندجمله‌ای می‌گوییم و در شرایطی که $x \rightarrow \pm\infty$ ، می‌توانیم به جای کل آن، تنها جمله‌ی پرتوان را با ضرب خودش نگه داریم و مابقی را نادیده بگیریم.

برای مثال:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots \xrightarrow[\text{هم‌ارز است با}]{x \rightarrow \pm\infty} ax^n \quad (n \in \mathbb{N}, a \neq 0)$$

نکته: روش بسیار سریع بالا در واقع می‌گوید، وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ یک چندجمله‌ای، معادل است با جمله‌ی پرتوان خودش، از بقیه جملات صرف‌نظر می‌کنیم. بنابراین به آن هم‌ارزی پرتوان می‌گوییم؛

مثال

حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + x^2 + 1}{x^3 + x - 1}$ را بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + x^2 + 1}{x^3 + x - 1} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی پرتوان}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3}{x^3} = -2$$

نکته: وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ ، هم‌ارزی پرتوان را برای عبارت جبری در این موارد می‌توانید استفاده کنید: وقتی چندجمله‌ای، در موقعیت توان قرار گرفته باشد یا پایه‌ی توان بوده یا زیر رادیکال یا داخل قدرمطلق حضور داشته باشد...

برای مثال:

$$\textcircled{1} \quad 3x^2 + x \sim 3x^2 \quad \textcircled{2} \quad (x^2 + x)^3 \sim (x^2)^3 \quad \textcircled{3} \quad \sqrt[3]{x^2 + x} \sim \sqrt[3]{x^2} \quad \textcircled{4} \quad |x^2 + x| \sim |x^2|$$

$$(n \in \mathbb{N}) \quad \boxed{(+\infty)^n = +\infty}, \quad \boxed{(-\infty)^{2n} = +\infty}, \quad \boxed{(-\infty)^{2n+1} = -\infty}$$

■ عملیات توانی روی ∞ :

عدد غیرصفر ضربدر بی‌نهایت، می‌شود بی‌نهایت.

برای مثال:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + x - 1) \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2) = -2(-\infty)^2 = -2(+\infty) = -\infty$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = -2(-\infty) = +\infty$$

حد بی‌نهایت برای تابع گویا

براساس هم‌ارزی پرتوان، یک نتیجه‌ی بسیار مهم درباره‌ی کسرهایی که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای است. برای $x \rightarrow \pm\infty$ به دست می‌آید:

مثال	حاصل حد	شرط
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x + 5} = -\infty$	$+\infty$ یا $-\infty$	$n > m$: درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج بیشتر است:
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x - 1}{x^2 + 2x - 7} = \frac{3}{1} = 3$	$\frac{a}{a'}$	$n = m$: درجه‌ی صورت و مخرج مساوی است:
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5}{x^2 + 6x - 1} = 0$	صفر	$n < m$: درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج کمتر است:

نکته:

- اگر جواب حد تابعی گویا در حالت $x \rightarrow \pm\infty$ عددی غیر صفر شده بود، نتیجه بگیرد که: درجه‌ی صورت = درجه‌ی مخرج
- اگر جواب حد تابعی گویا در حالت $x \rightarrow \pm\infty$ صفر شده بود، نتیجه بگیرد که: درجه‌ی صورت < درجه‌ی مخرج
- اگر جواب حد تابعی گویا در حالت $x \rightarrow \pm\infty$ $+\infty$ یا $-\infty$ شده بود، نتیجه بگیرد که: درجه‌ی صورت > درجه‌ی مخرج

عملیات با ∞

این هم کارهایی که با ∞ می‌توان انجام داد؛ برای مرور:

۱ $\infty \pm \text{عدد} = \infty$

۲ $\infty \times \text{عدد غیر صفر} = \infty$

۳ $\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$ و $\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$

۴ $0 = {}^{-\infty} = (\text{عدد بزرگتر از } 1) {}^{+\infty} = (\text{عدد بین صفر و یک})$

۵ $+\infty = {}^{+\infty} = (\text{عدد بزرگتر از } 1) {}^{-\infty} = (\text{عدد بین صفر و یک})$

مثال: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$

مثال: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$

حد نامتناهی در بی‌نهایت

تعریف $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: اگر $f(x)$ در یک بازه $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد و با رفتن x به سمت $+\infty$ ، $f(x)$ نیز به سمت $+\infty$ برود،

می‌گوییم حد این تابع در $+\infty$ برابر $+\infty$ است و می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

تعریف بالا را برای $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ نیز می‌توان نوشت.

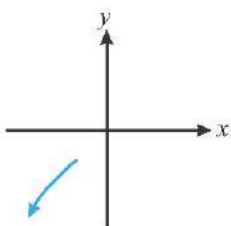
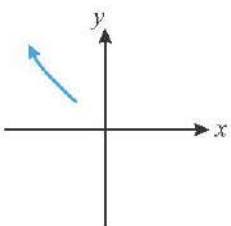
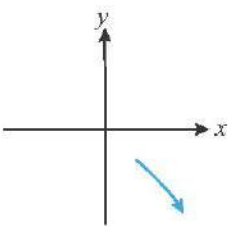
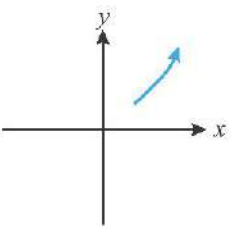
حدود نامتناهی در بی‌نهایت: حدودی مانند $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$ را حدود نامتناهی در بی‌نهایت می‌نامیم.

■ قضیه: اگر a عددی مثبت و n عددی طبیعی باشد، آنگاه:

۱ $\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = +\infty$

۲ $\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ زوج} \\ -\infty & n \text{ فرد} \end{cases}$

شکل‌ها تقریبی‌اند...

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
			

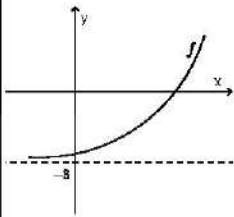
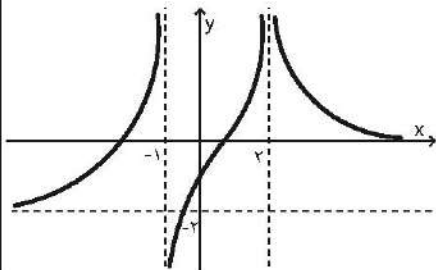


سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۱۴۱	جمله زیر را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید. در تقسیم چند جمله‌ای $2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر $x + 2$ ، باقی مانده تقسیم برابر است.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۱۴۲	حدود زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2 - \frac{2}{x^2}} =$ ب) $\lim_{x \rightarrow (-\pi)^+} \frac{1}{\sin x} =$ پ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x} + 1} =$	۱/۷۵	شهریور ۱۴۰۳
۱۴۳	حدود زیر را محاسبه کنید. (نماد [] علامت جزء صحیح است). الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x-5)^4}$ ج) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - [x]}{x-3}$ د) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^2 + 7x - 9}{2x^2 - 4x^2 + x}$	۲	خرداد ۱۴۰۳
۱۴۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. باقیمانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ بر $x - 1$ برابر ۲ است.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۲
۱۴۵	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. بازه $(-2, 0)$ یک همسایگی چپ برای عدد است.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۲
۱۴۶	حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x]}{x-2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x-4x^2}{3x+2x^2}$	۱/۵	دی ۱۴۰۲



شماره سوال ۱۴۰۲	۰/۵		۱۴۷ با توجه به نمودار تابع f، حاصل حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$
شماره سوال ۱۴۰۲	۱/۵	الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{ 2-x }$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$	۱۴۸ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.
شماره سوال ۱۴۰۲	۰/۵		۱۴۹ آیا مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{[x]-1}$ وجود دارد؟ چرا؟
شماره سوال ۱۴۰۲	۱/۵	الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{ \sin x }$ پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 4x^5}{x^3 - x}$	۱۵۰ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.
شماره سوال ۱۴۰۱	۰/۲۵		۱۵۱ جای خالی را با عبارت ریاضی مناسب پر کنید. حاصل حد تابع $f(x) = \frac{2x^2}{3x^3 - 1}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ میل می‌کند برابر است.
شماره سوال ۱۴۰۱	۰/۷۵		۱۵۲ نمودار تابع f به شکل مقابل است حد های زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) =$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

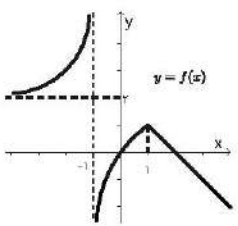


۱۴۰۱ دی	۱	۱۵۳	حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$
۱۴۰۱ شهریور	۰/۲۵	۱۵۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. بازه $(2, 5)$ ، یک همسایگی ۴ است.	
۱۴۰۱ شهریور	۰/۷۵	۱۵۵	حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.	الف) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$ ب) $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})} \frac{1}{\cos x}$ پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x}{5x + 4}$
۱۴۰۱ خرداد	۰/۲۵	۱۵۶	در جای خالی عدد یا عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. باقیمانده تقسیم عبارت $1 - 5x + 2x^2$ بر $x - 3$ برابر است.	
۱۴۰۱ خرداد	۱	۱۵۷	نمودار تابع به صورت شکل زیر است. حدود خواسته شده را محاسبه کنید.	الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$ پ) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$ ت) $\lim_{x \rightarrow (1)^-} f(x) =$
۱۴۰۱ خرداد	۰/۷۵	۱۵۸	حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 7x + 3}$
۱۴۰۰ دی	۰/۲۵	۱۵۹	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب را انتخاب کنید. چند جمله‌ای $p(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ بر دو جمله‌ای بخش پذیر است. $((x+1), (x-1))$	

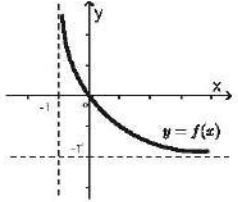


۱۴۰۰ دی	۱/۷۵	۱۶۰	حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید.
	الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{\sin^2 x}$		
۱۴۰۰ شهریور	۲	۱۶۱	حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.
	الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$ پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$		
۱۴۰۰ خرداد	۲	۱۶۲	حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.
	الف) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{3x+1}$ پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$		
۱۴۰۰ دی	۰/۲۵	۱۶۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در تقسیم چند جمله‌ای $p(x)$ بر $x-a$ ، باقیمانده برابر $p(a)$ است.
۱۴۰۰ دی	۱/۷۵	۱۶۴	حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.
	الف) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-3}{x-3}$		
۱۴۰۰ خرداد	۰/۲۵	۱۶۵	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. حد تابع $f(x) = \frac{5x+4}{x^3+x-8}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر است.
۱۴۰۰ خرداد	۱/۷۵	۱۶۶	حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.
	الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - \sqrt{x+6}}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x]-3}{x-3}$		



۱۶۷	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. باقی مانده تقسیم $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ بر $x - 3$ برابر است.	۰/۲۵	خرداد ۹۹ خ
۱۶۸	حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2 - 4}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}$ پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x - 3}$ ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{3x - 1}$	۱/۷۵	خرداد ۹۹ خ
۱۶۹	حد توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x]}{ 3x + 1 }$ ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x}{x - 5}$ پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (9 + \frac{7}{x^2})$	۲	خرداد ۹۹ خ
۱۷۰	حد توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}$ ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x] - 3}{ 2x - 1 }$ پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{6x^3 - 11x^2 - 3}$	۲	شهریور ۹۹ خ
۱۷۱	با توجه به نمودار $y = f(x)$: الف: حدود خواسته شده را بنویسید. ۱) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ۲) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ ب: تابع $f(x)$ در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق پذیر نیست؟ 	۱	شهریور ۹۹ خ



۱۷۲	الف: حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید. ب: با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، حدهای خواسته شده را بنویسید.	۱/۵ خرداد ۹۸
	الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{\sin x}$ الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$ ب) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$ 	
۱۷۳	حد تابع $f(x) = \frac{-3x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ میل می‌کند برابر می‌باشد.	۰/۲۵ شهریور ۹۸
۱۷۴	حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید.	۱/۷۵ شهریور ۹۸
	الف) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 16}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x}$	
۱۷۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. چند جمله‌ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر دو جمله‌ای $x + 2$ بخش‌پذیر است.	۰/۲۵ دی ۹۸
۱۷۶	حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.	۱/۷۵
	الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x+3}}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{ x-3 }$	
۱۷۷	در جای خالی عبارت مناسب بنویسید. حد تابع وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر است.	۰/۲۵ دی ۹۷
	$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{5x^2 - 3x}{-x^2 + 1} & x \leq 0 \end{cases}$	
۱۷۸	حد توابع زیر را بدست آورید.	۱/۷۵ دی ۹۷
	الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{[x] - 3}{x - 3}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2}$	



مشتق

۶۵	آشنایی با مفهوم مشتق
۷۱	مشتق پذیری و پیوستگی
۸۶	آهنگ تغییر



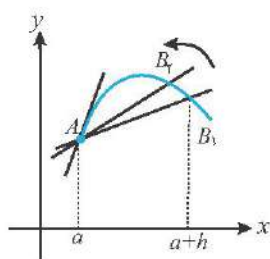
درس

۱

آشنایی با مفهوم مشتق

خلاصه درسنامه

مفهوم خط مماس:

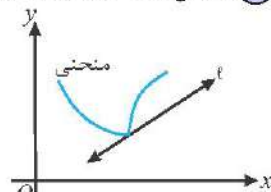


خطی که از نقطه A روی منحنی و نقطه دیگری مانند B_1 می‌گذرد را در نظر بگیرید، به این خط، خط قاطع می‌گوییم. حال روی منحنی نقطه‌های دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A انتخاب می‌کنیم و خط‌های قاطع گذرنده از A و آن نقطه‌ها را رسم می‌کنیم. وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می‌شوند، خط‌های قاطع نیز به خط مماس نزدیک می‌شوند.

خطی را که به دست آمده، خط مماس بر منحنی f می‌گوییم، مگر این که:

② آن نقطه، عضو دامنه‌ی f نباشد.

① منحنی در نقطه‌ی مورد نظر، تیز شده باشد.



انواع خط مماس

شکل نمونه	وضعیت هندسی خط مماس	مقدار شیب	انواع مماس	
	خط مماس، موازی محور x ‌هاست.	صفر	مماس افقی	۱
	خط مماس، موازی محور y ‌هاست.	تعریف نشده	مماس قائم	۲
	خط مماس، نه موازی محور x ‌هاست و نه موازی محور y ‌ها.	عددی غیر صفر	مماس مایل	۳

نکته: اگر مماس بر منحنی در یک نقطه، قائم و افقی نباشد، مقدار شیب، مثبت یا منفی خواهد بود.



از نظر کشیدن خط مماس	از نظر شکل خط مماس
اگر خودتان را سمت چپ و روی خط تصور کنید مسیر حرکت شما بر بالایی است.	۱
اگر خودتان را سمت چپ و روی خط تصور کنید مسیر حرکت شما سرازیری است.	۲

تعریف مشتق در نقطه مشتق تابع پیوسته $y = f(x)$ را در نقطه‌ای $x = a$ با نماد $f'(a)$ نشان داده و به یکی از فرم‌های زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف مشتق	
$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ یا $f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$	۱
$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$	۲

مثال

اگر $f(x) = x^2 - 3x + 2$ باشد، حاصل $f'(2)$ را به کمک تعریف مشتق به دست آورید.

پاسخ: روش اول:

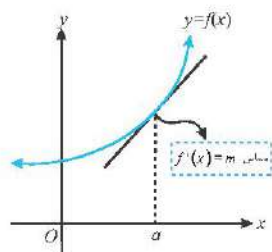
$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)} = 1$$

روش دوم:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \Rightarrow f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 3(2+h) + 2}{h}$$

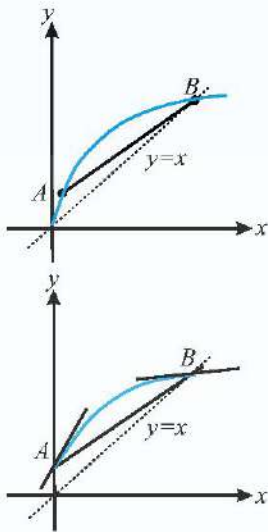
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + h^2 + 4h - 6 - 3h + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+1)}{h} = 1$$

ارتباط مشتق با خط مماس



معنای $f'(a)$ ، همان شیب خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ است در نقطه‌ای به طول a . اگر مشتق تابعی را در نقطه‌ای $x = a$ حساب کنید، انگار شیب خط مماس بر نمودار تابع را در آن نقطه به دست آورده‌اید.

مثال



نمودار $y = f(x)$ به صورت مقابل است. اگر شیب نمودار در نقطه A و B را با m_A و m_B و شیب خط AB را با m_{AB} نشان دهیم، کدام یک از نامساوی‌های زیر درست است؟

$$m_B > m_A > 1 \quad (2)$$

$$m_A > 1 > m_B \quad (1)$$

$$m_{AB} > m_B > 1 \quad (4)$$

$$m_B > 1 > m_{AB} \quad (3)$$

پاسخ می‌دانیم شیب خط $y = x$ برابر یک است. حال اگر خط مماس بر منحنی را در نقاط A و B رسم کنیم، از روی نمودار معلوم می‌شود که شیب در نقطه A از ۱ بیشتر است و شیب خط AB و شیب خط مماس در نقطه B هر دو از ۱ کمترند. از طرفی شیب خط AB تندتر از شیب نمودار در نقطه B می‌باشد. پس نتیجه می‌گیریم: $m_A > 1 > m_{AB} > m_B$. بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

نوشتن معادله‌ی خط مماس

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ی $x = a$ می‌شود:

مثال

معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^3 + 1$ را در نقطه $x = 1$ بنویسید.

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^3 + 1 = 2 \Rightarrow A(1, 2) \quad \text{نقطه تماس}$$

$$\text{شیب} = m = f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

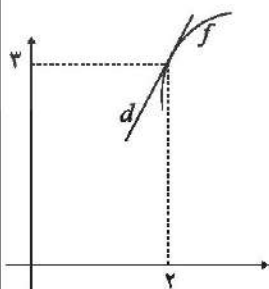
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

$$m = 3, A(1, 2) \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 1 \quad \text{معادله خط مماس}$$

سوالات نهایی

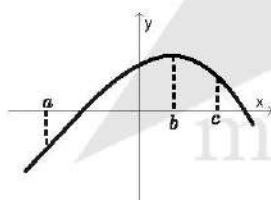
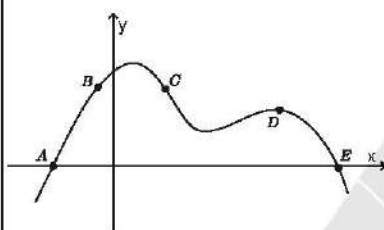
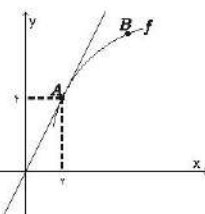


ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۱۷۹	با توجه به شکل، اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5f(x) - 15}{x - 2} = 10$ باشد معادله‌ی خط d را به دست آورید.	۱/۲۵	۱۴۰۳ شهریور

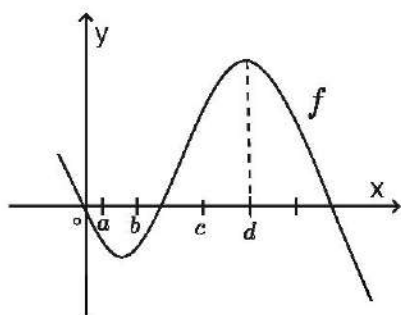




۱۸۰	۱	۱۴۰۳ خرداد	اگر نمودار تابع f از نقطه $A(2, 4)$ بگذرد و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3$ باشد، معادله خط مماس بر نمودار f را در نقطه A بدست آورید.
۱۸۱	۰/۷۵	۱۴۰۱ تیر	نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. اگر خط d در نقطه A بر نمودار تابع f مماس باشد: الف: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ را بیابید. ب: شیب خطهای مماس در نقاط A و B را مقایسه کنید.
۱۸۲	۰/۵	۱۴۰۱ شهریور	از بین نقاط مشخص شده A و B و C و D و E روی نمودار زیر، در کدام نقطه: الف) مقدار تابع صفر ولی مقدار مشتق آن مثبت است؟ ب) مقدار تابع مثبت ولی مقدار مشتق آن منفی است؟
۱۸۳	۰/۵	۱۴۰۱ خرداد	با توجه به نمودار تابع f ، اگر شیب خط مماس در نقاط a و b و c به ترتیب با m_a و m_b و m_c نمایش داده شود. کدامیک از گزینههای زیر صحیح است؟
۱۸۴	۱	۱۴۰۵ شهریور	با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل زیر، نقاط به طولهای a, b, c, d را با مشتقهای داده شده در جدول نظیر کنید.



- الف) $m_c > m_b > m_a$
 ب) $m_b > m_a > m_c$
 پ) $m_a > m_b > m_c$
 ت) $m_c = m_b = m_a$

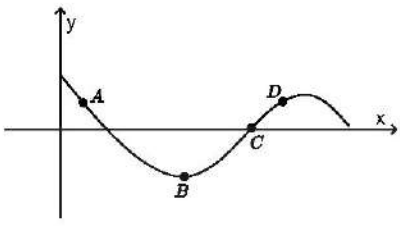
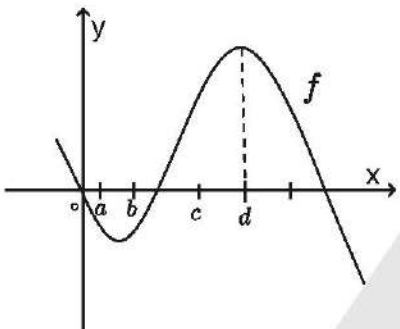
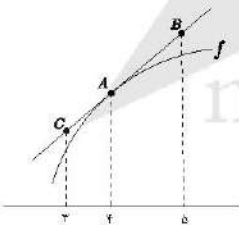


x	$f'(x)$
	۰
	۰/۵
	۲
	-۰/۵



۱۴۰۰ خرداد	۱	۱۸۵	برای تابع f در شکل روبرو داریم $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 24$ با توجه به شکل، مختصات نقاط B و C را بیابید.											
۹۹ دی	۱	۱۸۶	نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید. (یک نقطه اضافی است).	<table border="1"> <thead> <tr> <th>نقطه</th> <th>شیب</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>-۳</td> <td></td> </tr> <tr> <td>-۱</td> <td></td> </tr> <tr> <td>۰</td> <td></td> </tr> <tr> <td>۱</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	نقطه	شیب	-۳		-۱		۰		۱	
نقطه	شیب													
-۳														
-۱														
۰														
۱														
۹۹ خرداد	۱	۱۸۷	در نمودار مقابل خط d در نقطه $x = 1$ بر نمودار f مماس شده است: الف: مشتق تابع f را در نقطه $x = 1$ محاسبه کنید. ب: شیب نمودار را در نقاط B و C مقایسه کنید.											
۹۹ خرداد	۱	۱۸۸	اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ باشد، $f'(2)$ را بدست آورید و معادله خط مماس بر منحنی تابع f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.											
۹۹ شهریور	۱	۱۸۹	برای تابع f در شکل رو به رو داریم: $f'(4) = \frac{3}{4}$ و $f(4) = 25$ با توجه به شکل، مختصات نقاط A و B را بیابید.											



شهریور ۹۸	۱	۱۹۰	نقاط داده شده روی منحنی را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.	 <table border="1" data-bbox="796 329 984 463"> <tr> <td>شیب</td><td>۱</td><td>۰</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>-۲</td></tr> <tr> <td>نقطه</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	شیب	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-۲	نقطه				
شیب	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-۲										
نقطه														
دی ۹۸	۱	۱۹۱	با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.	 <table border="1" data-bbox="845 692 1010 943"> <tr> <td>x</td><td>$f'(x)$</td></tr> <tr> <td></td><td>۰</td></tr> <tr> <td></td><td>۰/۵</td></tr> <tr> <td></td><td>۲</td></tr> <tr> <td></td><td>-۰/۵</td></tr> </table>	x	$f'(x)$		۰		۰/۵		۲		-۰/۵
x	$f'(x)$													
	۰													
	۰/۵													
	۲													
	-۰/۵													
خرداد ۹۸	۱	۱۹۲	مشتق تابع $f(x) = x^3 - 2$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول $x = -1$ به دست آورید.											
دی ۹۷	۱	۱۹۳	برای تابع f در شکل زیر داریم $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 24$ با توجه به شکل، مختصات نقاط A, B و C را بیابید.											
دی ۹۷	۰/۷۵	۱۹۴	اگر $f(x) = 1 - 2x^2$ باشد. $f'(-1)$ را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید.											

یادداشت ضروری دانش‌آموز:

درس

۲

مشتق پذیری و پیوستگی

خلاصه درسنامه

از آنجا که تعریف مشتق در نقطه‌ای $x = a$ ، یک حد است، ممکن است این حد موجود باشد یا نباشد! بنابراین مشتق تابع f در نقطه‌ای $x = a$ زمانی وجود دارد که f در a پیوسته بوده و حاصل $f'(a)$ هم عددی حقیقی شود؛ در این صورت می‌گوییم تابع f در نقطه‌ای $x = a$ مشتق پذیر است...

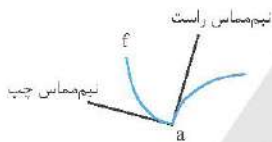
نکته: تابعی که در یک نقطه ناپیوسته است، در آن نقطه مشتق ندارد

تعریف تعریف مشتق چپ و مشتق راست: مشتق چپ و راست تابع f در $x = a$ را با $f'_-(a)$ و $f'_+(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱
$$x = a \text{ در نقطه‌ای } f \text{ مشتق راست} = f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

۲
$$x = a \text{ در نقطه‌ای } f \text{ مشتق چپ} = f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تعبیر هندسی مشتق‌های چپ و راست: اگر $f'_+(a)$ موجود باشد، آنگاه منظور از $f'_+(a)$ ، شیب نیم‌مماس راست و اگر $f'_-(a)$ موجود باشد، منظور از $f'_-(a)$ شیب نیم‌مماس چپ در نقطه a می‌باشد. (نیم‌مماس راست، نیم‌خطی است که به شاخه سمت راست f در نقطه a مماس شده و نیم‌مماس چپ، نیم‌خطی است که به شاخه سمت چپ f در نقطه a مماس شده است.)



شیب نیم‌مماس راست $f'_+(a)$

شیب نیم‌مماس چپ $f'_-(a)$

نکته: شرط لازم برای مشتق راست، پیوستگی راست و شرط لازم برای مشتق چپ، پیوستگی چپ است.

برای آن که تابع پیوسته‌ی f در نقطه‌ای $x = a$ مشتق پذیر باشد، باید مشتق راست و مشتق چپ آن عددهای حقیقی مساوی باشند؛ اگر هر کدام از مشتق‌های یک طرفه، عدد نباشد یا مساوی هم نباشند، می‌گوییم تابع f در آن نقطه مشتق ندارد یا مشتق ناپذیر است!

نکته: f در $x = a$ مشتق ندارد $\Rightarrow f'_-(a) = +\infty$ و $f'_+(a) = +\infty$

نتیجه‌های حاصل از ارتباط پیوستگی با مشتق پذیری:

- ۱ اگر تابع f در نقطه‌ای $x = a$ ناپیوسته باشد، حتماً در این نقطه مشتق پذیر نخواهد بود.
- ۲ اگر تابع f در نقطه‌ای $x = a$ مشتق پذیر باشد، حتماً در این نقطه پیوسته بوده است.
- ۳ اگر تابع f در نقطه‌ای $x = a$ پیوسته باشد، نمی‌توان لزوماً نتیجه گرفت که f در این نقطه مشتق پذیر است!
- ۴ اگر تابع f در نقطه‌ای $x = a$ مشتق پذیر نباشد، ممکن است f در آن نقطه پیوسته باشد یا نباشد!

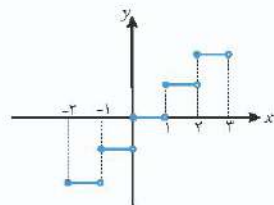


نقاط مشتق ناپذیر

نقاط مشتق ناپذیر معمولاً در توابع ناپیوسته، گنگ، قدرمطلق، براکتی و چندضابطه‌ای وجود دارند. نقاط مشتق ناپذیر را به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

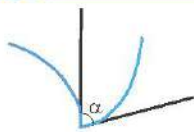
۱) **نقاط ناپیوسته:** تابع در نقاط ناپیوسته، مشتق ناپذیر است و از دید هندسی، در این نقاط نمی‌توان یک خط کامل مماس بر منحنی رسم کرد.

مثال



نقاط مشتق ناپذیر $f(x) = [x]$ را بنویسید.

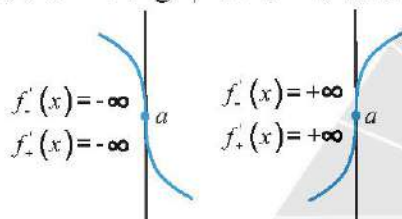
پاسخ: $f(x) = [x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته و مشتق ناپذیر است و در نقاط غیر صحیح روی خط افقی $y = k$ قرار می‌گیرند که مشتق تابع در آن‌ها برابر صفر است.



۲) **نقاط گوشه‌ای (زاویه‌دار):** نقاطی هستند که تابع در آن‌ها پیوسته بوده و مشتق چپ و راست در آن‌ها دو

عدد حقیقی نابرابر است. از دید هندسی، در این نقاط یک نیم مماس چپ و یک نیم مماس راست بر منحنی رسم می‌شود که با هم زاویه می‌سازند. مانند شکل روبه‌رو:

تذکر: در صورتی که تابع در $x = a$ پیوسته و از مشتق‌های چپ و راست، یکی عدد و دیگری بی‌نهایت شود، باز هم تابع در آن مشتق ناپذیر است.

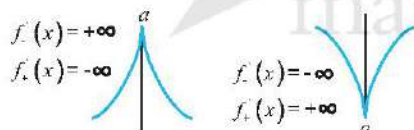


۳) **نقاط با مماس قائم (نقاط عطف قائم):** نقاط پیوسته‌ای هستند که مشتق‌های

چپ و راست در آن‌ها بی‌نهایت‌های هم‌علامت است. از دید هندسی، در این نقاط می‌توان یک خط کامل مماس به موازات محور y را رسم کرد. نمودار عطف قائم همواره به یکی از دو حالت مقابل می‌باشد: (در درس‌های بعدی در مورد نقطه عطف خواهیم خواند).

• در نمودار سمت چپ، تابع در همسایگی a صعودی اکید است، پس $f'(a) > 0$

• و در نمودار سمت راست، تابع در همسایگی a نزولی اکید است، پس $f'(a) < 0$ است.



۴) **نقاط بازگشت:** نقاط پیوسته‌ای هستند که مشتق‌های چپ و راست در آن‌ها، بی‌نهایت‌های

غیرهم‌علامت است. از دید هندسی، در این نقاط یک نیم مماس به موازات محور y را بر منحنی رسم می‌شود. نمودار نقاط بازگشت همواره به یکی از دو حالت مقابل می‌باشند:

• در نمودار سمت چپ، تابع در همسایگی چپ a نزولی اکید است ($f'_-(a) < 0$) و در همسایگی راست a صعودی اکید می‌باشد ($f'_+(a) > 0$).

• در نمودار سمت راست، تابع در همسایگی چپ a صعودی اکید است ($f'_-(a) > 0$) و در همسایگی راست a نزولی اکید می‌باشد ($f'_+(a) < 0$).

مثال

مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ را در نقطه $x = 2$ بررسی کنید.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1, \quad f'_+(2) \neq f'_-(2) \Rightarrow \text{تابع در } x = 2 \text{ مشتق ندارد}$$

مثال

مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & x \geq 1 \\ x^3 + 1 & x < 1 \end{cases}$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 4$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = 3$$

تابع در $x = 1$ مشتق ندارد $\Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1)$

قواعد مشتق گیری

تابع	ضابطه ی مشتق	نحوه ی مشتق گیری به فارسی
x^n	nx^{n-1}	n بیاد پشت و یکی از توان x کم بشه ...

هر تابعی که بتوان آن را به فرم توانی از x نوشت، با این فرمول مشتق گیری می شود؛

برای مثال:

الف) $y = x^4 \Rightarrow y' = 4x^3$

ب) $y = \frac{1}{x} \Rightarrow y = x^{-1} \Rightarrow y' = (-1)x^{-2} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$

درس ۲

مشتق پذیری

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{مشتق}}_{x>0} f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\sqrt{x}$ یعنی $x^{\frac{1}{2}}$ ، پس:

مشتق عدد تنها، صفر است. $f(x) = k \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = 0$

مشتق تابع خطی $y = ax + b$ می شود $y' = a$.

مشتق $\sqrt[n]{x}$

با استفاده از فرمول مشتق x^n می توانیم به راحتی مشتق $\sqrt{x}$ ، $\sqrt[n]{x}$ و ... را پیدا کنیم.

مثال	مشتق	تابع	
	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{x}$	دو تابع معروف
	$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$y = \sqrt[3]{x}$	
$y = \sqrt[n]{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{x}$	فرم کلی
$y = \sqrt[n]{x^m} \Rightarrow y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$	$y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$	$y = \sqrt[n]{x^m}$	

مشتق‌های مثلثاتی

۴ تا تابع مثلثاتی معروف داریم که مشتق‌هایشان را در جدول زیر می‌بینید

تابع	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
مشتق	$\cos x$	$-\sin x$	$1 + \tan^2 x$ یا $\frac{1}{\cos^2 x}$	$-(1 + \cot^2 x)$ یا $-\frac{1}{\sin^2 x}$

مشتق ضرب و تقسیم

تابع	$f(x) \times g(x)$	$\frac{f(x)}{g(x)}$
مشتق	$f'(x) \times g(x) + g'(x) \times f(x)$	$\frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$
بیان فارسی	(خود اولی $\times$ مشتق دومی) + (خود دومی $\times$ مشتق اولی)	(خود صورت $\times$ مشتق مخرج) - (خود مخرج $\times$ مشتق صورت) $(\text{مخرج})^2$
مثال	$\underbrace{(x^2 + x)}_{\text{خود اولی}} \underbrace{\sqrt{x}}_{\text{دومی}} = \underbrace{(2x + 1)}_{\text{خود دومی}} \underbrace{(\sqrt{x})}_{\text{مشتق اولی}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}_{\text{مشتق دومی}} \underbrace{(x^2 + x)}_{\text{خود اولی}}$	$\underbrace{(x^2 - \sqrt{x})}_{\text{خود صورت}} \underbrace{\left(\frac{1}{1-2x}\right)}_{\text{مشتق مخرج}} - \underbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}_{\text{مشتق صورت}} \underbrace{(1-2x)}_{\text{خود مخرج}} = \frac{(x^2 - \sqrt{x})' (1-2x) - \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' (1-2x)}{(1-2x)^2}$

👤 دو نتیجه مهم از فرمول مشتق تقسیم

با استفاده از رابطه $\frac{f}{g}$ می‌توانیم نشان دهیم که:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \quad y = \frac{\boxed{2}x + \boxed{1}}{\boxed{3}x + \boxed{5}} \Rightarrow y' = \frac{2 \times 5 - 1 \times 3}{(3x+5)^2} = \frac{7}{(3x+5)^2}$$

$$y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = -\frac{1}{x^2}$$

تابع	مشتق	مثال
u^n	$nu'u^{n-1}$ (-توان (پایه) $\times$ مشتق پایه $\times$ توان)	$\underbrace{(3x-1)^7}_u \xrightarrow{\text{مشتق}} 7 \underbrace{(3)}_{\text{مشتق پایه}} \underbrace{(3x-1)^6}_{\text{توان}}$ $\underbrace{(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}}_u \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{3}{2} \left(0 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \underbrace{(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}_{\text{مشتق پایه}}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ مشتق زیر رادیکال دو برابر خود رادیکال	$\underbrace{\sqrt{3x+2}}_u \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{3 \rightarrow \text{مشتق زیر رادیکال}}{2\sqrt{3x+2}}$ $\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_u \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{2x+1 \rightarrow \text{مشتق زیر رادیکال}}{2\sqrt{x^2+x}}$
$\sqrt[n]{u}$	$\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ مشتق زیر ریشه سوم	$\underbrace{\sqrt[6]{6x-5}}_u \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{6 \rightarrow \text{مشتق زیر ریشه سوم}}{3\sqrt[6]{(6x-5)^5}}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$ مشتق مخرج (مخرج) ^۲	$\underbrace{\frac{1}{x^2+x}}_u \xrightarrow{\text{مشتق}} -\frac{2x+1 \rightarrow \text{مشتق مخرج}}{(x^2+x)^2}$

■ ساده کردن قبل از مشتق‌گیری

در بعضی تابع‌ها قبل از مشتق گرفتن، بهتر است تابع را ساده‌تر کنیم، ایده‌های اصلی ساده کردن توابع را در جدول زیر می‌بینیم:

مثال	ایده ساده کردن تابع	مدل تابع
$y = \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{1}{(x+1)^2}$	مخرج مشترک و ساختن یک کسر	کسره‌ای چند طبقه!
$y = (x-2)(x+2)(4+x^2) = x^4 - 16 \Rightarrow y' = 4x^3$	استفاده از اتحادها	عبارات جبری در ضرب و تقسیم
$y = \frac{x^{\frac{1}{2}} \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}} \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}}$	فاکتورگیری، تجزیه و استفاده از توان کسری	کسره‌ای رادیکال‌دار

◀ مشتق‌گیری از تابع‌های قطعه‌ای (چندضابطه‌ای)

$$y' = \begin{cases} f'(x) & x > a \\ g'(x) & x < a \end{cases} \quad \text{اگر تابع پیوسته باشد، آن‌گاه} \quad y = \begin{cases} f(x) & x \geq a \\ g(x) & x < a \end{cases}$$

مثال

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & x \leq 2 \\ x^3 - 2 & x > 2 \end{cases} \quad \text{تابع مفروض است.}$$

الف) مشتق‌پذیری f را در $x = 2$ بررسی کنید و در صورت وجود، $f'_-(2)$ و $f'_+(2)$ را تعیین نمایید.
ب) ضابطه و دامنه تابع مشتق را بنویسید.

پاسخ: الف) تابع در $x = 2$ پیوسته است ($\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 6$)، بنابراین داریم:

$$x \rightarrow 2^- : f'(x) = (2x^2 - x)' = 4x - 1 \Rightarrow f'_-(2) = 7$$

$$x \rightarrow 2^+ : f'(x) = (x^3 - 2)' = 3x^2 \Rightarrow f'_+(2) = 12$$

چون $f'_-(2) \neq f'_+(2)$ ، پس در $x = 2$ تابع مشتق‌پذیر نیست.

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 1 & x < 2 \\ 3x^2 & x > 2 \end{cases} ; D_{f'} = \mathbb{R} - \{2\}$$

ب) ضابطه و دامنه تابع مشتق برابر است با:

مثال

تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx & x < 1 \\ 2\sqrt{4x-3} & x \geq 1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=1$ مشتق‌پذیر است، مقدار b کدام است؟ پاسخ:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx & x < 1 \\ 2\sqrt{4x-3} & x \geq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط پیوستگی}} \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^3 + bx) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2\sqrt{4x-3} \xrightarrow{x=1} a+b=2 \quad *$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + b & x < 1 \\ 2 \times \frac{2}{2\sqrt{4x-3}} & x > 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط وجود مشتق}} \lim_{x \rightarrow 1^-} (3ax^2 + b) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4}{\sqrt{4x-3}}$$

$$\xrightarrow{x=1} 3a+b=\frac{4}{1} \Rightarrow 3a+b=4 \xrightarrow{\text{با * دستگاه بساز}} \begin{cases} a+b=2 \\ 3a+b=4 \end{cases} \xrightarrow{-} 2a=2 \Rightarrow a=1 \xrightarrow{a+b=2} b=1$$

در تابع‌های چندضابطه‌ای، نقطه‌های شکست دامنه، کاندیدای مشتق‌ناپذیری و ناپیوستگی‌اند. در مورد آن‌ها هر دو شرط را بررسی کنید.

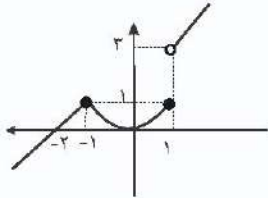
مشتق‌پذیری روی بازه



	۱) در تمامی نقطه‌های موجود در بازه‌ی (a, b) پیوسته است. ۲) در تک تک نقطه‌های این بازه هم، مشتق‌پذیر است.	مشتق‌پذیری تابع f روی بازه (a, b)	۱
	۱) در (a, b) مشتق‌پذیر است. ۲) در $x=a$ مشتق راست دارد (و البته پیوستگی راست!)	مشتق‌پذیری تابع f روی بازه‌ی $[a, b)$	۲
	۱) در (a, b) مشتق‌پذیر است. ۲) در $x=b$ مشتق چپ دارد (و البته لازم است که پیوستگی چپ هم داشته باشد...!)	مشتق‌پذیری تابع f روی بازه‌ی $(a, b]$	۳
	۱) در (a, b) مشتق‌پذیر است. ۲) در $x=a$ مشتق راست دارد (و البته پیوستگی راست!) ۳) در $x=b$ مشتق چپ دارد (و البته پیوستگی چپ!)	مشتق‌پذیری تابع f روی بازه‌ی $[a, b]$	۴

مثال

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x+2 & x < -1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x+1 & x > 1 \end{cases}$ را رسم کرده سپس مشخص کنید تابع در کدامیک از بازه‌های زیر مشتق پذیر است؟



$(1, 3]$	$[1, 3]$	$[0, 2]$	$[-1, 1]$
مشتق پذیر است	مشتق ناپذیر ($x=1$ در)	مشتق ناپذیر ($x=1$ در)	مشتق پذیر
$[-3, -1)$	$[-2, -1)$	$[-2, 0]$	
مشتق پذیر	مشتق پذیر	مشتق ناپذیر ($x=1$ در)	

مشتق‌گیری از تابع مرکب

فرم کلی مشتق‌گیری از تابع مرکب: اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت: $(f \circ g)'(a) = g'(a)f'(g(a))$

مثلاً برای همان تابع‌های $g(x) = \sqrt{x}$ و $f(x) = (2x^2 - 1)$ داریم:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}}f'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(4\sqrt{x}) = 2$$

مثال

اگر $f'(x) = \frac{1}{x}$ مطلوبست محاسبه مشتق تابع $y = f(5x)$: $y = f(5x) \Rightarrow y' = 5 \times f'(5x) = 5x \times \frac{1}{5x} = \frac{1}{x}$

مثال

اگر $f(1) = 3$ ، $f'(1) = -2$ و $g(x) = x^3 + x$ مقدار $(g \circ f)'(1)$ را بدست آورید.

پاسخ: $(g \circ f)'(1) = f'(1)g'(f(1)) \Rightarrow (g \circ f)'(1) = -2g'(3)$

$g(x) = x^3 + x \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow g'(3) = 3(3)^2 + 1 = 28$

مشتق مرتبه‌های بالاتر، مشتق دوم

رسیدن به مشتق دوم، اصلاً کار سختی نیست! فقط باید عملیات مشتق‌گیری را ادامه دهیم...

برای تابع مشتق‌پذیر f در نقطه‌ی $x = a$:

$$f \xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}} f' \xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}} f''$$

$$f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

برای مثال: $f(x) = 5x^3 + 6x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 15x^2 + 12x \Rightarrow f''(x) = 30x + 12$

برای مثال:



ارتباط نمودارهای f و f' با یکدیگر	
نمودار f در بازه I اکیداً صعودی	نمودار f' در بازه I بالای محور x ها
نمودار f در بازه I اکیداً نزولی	نمودار f' در بازه I زیر محور x ها
جهت تعقر f در بازه I رو به بالا	نمودار f' در بازه I اکیداً صعودی
جهت تعقر f در بازه I رو به پایین	نمودار f' در بازه I اکیداً نزولی
نقطه به طول a نقطه‌ی اکسترم نسبی مشتق‌پذیر f	نقطه به طول a محل تلاقی نمودار f' با محور x ها
نقطه به طول a عطف افقی نمودار f	نقطه به طول a اکسترم نسبی f' روی محور x ها
نقطه به طول a نقطه‌ی اکسترم نسبی زاویه‌دار f	f' در نقطه به طول a توخالی و از محور x ها پرش دارد

درس ۲

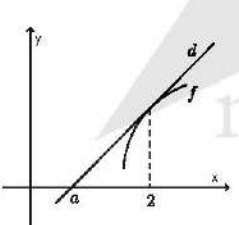
مشتق‌پذیری

سوالات نهایی

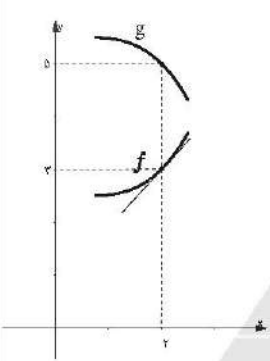
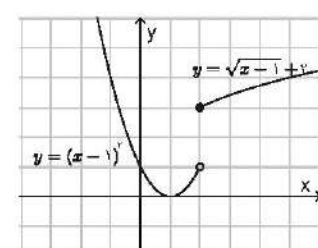


ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۱۹۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x) = x - 1 $ در تمام نقاط حقیقی پیوسته است پس در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است.	۰/۲۵	۱۴۰۳ شهریور ۲۵



شهریور ۱۴۰۳	۱/۲۵	۱۹۶	مشتق تابع داده شده را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)	$h(x) = \left(\frac{\sqrt{1-3x}}{7+x} \right)^p$
شهریور ۱۴۰۳	۱	۱۹۷	مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & x < 2 \\ 6x - 4 & x = 2 \\ 2\sqrt{x-1} + 6 & x > 2 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x = 2$ بررسی کنید.	
خرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵	۱۹۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ مشتق پذیر است.	
خرداد ۱۴۰۳	۱/۲۵	۱۹۹	با استفاده از تعریف مشتق، شیب نیم مماس چپ تابع $f(x) = x^2 - 4 $ را در $x = 2$ بیابید.	
خرداد ۱۴۰۳	۱/۲۵	۲۰۰	مشتق تابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).	$f(x) = (x-6)^3 + \frac{5x+3}{\sqrt{2x-1}}$
شهریور ۱۴۰۳	۱/۵	۲۰۱	خط d در نقطه با طول $x = 2$ بر نمودار تابع $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ مماس است. با توجه به شکل مقدار a (نقطه برخورد خط d با محور x ها) را بیابید.	
شهریور ۱۴۰۳	۲	۲۰۲	مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).	الف) $f(x) = (2\sqrt{x} + 1)(x^2 - 2x)$ ب) $g(x) = \frac{3x+1}{x^5 - x + 1}$
شهریور ۱۴۰۳	۰/۲۵	۲۰۳	جمله زیر را کامل کنید. الف) اگر $f(x) = -x^3$ آن‌گاه $f''(1)$ برابر است با	

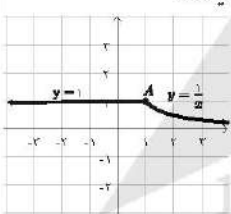


شهریور ۱۴۰۲	۱	۲۰۴	اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ آن‌گاه به کمک تعریف مشتق نشان دهید: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
شهریور ۱۴۰۲	۲/۲۵	۲۰۵	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $g(x) = \frac{(2x-1)^4}{x^3+8}$ ب) $f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$
خرداد ۱۴۰۲	۰/۲۵	۲۰۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید: نقطه (۱, ۱) یک نقطه گوشه‌ای برای تابع $f(x) = 2-x^2 $ است.
خرداد ۱۴۰۲	۱	۲۰۷	با توجه به نمودارهای توابع f و g حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x-2}$ چند برابر $f'(2)$ است؟ 
خرداد ۱۴۰۲	۲/۲۵	۲۰۸	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3+4)$ ب) $g(x) = \frac{-7x^2+1}{x-6}$ پ) $h(x) = (2x^5-1)^4$
تیر ۱۴۰۱	۱/۵	۲۰۹	نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}+2 & x \geq 2 \\ (x-1)^2 & x < 2 \end{cases}$ به صورت مقابل است:  الف: آیا تابع f در نقطه $x=2$ مشتق پذیر است؟ ب: آیا تابع در بازه $(-\infty, 2)$ مشتق پذیر است؟ چرا؟ پ: مشتق راست تابع f در نقطه $x=2$ را به دست آورید.

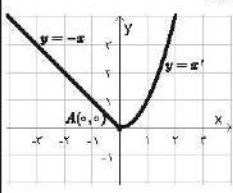


۲۱۰	مشتق توابع زیر را بدست آورید.	۱/۵	ثی ۱۴۰۱
			الف) $f(x) = x(x-1)(x+1)$ ب) $g(x) = \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^3$
۲۱۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $y = [x]$ در صفر مشتق پذیر است.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۱
۲۱۲	معادله نیم مماس راست تابع $f(x) = x^2 - 1 $ را در نقطه‌ای به طول $x = 1$ واقع بر منحنی بنویسید.	۱/۵	شهریور ۱۴۰۱
۲۱۳	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)	۱/۷۵	شهریور ۱۴۰۱
			الف) $f(x) = \frac{-2x+3}{x+4}$ ب) $g(x) = (\sqrt{3x+1})(x^2+2x)$
۲۱۴	اگر توابع f و g مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3$ و $f'(2) = 5$ و $g(2) = 8$ و $g'(2) = -6$ حاصل $(f \circ g)'(2)$ را به دست آورید.	۱	خرداد ۱۴۰۱
۲۱۵	اگر $f(x) = \begin{cases} ax+1 & x < 0 \\ x^2+3x+1 & x \geq 0 \end{cases}$ در $x = 0$ مشتق پذیر باشد، مقدار a را محاسبه کنید.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۱
۲۱۶	مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۱
			$f(x) = \sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}$
۲۱۷	مشتق پذیری تابع مقابل را در نقطه $x = -1$ بررسی کنید.	۱/۵	ثی ۱۴۰۰
			$f(x) = \begin{cases} x^2+3 & x \geq -1 \\ 2x+6 & x < -1 \end{cases}$



۲۱۸	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست).	۱/۷۵	دی ۱۴۰۰
	الف) $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^5$ ب) $g(x) = (\sqrt{3x+2})(x^2 + 1)$		
۲۱۹	اگر توابع f و g مشتق پذیر باشند و $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ در این صورت $(3f + 2g)'(1)$ را به دست آورید.	۰/۷۵	دی ۱۴۰۰
۲۲۰	اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_-(0)$ و $f'_+(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.	۱	شهریور ۱۴۰۰
۲۲۱	مشتق تابع‌های زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)	۱/۵	شهریور ۱۴۰۰
	الف) $f(x) = (x^2 + 2x + 1)^5$ ب) $g(x) = \frac{x}{\sqrt{3x+2}}$		
۲۲۲	با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع f در نقطه A ، نشان دهید که تابع f در نقطه A مشتق پذیر نیست.	۱	خرداد ۱۴۰۰
			
۲۲۳	مشتق تابع‌های زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)	۱/۵	خرداد ۱۴۰۰
	الف) $f(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}$ ب) $g(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3$		
۲۲۴	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. اگر $h(x) = 3x^4 + 2x^2 - 1$ باشد، آنگاه $h''(1)$ برابر است.	۰/۷۵	دی ۹۹



۲۲۵	مشتق تابع‌های زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)	۱/۵	۹۹ دی
	الف) $f(x) = \frac{x^5}{3x-1}$ ب) $g(x) = (\sqrt{3x+2})(x^2+1)$		
۲۲۶	با محاسبه مشتق چپ و راست تابع داده شده در نقطه A ، نشان دهید این تابع در نقطه A مشتق پذیر نیست.	۱	۹۹ دی
			
۲۲۷	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه f در a است.	۰/۲۵	شورین ۹۹
۲۲۸	تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x+1 & x < 0 \end{cases}$ داده شده است. الف: نشان دهید که $f'(0)$ وجود ندارد. ب: ضابطه تابع مشتق را بنویسید. پ: نمودار تابع f' را رسم کنید.	۱/۵	شورین ۹۹
۲۲۹	مشتق تابع‌های زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)	۱/۷۵	شورین ۹۹
	الف) $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}$ ب) $g(x) = (\frac{1}{x})(x^2+5x)^7$		
۲۳۰	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف: تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در نقطه $x=0$ مماس قائم دارد. ب: اگر تابع f پیوسته باشد لزوماً مشتق پذیر است.	۰/۵	خرداد ۹۹
۲۳۱	مشتق تابع‌های زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)	۲/۲۵	خرداد ۹۹
	الف) $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{-3x+1}$ ب) $g(x) = (x^2+1)^2(5x-1)$		



۲۳۲	مشتق تابع‌های زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)	۱/۷۵	خرداد ۹۹
	الف) $f(x) = \left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^8$ ب) $f(x) = \sqrt{5x+3}$		
۲۳۳	مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2+3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.	۱/۲۵	خرداد ۹۹
۲۳۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، آنگاه f در a مشتق پذیر است.	۰/۲۵	خرداد ۹۹
۲۳۵	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x=0$ مشتق پذیر نیست. خط $x=0$ را منحنی می‌نامیم.	۰/۲۵	خرداد ۹۹
۲۳۶	به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x) = x^2-4 $ را در نقطه $x=-2$ بررسی کنید.	۱/۲۵	خرداد ۹۹
۲۳۷	مشتق تابع‌های زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)		خرداد ۹۹
	الف) $f(x) = \left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)^8$ ب) $g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)(\sqrt{3x+2})$		
۲۳۸	مشتق تابع‌های زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)	۱/۷۵	دی ۹۸
	الف) $f(x) = (x^2+1)^3(5x-1)$ ب) $g(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}$		
۲۳۹	اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.	۱/۲۵	دی ۹۸
۲۴۰	مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2+x & x \geq 1 \\ 3x-1 & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.	۱/۵	شهریور ۹۸



شماره ۹۸	۱/۵	۲۴۱	مشتق تابع $y = \frac{1}{x}(2\sqrt{x}-1)^4$ را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).
شماره ۹۸	۱/۵	۲۴۲	اگر $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ x^2-1 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید: الف: نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد. ب: ضابطه ی تابع مشتق را بنویسید. پ: نمودار تابع f' را رسم کنید.
شماره ۹۸	۱/۵	۲۴۳	مشتق تابع های زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $f(x) = (x^4 - 3x)^5$ ب) $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x}$
شماره ۹۷	۰/۲۵	۲۴۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر است.
شماره ۹۷	۰/۲۵	۲۴۵	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. اگر $f'(2) = 3$ و $g'(2) = 5$ باشد آنگاه حاصل عبارت $(2g - f)'(2)$ برابر است.
شماره ۹۷	۲	۲۴۶	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $f(x) = \left(\frac{x}{2x-1}\right)^5$ ب) $g(x) = x^2(\sqrt{x+1})$

بدراشت ضروری دانش آموز:



درس

۳

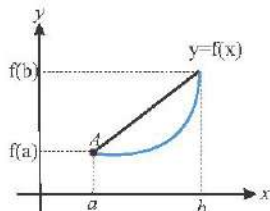
آهنگ تغییر

خلاصه درسنامه

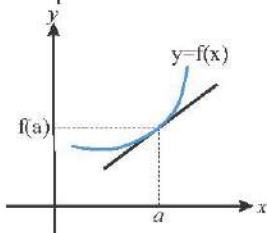
نسبت تغییرات دو کمیت را آهنگ تغییر یکی نسبت به دیگری می‌گویند. دو نوع آهنگ تغییر وجود دارد، آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر.

تعریف آهنگ متوسط تغییر: آهنگ متوسط تغییر f در فاصله $[a, b]$ را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



مفهوم هندسی آهنگ متوسط تغییر: در نمودار تابع $y = f(x)$ ، آهنگ متوسط در فاصله a تا b همان شیب خط قاطع AB است.



تعریف آهنگ لحظه‌ای (آنی) تغییر: آهنگ لحظه‌ای تغییر f نسبت به x در $x = a$ برابر است با مشتق تابع f در $x = a$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر} = f'(a)$$

مفهوم هندسی آهنگ لحظه‌ای تغییر: از نظر هندسی شیب خط مماس بر تابع f در $x = a$ برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x = a$ می‌باشد.

نوع آهنگ	سوال	نحوه محاسبه	توضیح
آهنگ تغییر متوسط	حتماً آهنگ متوسط را در یک بازه می‌خواهند؛ مثل $[a, b]$	$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$	انتهای و ابتدای بازه را به تابع بدهید و مقادیر به دست آمده را به ترتیب در صورت از هم کم کنید، در مخرج هم طول بازه را بگذارید...
آهنگ تغییر لحظه‌ای	حتماً آهنگ تغییر لحظه‌ای را در یک نقطه می‌خواهند؛ مثل $x = c$	$f'(c)$	از تابع مشتق بگیرید و بعد از ساده کردن آن، نقطه‌ی c را جای‌گذاری کنید...

مثال

یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = 2\sqrt{t} + 2t^3$ گرم است. آهنگ متوسط رشد این توده در بازه زمانی $[1, 4]$ چقدر است؟

$$\frac{m(4) - m(1)}{4 - 1} = \frac{(2\sqrt{4} + 2(4)^3) - (2\sqrt{1} + 2(1)^3)}{3} = \frac{128}{3}$$

حل:

مثال

معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - t$ بر حسب متر داده شده است. در چه زمانی سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی

$$\left. \begin{aligned} \text{آهنگ لحظه‌ای} &= f'(t) = 4t - 1 \\ \text{آهنگ متوسط} &= \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{28 - 0}{4} = 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4t - 1 = 7 \Rightarrow t = 2$$

[۰, ۴] با هم برابرند؟

سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۲۴۷	گنجایش ظرفی ۲۰ لیتر مایع است. در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود اگر حجم مایع باقیمانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 20 \left(1 - \frac{t}{50}\right)^2$ به دست آید در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 50]$ می‌شود؟	۱/۲۵	۱۴۰۳ شهریور
۲۴۸	تابع $f(x) = x^2 - x$ را در نظر بگیرید. الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازه $[0, 2]$ بدست آورید. ب) حدود x را چنان بیابید که آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f از آهنگ تغییر متوسط آن، در بازه $[0, 2]$ بزرگتر باشد.	۱/۲۵	۱۴۰۳ خرداد
۲۴۹	معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^3 + t - 1$ است، الف) سرعت متوسط متحرک در بازه $[1, 2]$ را محاسبه کنید. ب) سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه $t = 2$ چقدر است؟	۱/۵	۱۴۰۲ دی
۲۵۰	معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 + 2t + 3$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 2]$ (بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 2]$ با هم برابرند؟	۱/۵	۱۴۰۲ شهریور
۲۵۱	آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$ در نقطه‌ای به طول $x = 2$ چند برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[-2, 0]$ است؟	۱/۵	۱۴۰۲ خرداد
۲۵۲	جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم، جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -4t^2 + 40t$ به دست می‌آید. الف: سرعت متوسط در بازه $[2, 4]$ را بیابید. ب: در چه زمانی سرعت لحظه‌ای آن برابر ۱۶ متر بر ثانیه است؟	۱/۲۵	۱۴۰۱ تیر



شعبه ۱۴۰۱	۱	۲۵۳ تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتیمتر تا حدود شصت ماهگی نشان میدهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟
شعبه ۱۴۰۱	۱/۲۵	۲۵۴ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه $[0, 5]$ (t بر حسب ثانیه) داده شده است. <u>سرعت متوسط</u> را در بازه زمانی $[0, 5]$ و <u>سرعت لحظه‌ای</u> را در لحظه $t = 2$ به دست آورید.
شعبه ۱۴۰۱	۱	۲۵۵ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه $[0, 5]$ (t بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ باهم برابرند؟
شعبه ۱۴۰۱	۱/۵	۲۵۶ تابع با ضابطه $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ متوسط قد کودکان تا شصت ماهگی را نشان می‌دهد که در آن x مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است. الف: آهنگ تغییر متوسط رشد در بازه $[0, 25]$ چقدر است؟ ب: آهنگ لحظه‌ای تغییر قد در ۴۹ ماهگی چقدر است؟
شعبه ۱۴۰۱	۱/۵	۲۵۷ جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت را به طرف بالا مثبت در نظر می‌گیریم. ارتفاع از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید: الف: سرعت متوسط جسم را در بازه $[5, 8]$ به دست آورید. ب: مشخص کنید در چه لحظه‌ای سرعت جسم 35 m/s است.
شعبه ۹۹ - خرداد ۹۹	۱	۲۵۸ معادله متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (t بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟
شعبه ۹۹	۰/۵	۲۵۹ خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله $d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می‌کند، که در آن $0 \leq t \leq 5$ بر حسب ثانیه است. سرعت لحظه‌ای در $t = 2$ چقدر است؟
شعبه ۹۹ خ	۱	۲۶۰ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است. آهنگ رشد جرم این توده باکتری در لحظه $t = 1$ چقدر است؟
شعبه ۹۹	۱/۵	۲۶۱ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است. الف: جرم این توده باکتری در بازه زمانی $1 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟ ب: آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t = 4$ چقدر است؟
شعبه ۹۸	۱	۲۶۲ تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است. آهنگ رشد در بازه زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟



شماره ۱۳۹۸	۱	آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x_1 = 2$ به $x_2 = 7$ تغییر می‌کند به دست آورید.	۲۶۳
شماره ۱۳۹۸	۱	معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - t$ ، بر حسب متر داده شده است. در چه زمانی سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 4]$ باهم برابرند.	۲۶۴
دی ۹۷	۱	یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است. آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه ی زمانی $[3, 4]$ چقدر است؟	۲۶۵

یادداشت ضروری دانش آموز:

درس ۲

آهنگ تغییر

math-pilevar.ir



کاربرد مشتق

اکسترم‌های تابع ۹۱
بهینه‌سازی ۹۹



درس

۱

اکسترم‌های تابع

خلاصه درسنامه

تابع کجاها صعودی و کجاها نزولی است؟



اکثر تابع‌ها در یک قسمت‌هایی از دامنه شان صعودی و در یک قسمت‌هایی نزولی هستند، اگر تابع f در کل دامنه‌اش پیوسته باشد، با تعیین علامت مشتق می‌توان جاهایی که صعودی یا نزولی است را به راحتی تعیین کرد. مراحل کار:

۱) از f مشتق می‌گیریم.

۲) جدول تعیین علامت f' را رسم می‌کنیم.

۳) جاهایی که f' مثبت است، تابع اکیداً صعودی ($\nearrow$) و جاهایی که f' منفی است، تابع اکیداً نزولی ($\searrow$) خواهد بود.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$\text{مثلاً در تابع } f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \text{ داریم:}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'		+	-	+
f یکنوازی	اکیداً صعودی ↗		اکیداً نزولی ↘	

ارتباط بین مشتق و رفتار تابع



برای تابع پیوسته f و به ازای تمام x های بازه $I \subseteq D_f$ ، همواره داریم:

$$f \text{ صعودی} \iff f' \geq 0 \quad (۳)$$

$$f \text{ اکیداً صعودی} \iff f' > 0 \quad (۱)$$

$$f \text{ نزولی} \iff f' \leq 0 \quad (۲)$$

$$f \text{ اکیداً نزولی} \iff f' < 0 \quad (۲)$$

آشنایی با مفهوم و انواع اکسترم



تعریف کلمه‌ی اکسترم همان ماکزیم یا مینیم است.



ما دو نوع اکسترم داریم:

۱) اکسترم نسبی ۲) اکسترم مطلق و از آنجا که خود اکسترم، دو منظور ماکزیم یا مینیم را می‌رساند، به چهار دسته‌بندی زیر می‌رسیم:

$$\text{اکسترم مطلق} \rightarrow \begin{cases} \text{پ) ماکزیم مطلق} \\ \text{ت) مینیم مطلق} \end{cases}$$

$$\text{اکسترم نسبی} \rightarrow \begin{cases} \text{الف) ماکزیم نسبی} \\ \text{ب) مینیم نسبی} \end{cases}$$

تعریف ماکزیم نسبی: اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطه c (بازه باز شامل نقطه c) که به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم

$$f(c) \geq f(x) \text{، در این صورت } f(c) \text{ را یک ماکزیم نسبی تابع } f \text{ می‌نامیم.}$$

تعریف مینیم نسبی: اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطه c (بازه باز شامل نقطه c) باشد که به ازای هر x متعلق به I داشته

$$\text{باشیم } f(c) \leq f(x) \text{، در این صورت } f(c) \text{ را یک مینیم نسبی تابع } f \text{ می‌نامیم.}$$

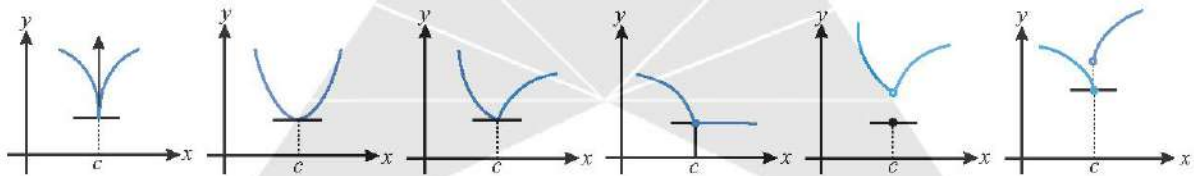


								max نسبی
								min نسبی
f ناپیوسته است. $f'(c)$ وجود ندارد.	f ناپیوسته است. $f'(c)$ وجود ندارد.	f ناپیوسته است. $f'(c)$ وجود ندارد.	$f'(c) = 0$	f پیوسته است. $f'(c)$ وجود ندارد.	f پیوسته است. $f'(c)$ وجود ندارد.	f پیوسته است. ولی $f'(c)$ وجود ندارد.	$f'(c) = 0$	وضعیت مشتق و پیوستگی

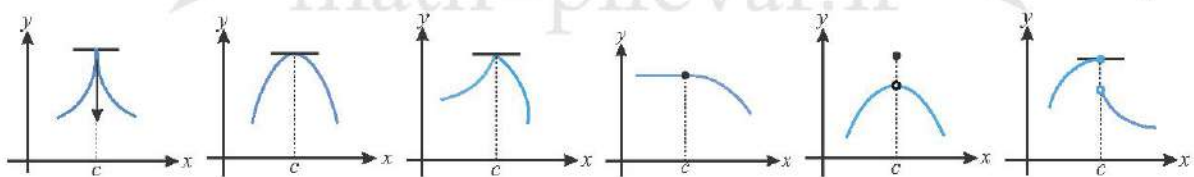
از تعریف نقاط اکسترم نسبی می‌توان این‌ها را نتیجه گرفت:

- نقطه‌ای که در دامنه‌ی تابع نباشد، حتماً اکسترم نسبی هم نیست.
- نقطه‌ای که طول آن اول یا آخر دامنه‌ی تابع f باشد، حتماً اکسترم نسبی نمی‌تواند باشد.

یک راه‌حل آسان: اگر خواستید بفهمید نقطه‌ای به طول c ، مینیم نسبی تابع هست یا نه، در نقطه‌ای به طول c یک خط افقی کوچک رسم کنید، حالا اگر نقطه‌های اطراف c ، بالای این خط یا روی آن افتادند، این نقطه را مینیم نسبی اعلام کنید؛



در مورد ماکزیم نسبی هم، همین طور است، فقط این دفعه بعد از کشیدن خط افقی کوچک، می‌بینید که نمودار تابع، اطراف این نقطه، کاملاً پایین یا روی این خط می‌افتد.



تعریف ماکزیم مطلق: اگر برای هر x متعلق به یک بازه مانند I داشته باشیم $f(a) \geq f(x)$ ، آنگاه $f(a)$ را مقدار ماکزیم مطلق و نقطه $(a, f(a))$ را نقطه ماکزیم مطلق تابع در بازه مورد نظر می‌نامند.

تعریف مینیم مطلق: اگر برای هر x متعلق به یک بازه مانند I داشته باشیم $f(a) \leq f(x)$ ، آنگاه $f(a)$ را مقدار مینیم مطلق و نقطه $(a, f(a))$ را نقطه مینیم مطلق تابع در بازه مورد نظر می‌نامند.

به عبارت ساده‌تر، به نقطه‌ای که از کلیه نقاط روی دامنه تعریف تابع، عرض بیشتر یا مساوی داشته باشد، ماکزیم مطلق و اگر عرض کمتر یا مساوی داشته باشد، مینیم مطلق تابع گویند.

توجه! وقتی می‌گوییم مقدار ماکزیم مطلق یا مینیم مطلق، منظورمان عرض بالاترین یا پایین‌ترین نقطه است، نه طول آن!

تفاوت‌های اکسترمم نسبی و اکسترمم مطلق

۱) برای اینکه نقطه‌ای را اکسترمم نسبی اعلام کنیم، فقط باید به نقطه‌های اطرافش نگاه کنیم، ولی برای اعلام نظر در مورد اکسترمم مطلق، باید به کل دامنه توجه کنیم...

۲) اگر تابع f روی بازه‌ی $[a, b]$ تعریف شود، نقطه‌های $x = a$ و $x = b$ حتماً اکسترمم‌های نسبی نیستند، اما شاید اکسترمم مطلق باشند...

آزمون مشتق اول در تعیین اکسترمم‌های نسبی تابع

پیدا کردن اکسترمم نسبی در تابع‌های پیوسته و بی‌قدر مطلق:

۱) از تابع مشتق می‌گیریم و مساوی صفر می‌گذاریم تا ریشه‌های آن به دست آید...

۲) در یک جدول سه سطری، شامل x ، f' و f مشتق را تعیین علامت کرده و فلش‌های $\nearrow$ و $\searrow$ مربوط به f را کامل می‌کنیم.

۳) هر نقطه‌ای که در آن تغییر علامت f' داریم (یا تغییر جهش فلش f)، اکسترمم نسبی است، می‌خواهد مشتق در آن نقطه صفر شده باشد یا نشده باشد. حالا از سمت چپ به راست جدول،

X	$-\infty$	x_1	$+\infty$
f'	+	0	-
f		$\nearrow$	$\searrow$

نسبی max

X	$-\infty$	x_0	$+\infty$
f'	-	0	+
f		$\searrow$	$\nearrow$

نسبی min

الف) اگر f' از - به + تغییر علامت داده باشد، آن نقطه min نسبی است.

ب) اگر f' از + به - تغییر علامت داده باشد، آن نقطه max نسبی است.

در max نسبی فلش‌ها شکلی شبیه قله و در min نسبی شکلی شبیه دره تشکیل می‌دهند...

مثال

اکسترمم‌های نسبی تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 - 12x + 1$ را بدست آورید.

$$f(x) = x^3 - 12x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

پاسخ:

X	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x) = 3(x^2 - 4)$	+	0	0	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

نسبی max نسبی min

تعداد اکسترمم‌ها $\left\{ \begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow \text{نسبی min} \\ x = -2 \Rightarrow \text{نسبی max} \end{array} \right.$

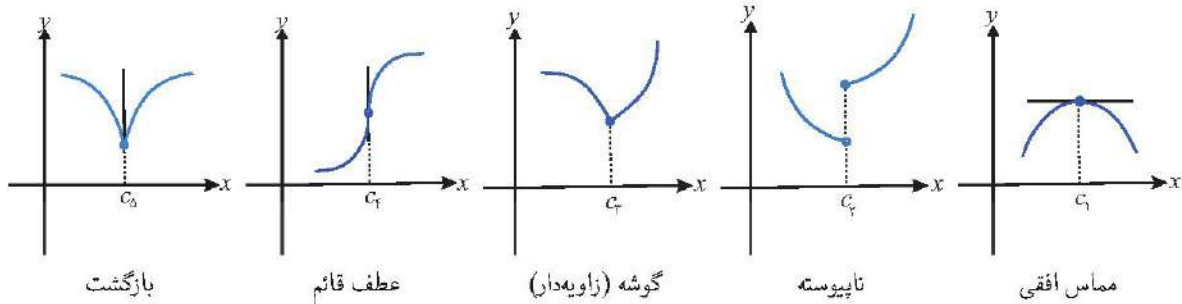
مفهوم نقطه‌ی بحرانی

تعریف نقطه‌ای به طول c را که عضو دامنه‌ی تابع f باشد، نقطه‌ی بحرانی این تابع می‌گوییم.

هرگاه ۱) $f'(c)$ صفر شود و یا ۲) $f'(c)$ وجود نداشته باشد.

اگر تابع f روی بازه‌ی $[a, b]$ تعریف شده باشد، $x = a$ و $x = b$ نقطه‌ی بحرانی هستند.

مهم‌ترین حالت‌هایی که برای نقاط بحرانی می‌توان در نظر گرفت عبارت است از: ریشه‌های مشتق، نقاط ناپیوسته، گوشه، نقاط دارای مماس قائم (عطف قائم) و نقاط بازگشت. در نمودارهای زیر، نقاط مشخص شده همگی بحرانی هستند.



نکته: هر نقطه اکسترم نسبی و مطلق، نقطه بحرانی است، در صورتی که یک نقطه بحرانی ممکن است نقطه اکسترم نسبی یا مطلق نباشد. (مانند $x=0$ برای تابع $f(x)=x^3$ ، که این نقطه بحرانی است ولی اکسترم نسبی یا مطلق نمی‌باشد).

روش به دست آوردن نقاط بحرانی

ابتدا دامنه تابع را تعیین می‌کنیم، سپس از تابع مشتق گرفته و نقاطی از دامنه که مشتق در آن‌ها صفر است و یا وجود ندارد را به دست می‌آوریم. توجه داشته باشید که نقاط ابتدایی و انتهایی بازه نیز بحرانی محسوب می‌شوند.

- ۱) طول تمامی نقطه‌های بحرانی تابع را پیدا کنید.
- ۲) یک جدول صلیبی تشکیل دهید که در سطر اول آن x تمامی نقطه‌های بحرانی را نوشته‌اید (a و b را از قلم نیندازید)، حالا تک تک این x ها را به خود تابع f بدهید و y حاصل را از آن‌ها را زیر هر کدام بنویسید؛
- ۳) به عددی سطر پایین نگاه کنید و کمترین عدد موجود را به عنوان مقدار $\min$ مطلق و بزرگترین عدد موجود را به عنوان مقدار $\max$ مطلق اعلام کنید...

درس ۱

اکسترم‌های تابع

طول تمام نقطه‌های بحرانی	$\rightarrow x$	a	b	x_1	x_2	x_3	$\dots$
با جای‌گذاری هر x در ضابطه‌ی تابع اصلی به دست می‌آید	$\rightarrow y$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$\dots$

پیدا کردن بیشترین و کمترین عدد ...

مثال

بیشترین مقدار تابع $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ در بازه‌ی $[-2, 2]$ کدام است؟

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

پاسخ:

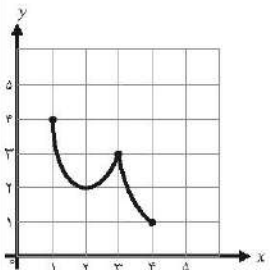
$$\Rightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -1, 3 \xrightarrow[\text{بررسی بازه } [-2, 2]]{\text{است بحرانی است}} x = -1$$

x	-2	2	-1
y	3	-17	10
		min مطلق	max مطلق

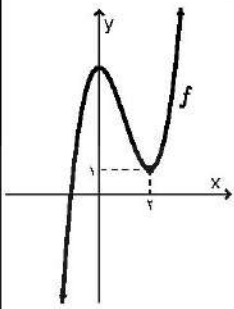
سوالات نهایی





ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۲۶۶	با رسم جدول تغییرات تابع، طول نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع زیر را در صورت وجود بیابید. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 15x + 4$	۱/۵	شهریور ۱۴۰۲
۲۶۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۲۶۸	در نمودار تابع مقابل، طول نقاط ماکزیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را بیابید. 	۱	خرداد ۱۴۰۲
۲۶۹	با رسم جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 27x + 1$ مشخص کنید تابع در کدام بازه‌ها اکیداً صعودی است؟	۱/۵	مهر ۱۴۰۲
۲۷۰	نقاط بحرانی تابع زیر را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. $f(x) = -2x^2 + 3x^2 + 12x - 9$	۱/۷۵	شهریور ۱۴۰۲
۲۷۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن تابع است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۲
۲۷۲	بزرگترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x) = -2x^3 + 6x + 11$ در آن صعودی اکید باشد را با استفاده از جدول تغییرات بیابید.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۲



۲۷۳	نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ به صورت مقابل رسم شده است. مقادیر b و d را بیابید.		۱/۵	دی ۱۴۰۱
۲۷۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. هر نقطه دلخواه از دامنه تابع ثابت، یک نقطه بحرانی است.		۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۱
۲۷۵	با تشکیل جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 12x + 4$ ، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید است؟		۱/۵	شهریور ۱۴۰۱
۲۷۶	اکسترمهای نسبی تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{2}{3}$ را در صورت وجود به دست آورید.		۲	خرداد ۱۴۰۱
۲۷۷	اکسترمهای مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه $[-1, 3]$ تعیین کنید.		۲	دی ۱۴۰۰
۲۷۸	اگر نقطه $(2, 1)$ نقطه اکسترم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.		۱	دی ۱۴۰۰
۲۷۹	تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 3x$ در چه بازه‌هایی اکیدا صعودی و در کدام بازه اکیدا نزولی است؟		۱/۵	شهریور ۱۴۰۰
۲۸۰	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. هر نقطه اکسترم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.		۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۰
۲۸۱	اگر نقطه $(2, 1)$ ، نقطه اکسترم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را بدست آورید.		۱/۵	خرداد ۱۴۰۰



۲۸۲	در تابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$	۲
۲۸۳	اکسترم‌های مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x + 7$ را در بازه $[-1, 3]$ ، در صورت وجود به دست آورید.	۱/۵ شهریور ۹۹
۲۸۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. هر نقطه اکسترم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.	۰/۲۵ شهریور ۹۹
۲۸۵	اگر تابع $f(x) = ax^2 + bx$ در $x = 1$ دارای اکسترم نسبی برابر ۳- باشد، مقادیر a, b را بیابید.	۱ شهریور ۹۹
۲۸۶	الف: نقطه بحرانی را تعریف کنید. ب: اگر نقطه $(1, 2)$ نقطه اکسترم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b, d را بدست آورید.	۱/۷۵ خرداد ۹۹
۲۸۷	مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 + 2x - 5$ را در بازه $[-2, 1]$ در صورت وجود به دست آورید.	۱/۷۵ خرداد ۹۹
۲۸۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در بازه $(-1, 1)$ اکیدا صعودی است.	۰/۲۵ خرداد ۹۹
۲۸۹	تابع $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$ را در نظر بگیرید: الف: با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. ب: مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در بازه $[0, 3]$ در صورت وجود به دست آورید.	۲/۲۵ خرداد ۹۹
۲۹۰	اگر نقطه $(1, 2)$ ، نقطه اکسترم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b, d را بدست آورید.	۲ خرداد ۹۹
۲۹۱	در تابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را بدست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$	۲ دی ۹۸
۲۹۲	الف: جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 3x + 4$ را رسم کنید و نقاط اکسترم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. ب: اکسترم‌های مطلق تابع $g(x) = x^3 + 2x - 5$ را در بازه $[-2, 1]$ در صورت وجود تعیین کنید.	۲ شهریور ۹۸



۲۹۳	اگر تابع $f(x) = ax^2 + bx$ در $x = 1$ دارای ماکزیمم نسبی برابر ۷ باشد، مقادیر a, b را بدست آورید.	۱	خرداد ۹۸
۲۹۴	اکسترمم مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه‌ی $[-1, 3]$ به دست آورید.	۱/۲۵	خرداد ۹۸
۲۹۵	الف: جدول تغییرات تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را رسم و نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را مشخص کنید. ب: نقاط بحرانی تابع f و اکسترمم این تابع را در بازه‌ی $[-1, 3]$ مشخص کنید.	۲	دی ۹۷

یادداشت ضروری دانش‌آموز:

math-pilevar.com

درس ۱

اکسترمم‌های تابع

درس

۲

بهینه‌سازی

خلاصه درسنامه

بهینه‌سازی



اغلب در زندگی وقتی با مسأله‌ای روبه‌رو می‌شویم، تلاش می‌کنیم بهترین راه حل را برای آن مسأله پیدا کنیم. برای مثال بیشترین سود، بیشترین تولید، کمترین هزینه، کمترین فاصله و... در مسائل بهینه‌سازی نیز هدف پیدا کردن ماکزیمم یا مینیمم یک کمیت است. در این نوع مسائل ابتدا کمیت‌هایی مانند حجم، فاصله، مساحت و... را که باید کمترین یا بیشترین باشند، به صورت تابعی از متغیرهای دیگر به دست می‌آوریم، اگر معادله بیشتر از یک متغیر داشت به کمک فرضیات مسأله و روابطی که بین متغیرها برقرار است، تابع را فقط برحسب یک متغیر می‌نویسیم. سپس نقاط بحرانی آن را به کمک مشتق تعیین کرده و ماکزیمم یا مینیمم مطلق آن را به دست می‌آوریم.

گاهی اوقات رسم نمودار برای درک بهتر مسأله و حل مسائل بهینه‌سازی به ما کمک می‌کند. برای حل مسائل بهینه‌سازی معمولاً از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

- ۱) مساحت مثلث به ارتفاع h و قاعده a برابر است با: $S = \frac{1}{2}ah$
- ۲) مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با: $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
- ۳) مساحت و محیط دایره به شعاع r برابر است با: $P = 2\pi r$ و $S = \pi r^2$
- ۴) مساحت جانبی و حجم کره به شعاع r برابر است با: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ و $S = 4\pi r^2$
- ۵) حجم مکعب مستطیل به طول x ، عرض y و ارتفاع h برابر است با: $V = xyh$
- ۶) مساحت جانبی و حجم استوانه به شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر است با: $V = \pi r^2 h$ و $S = 2\pi r h$
- بنابراین مساحت کل استوانه برابر است با حاصل جمع مساحت دو قاعده و مساحت جانبی: $S_{\text{کل}} = 2\pi r h + 2\pi r^2$
- ۷) حجم مخروط به شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر است با: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

مثال

دو عدد مثبت چنان بیابید که حاصل ضربشان ۸ و حاصل جمع آن‌ها مینیمم باشد.

پاسخ) دو عدد مثبت را x و y در نظر می‌گیریم، پس $xy = 8$ است، بنابراین داریم:

$$S = x + y \Rightarrow S = x + \frac{8}{x} \Rightarrow S'(x) = 1 - \frac{8}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{8}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 8 \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{8} \xrightarrow{xy=8} y = \sqrt{8}$$



مثال

ورق فلزی مربعی شکل به طول ضلع ۳۰ سانتی متر در دست است. از چهار گوشه‌ی آن مربع‌هایی به کدام ضلع را ببریم تا پس از تا زدن آن‌ها یک جعبه فلزی در باز با حجم ماکزیم داشته باشیم؟

پاسخ:
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{حجم: } P = x\ell^2 \\ \text{رابطه‌ی کمکی: } 2x + \ell = a \xrightarrow{a=30} 2x + \ell = 30 \Rightarrow \ell = 30 - 2x \end{array} \right\} \Rightarrow P(x) = x(30 - 2x)^2$$

$$\Rightarrow P(x) = x(900 - 120x + 4x^2) \Rightarrow P(x) = 900x - 120x^2 + 4x^3 \Rightarrow P'(x) = 900 - 240x + 12x^2$$

$$\Rightarrow P'(x) = 12(75 - 20x + x^2) \Rightarrow x^2 - 20x + 75 = 0 \Rightarrow (x - 15)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ یا } 15 \xrightarrow{0 < x < 15} x = 5$$

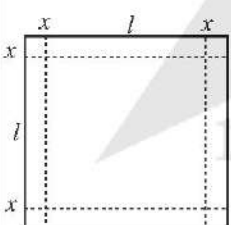
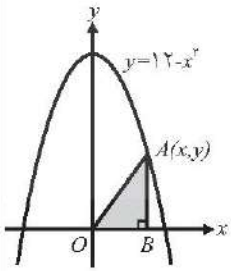
برای اینکه بفهمید $x = 15$ قابل قبول نیست، دوتا راه دارید، اول اینکه

$$x = 15 \xrightarrow{2x + \ell = 30} 30 + \ell = 30 \Rightarrow \ell = 0$$

و دوم اینکه مشتق را تعیین علامت کنید و بفهمید در $x = 5$ ، ماکزیم اتفاق می‌افتد...

سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۲۹۶	ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع ۳۰ cm را در نظر بگیرید. مطابق شکل می‌خواهیم از چهار گوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط چین‌های مشخص شده در شکل، یک جعبه‌ی در باز بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟	۱/۵	۱۴۰۳ شهریور
			
۲۹۷	مطابق شکل زیر، نقطه A در ناحیه اول دستگاه مختصات روی منحنی $y = 12 - x^2$ قرار دارد. با استفاده از جدول تغییرات، مختصات نقطه A را چنان بیابید که مساحت مثلث قائم‌الزاویه OAB بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.	۱/۷۵	۱۴۰۳ آذر
			



۲۹۸	می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً ۹۰۰ سانتی‌متر مکعب است. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟ ($\pi \approx 3$)	۱/۵	دی ۱۴۰۲
۲۹۹	دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۸ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۲
۳۰۰	پنجره‌ای به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای بر روی آن داریم به طوری که قطر نیم‌دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط این پنجره ۶ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۲
۳۰۱	دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.	۱/۵	دی ۱۴۰۱
۳۰۲	نشان دهید در بین مستطیل‌هایی با محیط ۱۶ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم اندازه باشند.	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۱
۳۰۳	اگر بین دو عدد حقیقی x و y رابطه $5x - y = 10$ برقرار باشد، مقادیر x و y را طوری به دست آورید که حاصل ضرب این دو عدد مینیمم گردد.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۱
۳۰۴	دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.	۱/۵	شهریور ۱۴۰۱
۳۰۵	در بین تمام مستطیل‌هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، طول و عرض مستطیلی با بیش‌ترین مساحت را بیابید.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۰
۳۰۶	نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، مستطیلی بیش‌ترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم اندازه باشد.	۱/۲۵	خرداد ۹۹ خ
۳۰۷	دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۲۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.	۰/۲۵	شهریور ۹۹
۳۰۸	ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو راس آن روی محور x ها و دو راس دیگرش بالای محور x ها و روی سهمی به معادله $y = 12 - x^2$ باشند.	۱/۲۵	خرداد ۹۹ خ
۳۰۹	هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت 32 cm^2 خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایین هر صفحه 2 cm و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه کمترین مقدار ممکن باشد.	۱/۵	خرداد ۹۹



۳۱۰	دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.	۱	دی ۹۸
۳۱۱	دو عدد حقیقی a, b را طوری بیابید که داشته باشیم $2a + b = 60$ و حاصل ضرب آنها بیشترین مقدار ممکن گردد.	۱	شهریور ۹۸
۳۱۲	ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهارگوشه‌ی آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس لبه جعبه را به اندازه x برمی‌گردانیم تا یک جعبه در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد.	۱/۲۵	خرداد ۹۸
۳۱۳	اگر محیط یک مستطیل ۲۴ سانتی متر باشد. طول و عرض مستطیل را طوری حساب کنید که مساحت آن ماکزیمم شود.	۱	دی ۹۷

یادداشت ضروری دانش‌آموز:

درس ۲

یهیمنسازی



هندسه

تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی ۱۰۴
دایره ۱۱۳



درس

۱

تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

خلاصه درسنامه

تفکر تجسمی



در تفکر تجسمی، از کلمات، جملات، و شیوه‌های زبانی کمتر استفاده شده و نقش اصلی را «تصاویر ذهنی» بر عهده دارند که در ذهن فرد فعال شده و هنگام تفکر درباره‌ی یک موضوع مورد استفاده قرار می‌گیرند. مفاهیم «برش و سطح مقطع» و همچنین «دوران» را در ارتباط با تفکر تجسمی قدری بررسی می‌کنیم.

♦ سطح مقطع:

یک شکل هندسی در فضا در نظر بگیرید. تصور کنید یک صفحه از بین آن عبور داده‌اید. در محل برخورد، شکلی مسطح روی صفحه ایجاد می‌شود که به آن «سطح مقطع» شکل و صفحه گفته می‌شود. چند نمونه از برش اشکال و سطح مقطع ایجاد شده را ببینید.

سطح مقطع استوانه با یک صفحه	سطح مقطع صفحه با کره	
		شکل ۳ مقاطع مخروطی
صفحه عمودی	صفحه مایل	
صفحه افقی	صفحه عمودی	
سطح مقطع یک دایره است	سطح مقطع یک بیضی است	سطح مقطع یک دایره است
سطح مقطع یک مستطیل است.	سطح مقطع یک بیضی است	سطح مقطع یک دایره است

نکته: در حالتی که سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با کره شامل مرکز دایره باشد سطح مقطع بیشترین مساحت را دارد. بعضی از حالت‌های برخورد یک صفحه با یک مکعب مستطیل تو خالی با قاعده مربع شکل در زیر نمایش داده شده است.

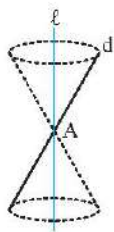
صفحه افقی	صفحه عمودی	صفحه مایل
سطح مقطع مربع است	سطح مقطع مستطیل است	سطح مقطع مثلث است



♦ دوران برخی از اشکال

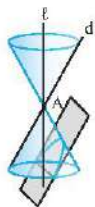
دوران برخی اشکال هندسی حول یک محور و بررسی شکل‌های حاصل را ببینیم:

دوران	مستطیل	مثلث قائم‌الزاویه	ربع دایره
حول	دوران حول یک ضلع	دوران حول یک ضلع قائمه	دوران حول شعاع
نوع دوران			
شکل حاصل			
	استوانه	مخروط	نیم‌کره



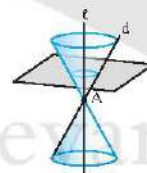
رویه مخروطی: فرض کنید که دو خط d و l در نقطه A متقاطع و غیرعمود باشند. از دوران خط d حول خط l ، یک رویه مخروطی (سطح مخروطی) پدید می‌آید. نقطه A را رأس، خط l را محور و خط d را مولد سطح مخروطی می‌گوییم.

وقتی صفحه‌ای را با این رویه مخروطی تلاقی می‌دهیم، با توجه به حالت‌های مختلف صفحه و رویه مخروطی، فصل مشترک آن‌ها یکی از حالات زیر ایجاد می‌شود:



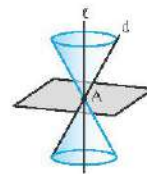
(۱) دایره

در حالتی که صفحه بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.



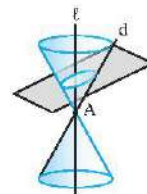
(۲) نقطه

در حالتی که صفحه فقط از نقطه A بگذرد، تنها یک نقطه پدید می‌آید.



(۳) بیضی

در حالتی که صفحه بر محور l عمود نباشد (به طور مایل آن را قطع کند) و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، سطح حاصل یک بیضی خواهد بود.



(۴) سهمی

در حالتی که صفحه با مولد d موازی باشد و از رأس عبور نکند، سطح حاصل یک سهمی خواهد بود.



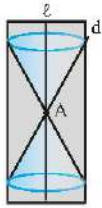
(۵) یک خط

در حالتی که صفحه را مولد موازی بوده و از رأس A نیز بگذرد، یک خط حاصل می‌شود (صفحه شامل یکی از مولدها است).



(۶) هذلولی

در حالتی که صفحه هر دو تکه بالایی و پایینی مخروط را قطع کند و شامل محور l نباشد، سطح حاصل یک هذلولی است.



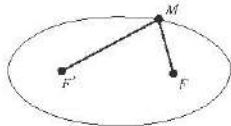
(۷) دو خط متقاطع

در حالتی که صفحه شامل محور ℓ باشد، دو خط متقاطع حاصل می‌شود.

بیضی و ویژگی‌های آن



تعریف بیضی مجموعه‌ی نقاطی است در صفحه مانند M ، به طوری که مجموع فاصله‌های M تا دو نقطه‌ی ثابت F و F' برابر باشد با عدد $2a$.



$$MF + MF' = 2a$$

♦ پارامترهای بیضی

هر بیضی با سه پارامتر مثبت a ، b و c معرفی و شناخته می‌شود. در این قسمت مفهوم $2a$ ، $2b$ و $2c$ را معرفی می‌کنیم:

فاصله‌ی ...	اندازه	اسم فارسی	شکل	مرکز بیضی
۱ دو کانون	$FF' = 2c$	فاصله‌ی کانونی		$O = \frac{F + F'}{2}$
۲ دو رأس کانونی	$AA' = 2a$	قطر بزرگ (قطر کانونی)		$O = \frac{A + A'}{2}$
۳ دو رأس ناکانونی	$BB' = 2b$	قطر کوچک (قطر ناکانونی)		$O = \frac{B + B'}{2}$

هر بیضی چهار رأس دارد.

① رأس‌های کانونی: دو رأسی را که در امتداد کانون‌ها هستند و بیضی از دو سر آن‌ها کشیده‌تر است رأس‌های کانونی می‌گوییم.

② رأس‌های ناکانونی: دو رأس دیگری را که در امتداد کانون‌ها نیستند، رأس‌های ناکانونی می‌گوییم.

معمولاً رأس‌های کانونی را با A و A' و رئوس ناکانونی را با B و B' نشان می‌دهیم. نماد کانون‌ها هم همیشه F و F' است...

♦ محورهای تقارن بیضی

① اگر محورهای بیضی موازی محورهای مختصات باشند و $O(a, b)$ مرکز بیضی، آن وقت معادله‌ی محورهای تقارن می‌شود: $x = a$ و $y = b$

② محورهای تقارن بیضی همیشه در نقطه‌ی O متقاطع و بر هم عمودند.

♦ ارتباط بین پارامترهای بیضی

بین سه پارامتر بیضی، رابطه‌ی فیثاغورسی با وتر a برقرار است؛ یعنی: $a^2 = b^2 + c^2$

برای مثال: اگر در یک بیضی $c = 3$ و $a = 4$ باشد، اندازه قطر کوچک بیضی چقدر است؟

$$b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow b = \sqrt{7}$$

و بنابراین اندازه قطر کوچک برابر است با $2\sqrt{7}$.

خروج از مرکز بیضی

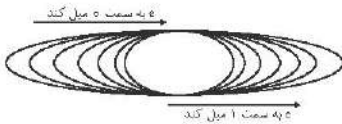
$$e = \frac{c}{a}$$

$$0 < e < 1$$

در هر بیضی، نسبت $\frac{c}{a}$ را با نماد e نشان می‌دهیم و آن را خروج از مرکز بیضی می‌نامیم.

۱) در بیضی، خروج از مرکز همیشه عددی بین صفر و ۱ است:

۲) خروج از مرکز در بیضی میزان کشیدگی بیضی را نشان می‌دهد؛ هر قدر e به سمت صفر نزدیک‌تر باشد، بیضی تپل‌تر است و به دایره شبیه‌تر! و هر قدر e به سمت ۱ نزدیک‌تر شود، بیضی کشیده‌تر خواهد بود.



مثال

با یک تکه نخ به طول ۱۴ و با کمک دو میخ ثابت به فاصله‌ی ۴ از همدیگر یک بیضی کشیده‌ایم. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} \text{طول نخ} = 14 \Rightarrow 2a = 14 \Rightarrow a = 7 \\ \text{فاصله‌ی میخ‌ها} = 4 \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2 \end{array} \right\} \frac{e = \frac{c}{a}}{\text{خروج از مرکز}} \rightarrow e = \frac{2}{7}$$

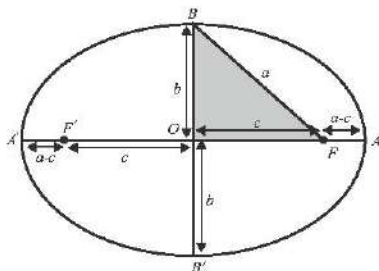
مثال

در بیضی با خروج از مرکز $\frac{1}{3}$ که طول قطر کوچک آن برابر ۲ است، فاصله‌ی کانونی کدام است؟

پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 3c \\ \text{قطر کوچک} = 2b = 2 \Rightarrow b = 1 \end{array} \right\} \frac{a^2 = b^2 + c^2}{\text{فاصله‌ی کانونی}} \rightarrow (3c)^2 = 1^2 + c^2 \Rightarrow 9c^2 = 1 + c^2 \Rightarrow 8c^2 = 1 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow c = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

♦ همه‌ی اندازه‌های بیضی در یک نگاه



درون و بیرون بیضی

می‌توان نشان داد که اگر نقطه دلخواه A بیرون بیضی باشد، مجموع فواصل آن از نقاط F و F' بیشتر از l و اگر نقطه دلخواه B داخل بیضی باشد، مجموع فاصله آن از دو نقطه F و F' کمتر از l خواهد بود.



شکل	شرط	وضعیت مکان M نسبت به بیضی	
	$MF + MF' = 2a$	M روی بیضی قرار گرفته است.	۱
	$MF + MF' > 2a$	M خارج بیضی قرار گرفته است.	۲
	$MF + MF' < 2a$	M داخل بیضی قرار گرفته است.	۳

مثال

در یک بیضی با کانون‌های $F(3, 5)$ و $F'(3, -1)$ که قطر بزرگ آن ۸ است، وضعیت قرارگیری نقطه‌ای $M(1, 1)$ را نسبت به بیضی مشخص کنید.

پاسخ:

$$M(1, 1) \begin{cases} \xrightarrow{F(3, -1)} MF = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \approx 2.8 \\ \xrightarrow{F'(3, 5)} MF' = \sqrt{(3-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \approx 4.4 \end{cases} \rightarrow MF + MF' \approx 7.2$$

$MF + MF' < 2a$ (چون $7.2 < 8$) پس M درون بیضی قرار دارد.

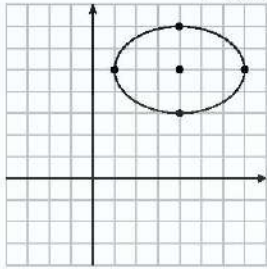
- اگر کشیدگی بیضی در راستای محور y ها باشد، بیضی را قائم می‌گوییم.
- اگر کشیدگی بیضی در راستای محور x ها باشد، بیضی را افقی می‌گوییم.

بیضی قائم	بیضی افقی	مختصات کانون
		$F \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta + c \end{vmatrix}$
		$F' \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta - c \end{vmatrix}$
		$A \begin{vmatrix} \alpha + a \\ \beta \end{vmatrix}$
		$A' \begin{vmatrix} \alpha - a \\ \beta \end{vmatrix}$
		$B \begin{vmatrix} \alpha + b \\ \beta \end{vmatrix}$
		$B' \begin{vmatrix} \alpha - b \\ \beta \end{vmatrix}$



مثال

در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات $(4, 5)$ باشد: (الف) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید.



$$\begin{aligned} 2a = 6 &\Rightarrow a = 3 \\ 2b = 4 &\Rightarrow b = 2 \\ \Rightarrow c^2 = 3^2 - 2^2 = 5 &\rightarrow c = \sqrt{5} \end{aligned}$$

(ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و همچنین کانون‌های بیضی را بنویسید.

$$\begin{aligned} A(4+3, 5) &= (7, 5) & A'(4-3, 5) &= (1, 5) \\ B(4, 5+2) &= (4, 7) & B'(4, 5-2) &= (4, 3) & F(4+\sqrt{5}, 5) & F'(4-\sqrt{5}, 5) \end{aligned}$$

سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۳۱۴	جمله زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. اگر صفحه‌ای سطح مخروطی را هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس نگذرد شکل حاصل را می‌نامیم.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۳۱۵	اگر خروج از مرکز یک بیضی $\frac{\sqrt{3}}{4}$ و طول قطر کوچک آن ۱۰ باشد آنگاه فاصله‌ی کانونی را محاسبه کنید.	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۳۱۶	جای خالی را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. اگر صفحه P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۳۱۷	در یک بیضی فاصله کانونی با قطر کوچک آن برابر است. خروج از مرکز بیضی را بیابید.	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۳۱۸	معادله قطر کانونی یک بیضی، $l = -1$ و معادله قطر کوچک، $x = 2$ است اگر طول قطرهای بزرگ و کوچک به ترتیب ۱۲ و ۸ واحد باشند، مرکز بیضی و فاصله کانونی را به دست آورید.	۱/۷۵	۱۴۰۲
۳۱۹	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل است.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۳



شهریور ۱۴۰۲	۱	۳۲۰	مختصات دو سر قطر بزرگ یک بیضی نقاط $(۱, ۶)$ و $(۱, -۲)$ است. اگر خروج از مرکز این بیضی $\frac{1}{4}$ باشد، فاصله کانونی آن را بیابید.
شهریور ۱۴۰۲	۱/۷۵	۳۲۱	در بیضی زیر کانون‌ها به مختصات $F(۱, ۵)$ و $F'(۱, ۱)$ و یک رأس قطر بزرگ آن $A(۱, ۶)$ می‌باشد: الف) فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید. ب) معادله قطر کوچک بیضی را بنویسید. پ) مساحت مثلث $B'FF'$ را بدست آورید.
دی ۱۴۰۱	۱/۵	۳۲۲	اگر در بیضی مقابل مختصات کانون $F'(۴, ۰)$ و مختصات رأس $B(۰, ۳)$ باشد: الف: قطر بزرگ بیضی را بیابید. ب: محیط مثلث $MF'F$ را بیابید.
شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵	۳۲۳	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، آن نامیده می‌شود.
شهریور ۱۴۰۱	۰/۷۵	۳۲۴	در بیضی مقابل فاصله کانونی را محاسبه کنید. (F و F' کانون‌های بیضی هستند.)
شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵	۳۲۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول محور آن، مخروط نام دارد.
شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵	۳۲۶	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. خروج از مرکز بیضی با قطر بزرگ ۸ و فاصله کانونی ۶ برابر است.
شهریور ۱۴۰۱	۱/۵	۳۲۷	اگر طول قطر بزرگ AA' و قطر کوچک BB' بیضی مقابل به ترتیب ۱۰ و ۸ باشد الف) مقدار $A'F$ را به دست آورید. (F کانون بیضی است) ب) مساحت مثلث هاشور خورده (BFA') چقدر است؟

۳۲۸	خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن $(-4, -1)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است. الف) فاصله کانونی را محاسبه کنید. ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ این بیضی را پیدا کنید.	۱/۵	دی ۱۴۰۰
۳۲۹	در یک بیضی افقی، طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات $(4, 5)$ باشد: الف: فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید. ب: مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را بنویسید.	۱	شهریور ۱۴۰۰
۳۳۰	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. هرچه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک تر باشد، شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد.	۰/۵	خرداد ۱۴۰۰
۳۳۱	کانون‌های یک بیضی نقاط $(1, 3)$ و $(-5, 1)$ است. الف: فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید. ب: اگر $a = 6$ باشد، اندازه قطر کوچک را پیدا کنید. (a اندازه نصف قطر بزرگ بیضی است).	۱/۵	خرداد ۱۴۰۰
۳۳۲	خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن $(-4, -1)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است. الف: طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید. ب: مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را پیدا کنید.	۱/۵	دی ۹۹
۳۳۳	در هر قسمت، عبارت مناسب را انتخاب کنید. الف: اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نباشد و از رأس نگذرد، شکل حاصل از تقاطع صفحه با سطح مخروطی خواهد بود. (بیضی - سهمی - هذلولی) ب: اگر خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک شود، شکل بیضی به شکل نزدیک خواهد شد. (پاره خط - دایره - نقطه)	۰/۵	شهریور ۹۹
۳۳۴	کانون‌های یک بیضی نقاط $(2, 5)$ و $(2, -3)$ و $a = 5$ است. مختصات مرکز و اندازه قطر کوچک بیضی را پیدا کنید.	۱	شهریور ۹۹
۳۳۵	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. شکل حاصل از دوران یک نیم دایره حول شعاع عمود بر قطر آن یک است.	۰/۲۵	خرداد ۹۹ خ
۳۳۶	کانون‌های یک بیضی نقاط $(1, 3)$ و $(-5, 1)$ است و اندازه قطر بزرگ ۱۲ می‌باشد. فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی و خروج از مرکز بیضی را محاسبه کنید.	۱/۲۵	خرداد ۹۹ خ



۳۳۷	در جاهای خالی عبارات مناسب قرار دهید. وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه به طور عمود بر محور برش داده می‌شود (و از راس عبور نکند) سطح مقطع یک است.	۰/۲۵	خرداد ۹۹ خ
۳۳۸	در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و طول قطر قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مختصات مرکز آن $O(4,5)$ باشد. الف: فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید. ب: مختصات دو سر قطر بزرگ آن را بنویسید.	۱/۵	خرداد ۹۹ خ
۳۳۹	کانون‌های یک بیضی نقاط $(1,3)$ و $(1,-5)$ است. الف: فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی و معادله قطر بزرگ بیضی را بنویسید. ب: اگر $a=6$ باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.	۱/۲۵	خرداد ۹۹ خ
۳۴۰	در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، آن نامیده می‌شود.	۰/۲۵	دی ۹۸
۳۴۱	کانون‌های یک بیضی نقاط $(1,3)$ و $(1,-5)$ است. الف: فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید. ب: اگر $a=6$ باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.	۲	دی ۹۸
۳۴۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر صفحه P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد از راس آن عبور نکند شکل حاصل یک هذلولی است.	۰/۲۵	شهریور ۹۸
۳۴۳	در جای خالی عبارت مناسب بنویسید. شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض آن است.	۰/۲۵	شهریور ۹۸
۳۴۴	اگر در یک بیضی داشته باشیم $a=5, b=3$ در این صورت اندازه فاصله کانونی این بیضی را محاسبه کنید.	۰/۷۵	شهریور ۹۸
۳۴۵	در جای خالی گزینه مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید. هرچه خروج از مرکز بیضی (کوچکتر - بزرگتر) شود شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد.	۰/۲۵	خرداد ۹۸
۳۴۶	در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۸ و طول قطر کوچک ۶ واحد است. فاصله ی کانونی بیضی را بدست آورید.	۱	خرداد ۹۸
۳۴۷	در جای خالی عبارت مناسب بنویسید. شکل حاصل از دوران یک دایره حول یکی از قطرهای آن برابر است.	۰/۲۵	دی ۹۷
۳۴۸	در یک بیضی قطر بزرگ ۸ و قطر کوچک آن ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟	۱	دی ۹۷



درس

۲

دایره

خلاصه درسنامه

دایره و ویژگی‌های آن



تعریف دایره، مجموعه‌ی همگی تقاطعی از صفحه مانند M است، که فاصله‌ی آن‌ها تا نقطه‌ی ثابت O برابر با عدد r باشد.

♦ معادله‌ی استاندارد دایره

الف نوشتن معادله‌ی دایره

اگر $O(\alpha, \beta)$ مرکز و r شعاع دایره باشد، معادله‌ی دایره می‌شود:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

برای مثال: معادله‌ی دایره‌ی به مرکز $(1, -2)$ و شعاع $\sqrt{2}$:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$$

در حالت خاص:

معادله‌ی دایره به مرکز مبدأ $O = (0, 0)$ و شعاع r به صورت زیر است:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$$

برای مثال: معادله‌ی دایره‌ی به مرکز مبدأ و شعاع ۳:

ب در صورت داشتن معادله‌ی دایره هم، تنها چیزهای مفیدی که از معادله‌ی دایره می‌توانید دریاورید، مرکز و شعاع هستند.

برای مثال: مختصات مرکز و اندازه‌ی مساحت دایره‌ی $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 6$ را تعیین می‌کنیم:

ریشه‌های داخل پرانتزها، مختصات مرکز را معلوم می‌کنند: $(-1, 3)$

$$S = \pi r^2 \Rightarrow S = \pi \times 6 = 6\pi \quad r^2 = 6 \Rightarrow r = \sqrt{6}$$

معادله‌ی گسترده‌ی دایره



اگر در فرم استاندارد دایره، پرانتزهای موجود را مطابق اتحاد مربع دو جمله‌ای باز کنیم و بعد همگی جمله‌ها را به سمت چپ آورده و ساده کنیم، معادله‌ای از دایره به دست می‌آید که اصطلاحاً گسترده نامیده می‌شود.

برای مثال: معادله دایره $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$ را در نظر بگیرید.

این معادله را به کمک اتحادها می‌توان به شکل زیر ساده کرد:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 1 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$$



این رابطه را معادله گسترده دایره یا معادله ضمنی دایره می‌نامیم.

◆ آنچه درباره‌ی معادله‌ی گسترده‌ی دایره، باید بدانید:

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$$

① فرم کلی معادله‌ی گسترده‌ی دایره، به این صورت است:

② راه تبدیل معادله‌ی استاندارد دایره به معادله‌ی گسترده: اتحادها را باز کنید و تمامی جمله‌ها را به سمت چپ بیاورید و ساده کنید...

③ آماده کردن معادله‌ی گسترده‌ی دایره: به ضریب x^2 و y^2 نگاه می‌کنیم، اگر هر دو ۱ بودند، معادله‌ی گسترده را آماده می‌گوییم وگرنه باید کل جمله‌های موجود را بر ضریب x^2 و y^2 تقسیم کنید تا ضریب x^2 و y^2 برابر ۱ گردد و در واقع معادله‌ی گسترده، آماده شود.

برای مثال: $4x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 1 = 0 \xrightarrow{+4} x^2 + y^2 - x + 2y + \frac{1}{4} = 0$

④ محاسبه شعاع و مرکز دایره از معادله‌ی گسترده‌ی دایره: معادله‌ی دایره را گسترده آماده می‌کنید.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

شعاع دایره $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ مرکز دایره $O(\frac{a}{-2}, \frac{b}{-2})$

برای مثال: $4x^2 + 4y^2 + 8x + 8y + 4 = 0 \xrightarrow{+4} x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$

مرکز $O(\frac{2}{-2}, \frac{2}{-2}) = (-1, -1)$

شعاع $r = \frac{\sqrt{4 + 4 - 4(1)}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$
 $a=2, b=2, c=1$

👤 شعاع لازم و کافی برای دایره بودن یک معادله

درس ۲

دایره

اگر بخواهید معادله‌ی $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ دایره‌ای را مشخص کند، شرط لازم و کافی این است که هر دو شرط زیر همزمان برقرار باشند:

① $A = B$ ، یعنی اول ضریب x^2 را با ضریب y^2 مساوی قرار دهید.

② بعد از آماده کردن معادله، فرمول شعاع را بنویسید، عدد زیر رادیکال باید مثبت باشد.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \xrightarrow{\text{دایره است}} a^2 + b^2 - 4c > 0$$

برای مثال:

معادله دایره نیست $a=0, b=2, c=\frac{3}{2} \rightarrow a^2 + b^2 - 4c = 0^2 + 2^2 - 4(\frac{3}{2}) = 4 - 6 = -2 < 0$
 $x^2 + y^2 + 2y + \frac{3}{2} = 0$

معادله دایره است $a=0, b=2, c=-\frac{3}{2} \rightarrow a^2 + b^2 - 4c = 0^2 + 2^2 - 4(-\frac{3}{2}) = 4 + 6 = 10 > 0$
 $x^2 + y^2 + 2y - \frac{3}{2} = 0$

📌 تذکر: اگر در فرم آماده‌ی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ عبارت زیر رادیکال شعاع، صفر شود، این معادله، دایره نیست و فقط نمایش یک نقطه است؛ همان نقطه‌ی $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$.

📄 نوشتن معادله‌ی دایره با اطلاعاتی به جز مرکز و شعاع

حالت اول: مرکز دایره و نقطه‌ای روی دایره داده شده است.

فاصله‌ی آن نقطه را تا مرکز دایره پیدا کنید، این عدد می شود شعاع دایره ...

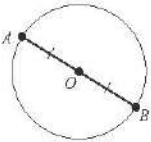
برای مثال: دایره‌ای که از نقطه $(1, -3)$ بگذرد و مرکز آن $(2, -1)$ باشد.

$$r = \sqrt{(2-1)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$

حالت دوم: مختصات دو سر قطری از دایره داده شده است.

۱) برای محاسبه‌ی شعاع دایره فاصله‌ی این دو نقطه را پیدا کنید و نصف آن را حساب کنید.

۲) برای محاسبه مرکز دایره مختصات وسط این دو نقطه را محاسبه کنید.



برای مثال: دایره‌ای که نقاط $(0, 3)$ و $(-4, -1)$ دو سر یکی از قطرهای آن باشند.

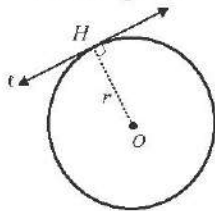
$$O\left(\frac{-4+0}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (-2, 1)$$

$$r = \frac{\sqrt{(-4-0)^2 + (-1-3)^2}}{2} = \frac{2\sqrt{17}}{2} = \sqrt{17}$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 17$$

حالت سوم: معادله‌ی خطی که بر دایره مماس است به همراه مختصات مرکز داده شده است.

برای محاسبه شعاع دایره فاصله‌ی مرکز را تا آن خط مماس حساب کنید. اگر فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس را پیدا کنید، انگار شعاع دایره را به دست آورده‌اید...



$$O(\alpha, \beta), \quad \underbrace{ax+by+c=0}_{\text{معادله‌ی خط مماس}} \Rightarrow r = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

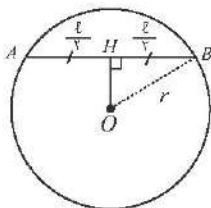
برای مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که بر $3x + 4y - 1 = 0$ مماس بوده و مرکز آن $C(1, 2)$ باشد.

$$r = \frac{|3(1) + 4(2) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

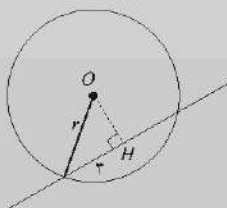
حالت چهارم: مختصات مرکز به همراه اندازه و معادله‌ی وتر که خط متقاطع با دایره، روی دایره ایجاد می‌کند، داده شده است.

۱) برای محاسبه OH فاصله‌ی O را تا خط داده شده بدست آورید.

۲) اگر طول وتر، ℓ باشد، با استفاده از قضیه فیثاغورث، شعاع را بدست بیاورید.



برای مثال: مرکز دایره‌ای، نقطه $O(2, -3)$ است. این دایره روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادله این دایره را بنویسید.



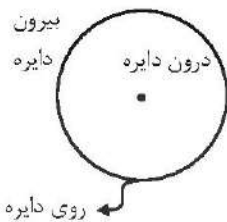
$$OH = \frac{|3(2) - 4(-3) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 4$$

$$r^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow r = 5 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$



درون و بیرون دایره یا وضع نقطه و دایره

دایره، یک منحنی بسته است و به همین دلیل با کشیدن یک دایره، صفحه به سه ناحیه تقسیم می‌شود:



۱) نقاط روی محیط دایره

۲) نقاط بیرون دایره

۳) نقاط درون دایره

با توجه به تعریف دایره، می‌توانیم مشخص کنیم مختصات هر نقطه‌ای که داریم در کدام یک از این سه محدوده قرار می‌گیرد. واضح است شرط اصلی، مقایسه‌ی فاصله‌ی آن نقطه تا مرکز با شعاع دایره، خواهد بود!

A درون دایره	A بیرون دایره	A روی دایره	$A(x_0, y_0)$
			شکل
$OA < r$	$OA > r$	$OA = r$	شرط هندسی
با جایگذاری مختصات A در معادله‌ی دایره داریم: $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < r^2$	با جایگذاری مختصات A در معادله‌ی دایره داریم: $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 > r^2$	با جایگذاری مختصات A در معادله‌ی دایره داریم: $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2$	وقتی معادله‌ی استاندارد دایره را داریم: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
با جایگذاری مختصات A در معادله‌ی دایره داریم: $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c < 0$	با جایگذاری مختصات A در معادله‌ی دایره داریم: $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c > 0$	با جایگذاری مختصات A در معادله‌ی دایره داریم: $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c = 0$	وقتی معادله‌ی گسترده و آماده‌ی دایره را داریم: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

مثال

نقطه‌ی $A(1, -2)$ نسبت به دایره‌ای با معادله‌ی $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$ چه وضعی دارد؟

$$A(1, -2) \Rightarrow \underbrace{(1+2)^2}_9 + \underbrace{(-2-1)^2}_9 > 5 \Rightarrow A \text{ بیرون دایره است}$$

پاسخ: روش اول

روش دوم:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{مرکز}} O(-2, 1) \xrightarrow{A(1, -2)} OA = \sqrt{(-2-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{18} \\ \xrightarrow{\text{شعاع}} r = \sqrt{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{OA}_{\sqrt{18}} > \underbrace{r}_{\sqrt{5}} \text{ بنابراین } A \text{ بیرون دایره است.}$$

وضعیت خط و دایره

فرض کنید معادله‌ی خط ℓ و معادله‌ی دایره‌ی C داده شده باشند. می‌خواهیم تشخیص دهیم که خط و دایره نسبت به همدیگر چه وضعیتی دارند؛ خط و دایره حداکثر دو نقطه‌ی تلاقی می‌توانند داشته باشند و یادتان باشد کلید تشخیص وضعیت خط و دایره، پیدا کردن فاصله‌ی مرکز تا خط و مقایسه‌ی آن با شعاع است.

۱ خط و دایره متقاطع اند	۲ خط بر دایره مماس است:	۳ خط، دایره را قطع نمی‌کند

مثال

وضعیت خط $x + y = 3$ و دایره $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ را نسبت به هم بررسی کنید.

$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\begin{cases} \text{مختصات مرکز دایره} = O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (1, 0) \\ r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + (0)^2 - 4(-3)} = 2 \end{cases}$$

حال باید فاصله خط $x + y = 3$ را از مرکز دایره پیدا کنیم:

$$OH = \frac{|Ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(1) + 1(0) - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} = OH$$

چون داریم که $\sqrt{2} = OH < r = 2$ پس فاصله خط از مرکز دایره کمتر از شعاع دایره است و متقاطع هستند.

نقاط برخورد دایره با محورهای مختصات

- برای پیدا کردن نقاط برخورد دایره با محور x ها کافی است $y = 0$ قرار دهید.
- برای پیدا کردن نقاط برخورد دایره با محور y ها کافی است $x = 0$ قرار دهید.

مثال

اگر معادله دایره‌ای به صورت $(x+1)^2 + y^2 = 4$ باشد، محل برخورد آن با محورهای مختصات را بیابید.

$$\text{محل برخورد با محور } x \text{ ها} \rightarrow y = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 4 \xrightarrow{\text{اتحاد دو جمله‌ای}} x^2 + 2x + 1 = 4$$

$$\rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x+3)(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x+3=0 \rightarrow x=-3 \\ x=0 \rightarrow x=1 \end{cases}$$

$$\text{محل برخورد با محور } y \text{ ها} \rightarrow x = 0 \Rightarrow (0+1)^2 + y^2 = 4 \rightarrow 1 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 3 \rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

وضعیت دو دایره نسبت به هم

برای مشخص کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم:

- اندازه خط‌المرکزین را حساب کنید.
- شعاع‌های دو دایره را محاسبه کنید و با توجه به آن‌ها دو عدد کلیدی را به دست بیاورید: مجموع دو شعاع و قدرمطلق تفاضل دو شعاع.
- با مقایسه d با دو عدد بالا می‌توان وضعیت دو دایره را فهمید.



مقاطع (دو نقطه‌ای تلاقی)	مماس بیرون (مماس بر هم از بیرون)	متخارج (یکی خارج دیگری)
$ r - r' < d < r + r'$	$d = r + r'$	$d > r + r'$
هم‌مرکز (حالت خاص متداخل)	متداخل (یکی داخل دیگری)	مماس درون (مماس بر هم از درون)
$d = 0$	$0 < d < r - r' $	$d = r - r' $

مثال

دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ و $(x-7)^2 + (y-9)^2 = 81$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

پاسخ:

$$\begin{aligned}
 & \text{مرکز} \rightarrow O\left(\frac{-2}{-2}, \frac{-2}{-2}\right) = (1, 1) \\
 & \text{شعاع} \rightarrow r = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 - 4(1)}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1 \\
 & \text{ریشی پراشته‌ها} \rightarrow O' = (7, 9) \\
 & \text{جذر سمت راست} \rightarrow r' = \sqrt{81} = 9 \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} r + r' = 1 + 9 = 10 \\ \textcircled{2} |r - r'| = |1 - 9| = 8 \\ \textcircled{3} OO' = \sqrt{(1-7)^2 + (1-9)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 = d \end{array} \right\} \Rightarrow d = r + r' \Rightarrow \text{مماس بیرون}
 \end{aligned}$$

مثال

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-1, 1)$ و با دایره $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ مماس درون باشد.

$$\begin{aligned}
 c_1 : O' &= \left(-\left(-\frac{4}{2}\right), -\left(-\frac{6}{2}\right)\right) = (2, 3) \\
 r' &= \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2 - 4(-3)} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 36 + 12} = \frac{1}{2} \sqrt{64} = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \\
 OO' &= \sqrt{(-1-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} = 5 \\
 \text{مماس درون} \quad OO' &= |r - r'| \rightarrow 5 = |r - 4| \Rightarrow r = 9 \text{ قی} \quad , \quad r = -1 \text{ غقی} \\
 \text{معادله دایره} &: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 81
 \end{aligned}$$

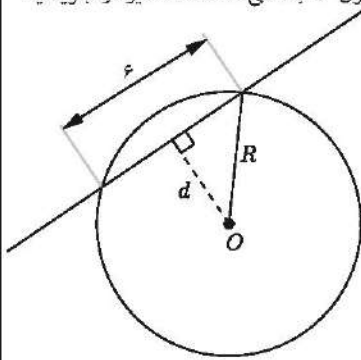


سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۳۴۹	معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که بر خط $x + 4y - 1 = 0$ مماس بوده و مرکز آن $(1, 2)$ باشد.	۱	شهریور ۱۴۰۳
۳۵۰	اگر مرکز دایره $x^2 + y^2 + ax - 4y - 4 = 0$ ، نقطه $O(1, 2)$ باشد. الف) مقدار a را بیابید. ب) شعاع دایره را محاسبه کنید.	۱	خرداد ۱۴۰۳
۳۵۱	معادله دایره‌ای به صورت $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ است، مختصات مرکز این دایره را به دست آورید.	۰/۷۵	دی ۱۴۰۲
۳۵۲	وضعیت خط $3x + 4y = 0$ نسبت به دایره به معادله $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 9$ مشخص کنید.	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۲
۳۵۳	اگر دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ و $(x-2)^2 + (y+1)^2 = m^2$ مماس خارج باشند، مقدار m را بیابید.	۱/۷۵	خرداد ۱۴۰۲
۳۵۴	معادله گسترده یک دایره به شکل $x^2 + y^2 + 2y + 2x - 8 = 0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بیابید.	۱	تیر ۱۴۰۱
۳۵۵	معادله گسترده دایره $C(O, R)$ به شکل $x^2 + y^2 + 2y - 4x - 4 = 0$ است. الف) مختصات مرکز و شعاع دایره C را محاسبه کنید. ب) آیا نقطه $A(0, 3)$ روی محیط دایره C قرار دارد؟ چرا؟	۱/۵	شهریور ۱۴۰۱
۳۵۶	کدامیک از نقاط زیر روی محیط دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ قرار دارد؟ الف) $(0, 0)$ ب) $(1, 0)$ پ) $(0, -1)$ ت) $(-1, 0)$	۰/۵	خرداد ۱۴۰۱
۳۵۷	معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $(0, 3)$ و بر خط $3x - 4y = 3$ مماس باشد.	۱	خرداد ۱۴۰۱
۳۵۸	معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $(0, 3)$ و بر خط $3x - 4y = 3$ مماس باشد.	۱	دی ۱۴۰۰



شهریور ۱۴۰۰	۱	۳۵۹	وضعیت خط $x + y = 3$ و دایره $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید.
خرداد ۱۴۰۰	۱/۵	۳۶۰	مرکز دایره‌ای، نقطه $O(2, -3)$ است. این دایره روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ و تری به طول ۶ جدا می‌کند. معادله دایره را بنویسید. 
دی ۹۹	۱	۳۶۱	اگر معادله دایره به شکل $(x+1)^2 + y^2 = 4$ باشد: الف: مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بنویسید. ب: مختصات تقاطع دایره با محور x ها را پیدا کنید.
شهریور ۹۹	۱	۳۶۲	معادله دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x + 4y = 1$ مماس بوده و مرکز آن $(1, 2)$ باشد.
خرداد ۹۹	۱	۳۶۳	معادله دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x + 4y - 1 = 0$ مماس بوده و مرکز آن $(1, 2)$ باشد.
خرداد ۹۹ خ	۰/۷۵	۳۶۴	وضعیت دایره به معادله $x^2 + y^2 = 2$ و خط $y = -x - 2$ را نسبت به هم مشخص کنید.
دی ۹۸	۰/۷۵	۳۶۵	وضعیت دایره $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ و خط $y = -1$ را نسبت به هم مشخص کنید.
شهریور ۹۸	۱/۲۵	۳۶۶	وضعیت خط $x + y = 3$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ مشخص کنید.
خرداد ۹۸	۲	۳۶۷	وضعیت دو دایره به معادلات $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ و $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید.
دی ۹۷	۱/۲۵	۳۶۸	معادله گسترده دایره‌ای به صورت $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ می‌باشد. مرکز و شعاع دایره را بنویسید.



احتمال

قانون احتمال کل ۱۲۲

math-pilevar.ir



درس

۱

قانون احتمال کل

خلاصه درسنامه

یادآوری تعریف‌ها و مفاهیم ساده

پدیده تصادفی (آزمایش تصادفی)	پدیده یا آزمایشی است که نتیجه آن را نتوان قبل از انجام، به طور قطعی پیش‌بینی کرد.
فضای نمونه‌ای	مجموعه تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه آن پدیده می‌نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهیم.
پیشامد تصادفی	هر زیرمجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.
فرمول احتمال	$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت‌های ممکن}}$

پیشامدها و اعمال روی آن‌ها



فرض کنیم A و B پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند.

حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

درس ۱

احتمال کل

شکل	مفهوم	فرمول	
	حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد. A یا B یا هر دو	$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	$P(A \cup B)$
	پیشامد A رخ ندهد.	$1 - P(A)$	$P(A')$
	پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ ندهد. از بین دو پیشامد A و B ، فقط A	$P(A) - P(A \cap B)$	$P(A - B)$
	هر دو پیشامد A و B رخ دهند.	$P(A \cap B)$	$P(A \cap B)$

♦ پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه A و B با هم رخ ندهند؛ به بیان دیگر $A \cap B = \emptyset$ در این صورت داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

♦ تعمیم پیشامدهای ناسازگار: پیشامدهای A_1 و A_2 و $\dots$ و A_n را دو به دو ناسازگار می‌گوییم، هرگاه هیچ دوتایی از آن‌ها نتوانند با هم رخ دهند. در این صورت داریم:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

♦ احتمال شرطی: منظور از «احتمال A به شرط B » که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است و داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad (P(B) \neq 0)$$

♦ پیشامدهای مستقل: دو پیشامد A و B از هم مستقل اند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. مستقل بودن دو پیشامد A و B معادل است با اینکه $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

افراز



فرض کنید بخواهیم مجموعه‌ی A را به چند زیرمجموعه تقسیم کنیم. اگر تقسیم‌بندی مجموعه‌ی A ، سه شرط زیر را همزمان داشته باشد، می‌گوییم A را به این زیرمجموعه‌ها افراز کرده‌ایم:

۱) هیچ کدام از زیرمجموعه‌ها تهی نباشد.

۲) هیچ دوتایی از زیرمجموعه‌ها، عضو مشترک نداشته باشند.

۳) اجتماع تمام زیرمجموعه‌ها بشود خود A .

به عبارت دیگر اگر مجموعه‌ی A به سه زیرمجموعه‌ی B_1 ، B_2 و B_3 افراز شده باشد، آن وقت:

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = A \quad (3) \quad B_1 \cap B_2 = B_2 \cap B_3 = B_1 \cap B_3 = \emptyset \quad (1) \quad B_1, B_2, B_3 \neq \emptyset \quad (1)$$

برای بیشتر از سه تا زیرمجموعه هم، می‌توان اینگونه مدل‌سازی کرد.



افراز A به چهارتا زیرمجموعه ...

معروف‌ترین مثال برای فهم افراز، نقشه‌ی ایران است که به استان‌های مختلف آن، افراز شده است.

اگر کشور ایران را بعنوان مجموعه اصلی در نظر بگیریم؛ هر استان ۳۱ استان یک افراز برای ایران محسوب می‌شود چرا که

۱) هیچ کدام از استان‌ها تهی نیست.

۲) هیچ دوتایی از استان‌ها عضو مشترک ندارند.

۳) اجتماع تمام استان‌ها می‌شود ایران.

مثال

برای مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ سه افراز بنویسید.

$$A_1 = \{1, 2\} \quad A_2 = \{3, 4\} \quad A_3 = \{5\} \rightarrow \begin{cases} A_1 \cap A_2 = \emptyset \\ A_1 \cap A_3 = \emptyset \\ A_2 \cap A_3 = \emptyset \end{cases} \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$$

این یک نمونه از جواب است و می‌توان جواب‌های دیگر نیز برای این سوال نوشت.



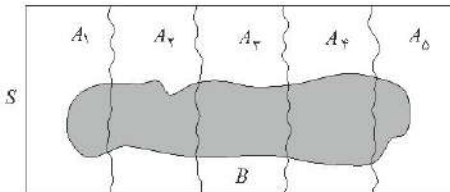
چند افراز معروف:

- ۱) اعداد صحیح را به عددهای زوج و فرد افراز کنیم.
- ۲) اعداد صحیح را به سه دسته‌ی عددهای مثبت، منفی و صفر افراز کنیم.
- ۳) اعداد حقیقی را به دو دسته‌ی عددهای گنگ و گویا افراز کنیم.

قانون احتمال کل



فرض کنید پیشامدهای A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 مانند شکل مقابل یک افراز روی فضای نمونه‌ای S درست کرده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد در این صورت داریم:



$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup (B \cap A_4) \cup (B \cap A_5)$$

که در آن $B \cap A_i$ و $B \cap A_j$ برای هر $i \neq j$ ناسازگارند. چرا؟ بنابراین داریم:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + P(B \cap A_4) + P(B \cap A_5) = \sum_{i=1}^5 P(B \cap A_i)$$

اما از آنچه در احتمال شرطی مشاهده کردیم داریم:

$$P(B|A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \Rightarrow P(B \cap A_i) = P(A_i)P(B|A_i)$$

چگونه بفهمیم یک سوال با قانون احتمال کل حل می‌شود:

- ۱) در صورت سوال و در توضیح‌های ابتدایی آن، متوجه می‌شوید که «فضای نمونه، به چند قسمت مختلف و مجزا، تقسیم شده است»، مثل مهری سفید و سیاه، دختر و پسر، ظرف اول و دوم و...
- ۲) وقتی سوال را می‌خوانیم می‌بینیم که «چندتا اتفاق پشت سر هم افتاده است» و در آخر، طراح از شما خواسته تا احتمال وقوع یک پیشامد ساده را بعد از همه‌ی این اتفاقات حساب کنید.

مثال

احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر، 0.12 و به فرزند دختر 0.08 است. والدینی که حامل این نوع بیماری هستند، انتظار فرزند را می‌کشند. چقدر احتمال دارد این فرزند سالم باشد؟

پاسخ:

$$\begin{aligned} \text{فرزند متولد شده} \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{پسر باشد}} \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{سالم باشد}} 1 - 0.12 = 0.88 \\ \xrightarrow{\text{بیمار باشد}} 0.12 \end{array} \right. \\ \xrightarrow{\text{دختر باشد}} \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{سالم باشد}} 1 - 0.08 = 0.92 \\ \xrightarrow{\text{بیمار باشد}} 0.08 \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \text{محاسبه احتمال کل} \rightarrow \frac{1}{2} \times 0.88 + \frac{1}{2} \times 0.92 = \frac{1}{2} \times \frac{88}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{92}{100} = \frac{88}{200} + \frac{92}{200} = \frac{180}{200} = 0.9 \end{aligned}$$

تذکره: در کشیدن نمودار درختی در سوالات قانون احتمال کل، لازم نیست که همه‌ی شاخه‌ها را بکشید و تنها به کشیدن آن شاخه‌ای که احتمالش

مطلوب سوال است، اکتفا کنید...

مثال

سه ظرف همانند داریم. در اولی و دومی هر کدام ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در ظرف سوم ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است. اگر به تصادف یک ظرف انتخاب کرده و مهره‌ای از آن خارج کنیم، با کدام احتمال این مهره سفید است؟

پاسخ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ظرف اول} \rightarrow \frac{5}{8} \text{ مهره سفید بیاید} \\ \text{ظرف دوم} \rightarrow \frac{5}{8} \text{ مهره سفید بیاید} \\ \text{ظرف سوم} \rightarrow \frac{4}{10} \text{ مهره سفید بیاید} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{محاسبه‌ی احتمال کل}} \left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{8} \right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{8} \right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{10} \right)$$

$$= \frac{5}{24} + \frac{5}{24} + \frac{2}{15} = \frac{5}{12} + \frac{2}{15} = \frac{33}{60} = \frac{11}{20}$$

فرمول قانون احتمال کل به زبان ساده

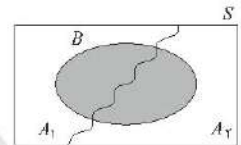


در نمودار درختی، یک ویژگی جالب و البته مهم وجود دارد: در هر شاخه‌ای که بخواهید احتمال آن اتفاق را حساب کنید، باید بدانید که عمل قبلی برای این اتفاق، شرط محسوب می‌شود و در واقع باید احتمال دومی را با این فرض که عمل اول اتفاق افتاده است، حساب کنید.

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \rightarrow P(A_1) \xrightarrow{B} P(B|A_1) \\ A_2 \rightarrow P(A_2) \xrightarrow{B} P(B|A_2) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جواب}} P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$$

عمل اول عمل دوم

می‌گوییم S به دو پیشامد A_1 و A_2 افراز شده است.



کافی توجه کنید که:

$$\boxed{P(A_1)P(B|A_1)} + \boxed{P(A_2)P(B|A_2)} = P(B)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$P(B \cap A_1) \quad + \quad P(B \cap A_2)$$

حالا اگر S را به تعداد بیشتری زیرمجموعه هم تقسیم کرده باشند، می‌توان همین استدلال را تعمیم داد...

مثال

در یک شرکت، ۳۵ آقا و ۱۵ خانم مشغول کار هستند. هرگاه ۵ درصد آقایان و ۲ درصد خانم‌ها دانشجو باشند. در این صورت با چه احتمالی شخص انتخابی از این شرکت، دانشجو است؟

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{آقا باشد} \rightarrow \frac{35}{50} \xrightarrow{\text{دانشجو باشد}} \frac{5}{100} \\ \text{خانم باشد} \rightarrow \frac{15}{50} \xrightarrow{\text{دانشجو باشد}} \frac{2}{100} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{محاسبه‌ی احتمال کل}} \frac{35}{50} \times \frac{5}{100} + \frac{15}{50} \times \frac{2}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{35}{1000} + \frac{6}{1000} = \frac{41}{1000} = 0.041$$

شخص انتخابی



سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۳۶۹	جمله زیر را با عبارت مناسب کامل کنید. دو پیشامد را گوییم هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تاثیر نداشته باشد.	۱	شهریور ۱۴۰۳
۳۷۰	یک سکه را پرتاب می‌کنیم اگر «پشت» بیاید ۳ سکه دیگر را باهم پرتاب می‌کنیم و اگر «رو» بیاید ۲ سکه دیگر را باهم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً دو سکه «رو» ظاهر شود چقدر است؟	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۳۷۱	سه ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۵ مهره قرار دارد که ۳ تای آن‌ها قرمز است. در ظرف دوم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد و در ظرف سوم ۱۲ مهره داریم که ۶ تای آن‌ها قرمز است. با چشم بسته یک ظرف را انتخاب کرده و یک مهره از آن خارج می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره قرمز است.	۱/۵	شهریور ۱۴۰۳
۳۷۲	فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۴۵ درصد مرد و ۵۵ درصد زن باشد و شیوع یک بیماری ویروسی به ترتیب در این دو دسته ۴ درصد و ۶ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟	۱/۵	دی ۱۴۰۲
۳۷۳	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. هرگاه برای دو پیشامد A و B داشته باشیم $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ آن‌گاه دو پیشامد A و B هستند.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۲
۳۷۴	دو جعبه داریم. درون یکی از آن‌ها ۹ لامپ سالم و ۳ لامپ معیوب قرار دارد و درون جعبه دیگر ۱۵ لامپ قرار دارد که ۵ تای آن‌ها معیوب است. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده و یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر سالم باشد؟	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۲
۳۷۵	اگر A مجموعه اعداد طبیعی اول و B مجموعه اعداد طبیعی مرکب و باشد، آنگاه A ، B و C یک افراز روی مجموعه اعداد طبیعی است.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۲
۳۷۶	مدرسه A سه برابر مدرسه B دانش‌آموز دارد. ۳۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه A و ۱۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه B معدلی بالای ۱۸ دارند، اگر همه دانش‌آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آن‌ها را انتخاب کنیم؛ الف) با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسه A و با چه احتمالی از مدرسه B است؟ ب) با چه احتمالی فرد انتخابی، معدلی بالای ۱۸ دارد؟	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۲
۳۷۷	دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره سبز و ۳ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۴ مهره سبز و ۶ مهره آبی است. از ظرف اول مهره‌ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره سبز است؟	۱/۵	دی ۱۴۰۱

۳۷۸	چهار ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۰ مهره قرار دارد که ۶ تای آنها قرمز است. در ظرف دوم همه مهره‌ها قرمزند. در ظرف سوم ۱۲ مهره قرار دارد که ۴ تای آنها قرمز هستند. و در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرفها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم، احتمال اینکه مهره انتخابی قرمز باشد چقدر است؟	۱/۵	شماره ۱۴۰۱
۳۷۹	دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول مهره‌ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟	۲	شماره ۱۴۰۱
۳۸۰	۴ ظرف یکسان داریم. در ظرف اول ۱۴ مهره قرار دارد که شامل ۴ مهره قرمز است. در ظرف دوم همه مهره‌ها قرمزند و ظرف سوم ۸ مهره دارد که شامل ۶ مهره قرمز است. در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرفها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال آن که مهره انتخابی قرمز باشد چقدر است؟	۱/۵	شماره ۱۴۰۰
۳۸۱	دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول مهره‌ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟	۱/۵	شماره ۱۴۰۰
۳۸۲	اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰/۰۸ و نوزاد دختر ۰/۰۳ باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد. با چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟	۲	شماره ۱۴۰۰
۳۸۳	سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره قرمز و ۳ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۴ مهره آبی و ظرف سوم شامل ۶ مهره قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرفها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال آن که مهره انتخابی آبی باشد چقدر است؟	۱/۵	شماره ۹۹
۳۸۴	در هر قسمت، عبارت مناسب را انتخاب کنید. الف: در پیشامد A, B را گوییم هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تاثیری نداشته باشد. (مستقل - ناسازگار - سازگار) ب: احتمال وقوع پیشامد A به شرط اینکه بدانیم پیشامد B رخ داده است، به صورت نمایش داده می‌شود ($P(A - B), P(A B), P(B A)$)	۰/۵	شماره ۹۹
۳۸۵	اگر احتمال انتقال نوعی بیماری عفونی به نوزاد پسر ۰/۰۷ و نوزاد دختر ۰/۰۴ باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشند، با چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟	۱	شماره ۹۹
۳۸۶	دو جعبه داریم. درون یکی از آنها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آنها معیوب است و درون دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب هستند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟	۱/۲۵	شماره ۹۹



۳۸۷	اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۸٪ و به دختر ۳٪ باشد و خانواده‌ای قصد بچه دار شدن را داشته باشند، با چه احتمالی نوزاد آن‌ها به بیماری خاص مبتلا خواهد شد؟	۲ خرداد ۹۹ خ
۳۸۸	اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۸٪ و نوزاد دختر ۳٪ باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد، با چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری منکور مبتلا خواهد بود؟	۲ خرداد ۱۴۰۰
۳۸۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. دو پیشامد A و B از هم مستقل هستند هرگاه باهم رخ ندهند.	۰/۲۵ دی ۹۸
۳۹۰	فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۴۰ درصد مرد و ۶۰ درصد زن باشند و احتمال شیوع یک بیماری خاص در این گروه به ترتیب ۳ درصد و ۵ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟	۱/۲۵ دی ۹۸
۳۹۱	دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۷ مهره آبی و ۵ مهره قرمز است و ظرف دوم ۶ مهره آبی و ۸ مهره قرمز است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره آبی است.	۱/۵ شهریور ۹۸
۳۹۲	در جای خالی گزینه مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید. دو پیشامدی که باهم رخ ندهند، دو پیشامد (مستقل، ناسازگار) هستند.	۰/۲۵ خرداد ۹۸
۳۹۳	سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره سبز و ۴ مهره آبی است، ظرف دوم شامل ۷ مهره سبز و ۳ مهره آبی است. ظرف سوم شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب و یک مهره از آن بیرون می‌آوریم با چه احتمالی این مهره آبی است؟	۱/۷۵ خرداد ۹۸
۳۹۴	یک سکه را پرتاب می‌کنیم اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را باهم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال این که دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود، چقدر است؟	۱/۵ دی ۹۷

یادداشت ضروری دانش‌آموز:

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

ریاضی ۳

math-pilevar.ir



درس

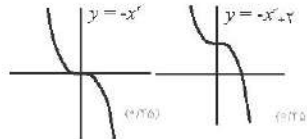
۱

توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

۱- ثابت صفحه ۷

کلمه «ثابت» یا هر مثالی از تابع ثابت نمره لحاظ گردد.

۲- تابع اکیداً نزولی است. (۰/۲۵)



توجه ۱: د صورتی که دانش آموز از کلمه «نزولی» استفاده کند، نمره تعلق گیرد.

توجه ۲: با رسم شکل نهایی نمره کامل شکل لحاظ شود.

۳- ۲ (۰/۲۵) (صفحه ۱۰)

۴- (صفحه ۵)



۵- الف) درست (۰/۲۵) ب) نادرست (۰/۲۵)

۶- درست

۷- الف) درست (ب) نادرست

۸- الف) درست (ب) درست

۹- درست

۱۰- پایین‌تر

۱۱- الف) درست (ب) نادرست

۱۲- پایین

۱۳- الف: درست

۱۴- نادرست

۱۵- نادرست

۱۶- یکتا

۱۷- صعودی

۱۸- نادرست

۱۹- ثابت

۲۰- درست

یادداشت ضروری دانش آموز:



درس

۲

ترکیب توابع

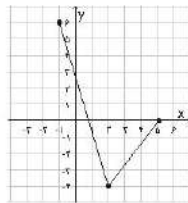
$$D_{f(\frac{1}{x})} \Rightarrow -1 < \frac{x}{4} \leq 3 \Rightarrow D_{f(\frac{1}{x})} = (-2, 6]$$

-۳۲

برد تغییر نمی‌کند.

-۳۳ الف) رسم دقیق نمودار

ب) $[-1, 5]$



$$g \circ f(x) = \{(0, 4), (2, 7), (5, 0)\}$$

-۳۴

-۳۵ پ

$$x=3 \Rightarrow 2(3)-2=4 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{4}+1} = \frac{4}{3}$$

-۳۶

درس ۲

ترکیب توابع

-۳۷ درست

-۳۸

مرحله ۱
$f(x) - 2 = (x-1)^2 - 2$
مرحله ۲
$f(x+1) - 2 = x^2 - 2$
مرحله ۳
$-f(x+1) + 2 = -x^2 + 2$

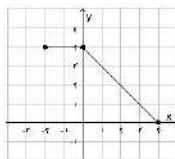
$$\text{الف) } g(f(1)) = g(2) = -2$$

-۳۹

$$\text{ب) } (f+g)(0) = -1 + 3 = 2$$

$$\Rightarrow (f((f+g)(0))) = f(2) = -5$$

-۴۰



$$D_f = [1, +\infty), \quad D_g = \mathbb{R}$$

-۴۱

-۲۱ درست صفحه ۲۱

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq -1 \mid \sqrt{x+1} \in \mathbb{R} - \{1\}\}$$

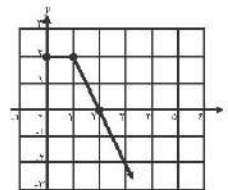
-۲۲

$$\sqrt{x+1} \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$$

$$D_{f \circ g} = [-1, 0) \cup (0, +\infty) \quad \text{یا} \quad [-1, +\infty) - \{0\}$$

-۲۳ (۰/۵)

الف)



$$\text{ب) } g(f(0)) = g(2) = 0$$

(صفحه ۲۳)

-۲۴ نادرست (۰/۵)

$$-\frac{1}{3} \quad (۰/۵)$$

-۲۶

$$D_g = [0, 5], \quad R_g = [-4, 6]$$

$$y = \begin{cases} 2 \\ \sqrt{x-3} \end{cases}$$

-۲۷

ص ۱۵

$$f(g(x)) = \frac{g(x)}{2} - 1 \rightarrow \frac{g(x)}{2} - 1 = 4x^2 + 1$$

-۲۸

$$g(x) = 4x^2 + 4$$

ص ۲۲

$$\text{الف) } D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x-1 \geq -1\} = [0, +\infty)$$

-۲۹

$$\text{ب) } f(g(x)) = \sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{x}$$

$$\{-1, 4\}$$

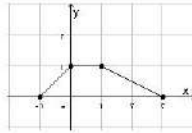
-۳۰

$$\text{الف) } D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

-۳۱

$$= \{x \in [-3, +\infty) \mid \sqrt{x+3} \in \mathbb{R}\} = [-3, +\infty)$$

$$\text{ب) } (g \circ f)(1) = g(2) = \sqrt{6}$$



-۵۳

الف) $D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} | 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\}$
 $= (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

ب) $g \circ f(2) = 1$

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$

-۵۴

$= \{x \geq 1 | \sqrt{x-1} \neq \pm 1\} = [1, 5) \cup (5, +\infty)$

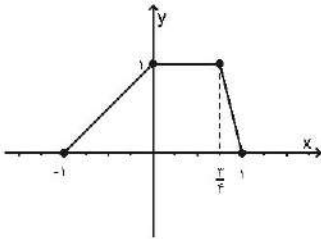
-۴۲ درست

الف) $f \circ g(-1) = f(g(-1)) = f(-3) = 1$

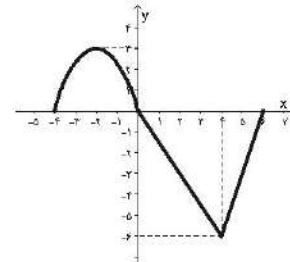
-۴۳

ب) $3t - 1 = -4 \Rightarrow t = -1$

پ) $[-2, +\infty)$



-۵۵



-۴۴ الف

ب) $D = [-4, 6]$

الف) $D_f = [1, +\infty)$, $D_g \in \mathbb{R}$

-۵۶

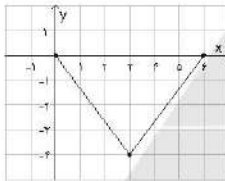
$D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$

$= \{x \in \mathbb{R} | 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\} \Rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$f(g(x)) = 2g(x) - 4 = 2x^2 - 6x + 14$

-۴۵

$\Rightarrow g(x) = x^2 - 3x + 7$



-۵۷

الف) $D_{g \circ f} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$

-۴۶

$= \{x \in (-\infty, 2] | \sqrt{4-2x} \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 2]$

ب) $g \circ f(2) - \frac{f}{g}(0) = -1 - (-2) = 1$

-۵۸ نادرست

الف) $D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$

-۵۹

$= \{x \in [-6, +\infty) | \sqrt{x+6} \in \mathbb{R}\} = [-6, +\infty)$

ب) $f(x) = x^2 - 5$ یا $[-\infty, 0]$

-۴۷ الف) $[-2, 8]$ ب) ۵

الف) $D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$

-۴۸

$= \{x \in [-6, +\infty) | \sqrt{x+6} \in \mathbb{R}\} = [-6, +\infty)$

-۴۹ نادرست

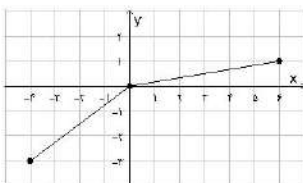
$D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$

-۶۱

$= \{x \in \mathbb{R} | 3x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$

-۵۰ نادرست

-۵۱ درست



-۶۲

الف) $D_f = [1, +\infty)$, $D_g = \mathbb{R}$

-۵۲

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$

$= \{x \in \mathbb{R} | 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\} \Rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

ب) $f(g(x)) = \sqrt{2x^2 - 2}$



درس

۳

تابع وارون

۶۹- نادرست

$$۲-۷۰$$

$$\sqrt[3]{x}-۷۱$$

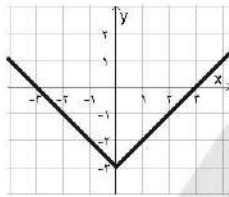
$$۲-۷۲$$

۷۳- نادرست

۷۴- الف

$$۱) (g \circ f)(-۱) = g(۱) = -۵$$

$$۲) (g^{-1} \circ f^{-1})(۲) = g^{-1}(۰) = -۴$$



ب)

۷۵- درست

$$-۵ - \sqrt{3x+1} = y \Rightarrow 3x+1 = (y+5)^2 \quad -۷۶$$

$$\Rightarrow x = \frac{(y+5)^2 - 1}{3} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{(x+5)^2 - 1}{3}$$

$$D_{g^{-1}} = (-\infty, -5)$$

$$۷۷- الف) y = \sqrt{x+2} \Rightarrow y^2 = x+2$$

$$\Rightarrow x = y^2 - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 2$$

$$ب) D_{f^{-1}} = [2, +\infty)$$

$$f(x) = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow y-1 = (x-2)^2$$

$$x-2 = \pm \sqrt{y-1} \Rightarrow x = \sqrt{y-1} + 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2$$

$$۷۸- f \circ g(x) = \frac{-\lambda \times \left(\frac{3-\sqrt{x}}{\lambda}\right) + 3}{2} = \frac{-3 + \sqrt{x} + 3}{2} = x$$

$$g \circ f(x) = \frac{3-2\left(\frac{-\lambda x + 3}{\lambda}\right)}{\lambda} = \frac{3 + \lambda x - 3}{\lambda} = x$$

۶۳- روش اول:

$$(g \circ f)^{-1}(y) = \overbrace{(f^{-1} \circ g^{-1})(y)}^{(۰/۲۵)} = \overbrace{f^{-1}(y)}^{(۰/۲۵)} = \overbrace{3}^{(۰/۲۵)}$$

روش دوم:

$$(g \circ f)(x) = y \Rightarrow \underbrace{\left((1 + \sqrt{x-2})^3 - 1\right)}_{(۰/۲۵)} = y \Rightarrow \underbrace{x}_{(۰/۲۵)} = 3$$

روش سوم:

$$(g \circ f)(x) = \underbrace{\left((1 + \sqrt{x-2})^3 - 1\right)}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{(g \circ f)^{-1}(x)}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\left(\sqrt[3]{x+1} - 1\right)^3 + 2}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)^{-1}(y) = 3$$

روش چهارم:

$$(g \circ f)^{-1}(x) = \underbrace{(f^{-1} \circ g^{-1})(x)}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\left(\sqrt[3]{x+1} - 1\right)^3 + 2}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{x=y} \underbrace{3}_{(۰/۲۵)}$$

۶۴- درست (۰/۲۵) (صفحه ۲۵)

$$۶۵- y = \sqrt{x+2} - 1 \Rightarrow y+1 = \sqrt{x+2} \Rightarrow (y+1)^2 = x+2$$

$$\Rightarrow (y+1)^2 - 2 = x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x+2)^2 - 2 \quad (۰/۲۵)$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = [-1, +\infty) \quad (۰/۵) \quad (صفحه ۲۹)$$

$$۶۶- y = -x^2 - 2 \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{-y-2}$$

$$(۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{-x-2}$$

$$D_{f^{-1}} = (-\infty, -2] \quad (۰/۵)$$

$$۶۷- f(x) = \underbrace{(x+2)^2 - 1}_{(۰/۲۵)} \rightarrow y+1 = \underbrace{(x+2)^2}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{x \geq -2}$$

$$\sqrt{y+1} = x+2 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 2$$

$$(۰/۲۵)$$

$$\rightarrow D_{f^{-1}} = [-1, +\infty)$$

$$(۰/۲۵)$$

(صفحه ۲۹)

۵-۶۸



-۷۹

$$f(x) = -\frac{y}{y}x - 3 = y \Rightarrow -\frac{y}{y}x = 3 + y$$

$$\Rightarrow x = -\frac{3y + 6}{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{3x + 6}{y}$$

-۸۰

$$f^{-1}(x) = 8x + 24 \Rightarrow f^{-1}(5) = 64$$

$$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$g^{-1} \circ f^{-1}(x) = g^{-1}(64) = \sqrt[3]{64} = 4$$

-۸۱ درست

-۸۲

$$f \circ g(x) = f\left(\frac{x+4}{3}\right) = 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 = x$$

$$g \circ f(x) = g(3x - 4) = \left(\frac{3x - 4 + 4}{3}\right) = x$$

-۸۳

$$g^{-1} \circ f^{-1}(5) = g^{-1}(64) = 4$$

یادداشت ضروری دانش آموز:

درس ۳

تایع وارون

درس

۱

تناوب و تانژانت

$$c = \frac{4 + (-2)}{2} = 1$$

$$|a| = \frac{4 - (-2)}{2} = 3 \Rightarrow a = -3$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2 \quad \begin{cases} \max = |a| + c = 5 \\ \min = -|a| + c = -1 \end{cases} \quad -92$$

$$\left. \begin{aligned} |b| &= \frac{2\pi}{T} = \pi \Rightarrow b = \pm\pi \\ |a| &= \frac{4 - (-4)}{2} = 4 \Rightarrow a = \pm 4 \\ c &= \frac{4 + (-4)}{2} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = \pm 4 \sin(\pm \pi x) \quad -93$$

به هر کدام از پاسخ‌های یافته شده توسط دانش آموز نمره کامل تعلق گیرد.

$$|a| = \frac{2 - (-2)}{2} = 2 \Rightarrow a = -2 \quad -94$$

$$|b| = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$$c = \frac{2 + (-2)}{2} = 0 \Rightarrow f(x) = -2 \cos x$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \lambda\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{\lambda} \quad -95$$

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

$$\max = |a| + c = 5 = |a| + 2 \Rightarrow a = \pm 3$$

$$y = \pm 3 \sin\left(\frac{1}{\lambda}x\right) + 2$$

نوشتن یک معادله سینوسی کافی است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{4} \quad -96$$

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

$$\max = |a| + c = 5 = |a| + 3 \Rightarrow a = \pm 2$$

$$y = \pm 2 \cos\left(\frac{1}{4}x\right) + 3$$

نوشتن یک معادله سینوسی کافی است.

$$\text{الف) } \min = -|a| + c = -\lambda \quad -97$$

$$\max = |a| + c = \lambda$$

۸۴- نادرست صفحه ۳۹

$$\begin{cases} |a| + c = \frac{4}{3} \\ -|a| + c = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{\max + \min}{2} \\ c = \frac{\max - \min}{2} \end{cases} \Rightarrow c = 1, |a| = \frac{1}{3} \quad -85$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} \sin(2x) + 1 \quad \text{یا} \quad y = \frac{1}{2} \sin(-2x) + 1 \quad (0.75)$$

$$\tan \alpha > \cos \alpha \quad (0.75) \quad -86$$

۸۷- الف) روش اول:

$$|a| = \frac{\max - \min}{2} = \frac{9 - 3}{2} = 3 \quad c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{9 + 3}{2} = 6$$

روش دوم:

$$\begin{cases} |a| + c = 9 \quad (0.75) \\ -|a| + c = 3 \quad (0.75) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 6 \quad (0.75) \\ |a| = 3 \quad (0.75) \end{cases}$$

$$\text{ب) } T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{4} \quad (0.5) \quad \text{صفحه ۴۱}$$

$$|a| + 3 = 6 \Rightarrow |a| = 3 \quad -88$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow T = 4 \quad \max: |a| + c = 1 + \sqrt{2} \quad -89$$

$$\min: -|a| + c = -1 + \sqrt{2} \quad \text{ص ۳۵}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow b = \pm \frac{1}{4} \quad -90$$

$$|a| = \frac{3 - (-1)}{2} = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

با توجه به نمودار تابع، $ab < 0$ پس $ab = -1$

$$4T = \frac{4\pi}{\frac{1}{4}} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 4\pi \Rightarrow T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow b = \pm 1 \quad -91$$



۱۱۰-π

$$\min = -|a| + c = -\pi - 2$$

۱۱۱-

$$\max = |a| + c = \pi - 2$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|} = 4\pi$$

$$\text{الف) } T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

۱۱۲-

$$\min = -|3| + 2 = -1$$

$$\max = |3| + 2 = 5$$

$$\text{ب) } 2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

یادداشت ضروری دانش آموز:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|} = 4\pi$$

$$\text{ب) } \sin 45^\circ = \frac{1 - \cos 90^\circ}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$$

۹۸-ℝ

$$\text{الف) } \min = -|a| + c = -1 + \sqrt{2}$$

۹۹-

$$\max = |a| + c = 1 + \sqrt{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{2}|} = 4$$

۱۰۰-دوست

۱۰۱-π

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

۱۰۲-

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{-1 - 7}{2} = -4$$

$$\max = |a| + c \Rightarrow -1 = |a| - 4 \Rightarrow a = \pm 3$$

$$y = \pm 3 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 4$$

۱۰۳-صعودی

$$\min = -|a| + c = -5, \quad \max = |a| + c = 1$$

۱۰۴-

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

۱۰۵-نادرست

$$\min = -|a| + c = -\pi + 1$$

۱۰۶-

$$\max = |a| + c = \pi + 1$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|-\frac{1}{2}|} = 4\pi$$

$$\max = |-3| + 1 = 4$$

۱۰۷-

$$\min = -|-3| + 1 = -2$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2\pi|} = 1$$

۱۰۸-نادرست

$$\min = -|a| + c = -1$$

۱۰۹-

$$\max = |a| + c = 3$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|-\frac{\pi}{2}|} = 4$$



درس

۲

معادلات مثلثاتی

ص ۴۷

$$\cos 2x = \cos x \Rightarrow 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \quad -121$$

درست -122

$$\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \quad -123$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1 - 2\sin^2 x - 3\sin x + 4 = 0 \quad -124$$

$$\rightarrow -2\sin^2 x - 3\sin x + 5 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{5}{2} \quad \text{غ.ق.ی} \\ \sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

درس ۲

معادلات مثلثاتی

$$\sin 2x = \sin x \quad -125$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \rightarrow x = 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi + (\pi - x) \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$1 - 2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0 \quad -126$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} \sin \theta = \sqrt{2} \quad -127$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ, \quad \theta = 135^\circ$$

دو مثلث می‌توان رسم کرد.

$$2\sin 2x \cos 2x = \sin 4x = \sin 4(7/5^\circ) = \sin 28^\circ = \frac{1}{2} \quad -128$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \quad -129$$

-113

$$2\cos^2 x - 1 - 13\cos x - 6 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 13\cos x - 7 = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \cos x = +7 \quad \text{غ.ق.ی} \end{cases}$$

$$\frac{1}{4} - 114 \quad (0, 2\pi) \quad (\text{صفحه ۴۳})$$

-115 روش اول:

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (0, \pi)$$

$$x \in [0, \pi) \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad (0, \pi)$$

روش دوم:

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad (1, 2\pi)$$

(صفحه ۴۴)

-116 نادرست (0, 2\pi)

$$\frac{17}{25} - 117 \quad (0, 2\pi)$$

$$\sin 4x = \frac{1}{2} \Rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24} \quad -118$$

$$4x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{24} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{24}, \frac{17\pi}{24}$$

-119 نادرست

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \quad -120$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (0, \pi)$$

$$\begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (0, \pi)$$



$$\sin^2 22/5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \quad -138$$

$$\Rightarrow \sin 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } 2 \times (\sin x \cos x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ 2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \end{cases} \end{aligned}$$

$$2 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \quad -139$$

$$\Rightarrow (\cos x)(2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\sin x - 1 + 2 \sin^2 x = 0 \quad -140$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \\ \sin x = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

یادداشت ضروری دانش آموز:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{4} \quad -141$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2 \cos^2 x - 9 \cos x - 5 = 0 \quad -142$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \\ \cos x = 5 \quad \text{غ.ق.ی} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2 \sin^2 x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^2 x = \sin^2 \frac{\pi}{4} \quad -143$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 \quad -144$$

$$= 2 \times \left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = 2 \times \frac{25}{169} - 1 = -\frac{119}{169}$$

$$\text{الف) } \cos x = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad -145$$

$$\text{ب) } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0 \quad -146$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \\ \text{یا} \\ \sin x = -\frac{3}{4} \quad \text{غ.ق.ی} \end{cases}$$

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \quad -147$$

$$1 - 2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha + 1 = 1 \quad -148$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \alpha = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

درس

۱

حد بی نهایت و حد در بی نهایت

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{3(x-1)}^{(0/0)}}{\underbrace{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}_{(0/0)}} = \frac{3}{4}$$

به روش های هم‌ارزی و هویتال نمره تعلق نمی‌گیرد.

ص ۵۷

۱۴۹- خیر زیرا تابع $f(x) = \frac{1}{[x]-1}$ در همسایگی راست $x=1$ تعریف نشده است.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = 3$ -۱۵۰

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{|\sin x|} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 4x^5}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5}{x^3} = +\infty$

-۱۵۱ $\frac{2}{3}$

الف) $-\infty$

-۱۵۲

ب) $+\infty$

پ) -2

۱۵۳- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{4}$

۱۵۴- درست

الف) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \times \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{6}$ -۱۵۵

ب) $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{\Delta x} = -\frac{1}{\Delta}$

۴-۱۵۶

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ -۱۵۷

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

۱۴۱- صفر صفحه ۵۰ و ۵۱

-۱۴۲

الف) $\frac{-1}{2}$ ب) $\frac{1}{0^-} = -\infty$ (۰/۰) (۰/۰)

پ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+3x+2)}{\sqrt{x}+1} \times \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x+2)(\sqrt{x}-1)}{x+3} = \frac{3}{2}$ (۰/۰) (۰/۰)

توجه: در قسمت «ب» در صورتی که دانش‌آموز جواب آخر را نوشته است نمره کامل تعلق گیرد.

-۱۴۳

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = 2$ (۰/۰) (صفحه ۵۲)

ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)^4} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ (۰/۰) (صفحه ۵۷)

ج) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-[x]}{x-3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ (۰/۰) (صفحه ۵۷)

د) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3+7x-9}{2x^3-4x^2+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3}{2x^3} = -3$ (۰/۰) (صفحه ۶۴)

۱۴۴- درست (۰/۰)

۱۴۵- صفر (۰/۰)

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ (۰/۰) (۰/۰) -۱۴۶

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x-4x^2}{3x+2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2}{2x^2} = -2$ (۰/۰) (۰/۰)

۱۴۷- الف) $\frac{-3}{0^+}$ ب) $\frac{+\infty}{0^+}$ ص ۶۲

الف) $\frac{3}{0^+} = +\infty$ (۰/۰) (۰/۰) -۱۴۸

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} \times \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1-4}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}$ (۰/۰) (۰/۰)



$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)(x+\sqrt{x+6})}{(x+2)(x-3)} = \frac{24}{5}$$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{x-3} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

-۱۶۷ $x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow f(3)=2 \times 3^2 - 5 \times 3 + 1 = 4$

-۱۶۸ الف) $\frac{6}{0^+} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}} \times \frac{2+\sqrt{x+1}}{2-\sqrt{x+1}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)(2+\sqrt{x+1})}{4-(x+1)} = -24$

پ) $\frac{1}{-\infty} = 0$

ت) $\frac{2}{3}$

-۱۶۹ الف) $\frac{[-\frac{1}{3}]}{|3 \times (-\frac{1}{3}) + 1|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

ب) $\frac{2 \times 5}{5^- - 5} = \frac{10}{0^-} = -\infty$

پ) $9 + \frac{0}{\infty} = 9 + 0 = 9$

-۱۷۰ الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)(2+\sqrt{x+1})}{(2-\sqrt{x+1})(2+\sqrt{x+1})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)(2+\sqrt{x+1})}{-(x-3)} = -24$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{[x]-3}{|2x-1|} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{6x^3} = \frac{1}{3}$

(الف) -۱۷۱

۲ (۱)

-∞ (۲)

ب) تابع در $x=1, x=-1$ مشتق پذیر نیست.

-۱۷۲ الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = +\frac{1}{6}$$

ب) $\frac{-1}{0^-} = +\infty$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$

-۱۵۸ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(2x-1)} = \frac{1}{5}$

(x+1) -۱۵۹

-۱۶۰ الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x)(2x-1)}{(2x+1)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x)}{(2x+1)} = \frac{1}{4}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{\sin^2 x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

-۱۶۱ الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})} = \frac{1}{6}$$

ب) $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^4 + 5x^2}{2x^2 + 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2}{2x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^0 = -2(-\infty)^0 = -\infty$

-۱۶۲ الف) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2-\sqrt{x-1})(2+\sqrt{x-1})}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})}$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})} = -\frac{1}{4}$$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|2x+1|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x-5}} = \frac{3+0}{0^- - 5} = -\frac{3}{5}$

-۱۶۳ درست

-۱۶۴ الف) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2-\sqrt{x-1})(2+\sqrt{x-1})}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})}$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})} = -\frac{1}{4}$$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{x-3} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

-۱۶۵ صفر

-۱۶۶ الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)(x+\sqrt{x+6})}{x^2-x-6}$



$$\text{پ) } \begin{cases} \text{الف) } -2 \\ \text{ب) } +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^7}{2x^7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3}{2}x^0 = -\infty \quad -173$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{(x-4)(x+4)} \times \frac{2 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} \quad -174$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{(x-4)(x+4)(2 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-1}{(x+4)(2 + \sqrt{x})} = -\frac{1}{32}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x} = \frac{1}{1 - 1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

-175 درست

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{x^2 - 2x - 3} \quad -176$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{(x+1)(x-3)} = -1$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

-177 -5

$$\text{الف) } \frac{2-3}{0^-} = +\infty \quad -178$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} (x+3)(\sqrt{x+1}+2) = 24$$

برداشت ضروری داشتم آموز:



درس

۱

آشنایی با مفهوم مشتق

۱۸۹- $A(۴, ۲۵) \quad \frac{۳}{۵} = \frac{y_B - ۲۵}{۵ - ۴} \Rightarrow B(۵, ۲۶/۵)$

شیب	۱	۰	$\frac{۱}{۴}$	-۲
نقطه	C	B	D	A

x	d	b	c	a
f'(x)	۰	۰.۵	۲	-۰.۵

۱۹۱- $f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - ۲ + ۳}{x + 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = ۳$

۱۹۳- $f'(۴) = m_{AB} \Rightarrow ۱/۵ = \frac{y_B - ۲۴}{۱} \Rightarrow y_B = ۲۵/۵$
 $\frac{y_C - ۲۴}{-۱} = ۱/۵ \Rightarrow y_C = ۲۲/۵$
 $A(۴, ۲۴) \quad B(۵, ۲۵/۵) \quad C(۳, ۲۲/۵)$

۱۹۴- $f'(-۱) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{۱ - ۲x^2 + ۱}{x + 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{۲(1-x)(1+x)}{x + 1} = ۴$

یادداشت ضروری دانش آموز:

۱۷۹-

$\lim_{x \rightarrow ۲} \frac{\Delta(f(x) - f(۲))}{x - ۲} = \Delta f'(۲) \quad (۰/۰) \Rightarrow \overbrace{f'(۲) = ۲}^{[۰/۲۵]} \Rightarrow \overbrace{y = ۲x - ۱}^{(۰/۵)}$

۱۸۰- روش اول:

فرض کنیم $y = ax + b$ خط مماس بر منحنی f در نقطه $(۲, ۴)$ واقع بر آن باشد:

$\lim_{x \rightarrow ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = ۳ \Rightarrow \overbrace{f'(۲) = ۳}^{(۰/۲۵)} = a = ۳$

$y = ۳x + b \rightarrow \overbrace{b = -۲}^{(۰/۲۵)} \Rightarrow y = ۳x - ۲$

روش دوم:

$\lim_{x \rightarrow ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = ۳ \Rightarrow \overbrace{f'(۲) = ۳}^{(۰/۲۵)} = m = ۳$

$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{(۲/۴)} y - ۴ = ۳(x - ۲) \quad (۰/۵)$

(صفحه ۷۶)

۱۸۱- الف) $\lim_{x \rightarrow ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = f'(۲) = ۲$
 ب) $m_A > m_B$

۱۸۲- الف) A ب) C

۱۸۳- پ

x	d	b	c	a
f'(x)	۰	۰.۵	۲	-۰.۵

۱۸۵- $\frac{f(۴) - f(۳)}{۴ - ۳} = ۱.۵ \Rightarrow B(۳, ۲۲/۵)$

$\frac{f(۵) - f(۴)}{۵ - ۴} = ۱.۵ \Rightarrow C(۵, ۲۵/۵)$

E	B	D	A	نقطه
-۳	-۱	۰	۱	شیب

۱۸۷- الف) $f'(۱) = \frac{۲-۰}{۰-۱} = -۲$ ب) $m_B < m_C$

۱۸۸- $f'(x) = ۶x - ۲ \Rightarrow f'(۲) = ۶ \times ۲ - ۲ = ۱۰$, $f(۲) = ۹$
 $y - ۹ = ۱۰(x - ۲) \Rightarrow y = ۱۰x - ۱۱$

درس

۲

مشتق پذیری و پیوستگی

(صفحه ۷۹)

$$f'(x) = \underbrace{3(x-6)^2}_{(0/25)} + \underbrace{\frac{5(\sqrt{2x-1})}{2\sqrt{2x-1}}}_{(0/25)} \cdot \underbrace{(5x+3)}_{(0/25)} \quad (0/25)$$

(صفحه ۸۸)

$$f'(x) = -2x + 6 \rightarrow f'(2) = 2 \quad (0/25)$$

$$d: (2, 2), (a, 0): 2 = \frac{0-3}{a-2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad (0/25)$$

$$\text{الف)} \quad f'(x) = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}_{(0/25)} (x^5 - 2x) + \underbrace{(4x^3 - 2)(2\sqrt{x} + 1)}_{(0/25)} \quad (0/25)$$

$$\text{ب)} \quad g'(x) = \frac{\underbrace{3}_{(0/25)} (x^5 - x + 1) - \underbrace{(5x^5 - 1)(3x + 1)}_{(0/25)}}{(x^5 - x + 1)^2} \quad (0/25)$$

(0/25) -۶-۲۰۳

-۲۰۴ ص ۸۴

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \quad (0/25)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2} \quad (0/25)$$

$$\text{الف)} \quad g'(x) = \frac{\underbrace{4 \times 2}_{(0/25)} \underbrace{(2x-1)^2}_{(0/25)} \underbrace{(x^3+8)}_{(0/25)} - \underbrace{3x^2}_{(0/25)} \underbrace{(2x-1)^2}_{(0/25)}}{(x^3+8)^2} \quad (0/25)$$

$$\text{ب)} \quad f'(x) = \frac{\underbrace{2}_{(0/25)}}{\underbrace{3 \sqrt[3]{(2x+1)^2}}_{(0/25)}} \quad (0/25)$$

-۲۰۶ نادرست

۱۹۵- نادرست صفحه ۷۸

-۱۹۶

$$h'(x) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{\sqrt{1-3x}} \right)^5 \left(\frac{\underbrace{-3}_{(0/25)}}{\underbrace{2\sqrt{1-3x}}_{(0/25)}} (y+x) - \underbrace{(1)(\sqrt{1-3x})}_{(0/25)} \right) \quad (0/25)$$

۱۹۷- روش اول: در $x=2$ پیوسته است. (0/25)

$$f'(x) = \begin{cases} 4x & x < 2 \\ 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right) & x > 2 \end{cases} \Rightarrow f'_+(2) = 1, f'_-(2) = 8 \quad (0/25)$$

پس در $x=2$ مشتق پذیر نیست. (0/25)

صفحه ۹۱

روش دوم:

در $x=2$ پیوسته است. (0/25)

$$\begin{cases} f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2\sqrt{x-1} + 6}{x-2} = 1 \quad (0/25) \\ f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2x^2) - 8}{x-2} = 8 \quad (0/25) \end{cases}$$

پس در $x=2$ مشتق پذیر نیست. (0/25)

ترجمه: اگر دانش آموز از روش دیگر تعریف مشتق استفاده کند به تناسب نمره تعلق گیرد.

۱۹۸- نادرست (0/25)

۱۹۹- روش اول:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x-2} \quad (0/25)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = -4 \quad (0/25)$$

روش دوم:

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(h^2 + 4h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|(2+h)^2 - 4| - 0}{h} \quad (0/25)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h^2 + 4h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(h^2 + 4h)}{h} = -4 \quad (0/25)$$



$$f'(x) = \frac{\frac{9(x+1) - 1(9x-2)}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}}$$

۲۱۷- تابع در $x=1$ پیوسته است.

$$f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$$

$$\left. \begin{aligned} f'_+(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 3 - 4}{x - (-1)} = -2 \\ f'_-(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x + 2 - 4}{x - (-1)} = 2 \end{aligned} \right\} f'(-1) \text{ موجود نیست.}$$

$$f'(x) = \delta(x^3 + 2x - 1)^2(2x + 2) \quad -218 \text{ الف)}$$

$$g'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)(x^2 + 1) + (\sqrt{3x+2})(2x^2)$$

$$3f'(1) + 2g'(1) = 9 + 10 = 19 \quad -219$$

۲۲۰- تابع در $x=0$ پیوسته است.

$$\left. \begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1 \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3-0}{x-0} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

$f'(0)$ موجود نیست.

$$f'(x) = \delta(x^3 + 2x + 1)^2(2x + 2) \quad -221 \text{ الف)}$$

$$g'(x) = \frac{1 \times \sqrt{3x+2} - \frac{3x}{2\sqrt{3x+2}}}{(\sqrt{3x+2})^2}$$

$$\left. \begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = -1 \\ f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - 1}{x - 1} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1)$$

$f'(1)$ موجود نیست.

$$f'(x) = \frac{9\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{(\sqrt{x})^2} \quad -223 \text{ الف)}$$

$$g'(x) = 2x(2x-5)^2 + 3 \times 2 \times (2x-5)^2(2x^2-4)$$

$$40 \quad -224$$

$$f'(x) = \delta\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^2 \left(\frac{2x(3x-1) - 3x^2}{(3x-1)^2}\right) \quad -225 \text{ الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - f(2)g(2)}{x-2} \quad -207$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \delta f'(2)$$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x^2 + 4) + 3x^2(\sqrt{3x+2}) \quad -208 \text{ الف)}$$

$$g'(x) = \frac{(-14x)(x-2) - (1)(-7x^2+1)}{(x-2)^2}$$

$$h'(x) = 4(2x^5 - 1)^2(10x^4)$$

۲۰۹- الف) خیر

ب) بله، در تمام نقاط بازه $(-\infty, 2)$ مشتق پذیر است.

$$\begin{aligned} \text{پ)} \quad x \geq 2: f(x) &= \sqrt{x-1} + 2 \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'_+(2) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$f(x) = x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1 \quad -210 \text{ الف)}$$

$$g'(x) = 2 \left(\frac{2x-1}{x+1} \right)^2 \left(\frac{2(x+1) - 1(2x-1)}{(x+1)^2} \right)$$

در قسمت الف به سایر روشهای صحیح نمره تعلق گیرد.

۲۱۱- نادرست

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^3 - 1| - 0}{x-1} = 2 \\ \Rightarrow y - 0 &= 2(x-1) \end{aligned} \quad -212$$

$$f'(x) = \frac{-2(x+4) - 1(-2x+3)}{(x+4)^2} \quad -213 \text{ الف)}$$

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(x^3 + 2x) + (2x+2)(\sqrt{3x+1})$$

$$(fg)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = \delta \times 8 + 3(-6) = 22 \quad -214$$

۲۱۵- تابع f در نقطه $x=0$ پیوسته است.

$$\left. \begin{aligned} f'_+(0) &= 3 \\ f'_-(0) &= a \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 3$$

$$-216$$



۲۳۶- تابع در $x = -2$ پیوسته است.

$$\left. \begin{aligned} f'_+(-2) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x^3 - 4|}{x + 2} = 4 \\ f'_-(-2) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x^3 - 4|}{x + 2} = -4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_+(-2) \neq f'_-(-2)$$

$f'(-2)$ موجود نیست.

۲۳۷- الف) $f'(x) = 8 \left(\frac{-3x-1}{x^3+5} \right)^7 \times \left(\frac{-3(x^3+5) - 2x(-3x-1)}{(x^3+5)^2} \right)$

ب) $g'(x) = \left(-\frac{1}{x^3} \right) (\sqrt{3x+2}) + \left(\frac{1}{x} \right) \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \right)$

۲۳۸- الف) $f'(x) = 3(2x)(x^3+1)^2(5x-1) + 5(x^3+1)^3$

ب) $g'(x) = \frac{9(\sqrt{x}) - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) (9x-2)}{(\sqrt{x})^3}$

$$\left. \begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 0}{x - 0} = 0 \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - 0}{x - 0} = 1 \end{aligned} \right\}$$

$\Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow f'(0)$ موجود نیست

درس ۲

مشق پذیری

$$\left. \begin{aligned} f'_+(x) &= 2x+1 \Rightarrow f'_+(1) = 3 \\ f'_-(x) &= 3 \Rightarrow f'_-(1) = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_+(1) = f'_-(1) = 3$$

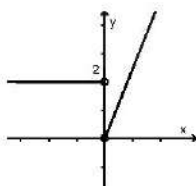
در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر است.

۲۴۱- $y' = -\frac{1}{x^3} (2\sqrt{x}-1)^4 + 4(2\sqrt{x}-1)^3 \times \left(\frac{2}{2\sqrt{x}} - 0 \right) \times \frac{1}{x}$

۲۴۲- الف) در $x = 0$ گوشه‌ای و مشتق ناپذیر است.

ب) $f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$

ج)



۲۴۳- الف) $f'(x) = 5(x^3 - 3x)^4 (4x^2 - 3)$

ب) $g'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \right) (x^3+1) + 3x^3(\sqrt{3x+2})$

۲۲۶- $\left. \begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 0}{x - 0} = 0 \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0)$

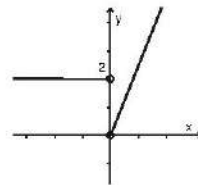
پس $f'(0)$ موجود نیست.

۲۲۷- پیوسته

۲۲۸- الف) تابع f در صفر پیوسته نیست. بنابراین $f'(0)$ موجود نیست.

ب) $f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$

پ)



۲۲۹- الف) $f'(x) = \frac{3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}(3x+1)}{(\sqrt{x})^2}$

ب) $g'(x) = \left(-\frac{1}{x^3} \right) (x^3+5x)^2 + \left(\frac{1}{x} \right) (7(2x+5)(x^3+5x)^2)$

۲۳۰- الف) درست ب) نادرست

۲۳۱- الف) $f'(x) = \frac{(2x-3)(-3x+1) - (-3)(x^3-3x+1)}{(-3x+1)^2}$

ب) $f'(x) = 3(x^3+1)^2(2x)(5x-1) + 5(x^3+1)^3$

۲۳۲- الف) $f'(x) = 8 \left(\frac{-3x-1}{x^3+5} \right)^7 \times \left(\frac{-3(x^3+5) - 2x(-3x-1)}{(x^3+5)^2} \right)$

ب) $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x+3}}$

۲۳۳- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^3 + 3 = 4$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2$

تابع در $x = 1$ حد ندارد، پیوسته نیست. پس مشتق پذیر نیست.

۲۳۴- نادرست

۲۳۵- مماس قائم



$$\text{ب) } g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x) - (-1)\sqrt{x}}{(1-x)^2}$$

۲۴۴- نادرست

۷-۲۴۵

$$\text{الف) } f'(x) = 5 \left(\frac{x}{2x-1} \right)^4 \times \left(\frac{2x-1-2x}{(2x-1)^2} \right)$$

-۲۴۶

$$\text{ب) } g'(x) = 2x(\sqrt{x+1}) + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \times x^2$$

بدراشته ضروری داشت آموز:

درس ۲

مشق پذیری

درس

۳

آهنگ تغییر

-۲۴۷

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{7}{5} \quad -253$$

$$\text{سرعت متوسط} \Rightarrow \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{30 - 10}{5} = 4 \quad -254$$

$$f'(t) = 2t - 1 \Rightarrow f'(2) = 2(2) - 1 = 3$$

$$\text{سرعت متوسط} \Rightarrow \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = 4 \quad -255$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای} \Rightarrow f'(t) = 2t - 1 = 4 \quad t = \frac{5}{2}$$

$$\text{الف)} \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{7}{5} \quad -256$$

$$\text{ب)} \quad f'(49) = \frac{7}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{الف)} \quad \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(8) - h(5)}{8 - 5} = \frac{0 - (75)}{3} = -25 \quad -257$$

$$\text{ب)} \quad h'(t) = -10t + 40 = 35 \Rightarrow t = 0.5$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = 4 \quad -258$$

$$\Rightarrow f'(t) = 2t - 1 = 4 \Rightarrow t = \frac{5}{2}$$

$$d'(t) = -10t + 20 \Rightarrow d'(2) = 0 \quad -259$$

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2 \quad -260$$

$$\Rightarrow m'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} + 6 \times 1^2 = \frac{13}{2}$$

$$\text{الف)} \quad \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{130 - 3}{4 - 1} = \frac{127}{3} \quad -261$$

$$\text{ب)} \quad m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2 \xrightarrow{t=4} \frac{1}{4} + 96$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = 1.4 \quad -262$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = 20(2) \left(1 - \frac{t}{50}\right) \left(-\frac{1}{50}\right) \quad \text{یا} \quad -\frac{4}{5} \left(1 - \frac{t}{50}\right) \quad (0, 5)$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{0 - 20}{50 - 0} = -\frac{2}{5} \quad (0, 25)$$

از برابری آهنگ متوسط و لحظه‌ای نتیجه می‌گیریم $t = 25$

$$\text{الف)} \quad \text{آهنگ متوسط در بازه } [0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2} = 1 \quad (0, 25) \quad -248$$

$$\text{ب)} \quad \text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow 2x - 1 > 1 \Rightarrow x > 0 \quad (0, 25)$$

(صفحه ۱۰۰)

توجه: اگر دانش آموزی جواب بدست آمده در قسمت (ب) را با بازه $[0, 2]$ اشتراک گرفت نمره کامل داده شود.

$$\text{الف)} \quad \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{15}{1} = 15 \quad (0, 25) \quad -249$$

$$\text{ب)} \quad f'(t) = 6t^2 + 1 \Rightarrow f'(2) = 25 \quad (0, 25)$$

$$f'(t) = 2t + 2 \quad (0, 25) \quad -250$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{11 - 3}{2} = \frac{4}{1} = 4 \quad (0, 25)$$

$$2t + 2 = 4 \Rightarrow t = 1 \quad (0, 25)$$

ص ۱۰۰

$$f'(x) = 4x + 5 \Rightarrow f'(2) = 13 \quad -251$$

$$\frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{1 - (-1)}{2} = 1$$

پس آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطه $x = 2$ برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[-2, 0]$ است.

$$\text{سرعت متوسط (الف)} = \frac{h(4) - h(2)}{4 - 2} = \frac{96 - 64}{2} = 16 \quad -252$$

$$\text{ب)} \quad h'(t) = -8t + 40 = 16 \Rightarrow t = 3$$



$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{5} = \frac{1}{5}$$

-۲۶۳

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{28 - 0}{4} = 7$$

-۲۶۴

$$f'(t) = 4t - 1 = 7 \Rightarrow t = 2$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(4) - x(3)}{4 - 3} = \frac{130 - (\sqrt{3} + 54)}{1} = 76 - \sqrt{3}$$

-۲۶۵

برداشت ضروری داشته‌ام:

درس ۳

آهنگ تغییر



درس

۱

اکسترم‌های تابع

۲۷۱- درست

$$f'(x) = -6x^5 + 6 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

۲۷۲-

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'		$-$	$+$	$-$
f		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

پس تابع در بازه $[-1, 1]$ صعودی اکیدا است.

$$f'(2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx$$

۲۷۳-

$$\Rightarrow 3(2)^2 + 2b(2) = 0 \Rightarrow b = -3$$

$$f(2) = 1 \Rightarrow 8 + (-12) + d = 1 \Rightarrow d = 5$$

۲۷۴- درست

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \xrightarrow{f'(x)=0} x = 2, \quad x = -2$$

۲۷۵-

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
f'		$+$	$-$	$+$
f		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

در بازه $(-\infty, -2)$ و $(2, +\infty)$ اکیدا صعودی

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

۲۷۶-

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
f'		$+$	$-$	$+$
f		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

نسبی Max نسبی Min

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \in [-1, 3] \end{cases}$$

۲۷۷-

$$f(-1) = 13$$

$$f(1) = -7 \Rightarrow \min(1, -7)$$

$$f(3) = 45 \Rightarrow \max(3, 45)$$

۲۶۶-

$$f'(x) = 2x^3 - x - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

x	$-\frac{5}{2}$	3
f'	$+$	$-$
f	$\nearrow$	$\searrow$

max

min

طول نقاط max و min هر مورد $\frac{5}{2}$ و جدول $\frac{5}{2}$

۲۶۷- درست (۵/۵) (صفحه ۱۰۶)

۲۶۸- $2 =$ طول مینیمم نسبی $3 =$ طول ماکزیمم نسبی

$4 =$ طول مینیمم مطلق $1 =$ طول ماکزیمم مطلق

(صفحه ۱۱۰)

۲۶۹-

$$f'(x) = 3x^2 - 24 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
f'		$+$	$-$	$+$
f		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

اکیدا صعودی $(-\infty, -3], [3, +\infty)$

(۵/۵)

رسم جدول (۵/۵) نموده

۲۷۰-

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
f'		$-$	$+$	$-$
f		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

نسبی Min

نسبی Max

جدول (۵/۵)

ص ۱۱۲



هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx$$

ب:

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 3 \times 2^2 + 2b(2) = 0 \Rightarrow 12 + 4b = 0 \Rightarrow b = -3$$

$$f(2) = 1 \Rightarrow 2^3 + b(2^2) + d = 1 \Rightarrow 8 + 4b + d = 1 \Rightarrow d = 5$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = -2 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

-۲۸۷

$$f(-2) = (-2)^3 + 2(-2) - 5 = -17 \text{ مقدار min}$$

$$f(1) = 1^3 + 2(1) - 5 = -2 \text{ مقدار max}$$

-۲۸۸ نادرست

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

-۲۸۹

$$f(0) = -9 \text{ min} \quad f(2) = 11 \text{ max}$$

$$f(3) = 0$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
f'		$-$	$+$	$-$
f		$\swarrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		-9	11	
		نسبی Min	نسبی Max	

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx$$

-۲۹۰

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 3 \times 2^2 + 2b(2) = 0$$

$$\Rightarrow 12 + 4b = 0 \Rightarrow b = -3$$

$$f(2) = 1 \Rightarrow 2^3 + b(2^2) + d = 1$$

$$\Rightarrow 8 + 4b + d = 1 \Rightarrow d = 5$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

-۲۹۱

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
f'		$+$	$-$	$+$
f		$\swarrow$	$\searrow$	$\swarrow$
		17	-15	
		نسبی Max	نسبی Min	

$$\text{الف} \quad f(x) = x^3 - 3x + 4 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$$

-۲۹۲

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f(2) = 1 \Rightarrow 4b + d = -7$$

-۲۷۸

$$f'(2) = 0 \Rightarrow b = -3, \quad d = 5$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

-۲۷۹

اکیدا صعودی $(-\infty, -1), (1, +\infty)$

اکیدا نزولی $(-1, 1)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'		$+$	$-$	$+$
f		$\swarrow$	$\searrow$	$\swarrow$

-۲۸۰ درست

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 12 + 4b = 0 \Rightarrow b = -3$$

-۲۸۱

$$f(2) = 1 \Rightarrow 4b + d = -7$$

$$-12 + d = -7 \Rightarrow d = 5$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

-۲۸۲

درس ۱

اکسترمهای تابع

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
f'		$+$	$-$	$+$
f		$\swarrow$	$\searrow$	$\swarrow$
		17	-15	
		نسبی Max	نسبی Min	

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

-۲۸۳

$$f(-1) = 9, \quad f(1) = 5, \quad f(3) = 25$$

$$\max(9, 25) \quad \min(1, 5)$$

-۲۸۴ درست

$$f'(x) = 2ax + b$$

-۲۸۵

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$f(1) = -3 \Rightarrow a + b = -3 \Rightarrow b = -6$$

-۲۸۶ الف: نقطه‌ای به طول c از دامنه تابع f را یک نقطه بحرانی برای تابع f می‌نامیم



x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		نسبی Max	نسبی Min		

نقطه‌ای $(1, 2)$ می‌تیم نسبی و نقطه $(-1, 6)$ ماکزیم نسبی است.

ب) $g(x) = x^3 + 2x - 5 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0$

$g(-2) = (-2)^3 + 2(-2) - 5 = -17$ مطلق min

$g(1) = 1 + 2 - 5 = -2$ مطلق max

$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow 0 = 2a + b \Rightarrow b = -2a$

-۲۹۳

$f(1) = 7 \Rightarrow 7 = a + b \Rightarrow a = -7, b = 14$

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \Rightarrow f'(x) = x^2 + x - 2 = 0$

-۲۹۴

$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \in [-1, 3] \\ x = 1 \end{cases}$

$f(1) = -7, f(-1) = 13, f(3) = 45$

$(1, -7)$ مینیمم مطلق و نقطه $(3, 45)$ ماکزیمم مطلق

الف) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \Rightarrow f'(x) = 0$

-۲۹۵

$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		نسبی Max	نسبی Min		

ب) $\left. \begin{array}{l} f(1) = -7 \\ f(-2) \in [-1, 3] \\ f(-1) = 13 \\ f(3) = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow \min: (1, -7), \max: (3, 45)$

نقطه بحرانی: $(1, -7)$ و $(3, 45)$

بدار داشته ضروری داشتن:



درس

۲

بهینه سازی

$$\underbrace{x - y = \lambda \Rightarrow x = \lambda + y}_{(0,75)}$$

$$\underbrace{s = xy = (\lambda + y)y = y^2 + \lambda y}_{(0,75)}$$

$$s' = 2y + \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{\lambda}{2} \\ x = \frac{\lambda}{2} \end{cases} \quad (0,75)$$

$$2h + 2r + \pi r = \rho \Rightarrow h = \frac{\rho - 2r - \pi r}{2}$$

$$S(r) = \rho r - 2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 \Rightarrow S'(r) = \rho - 4r - \pi r$$

$$S'(r) = 0 \Rightarrow r = \frac{\rho}{4 + \pi}$$

r	$\frac{\rho}{4 + \pi}$
S'	$\begin{matrix} + & 0 & - \end{matrix}$
S	$\nearrow \quad \searrow$



$$x = 2r = \frac{12}{4 + \pi}, \quad h = \frac{\rho - (2 + \pi)\frac{\rho}{4 + \pi}}{2} = \frac{\rho}{4 + \pi}$$

$$x - y = 10$$

$$p = xy = x(x - 10) = x^2 - 10x$$

$$p'(x) = 2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5, \quad y = -5$$

$$x + y = \lambda \Rightarrow y = \lambda - x \Rightarrow S(x) = -x^2 + \lambda x$$

$$S'(x) = -2x + \lambda = 0 \Rightarrow x = \frac{\lambda}{2}, \quad y = \frac{\lambda}{2}$$

$$p = xy = 5x^2 - 10x \Rightarrow$$

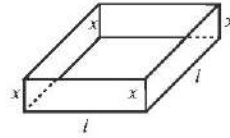
$$p'(x) = 0 \Rightarrow 10x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -5 \end{cases}$$

$$y = 10 + x, \quad p = yx$$

$$p'(x) = 10 + 2x = 0 \Rightarrow x = -5, \quad y = 5$$

$$y = 7 - x$$

-۲۹۹



$$v = xl^2$$

$$2x + l = 30 \Rightarrow l = 30 - 2x \Rightarrow v = x(30 - 2x)^2$$

$$v = 4x^3 - 120x^2 + 900x, \quad x \in [0, 15] \quad (0,75)$$

$$v'(x) = (30 - 2x)^2 + 2(-2)(30 - 2x)x = 0$$

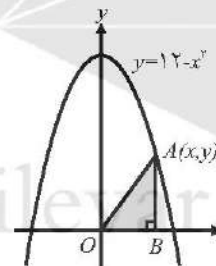
$$v'(x) = 12x^2 - 240x + 900 = 0 \quad (0,75)$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ x = 15 \end{cases} \quad (0,75)$$

x	0	5	15
v'	+	0	-
v		$\nearrow$	$\searrow$

بیشترین حجم برای $x = 5$ به دست می آید. (۰,۷۵) صفحه ۱۱۵

-۲۹۷ (صفحه ۱۲۰)



$$S_{OAB} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x(12 - x^2) = 6x - \frac{1}{2}x^3 \Rightarrow S'(x) = 6 - \frac{3}{2}x^2 \quad (0,75)$$

$$6 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 12 - 4 = 8 \quad (0,75)$$

x	0	2	$\sqrt{2}$
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

$$h = \frac{300}{r^2} S = \frac{1800}{r} + 3r^2$$

$$S' = \frac{-1800}{r^3} + 6r = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{300} \Rightarrow h = \sqrt[3]{300}$$

-۲۹۸



برداشت ضروری دانش آموز:

$$s = yx = 7x - x^2$$

$$s'(x) = 7 - 2x = 0 \Rightarrow x = 3/2, \quad y = 5/2$$

$$f = x \cdot l \Rightarrow f(x) = x(7 - x) = -x^2 + 7x \quad -306$$

$$\Rightarrow f'(x) = -2x + 7 = 0 \quad x = \frac{7}{2}, \quad y = \frac{7}{2}$$

$$a - b = 20 \Rightarrow a = b + 20 \quad -307$$

$$f(b) = b(b + 20) \Rightarrow f'(b) = 2b + 20 = 0$$

$$b = -10, a = +10$$

$$S = 2x \times y \quad -308$$

$$S = 2x(12 - x^2) = -2x^3 + 24x, \quad x \in [0, 2\sqrt{3}]$$

$$s' = -6x^2 + 24 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 8 \\ x = -2 \notin [0, 2\sqrt{3}] \end{cases}$$

$$xy = 32 \quad -309$$

$$\Rightarrow f(x) = (y + 2)(x + 4) = \frac{128}{x} + 40 + 2x$$

$$f'(x) = -\frac{128}{x^2} + 2 = 0 \Rightarrow x = 8, y = 4$$

ابعاد صفحه: 12×6 است.

$$f(x) = xy \Rightarrow f(x) = x(x + 10) = x^2 + 10x \quad -310$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x + 10 = 0 \Rightarrow x = -5, \quad y = 5$$

$$2a + b = 60 \Rightarrow b = 60 - 2a \quad -311$$

$$\Rightarrow ab = a(60 - 2a) = 60a - 2a^2$$

$$(ab)' = 60 - 4a = 0$$

$$\Rightarrow a = 15, \quad b = 60 - 2 \times 15 = 30$$

$$v(x) = (1 - 2x)^2 \times x = x - 4x^2 + 4x^3 \quad -312$$

$$v'(x) = 1 - 4x + 12x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ق.ق.}, \quad x = \frac{1}{6} \text{ ق.ق.}$$

$$2x + 2y = 24 \Rightarrow x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - x \quad -313$$

$$S(x) = xy = x(12 - x) = 12x - x^2$$

$$S'(x) = 12 - 2x = 0 \Rightarrow x = 6, y = 6$$



درس

۱

تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

۳۲۰- ص ۱۳۳

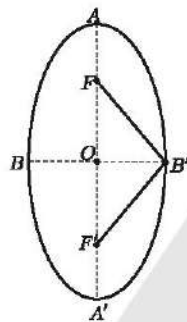
$$\underbrace{2a=8 \rightarrow a=4}_{(0,25)} \quad \underbrace{\frac{c}{a}=\frac{1}{2}}_{(0,75)} \rightarrow \underbrace{c=2}_{(0,25)} \rightarrow \underbrace{FF'=2c=4}_{(0,75)}$$

الف) $FF'=4, O(1,3)$

ب) $y=3$

پ) $OB' = \sqrt{OA'^2 - OF^2} = \sqrt{5}$

$S = \frac{1}{2} OB' \times FF' = 2\sqrt{5}$



۳۲۱

الف) $\begin{cases} b=3 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2a=10$

ب) محیط $= 2a + 2c = 18$

۳۲۲

۳۲۳- سطح مقطع

۳۲۴- $a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=5, b=3} c=4 \Rightarrow FF'=8$

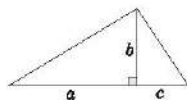
۳۲۵- نادرست

۳۲۶- $\frac{2}{4}$

الف) $\begin{cases} a=5 \\ b=4 \end{cases} \rightarrow c^2 = 25 - 16 \Rightarrow c=3 \Rightarrow A'F=8$

۳۲۷

ب) $S_{\Delta} = \frac{1}{2} (5+3) \times 4 = 16$



الف) $a = \frac{5}{4}c \Rightarrow \frac{25}{16}c^2 = 9 + c^2 \Rightarrow c=4$

۳۲۸

$FF'=2c=8$

ب) $a=5 \Rightarrow A(1, -1), A(-9, -1)$

۳۲۹

۳۱۴- هنلولی صفحه ۱۲۷

۳۱۵- روش اول:

$$\underbrace{e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}}_{(0,75)} \Rightarrow \underbrace{c = \frac{\sqrt{3}}{2}a}_{(0,25)} \quad \underbrace{BB'=2b=10 \Rightarrow b=5}_{(0,75)} \\ \underbrace{a^2 = 25 + \frac{3}{4}a^2}_{(0,75)} \Rightarrow \underbrace{a=10}_{(0,25)} \rightarrow \underbrace{c=5\sqrt{3}}_{(0,75)} \rightarrow \underbrace{FF'=2c=10\sqrt{3}}_{(0,25)}$$

یا

$$\underbrace{e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}}_{(0,75)} \Rightarrow \underbrace{a = \frac{2}{\sqrt{3}}c}_{(0,25)} \quad \underbrace{BB'=2b=10 \Rightarrow b=5}_{(0,75)} \\ \underbrace{\frac{4}{3}c^2 = 25 + c^2}_{(0,75)} \Rightarrow \underbrace{c=5\sqrt{3}}_{(0,25)} \Rightarrow \underbrace{FF'=2c=10\sqrt{3}}_{(0,75)}$$

روش دوم:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a=2k \\ c=\sqrt{3}k \end{cases} \quad \underbrace{BB'=2b=10 \Rightarrow b=5}_{(0,75)} \quad \underbrace{c=5\sqrt{3}}_{(0,25)} \Rightarrow \underbrace{FF'=2c=10\sqrt{3}}_{(0,75)} \\ \underbrace{4k^2 = 25 + 3k^2}_{(0,75)} \Rightarrow \underbrace{k=5}_{(0,25)} \Rightarrow \underbrace{c=5\sqrt{3}}_{(0,25)} \Rightarrow \underbrace{FF'=2c=10\sqrt{3}}_{(0,75)}$$

درس ۱

مقاطع مخروطی

۳۱۶- سهمی (۰/۲۵) (صفحه ۱۲۷)

۳۱۷- اگر FF' را فاصله کانونی و BB' را قطر کوچک بیضی در نظر بگیریم، داریم:

$FF'=BB' \Rightarrow 2c=2b \Rightarrow c=b \quad (0,5)$

$$\underbrace{a^2 = b^2 + c^2}_{(0,75)} \Rightarrow \underbrace{a^2 = c^2 + c^2}_{(0,25)} \Rightarrow \underbrace{a^2 = 2c^2}_{(0,75)} \Rightarrow \underbrace{e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}}_{(0,25)}$$

(صفحه ۱۲۲)

۳۱۸- مرکز بیضی محل برخورد قطر کانونی و قطر کوچک است پس $O(2, -1)$ یا توجه به اینکه $BB'=8$ و $AA'=12$ بنابراین:

$\underbrace{AA'=2a=12}_{(0,75)} \rightarrow \underbrace{a=6}_{(0,25)}$

$\underbrace{BB'=2b=8}_{(0,75)} \rightarrow \underbrace{b=4}_{(0,25)}$

همچنین

$\underbrace{c^2 = 36 - 16 = 20}_{(0,75)} \rightarrow \underbrace{c=2\sqrt{5}}_{(0,25)} \rightarrow \underbrace{FF'=2c=4\sqrt{5}}_{(0,75)}$

۳۱۹- دایره (۰/۲۵)



و معادله قطر بزرگ $x = 1$

ب) $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow b = \sqrt{20} \Rightarrow BB' = 2\sqrt{20}$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{3}$$

۳۴۰- سطح مقطع

الف) $O(1, -1)$, ۳۴۱

$FF' = 3 - (-5) = 8 = 2c \Rightarrow c = 4$

ب) $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow b = \sqrt{20} \Rightarrow BB' = 2\sqrt{20}$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{3}$$

۳۴۲- نادرست

۳۴۳- استوانه

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4, 2c = 8$ ۳۴۴

۳۴۵- کوچکتر

$2a = 8 \Rightarrow a = 4, 2b = 6 \Rightarrow b = 3$ ۳۴۶

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}, 2c = 2\sqrt{7}$

۳۴۷- کرده توخالی

$2a = 8 \Rightarrow a = 4$ ۳۴۸

$2b = 6 \Rightarrow b = 3$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \sqrt{7}$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

بدارداشت ضروری دانش آموز:

الف) $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

$FF' = 2C = 2\sqrt{5}$

ب) $A(4+3, 5), A'(4-3, 5)$

۳۳۰- درست

الف) $O(\alpha, \beta) = \left(\frac{1+1}{2}, \frac{3-5}{2} \right) = (1, -1)$ ۳۳۱

$FF' = |3 - (-5)| = 8 = 2C \Rightarrow C = 4$

ب) $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$

$\Rightarrow b = \sqrt{20} \Rightarrow BB' = 2\sqrt{20}$

۳۳۲- الف) $c = \frac{4}{5}a \Rightarrow 9 + \frac{16}{25}a^2 = a^2$

$\Rightarrow a = 5, c = 4, FF' = 8$

ب) $A(1, -1), A'(-9, -1)$

۳۳۳- الف: بیضی ب: دایره

$O(2, 1) \cdot c = 4 \Rightarrow 25 = b^2 + 16 \Rightarrow 2b = 6$ ۳۳۴

۳۳۵- نیمکره

۳۳۶- $AA' = 2a = 12 \Rightarrow a = 6$

$FF' = 3 - (-5) = 8 \Rightarrow 2C = 8 \Rightarrow C = 4$

$O(\alpha, \beta) = \left(\frac{1+1}{2}, \frac{3-5}{2} \right) = (1, -1)$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6}$$

۳۳۷- دایره

۳۳۸- الف) $AA' = 2a = 6 \Rightarrow a = 3$

$BB' = 2B = 4 \Rightarrow B = 2$

$a^2 = b^2 + 4 \Rightarrow 9 = 4 + c^2$

$\Rightarrow c = \sqrt{5}, FF' = 2C = 2\sqrt{5}$

ب) $A(4-3, 5) \Rightarrow A(1, 5)$

$A'(4+3, 5) \Rightarrow A'(7, 5)$

۳۳۹- الف) $O(1, -1)$

$FF' = 3 - (-5) = 8 = 2c \Rightarrow c = 4$



درس

۲

دایره

$$r = \frac{|3 \times 0 - 4(3) - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 3 \Rightarrow (x-0)^2 + (y-3)^2 = 9 \quad -357$$

$$r = \frac{|3 \times 0 - 4 \times 3 - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 3 \Rightarrow (x-0)^2 + (y-3)^2 = 9 \quad -358$$

$$O = (1, 0), R = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}} = \frac{1}{\sqrt{4 + 0 + 12}} = 2 \quad -359$$

$$d = \frac{|1 \times 1 + 0 \times 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$d < R$ خط و دایره در دو نقطه متقاطع اند.

$$d = \frac{|3 \times 2 - 4(-3) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 4 \quad -360$$

$$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$

$$\text{الف) } O(-1, 0), R = 2 \quad -361$$

$$\text{ب) } (1, 0), (-3, 0)$$

$$R = \frac{|3 \times 1 + 4 \times 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2 \quad -362$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$R = \frac{|3 \times 1 + 4 \times 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2 \quad -363$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$O(0, 0), r = \sqrt{2}, x + y + 2 = 0 \quad -364$$

$$d = \frac{|0 \times 1 + 0 \times 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$d = r = \sqrt{2} \quad \text{خط بر دایره مماس است.}$$

$$O(2, -3), r = 2 \quad -365$$

$$d = \frac{|-3 + 1|}{\sqrt{0 + 1}} = 2 \quad \text{خط و دایره برهم مماس هستند.}$$

$$O(1, 0), r = 2 \quad -366$$

$$d = \frac{|1 \times 1 + 0 \times 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$r = \frac{|3(1) + 4(2) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \quad -369$$

$$\frac{-a}{r} = 1 \Rightarrow a = -r \quad \text{الف) } (0, 5) \quad -350$$

$$\text{ب) } r = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}} = \frac{1}{\sqrt{4 + 16 + 16}} \Rightarrow r = 2 \quad (0, 5) \quad -351$$

$$O\left(-\frac{a}{r}, -\frac{b}{r}\right) = \left(-\frac{2}{2}, -\frac{6}{2}\right) = (-1, -3) \quad (0, 5) \quad -352$$

$$O(2, -2), r = 3, (0, 5) \quad -353$$

$$d = \frac{|3 \times 2 + 4(-2)|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{2}{5} \quad (0, 5) \quad -354$$

چون شعاع دایره بزرگتر از فاصله مرکز دایره تا خط میباشد، پس خط و دایره متقاطع هستند.

$$(0, 5) \quad -355$$

ص ۱۴۲

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0; O(-1, 2), r = 2 \quad -356$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = m^2; O'(2, -1), r' = m$$

$$OO' = 2\sqrt{2}$$

$$OO' = r + r' \Rightarrow m + 2 = 3\sqrt{2} \Rightarrow m = 3\sqrt{2} - 2$$

$$O\left(-\frac{a}{r}, -\frac{b}{r}\right) = (-1, -1) \quad -357$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}} = \sqrt{10}$$

$$\text{الف) } O\left(-\frac{a}{r}, -\frac{b}{r}\right) = (2, -1) \quad -358$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}} = 3$$

$$(0)^2 + (3)^2 + 2(3) - 4(0) - 4 \neq 0 \quad \text{ب) خیر، زیرا}$$

$$-359$$



$$d < r$$

متقاطع اند. نقطه دو در دایره و خط

-۳۶۷

$$O_1 = (-1, 2) \quad , \quad r_1 = 1$$

$$O_2 = (1, -2)$$

$$r_2 = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 2$$

$$d = \sqrt{(-1-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20} > 1+2=3 \quad \text{دو دایره متخارج اند.}$$

-۳۶۸

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (3, -1)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 2$$

برداشت ضروری داشته‌ام:

math-pilevar.ir

درس ۲

دایره



درس

۱

قانون احتمال کل

به روش حل نمودار درختی نمره تعلق گیرد.

$$P(R) = P(A_1)P(R|A_1) + P(A_2)P(R|A_2) \quad -378$$

$$+ P(A_3)P(R|A_3) + P(A_4)P(R|A_4)$$

$$P(R) = \frac{1}{4} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{4}{12} + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{29}{60}$$

حل به روش نمودار درختی نمره کامل تعلق گیرد.

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) \quad -379$$

$$P(A) = \frac{6}{10} \times \frac{6}{13} + \frac{4}{10} \times \frac{5}{13} = \frac{56}{130}$$

برای حل به روش نمودار درختی نمره کامل تعلق گیرد.

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) \quad -380$$

$$+ P(B_3)P(A|B_3) + P(B_4)P(A|B_4)$$

$$P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{14} + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{6}{8} + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{57}{112}$$

در صورت حل به روش درختی نمره تعلق گیرد.

$$P(A) = P(G)P(A|G) + P(B)P(A|B) \quad -381$$

$$P(A) = \frac{6}{10} \times \frac{6}{13} + \frac{4}{10} \times \frac{5}{13} = \frac{56}{130}$$

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) \quad -382$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{100} = \frac{11}{200}$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{11}{24} \quad -383$$

۳۸۴- الف: مستقل ب: $P(A|B)$

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{100} = \frac{11}{200} \quad -385$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{24} = \frac{13}{48} \quad -386$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \times (0/08) + \frac{1}{2} \times (0/03) = 0/055 \quad -387$$

۳۶۹- مستقل صفحه ۱۴۴

-۳۷۰

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{7}{16}$$

توجه نمایید که فضای نمونه‌ای هم‌شأنس نیست.

تذکر: اگر دانش‌آموزی پاسخ صحیح را به روش نمودار درختی بدست آورد به تناسب پاسخ،

نمره تعلق گیرد. صفحه ۱۴۸

-۳۷۱

$$P = \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{15} \right) + \left(\frac{1}{3} \times 0 \right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{6}{12} \right) = \frac{7}{30}$$

(صفحه ۱۴۷)

توجه: (به روش نمودار درختی نیز نمره تعلق گیرد.)

$$p = \frac{(0/45 \times 0/04) + (0/55 \times 0/06)}{(0/5)} = \frac{0/051}{(0/25)} \quad -372$$

۳۷۳- مستقل (۰/۲۵)

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(C)P(A|C) \quad -374$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{9}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{10}{15} = \frac{17}{24}$$

به روش حل نمودار درختی نمره تعلق گیرد.

ص ۱۴۶

$$(1) \quad -375$$

$$-376 \quad p(A) = \frac{3}{4}, \quad p(B) = \frac{1}{4} \quad \text{الف}$$

$$\text{ب) } p(C) = p(A)p(C|A) + p(B)p(C|B)$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{25}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{15}{100} = \frac{3}{10}$$

$$P(A) = P(B_1)P(B_1|A) + P(B_2)P(B_2|A) \quad -377$$

$$P(A) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{11} + \frac{3}{8} \times \frac{4}{11} = \frac{27}{88}$$



-۳۸۸

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{100} = \frac{11}{200}$$

-۳۸۹ نادرست

$$P(A) = \frac{40}{100} \times \frac{3}{100} + \frac{60}{100} \times \frac{5}{100} = \frac{22}{1000}$$

-۳۹۰

$$P(A) = \frac{7}{12} \times \frac{7}{15} + \frac{5}{12} \times \frac{6}{15} = \frac{79}{180}$$

-۳۹۱

-۳۹۲ ناسازگار

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{67}{270}$$

-۳۹۳

$$P(A) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) \times 3 = \frac{11}{16}$$

-۳۹۴

بدراشته ضروری دانش آموز:

درس ۱

احتمال کل

«مجموعه کتاب‌های سمن»



math-pilevar.ir



@plv.math



978-622-5513-45-7