

نخور جانم!
برات خوبه!



سوالات
موضوعی
نهایی
(سمن)



ریاضی و آمار ۳



مجموعه سوالات نهایی ریاضی و آمار ۳
پایه دوازدهم رشته ادبیات و علوم انسانی

رقیه پيله ور - میکائیل صدقی

بِسْمِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

سوالات موضوعی نهایی (سمن)

ریاضی و آمار ۳

(۲۱ دوره سوال نهایی)

مؤلفین:

رقیه پیلهورنبار

میکائیل صدقی

math-pilevar.ir

سرشناسه	: پيله‌ور نيار، رقيه، ۱۳۶۰-
عنوان و نام پديدآور	: سوالات موضوعي نهايي رياضي و آمار ۳/مolfين رقيه پيله‌ور نيار، ميكائيل صدقي.
مشخصات نشر	: اردبيل: گونش‌نگار، ۱۴۰۲.
مشخصات ظاهري	: ۱۱۶ ص: جدول، نمودار؛ ۲۲ × ۲۹ س.م.
شابک	: ۹۷۸-۶۲۲-۵۵۱۳-۴۶-۴: ۲۰۰۰۰۰۰۰ ريال
وضعيت فهرست نويسي	: فيپاي مختصر
شناسه افزوده	: صدقي، ميكائيل، ۱۳۵۳-
شماره كتابشناسي ملي	: ۹۳۶۲۰۹۷
اطلاعات ركورد كتابشناسي	: فيپا



- ◀ نام كتاب : سوالات موضوعي نهايي رياضي و آمار ۳
- ◀ مولفين : رقيه پيله‌ور و ميكائيل صدقي
- ◀ ناشر : انتشارات گونش‌نگار
- ◀ طراح روجلد : رباب حامدسلطاني
- ◀ رسم نمودارها : رقيه پيله‌ور و سحر طالبی
- ◀ نوبت چاپ : ويرايش دوم، ۱۴۰۳
- ◀ تيراژ : ۱۰۰۰ جلد
- ◀ قيمت : ۲۰۰۰۰۰۰۰ ريال
- ◀ شابک : ۹۷۸-۶۲۲-۵۵۱۳-۴۶-۴

آدرس: اردبيل، اول خيابان دانشگاه، روبروي اداره مخابرات، انتشارات گونش‌نگار

۰۹۱۴۳۵۸۵۶۲۸ — ۰۴۵ — ۳۳۵۲۳۳۵۹

www.gunashnegarpub.ir

کليه حقوق قانوني، مادي و معنوي براي مولفين و ناشر محفوظ است هيچ شخص حقوقي يا حقيقي حق تکثير تمام يا قسمتي از اين مجموعه را ندارد، در صورت مشاهده تحت پيگرد قانوني قرار مي‌گيرند.

تقدیم به

دیران فرهیخته‌ی ریاضی

و دانش‌آموزان برتر

و روح بلند مریم میرزاخانی

math-pilevar.ir

فهرست مطالب

۶	مقدمه
۸	۱ آمار و احتمال
۹	شمارش
۲۰	احتمال
۳۳	چرخه آمار در حل مسائل
۴۴	۲ الگوهای خطی
۴۵	مدلسازی و دنباله
۵۲	دنباله‌های حسابی
۶۲	۳ فصل سوم: الگوهای غیر خطی
۶۳	دنباله هندسی
۷۳	ریشه n ام و توان گویا
۸۲	تابع نمایی

سپاس بی‌کران خداوندی را که انسان را آفرید و او را به زیور علم آراست شاکریم این توفیق را یافتیم مجموعه سوالات موضوعی نهایی ریاضی و آمار ۳ را به صورت کتاب در آوریم. استفاده گسترده دانش‌آموزان و همکاران از این مجموعه سوالات و تشویق برخی همکاران مشوق ما در این راه بود. کتاب حاضر شامل ۲۱ دوره سوالات نهایی ریاضی و آمار ۳ از دی ۱۳۹۷ تا شهریور ۱۴۰۳ می‌باشد. مهمترین ویژگی منحصر به فرد این کتاب دسته‌بندی سوالات نهایی منطبق بر موضوعات کتاب درسی می‌باشد.

سوالات درس به درس تفکیک شده و به همراه نمره و تاریخ برگزاری آزمون دسته‌بندی شده است. در ابتدای هر درس خلاصه درسنامه‌ای از کتاب برای یادآوری مطالب و فرمول‌ها آورده شده است. حل سوالات نهایی سال‌های گذشته به ارتقاء نمره نهایی شما عزیزان کمک خواهد کرد. توصیه ما به شما عزیزان این است که اول، کتاب درسی یا جزوه دبیرتان را با دقت بخوانید سپس به سراغ حل سوالات این کتاب بروید. تا علاوه بر تمرین و تکرار مطالب کتاب، مفاهیم نیز در ذهنتان تثبیت شود. نتیجه‌گیری از ریاضی سخت نیست کافی است سخت‌کوش باشید.

سخنی با همکاران و اساتید محترم ریاضی

همکار عزیز از این که کتاب حاضر را به عنوان مرجع کلاس خود انتخاب کرده‌اید به خود می‌بالیم شما می‌توانید با توجه به روند تدریس‌تان در کلاس درس با اتمام هر درس، سوالات مربوط به همان درس را به عنوان تکلیف به دانش‌آموزان بدهید. یا خودتان با توجه به زمان کلاس تعدادی از سوالات را حین تدریس در کلاس حل کنید. تجربه ما در حل این سوالات در کلاس درس یا مهمتر از آن در طول سال تحصیلی، تکلیف کردن حل این سوالات در منزل، ارتقاء نمره نهایی دانش‌آموزان را ثابت کرده است.

از شما همکاران فرهیخته و دانشمند تقاضا داریم که کاستی یا نقایص کتاب و حتی غلط‌های املایی و چاپی را به ما در سایت math-pilevar.ir اطلاع دهید تا در چاپ‌های بعدی مرتفع گردد.

با تشکر: پيله‌ور - صدقی

math-pilevar.ir

برای خرید فایل pdf کتاب به سایت math-pilevar.ir مراجعه کنید.





نمونه سوالات نهایی که در این کتاب به صورت موضوعی تفکیک شده است عبارتند از:

دی ۹۷	۱
خرداد ۹۸	۲
تیر ۹۸	۳
شهریور ۹۸	۴
دی ۹۸	۵
خرداد ۹۹	۶
خرداد ۹۹ خارج از کشور نوبت صبح	۷
خرداد ۹۹ خارج از کشور نوبت عصر	۸
شهریور ۹۹	۹
دی ۹۹	۱۰
خرداد ۱۴۰۰	۱۱
شهریور ۱۴۰۰	۱۲
دی ۱۴۰۰	۱۳
خرداد ۱۴۰۱	۱۴
شهریور ۱۴۰۱	۱۵
دی ۱۴۰۱	۱۶
خرداد ۱۴۰۲	۱۷
شهریور ۱۴۰۲	۱۸
دی ۱۴۰۲	۱۹
خرداد ۱۴۰۳	۲۰
شهریور ۱۴۰۳	۲۱



آمار و احتمال

شمارش ۹
احتمال ۲۰
چرخه آمار در حل مسائل ۳۳



درس

۱

شمارش

خلاصه درسنامه

اصل جمع



اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد و این دو عمل را بتوان با هم انجام داد، در این صورت به $m + n$ طریق می‌توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد. (اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است.)

برای مثال: به چند طریق می‌توان فقط یک خودکار یا یک مداد روان‌نویس را از بین ۱۰ خودکار مختلف، ۶ مداد مختلف و ۴ روان‌نویس مختلف انتخاب کرد؟

پاسخ:

$$20 = 10 + 6 + 4$$

↑ خودکار
↑ روان‌نویس
↑ مداد

تعداد کل حالت‌ها

اصل ضرب



اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد، طوری که در مرحله اول به m طریق «و» در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام‌پذیر باشند، در کل آن عمل به $m \times n$ طریق انجام‌پذیر است. (اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله است.)

برای مثال: فرض کنید دانشجویی برای انتخاب واحد، می‌خواهد از بین ۴ درس عمومی ارائه شده، یک درس و از بین ۱۰ درس اختصاصی ارائه شده نیز یک درس را انتخاب کند، او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

پاسخ:

$$40 = 4 \times 10$$

↑ عمومی
↑ اختصاصی

تعداد کل حالت‌ها

نماد فاکتوریل

برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش از نماد فاکتوریل (!) استفاده می‌کنیم.

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

$$(n+1)! = (n+1) \times n \times (n-1) \times \dots \times 1$$

عبارت‌های زیر پرکاربرد هستند

$0! = 1$	$1! = 1$	$2! = 2$	$3! = 6$	$4! = 24$	$5! = 120$	$6! = 720$
----------	----------	----------	----------	-----------	------------	------------



نکته: طبق قرارداد داریم:

$$0! = 1, \quad 1! = 1$$

تکنیک ساده کردن کسرهای شامل فاکتوریل

همیشه فاکتوریل بزرگتر را به فاکتوریل کوچکتر برسانید و سپس ساده کنید.

$$\frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 = 56$$

برای مثال:

جایگشت



هر حالت از کنار هم قرار دادن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن اشیاء می‌نامیم.

$$n! = \text{جایگشت } n \text{ شیء متمایز}$$

برای مثال: با حروف کلمه «آپلود» چند کلمه ۵ حرفی می‌توان ساخت به طوری که: (در این گونه سوالات، با معنی یا بی‌معنی بودن کلمات مهم نیست.)

الف) تکرار حروف مجاز باشد. $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5$ تعداد کل کلمات $\Rightarrow$ $\boxed{5} \boxed{5} \boxed{5} \boxed{5} \boxed{5}$ (الف)
 ب) تکرار حروف غیرمجاز باشد. $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ تعداد کل کلمات $\Rightarrow$ $\boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{4} \boxed{5}$ (ب)

مثال

با حروف کلمه «answer» و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ۶ حرفی می‌توان ساخت؟

ب) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان ساخت؟

ج) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان ساخت که با a شروع و به r ختم شوند؟

الف) $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ تعداد کلمات خواسته شده $\Rightarrow$ $\boxed{6} \boxed{5} \boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{1}$

ب) $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ تعداد کلمات مطلوب $\Rightarrow$ $\boxed{6} \boxed{5} \boxed{4} \boxed{3}$

ج) $1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ تعداد کلمات مطلوب $\Rightarrow$ $\boxed{1} \boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{1}$

نکته: نکات ساختن اعداد

مثل زوج بودن، فرد بودن، کوچکتر یا بزرگتر از یک عدد خاص بودن و غیره.

برای حل سوالات به نکات زیر توجه کنید:

① عددی زوج است که یکان آن (رقم سمت راست آن) زوج باشد یعنی ۰ یا ۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸ باشد.

② عددی فرد است که یکان آن، فرد باشد یعنی ۱ یا ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹ باشد.

③ عددی مضرب ۵ هست که یکان آن صفر یا ۵ باشد.

④ در ساختن اعداد، اولین رقم سمت چپ، نمی‌تواند صفر باشد ولی مثلاً در ساختن رمز گاوصندوق می‌شود از صفر هم در اولین رقم سمت چپ، استفاده کرد.

برای مثال: با ارقام ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و بدون تکرار ارقام:

- الف) چند عدد ۶ رقمی می‌توان ساخت؟
 ب) چند عدد ۵ رقمی زوج می‌توان ساخت؟
 ج) چند عدد ۴ رقمی فرد می‌توان ساخت؟
 د) چند عدد ۳ رقمی بزرگ‌تر از ۴۰۰ می‌توان ساخت؟
 ه) چند عدد ۳ رقمی کوچک‌تر از ۵۰۰ می‌توان ساخت؟
 و) چند عدد ۴ رقمی می‌توان ساخت که یکان آن، عددی اول باشد؟

الف) $\boxed{6} \Rightarrow \text{جواب} = 6!$

ب) $\boxed{5} \boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{1} \Rightarrow \text{جواب} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

ج) $\boxed{5} \boxed{4} \boxed{3} \Rightarrow \text{جواب} = 5 \times 4 \times 3 = 60$

د) $\boxed{4} \boxed{5} \Rightarrow \text{جواب} = 4 \times 5 = 20$

ه) $\boxed{3} \boxed{5} \Rightarrow \text{جواب} = 3 \times 5 = 15$

و) $\boxed{5} \boxed{4} \boxed{3} \Rightarrow \text{جواب} = 5 \times 4 \times 3 = 60$

 استراتژی ساختن اعداد زوج یا مضرب ۵ وقتی رقم صفر جزء ارقام داده شده باشد

اگر بخواهیم اعداد زوج (مضرب ۲) یا اعداد مضرب ۵ بسازیم و در ارقام داده شده، صفر هم وجود داشته باشد و ضمناً تکرار ارقام هم غیرمجاز باشد باید دوباره، خانه‌ها را رسم کنیم در **حالت اول، یکان صفر باشد** و در **حالت دوم یکان صفر نباشد** بعد از پر کردن خانه‌ها جواب‌های این دو حالت رو با هم جمع می‌کنیم. توجه کنید که اگر تکرار ارقام مجاز باشد و نیازی به دو حالت جداگانه نداریم.

برای مثال: با ارقام ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ چند عدد زوج ۴ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

• روش اول:

حالت اول (یکان صفر باشد) $\boxed{5} \boxed{4} \boxed{3} \boxed{1} \Rightarrow \text{جواب} = 5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60$
 حالت دوم (یکان صفر نباشد) $\boxed{4} \boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} \Rightarrow \text{جواب} = 4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$
 طبق اصل جمع $\rightarrow \text{جواب نهایی} = 60 + 96 = 156$

• روش دوم: اصل متمم

تعداد حالت‌های نامطلوب - تعداد کل حالت‌ها = تعداد حالت‌های مطلوب

$\boxed{5} \boxed{5} \boxed{4} \boxed{3} \Rightarrow \text{تعداد کل اعداد ۴ رقمی (بدون تکرار رقم)} = 5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$

$\boxed{4} \boxed{4} \boxed{3} \boxed{3} \Rightarrow \text{تعداد کل اعداد ۴ رقمی فرد (بدون تکرار رقم)} = 4 \times 4 \times 3 \times 3 = 144$

$156 = 300 - 144 = \text{تعداد اعداد فرد ۴ رقمی} - \text{تعداد اعداد زوج ۴ رقمی} = \text{تعداد اعداد زوج ۴ رقمی}$

ترتیب



تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز را با نماد $P(n, r)$ نمایش می‌دهیم و از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم: $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ ، $(n \geq r)$

در رابطه بالا، ترتیب بین اشیاء مهم است و با جابجایی آن‌ها، حالت‌های مختلفی درست می‌شود.

مثال

در یک مسابقه دوی ۱۰۰ متر ۵ شرکت‌کننده با هم رقابت می‌کنند به چند حالت می‌توان به ۳ نفر اول جایزه داد؟ (جایزه‌ها با هم متفاوت است.)

روش اول: $P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$ تعداد حالت‌ها

روش دوم: $\Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $= 5 \times 4 \times 3 = 60$



ترکیب

تعداد راه‌های انتخاب r شیء از n شیء متمایز را ترکیب می‌گوییم که با $C(n, r)$ نمایش می‌دهیم و از رابطه مقابل محاسبه می‌شود.

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

در این رابطه، ترتیب بین اشیاء مهم نیست.

برای مثال: اگر بخواهیم ۳ کتاب رو از بین ۷ کتاب انتخاب کرده و به دوستانمون هدیه بدیم باید از ترکیب استفاده کنیم

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 6} = 35$$

ترتیب مهم است	ترتیب مهم نیست	
۱ چیدن تعدادی شیء ۲ ساختن عددهای چند رقمی با کمک رقم‌های داده شده ۳ ساختن کلمه با حروف داده شده. ۴ برداشتن اشیاء به ترتیب از یک ظرف (تا تمام شود...)	۱ ساختن یک گروه یا تیم ۲ انتخاب تعدادی شیء و خارج کردن آن‌ها... ۳ تعداد زیرمجموعه	کلمات کلیدی در سوال درس ۱ شمارش
فاکتوریل و اصل ضرب	ترکیب $\binom{n}{r}$	محاسبه کن با ...

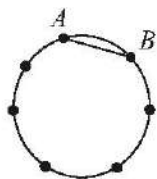
روابطی که محاسبات ترکیب را سریع‌تر می‌کنند

$\binom{n}{0} = 1$	$\binom{n}{n} = 1$	$\binom{n}{1} = n$	$\binom{n}{n-1} = n$	$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$	$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$	فرمول
$\binom{5}{0} = 1$	$\binom{5}{5} = 1$	$\binom{5}{1} = 5$	$\binom{5}{4} = 5$	$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$	$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$	مثال

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر $\binom{n}{r}$ است.

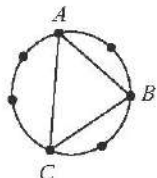
برای مثال: تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی از مجموعه $\{a, b, c, d, e\}$ برابر می‌شود با: $\binom{5}{4} = 5$

برای مثال: با ۷ نقطه روی محیط یک دایره، چند پاره‌خط و چند مثلث می‌توان ساخت به طوری که نقاط داده شده دو سر پاره‌خط یا رأس‌های مثلث باشند؟



$$\text{تعداد پاره‌خطها (وترها)} = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

برای رسم پاره‌خط به دو نقطه نیاز داریم:



$$\text{تعداد مثلث‌ها} = \binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35$$

برای رسم مثلث به ۳ نقطه نیاز داریم:

تکنیک حداقل و حداکثر!

۱) گروهی با حداقل k عضو: یعنی گروه k نفره، $k+1$ نفره، $k+2$ نفره و ... را جدا جدا حساب کنید و با هم جمع کنید و تا موقعی جلو بروید که گروه تکمیل شود یا تعداد افراد تمام شوند.

۲) گروهی با حداکثر k عضو: یعنی گروه k نفره، $k-1$ نفره، $k-2$ نفره و ... را جدا جدا حساب کنید و با هم جمع کنید و تا گروه صفر نفره پیش بروید ... به صورت خلاصه: لاکل k تا یعنی k نفر را حساب کنید و بروید بالا و حداکثر k نفر هم، یعنی k نفر را بگیرید و بروید پایین ...

برای مثال: به چند طریق می‌توان از بین ۵ مرد و ۴ زن، ۶ نفر را انتخاب کرد. به طوری که:

الف) حداکثر ۳ زن باشد؟

ب) حداقل ۳ زن باشد؟

درس ۱

شمارش

$$\binom{4}{3} \binom{5}{0} + \binom{4}{2} \binom{5}{1} + \binom{4}{1} \binom{5}{2} + \binom{4}{0} \binom{5}{3} = 4 + 30 + 10 + 1 = 45$$

پاسخ: الف) حداکثر ۳ زن، یعنی ۱ یا ۲ یا ۳ زن:

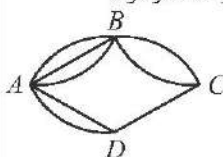
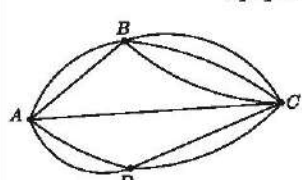
$$\binom{4}{3} \binom{5}{0} + \binom{4}{2} \binom{5}{1} = 4 + 10 = 14$$

ب) حداقل ۳ زن، یعنی ۳ یا ۴ زن:

سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۱	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. حاصل $1! + 4!$ برابر است با	۱/۲۵	تیرم ۱۴۰۳
۲	مجموعه $A = \{1, 2, 5, 6, 7\}$ مفروض است. الف) با ارقام موجود در مجموعه A ، چند عدد سه رقمی فرد و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ ب) مجموعه A چند زیر مجموعه‌ی ۳ عضوی دارد؟	۱/۷۵	تیرم ۱۴۰۳

۳	گزینه صحیح را انتخاب کنید. تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از مجموعه $A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ که شامل عدد ۷ باشد، کدام است؟ ۱۰ (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴)	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۴	مطابق شکل زیر، میان چهار شهر راه‌هایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر B به شهر D سفر کرد؟ 	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۳
۵	با ارقام ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ و بدون تکرار ارقام، چند عدد چهار رقمی و مضرب ۵ می‌توان نوشت؟	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به صورت $0! = 1$ و $1! = 1$ تعریف می‌کنیم. (درست - نادرست)	۰/۲۵	دی ۱۴۰۲
۷	دانش‌آموزی برای مطالعه به کتابخانه مدرسه می‌رود، او از بین ۴ کتاب روان‌شناسی، ۳ کتاب جغرافی و ۵ کتاب ریاضی به چند طریق می‌تواند: الف) یک کتاب برای مطالعه انتخاب کند. ب) یک کتاب ریاضی، یک کتاب روان‌شناسی و یک کتاب جغرافی انتخاب نماید.	۱/۵	دی ۱۴۰۲
۸	با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟	۱/۵	دی ۱۴۰۲
۹	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. حاصل $3! + 2!$ برابر است با	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۱۰	میان چهار شهر A, B, C, D ، راه‌هایی وجود دارد. به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C سفر کرد؟ 	۱	شهریور ۱۴۰۳
۱۱	با حروف کلمه «کوهستان» و بدون تکرار حروف: (بامعنی و بی معنی) الف) چند کلمه ۷ حرفی می‌توان نوشت؟ ب) چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت که با «ک» شروع و به «س» ختم شوند؟	۱۰۵	شهریور ۱۴۰۳



۱۲	درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید. تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از یک مجموعه ۵ عضوی برابر ۱۵ است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۲
۱۳	با ارقام ۰، ۳، ۲، ۷، ۹، ۴ و ۸ چند عدد سه رقمی زوج، بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۲
۱۴	جای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید. تعداد جایگشت‌های مختلف ۴ کتاب متمایز می‌باشد.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۱
۱۵	با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و بدون تکرار ارقام، چند عدد ۳ رقمی زوج می‌توان نوشت؟	۱/۲۵	دی ۱۴۰۱
۱۶	مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ را در نظر بگیرید: الف) A چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟ ب) A چند زیرمجموعه ۴ عضوی شامل دو عضو c و b می‌باشد؟	۱/۲۵	ش ۱۴۰۱
۱۷	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. حاصل $\frac{5!}{3!}$ برابر است.	۰/۲۵	شعبان ۱۴۰۱
۱۸	علی سه کتاب علمی و ۴ کتاب داستانی دارد. او می‌خواهد از بین کتاب‌هایش، یک کتاب علمی و یک کتاب داستانی به دوستش هدیه دهد. او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟	۰/۷۵	شعبان ۱۴۰۱
۱۹	با ارقام ۱ تا ۹ چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟	۱	شعبان ۱۴۰۱
۲۰	درستی یا نادرستی جمله‌ی زیر را مشخص کنید. حاصل $\frac{8!}{4!}$ برابر ۲! است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۱
۲۱	مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $\left(\frac{5}{3}\right)$ باشد.	۰/۵	خرداد ۱۴۰۱
۲۲	جای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید. هر حالت از کنار هم قرار گرفتن ۷ شیء متمایز را یک جایگشت از آن ۷ شیء می‌نامیم.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۰



۲۳	با حروف کلمه «مهرسان» و بدون تکرار حروف (با معنی یا بی معنی): الف) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت. ب) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که با «م» شروع شوند.	۲	دی ۱۴۰۰
۲۴	می‌خواهیم از بین ۲ سیب، ۳ کیوی و ۴ نارنگی یک میوه انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این میوه را انتخاب کنیم؟	۱	دی ۱۴۰۰
۲۵	جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید. الف: هر حالت از کنارهم قرار گرفتن ۵ شی متمایز را یک از آن ۵ شی می‌نامیم. ب: در انتخاب ۲ شی از بین n شی، جایجایی اشیا اهمیت ندارد. پ: مقدار $\frac{n!}{1!}$ برابر است.	$\frac{1}{75}$	شعبان ۱۴۰۰
۲۶	از بین ۳ کتاب ریاضی متمایز و ۲ کتاب فیزیک و ۴ کتاب ادبیات متمایز به چند طریق می‌توان: الف: یک کتاب برای مطالعه انتخاب کرد. ب: یک کتاب ریاضی انتخاب کرد.	۱	شعبان ۱۴۰۰
۲۷	با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟	۱	شعبان ۱۴۰۰
۲۸	جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید. الف: برای عدد صفر، فاکتوریل را به صورت $0! =$ تعریف می‌کنیم. ب: اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام شود، به طوری که در مرحله اول به m طریق و در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشند، در کل آن عمل به طریق انجام پذیر است. پ: تعداد جایگشت‌های n تایی از n شی برابر با است.	$\frac{1}{5}$	خرداد ۱۴۰۰
۲۹	گزینه صحیح را انتخاب کنید. الف: حاصل $\frac{6!}{3!}$ کدام است؟ (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۳۵ ب: با ۸ نقطه متمایز واقع بر محیط دایره چند مثلث می‌توان تشکیل داد؟ (۱) ۴۲ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۵۶ ت: حاصل عبارت $p(2, 2)$ کدام است؟ (۱) ۱ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۴	$\frac{1}{75}$	خرداد ۱۴۰۰

۳۰	بین چهار شهر A, B, C, D مطابق شکل زیر راه هایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می توان از شهر C و بدون عبور از شهر B به شهر D مسافرت کرد؟	۰/۷۵ ۱۴۰۰ خرداد
۳۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید. الف: پیشامد وقتی رخ می دهد که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B رخ ندهد. ب: تعداد جایگشت های n تایی از n شی متمایز، برابر است با	۰/۵ ۹۹ دی
۳۲	مهدی از بین ۳ کتاب ریاضی، ۲ کتاب عربی و ۴ کتاب ادبیات به چند طریق می تواند: الف: یک کتاب برای مطالعه انتخاب کند؟ ب: یک کتاب ریاضی، یک کتاب عربی و یک کتاب ادبیات انتخاب کند؟	۱/۵ ۹۹ دی
۳۳	با ارقام ۱، ۲، ۴، ۷، ۹ چند عدد سه رقمی فرد بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟	۱ ۹۹ دی
۳۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تساوی $2! = \frac{6!}{3!}$ همواره برقرار است.	۰/۴۵ ۹۹ خرداد
۳۵	به چند طریق می توان ۴ کتاب را از بین ۹ کتاب مختلف، انتخاب کرد؟	۰/۷۵ ۹۹ خرداد
۳۶	با ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ۶ و ۸ و ۹ و ۷ چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار می توان نوشت؟	۱ ۹۹ خرداد
۳۷	به چند طریق می توان ۳ توپ هم رنگ را از بین ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی انتخاب کرد؟	۱ ۹۹ خرداد
۳۸	روی محیط یک دایره ۵ نقطه وجود دارد مشخص کنید با این ۵ نقطه چه تعداد وتر می توان تشکیل داد؟	۱ ۹۹ خرداد
۳۹	مطابق شکل زیر بین شهرهای A, B, C, D راه هایی وجود دارد که همه دو طرفه اند. مشخص کنید به چند طریق می توان از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟	۱ ۹۹ خرداد



۴۰	به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۷ کتاب متمایز، انتخاب کنیم و به دوستان هدیه بدهیم؟	۱	خرداد ۹۹
۴۱	جای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید. الف: تعداد جایگشت‌های n شی متمایز برابر است.	$n!/25$	خرداد ۹۹ خ
۴۲	از بین ۵ دانش آموز سال دهم، ۶ دانش آموز سال یازدهم و ۴ دانش آموز دوازدهم، قرار است یک گروه ۳ نفره انتخاب کنیم. تعداد اعضای پیشامد اینکه سه نفر منتخب از سه پایه‌ی مختلف باشند را مشخص کنید.	۱	خرداد ۹۹ خ
۴۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. الف: پیش بینی نتیجه‌ی بازی فوتبال بین دو تیم، قبل از بازی یک پدیده تصادفی است.	$n!/25$	خرداد ۹۹ خ
۴۴	جاهای خالی را با پاسخ درست کامل کنید. الف: به طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۵ کتاب انتخاب و در یک قفسه بچینیم. ب: مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ دارای زیر مجموعه‌ی ۳ عضوی است.	$n!/5$	خرداد ۹۹ خ
۴۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به صورت $0! = 1$ و $1! = 1$ تعریف می‌کنیم.	$n!/25$	شهریور ۹۹
۴۶	با حروف کلمه "خورشید" و بدون تکرار حروف (بامعنی یا بی معنی) الف: چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که به "د" ختم شوند؟ ب: چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که با "ی" شروع و به "خ" ختم شوند؟	۲	شهریور ۹۹
۴۷	می‌خواهیم از بین ۱۰ خودروی سواری، ۱۲ خودروی وانت و ۶ خودروی کامیون یک خودرو انتخاب کنیم، به چند طریق می‌توانیم این خودرو را انتخاب کنیم؟	۱	شهریور ۹۹
۴۸	مجموعه ۸ عضوی $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ چند زیر مجموعه ۳ عضوی دارد؟	۱	شهریور ۹۹
۴۹	حساب کنید که مجموعه هشت عضوی $A = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ ، چند زیر مجموعه سه عضوی دارد؟	۱	خرداد ۹۸
۵۰	در منوی یک رستوران ۳ نوع غذا و ۵ نوع دسر وجود دارد. به چند طریق می‌توان یک نوع غذا یا یک نوع دسر سفارش داد؟	$n!/5$	تیر ۹۸

۹۸ تیر	۱/۵	۵۱	با توجه به ارقام ۲ و ۸ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ به سوالات زیر پاسخ دهید. (بدون تکرار ارقام) الف: چند عدد ۴ رقمی می‌توان نوشت؟ ب: چند عدد ۵ رقمی فرد می‌توان نوشت؟ ج: چند عدد ۴ رقمی، که رقم یکان آن فقط عدد ۸ باشد، می‌توان نوشت؟
۹۸ تیر	۱	۵۲	با حروف کلمه "ولایت" و بدون تکرار حروف (بی معنی با معنی) الف: چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت؟ ب: چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که با "ل" شروع و به "و" ختم شوند؟
۹۸ شهریور	۱	۵۳	جای خالی را با پاسخ درست کامل کنید. الف: حاصل عبارت (9^9) برابر می‌باشد. ب: تعداد جایگشت‌های n شی متمایز برابر است.
۹۸ شهریور	۱	۵۴	به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۸ کتاب انتخاب کنیم؟
۹۸ شهریور	۱	۵۵	به چند طریق می‌توان با ارقام ۱ تا ۷ عددی چهار رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست.)
۹۸ دی	۲	۵۶	مجموعه پنج عضوی $\{1, 2, 4, 6, 8\}$ چند زیر مجموعه دو عضوی دارد؟
۹۷ دی	۲	۵۷	ارقام ۱ تا ۹ مفروض اند. بدون تکرار ارقام الف: چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت؟ ب: چند عدد ۴ رقمی زوج می‌توان نوشت؟

یادداشت ضروری دانش آموز:



درس

۲

احتمال

خلاصه درسنامه

♦ پدیده‌های تصادفی

پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه آن‌ها قبل از رخ دادنشان، به طور قطعی مشخص نیست، پدیده‌های تصادفی (آزمایش‌های تصادفی) نام دارند.

♦ مفهوم برآمد

به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، یک برآمد گفته می‌شود.

برای مثال: در پرتاب یک تاس، تمام برآمدها عبارتند از ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ یا در پرتاب یک سکه، برآمدها عبارت است از: رو، پشت

♦ پدیده‌های قطعی

به آزمایش‌هایی که نتیجه آن‌ها قبل از انجام آزمایش به طور قطعی مشخص باشد آزمایش‌های پدیده‌های قطعی (حتمی) گفته می‌شود.

برای مثال: اگر داخل یک لیوان آب، سنگی را بندازیم، قبل از انجام آزمایش می‌دانیم که سنگ، داخل آب حل نمی‌شود.

♦ فضای نمونه

همه برآمدهای ممکن در یک آزمایش تصادفی، مجموعه‌ای رو تشکیل می‌دهند که به آنها، فضای نمونه گفته می‌شود و آن را با حرف S نشان می‌دهیم.

برای مثال: در پرتاب یک تاس، فضای نمونه به صورت مقابل است:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

تعداد عضوهای مجموعه S رو با نماد $n(S)$ نمایش می‌دهیم پس در پرتاب یک تاس $n(S) = 6$ است.

♦ فضاهای نمونه‌ای معروف

پدیده تصادفی	پرتاب n سکه با هم یا پرتاب n بار یک سکه	پرتاب دو تاس با هم یا پرتاب دو بار یک تاس	پرتاب یک سکه و یک تاس با هم	حالت‌های جنسیت در خانواده‌ای با n فرزند	انتخاب n شیء از یک گروه m تایی
تعداد اعضای S	2^n	۳۶	۱۲	2^n	$\binom{m}{n}$

برای مثال: یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه این آزمایش تصادفی چند عضو دارد؟

• روش اول: نوشتن اعضای فضای نمونه

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \Rightarrow n(S) = 12$$

• روش دوم (استفاده از اصل ضرب)

$$n(S) = 2 \times 6 = 12$$

سکه دو حالت و تاس شش حالت دارد، بنابراین فضای نمونه آزمایش، طبق اصل ضرب به این صورت است.

♦ پدیده یا آزمایش تصادفی ($0 < P(A) < 1$)

به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه آن‌ها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی گفته می‌شود. در پدیده‌های تصادفی از همه نتیجه‌های ممکن اطلاع داریم، اما از اینکه کدام حالت قطعاً رخ می‌دهد، اطمینان نداریم.

♦ پدیده یا آزمایش قطعی ($P(A) = 1$)

به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه آن قبل از انجام آزمایش مشخص است، آزمایش‌های قطعی می‌گوییم.

♦ پدیده غیرممکن ($P(A) = 0$)

پدیده‌هایی که امکان وقوع آن‌ها اصلاً وجود ندارد.

مثال

۱. یک تاس را پرتاب می‌کنیم پیشامدهای زیر را بنویسید و تعداد اعضای آن‌ها را مشخص کنید:

(الف) عدد رو شده، اول باشد. (ج) عدد رو شده، حداقل ۴ باشد.

(ب) عدد رو شده، مربع کامل باشد. (د) عدد رو شده، حداکثر ۳ باشد.

پاسخ: وقتی یک تاس رو می‌اندازیم S برابر است با: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ حالا پیشامدهای خواسته شده رو باید از S انتخاب کنیم.

(الف) $A = \{2, 3, 5\} \Rightarrow n(A) = 3$
اعداد اول

(ب) $B = \{1, 4\} \Rightarrow n(B) = 2$
اعداد مربع کامل

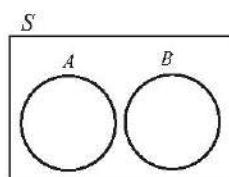
(ج) $C = \{4, 5, 6\} \Rightarrow n(C) = 3$
اعداد حداقل ۴

(د) $D = \{1, 2, 3\} \Rightarrow n(D) = 3$
اعداد حداکثر ۳



نمایش	$A \cap B = \{x \in S x \in A \wedge x \in B\}$	$A \cup B = \{x \in S x \in A \vee x \in B\}$	$A - B = \{x \in S x \in B \wedge x \notin A\}$	$A' = \{x \in S x \notin A\}$
نام فارسی	اشتراک پیشامدها	اجتماع پیشامدها	تفاضل پیشامدها	متمم یک پیشامد
نمایش هندسی				
توصیف فارسی	پیشامد A و B همزمان رخ دهند.	حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ دهند.	پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد. فقط A رخ دهد.	پیشامد A رخ ندهد.

♦ پیشامدهای ناسازگار: اگر دو پیشامد A و B هیچ اشتراکی نداشته باشند می‌گوییم ناسازگارند:



$$\Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

$$\begin{cases} A - B = A \\ B - A = B \end{cases} \quad \text{اگر } A \text{ و } B \text{ ناسازگار باشند می‌توان گفت:}$$

مثال

روی ۱۰ کارت یکسان، شماره‌های ۱ تا ۱۰ نوشته شده است، پیشامد A, B و C به صورت زیر هستند:

$$A = \{\text{اعداد اول}\}, \quad B = \{\text{اعداد مضرب ۴}\}, \quad C = \{\text{اعداد مربع کامل}\}$$

الف) آیا A و B ناسازگارند؟ B و C چطور؟

ب) پیشامدهای $A \cup B, B \cup C, A - B$ را با اعضا مشخص کنید.

پاسخ:

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

$$A = \{2, 3, 5, 7\}, \quad B = \{4, 8\}, \quad C = \{1, 4, 9\}$$

الف) مجموعه‌های A و B اشتراکی‌باهم ندارند. پس ناسازگارند ولی B و C در عضو ۴ مشترکند پس سازگار هستند.

ب) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}, \quad B \cup C = \{1, 4, 8, 9\}, \quad A - B = \{2, 3, 5, 7\}$

احتمال رخ دادن یک پیشامد



فرض کنید S یک فضای نمونه قابل شمارش (متناهی) برای یک پدیده تصادفی باشد در این صورت، احتمال وقوع پیشامد A رو به صورت $P(A)$ نشان می‌دهیم و حاصل آن را با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آوریم.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد عضوهای پیشامد } A}{\text{تعداد عضوهای فضای نمونه}}$$

توجه کنید که عدد احتمال، همیشه بین صفر و یک خواهد بود؛ یعنی $0 \leq P(A) \leq 1$.

اگر $A = \emptyset$ باشد $P(A) = 0$ و اگر $A = S$ باشد $P(A) = 1$ است.

درس ۲

احتمال

مثلاً در پرتاب یک تاس، احتمال اینکه عدد ظاهر شده ۷ باشد، برابر صفره؛ همچنین احتمال اینکه عدد ظاهر شده، کوچک‌تر از ۷ باشد، برابر ۱ خواهد بود.

مثال

اعداد ۱ تا ۱۰ را روی ۱۰ کارت مختلف نوشته، یکی را به تصادف انتخاب می‌کنیم مطلوب است احتمال اینکه:

الف) عدد ظاهر شده، زوج باشد.

ب) عدد ظاهر شده، فرد و اول باشد.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \Rightarrow n(S) = 10$$

الف: $A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow n(A) = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

ب: $B = \{3, 5, 7\} \Rightarrow n(B) = 3 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{10}$

ج: $C = \underbrace{\{2, 4, 6, 8, 10\}}_{\text{اعداد زوج}} \cup \underbrace{\{5, 7\}}_{\text{اعداد بزرگتر از ۴}} = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \Rightarrow n(C) = 8 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

اعداد ۸ و ۱۰ تکراری بودند پس فقط یکبار آنها را می‌نویسیم

محاسبه احتمال به کمک پیشامد متمم



اگر $P(A)$ احتمال وقوع پیشامد A در فضای نمونه S باشد، در این صورت احتمال رخ ندادن این پیشامد را با $P(A')$ نمایش می‌دهیم و خواهیم داشت:

$$P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow \begin{cases} P(A') = 1 - P(A) \\ P(A) = 1 - P(A') \end{cases}$$

برای مثال: احتمال اینکه فردا باران بیاید $\frac{1}{3}$ است. احتمال اینکه فردا باران نیاید چقدر است؟
 $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

تذکره: کلمات لاقفل، حداقل، نباشد و حداکثر نشانه متمم مجموعه است، یعنی متمم حالت خواسته شده را حساب و از ۱ کم می‌کنیم.

برای مثال: در یک ظرف ۵ گوی قرمز از ۱ تا ۵ و چهار گوی آبی از ۱ تا ۴ قرار دارند، به طور تصادفی از هر رنگ یک گوی خارج می‌کنیم. با کدام احتمال لاقفل شماره یکی از آن‌ها ۲ است؟

$$n(S) = \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} = 5 \times 4 = 20$$

قرمز آبی

لاقفل شماره یکی از آن‌ها ۲ باشد، متمم آن یعنی، اصلاً ۲ نباشد و اعداد دیگر باشند:

$$n(A') = \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} = 4 \times 3 = 12 \Rightarrow P(A') = \frac{12}{20} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{12}{20} = \frac{20-12}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

قرمز آبی

محاسبه احتمال رخ دادن $A \cup B$ 

اگر A و B دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه S باشن فرمول مقابل نحوه محاسبه $P(A \cup B)$ را نشان میدهد.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0$$

البته اگر A و B ناسازگار باشند $A \cap B$ برابر $\emptyset$ خواهد بود و در نتیجه داریم:

پس در این حالت فرمول بالا به شکل $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ تبدیل خواهد شد.

مثال

با فرض آن که $P(A') = \frac{3}{5}$ و $P(B') = \frac{1}{4}$ و همچنین $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$ باشند، حاصل $P(A \cup B)$ را بدست آورید.
 پاسخ: ما به $P(A)$ و $P(B)$ احتیاج داریم پس باید حساب کنیم.

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}, \quad P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} = \frac{16+20-15}{40} = \frac{21}{40}$$

استراتژی محاسبه احتمال در مسائل تاریخ تولد



بعضی سوال در مورد ارتباط زمان تولد چند نفر با هم صحبت می‌کنید در این جور سوالات باز هم از اصل ضرب استفاده می‌کنیم یعنی به تعداد آدم‌ها خانه‌های خالی می‌کشیم و با توجه به متن سوال، آن‌ها را پر می‌کنیم. اینجا هم اگر کلمه لاقفل دیدید یعنی از پیشامد متمم باید استفاده کنید.



مثال

خانواده‌ای ۳ فرزند دارد با چه احتمالی:

(الف) هر ۳ نفر در فصل بهار متولد شده‌اند؟

(ب) هر ۳ نفر در یک فصل متولد شده‌اند؟

پاسخ: هر سال ۴ فصل دارد. پس تعداد عضوهای فضای نمونه برابر با:

$$n(S) = \overset{\text{نفر سوم}}{\boxed{4}} \times \overset{\text{نفر دوم}}{\boxed{4}} \times \overset{\text{نفر اول}}{\boxed{4}} = 4 \times 4 \times 4$$

(الف) برای هر ۳ نفر، فقط یک انتخاب (حالت) وجود دارد:

$$\overset{\text{نفر سوم}}{\boxed{1}} \overset{\text{نفر دوم}}{\boxed{1}} \overset{\text{نفر اول}}{\boxed{1}} \Rightarrow n(A) = 1 \times 1 \times 1 = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4 \times 4 \times 4} = \frac{1}{64}$$

(ب) نفر اول برای به دنیا آمده ۴ تا انتخاب دارد. ولی نفرات بعدی فقط ۱ انتخاب دارند یعنی باید از فصل تولد نفر اول تبعیت کنند

$$\overset{\text{نفر اول}}{\boxed{4}} \overset{\text{نفر دوم}}{\boxed{1}} \overset{\text{نفر سوم}}{\boxed{1}} \Rightarrow n(A) = 4 \times 1 \times 1 = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{4 \times 4 \times 4} = \frac{1}{16}$$

همون فصل که نفر اول به دنیا آمده است

(ج) باید فصل‌های تولد مختلف باشند پس بعد از پر کردن هر خانه، یکی از فصل‌ها رو به دلخواه حذف می‌کنیم:

$$\overset{\text{نفر اول}}{\boxed{4}} \overset{\text{نفر دوم}}{\boxed{3}} \overset{\text{نفر سوم}}{\boxed{2}} \Rightarrow n(A) = 4 \times 3 \times 2 \Rightarrow P(A) = \frac{4 \times 3 \times 2}{4 \times 4 \times 4} = \frac{3}{8}$$

بهار، تابستان، پاییز، زمستان

(د) کلمه «حداقل» نشان می‌دهد که باید از متمم استفاده کنیم:

هیچ کدام در یک فصل به دنیا نیامده باشند (همه فصل‌ها مختلف باشند) $\xrightarrow{\text{متم}}$ لاکل ۲ نفرشان در یک فصل به دنیا آمده باشند

A' همون قسمت «ج» است که حل کردیم بنابراین داریم:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

سوالات نهایی



ردیف	سوال	بازم	تاریخ
۵۸	درستی یا نادرستی جمله‌ی زیر را مشخص کنید. تعداد اعضای فضای نمونه‌ی آزمایشی تصادفی پرتاب یک سکه و یک تاس، با هم دارای ۸ عضو است.	۰۷/۲۵	۱۴۰۲ خرداد



شهریور ۱۴۰۳	۰/۲۵	۵۹	گزینه صحیح را انتخاب کنید. فرض کنید A, B, C سه پیشامد غیر تهی در فضای نمونه S باشد. عبارت مجموعه‌ای مربوط به پیشامد، «فقط پیشامد A رخ دهد و پیشامدهای B یا C رخ ندهد»، کدام است؟ (۱) $A - (B \cap C)$ (۲) $A - (B \cup C)$ (۳) $(B \cup C) - A$ (۴) $(B \cap C) - A$
شهریور ۱۴۰۳	۱/۷۵	۶۰	خانواده‌ای دارای سه فرزند است. الف) پیشامد A این که فقط دو فرزند پسر باشد را مشخص کنید. ب) پیشامد B این که فرزندان هم‌جنس باشند را مشخص کنید. پ) آیا دو پیشامد A و B ناسازگارند؟ چرا؟
شهریور ۱۴۰۳	۲	۶۱	انجمن اولیا و مربیان یک مدرسه شامل ۴ زن و ۶ مرد است. می‌خواهیم گروهی سه نفره انتخاب کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال این که: الف) دو نفر مرد و یک نفر زن باشند. ب) حداقل دو نفر زن باشند.
خرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵	۶۲	درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید. هرگاه A و B دو پیشامد ناتهی در فضای نمونه S باشند، به طوری که $A - B = A$ و $B - A = B$. در این صورت، دو پیشامد A و B ناسازگار هستند. (درست - نادرست)
خرداد ۱۴۰۳	۰/۵	۶۳	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، می‌گویند. ب) احتمال اینکه از بین سه نفر دوست، تولد هیچ دوتای آنها در یک فصل نباشد، برابر است با
خرداد ۱۴۰۳	۱	۶۴	هر یک از اعداد طبیعی ۱ تا ۹ را روی کارت‌هایی می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به طور تصادفی یک کارت برمی‌داریم. پیشامدهای زیر را مشخص کنید. الف) عدد روی کارت، اول باشد ولی بزرگتر از ۴ نباشد. ب) عدد روی کارت، مجذور کامل و فرد باشد.
خرداد ۱۴۰۳	۲	۶۵	گروه المپیاد ادبی شهری، شامل ۵ دانش‌آموز دختر و ۴ دانش‌آموز پسر است. می‌خواهیم به طور تصادفی ۳ نفر را از بین آنها انتخاب کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه، الف) دو دختر و یک پسر انتخاب شود. ب) حداقل ۲ پسر انتخاب شده باشد.
مهر ۱۴۰۳	۰/۲۵	۶۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. احتمال اینکه فاطمه به سینما برود $\frac{۶}{۱۰}$ است بنابراین احتمال اینکه فاطمه به سینما نرود $\frac{۴}{۱۰}$ است. (درست - نادرست)

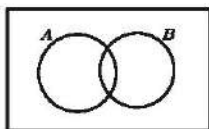


۶۷	گزینه صحیح را انتخاب کنید. اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند در این صورت $P(A \cap B)$ برابر است با: $\frac{1}{2}(1)$ $1(2)$ $\frac{1}{4}(3)$ $0(4)$	۱۴۰۲ دی	۰/۲۵
۶۸	یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم مطلوبست: الف) پیشامد اینکه سکه پشت یا تاس حداقل ۵ بیاید را بنویسید. ب) احتمال اینکه سکه رو و تاس عدد اول بیاید را محاسبه کنید.	۱۴۰۲ دی	۱/۵
۶۹	با حروف کلمه «دانش پژوه» یک واژه شش حرفی با حروف متمایز می‌سازیم، با کدام احتمال، واژه ساخته شده به حروف نقطه‌دار ختم می‌شود؟	۱۴۰۲ دی	۱/۵
۷۰	خانواده‌ای دارای ۲ فرزند است. الف) فضای نمونه‌ای مناسب برای ترکیب جنسیتی فرزندان این خانواده را بنویسید. ب) پیشامد A که در آن هر ۲ فرزند خانواده از یک جنس باشند را بنویسید.	۱۴۰۲ شهریور	۱/۵
۷۱	از جعبه‌ای که شامل ۳ مداد و ۵ خودکار است، به طور تصادفی ۴ شیء خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه حداقل ۳ شیء انتخابی خودکار باشد.	۱۴۰۲ شهریور	۱/۵
۷۲	احتمال اینکه دانش‌آموزی فردا به کتابخانه‌ی مدرسه نرود برابر با $\frac{7}{25}$ است. چقدر احتمال دارد او فردا به کتابخانه مدرسه برود؟	۱۴۰۲ شهریور	۰/۵
۷۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. پیشامد $A - B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد B رخ دهد و پیشامد A رخ ندهد.	۱۴۰۲ خرداد	۰/۲۵
۷۴	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. اگر پیشامد A با فضای نمونه‌ای S برابر باشد، A را یک پیشامد می‌گویند.	۱۴۰۲ خرداد	۰/۲۵
۷۵	دو تاس را همزمان پرتاب می‌کنیم؛ هر یک از پیشامدهای زیر را مشخص کنید. الف) حاصل ضرب اعداد رو شده از دو تاس بزرگتر یا مساوی ۳۰ باشد. ب) مجموعه اعداد رو شده از دو تاس برابر ۱۳ باشد.	۱۴۰۲ خرداد	۱
۷۶	می‌خواهیم از بین ۵ فوتبالیست و ۴ والیبالیست یک گروه ۶ نفره به طور تصادفی تشکیل دهیم مطلوبست احتمال اینکه: الف) حداقل ۴ نفر فوتبالیست باشند. ب) به تعداد مساوی از هر دو رشته ورزشی انتخاب شوند.	۱۴۰۲ خرداد	۲



۷۷	جای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید. مجموعه تهی را پیشامد..... می نامند.	۰/۲۵	۱۴۰۱
۷۸	دو تاس را با هم پرتاب می کنیم، A را پیشامد آنکه اعداد آمده از دو تاس یکسان باشند و B را پیشامد آنکه مجموع اعداد آمده از دو تاس مساوی ۸ باشند، در نظر می گیریم: الف) پیشامدهای A و B را مشخص کنید. ب) آیا A و B ناسازگارند؟ چرا؟	۱/۵	۱۴۰۱
۷۹	از جعبه ای که شامل ۵ مهره آبی و ۷ مهره قرمز است، ۳ مهره به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که حداکثر ۲ مهره از مهره های انتخاب شده، قرمز باشند.	۱/۵	۱۴۰۱
۸۰	اگر C و B و A سه پیشامد از فضای نمونه ای S باشند، پیشامد آنکه " A یا C رخ دهد ولی B رخ ندهد" را در شکل مقابل سایه بزنید.	۰/۵	۱۴۰۱
۸۱	جای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید. به هریک از نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی، می گویند.	۰/۲۵	شعبه ۱۴۰۱
۸۲	در پرتاب یک سکه به همراه یک تاس: الف: فضای نمونه ای چند عضو دارد؟ ب: پیشامد رو آمدن سکه و زوج بودن تاس را مشخص کنید.	۱/۲۵	شعبه ۱۴۰۱
۸۳	از بین ۴ کارمند زن و ۶ کارمند مرد می خواهیم یک تیم بازرسی ۳ نفره انتخاب کنیم. احتمال اینکه یک زن و دو مرد انتخاب شود را بدست آورید.	۲	شعبه ۱۴۰۱
۸۴	درستی یا نادرستی جملی زیر را مشخص کنید. احتمال رو شدن عدد ۷ در پرتاب یک تاس برابر صفر است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۱
۸۵	گزینه صحیح را انتخاب کنید. الف) فضای نمونه برای ترکیب جنسیت فرزندان خانواده ای با ۳ فرزند، چند عضو دارد؟ ب) احتمال اینکه فردا بارانی باشد، ۱/۰ است. احتمال اینکه فردا بارانی نباشد، چقدر است؟	۰/۵	خرداد ۱۴۰۱
	۶ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۰/۰۹ (۱) ۰/۱ (۲) ۰/۹ (۳) ۰/۹۹ (۴)		

۸۶	کدام یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام یک قطعی است؟ (الف) مشاهده عدد ۳ در پرتاب یک تاس که روی هر شش وجه آن، عدد ۳ حک شده باشد. (ب) نتیجه یک آزمون چهار گزینه‌ای که نیمی از سوالات آن را شانسی پاسخ داده‌ایم.	۰/۵	خرداد ۱۴۰۱
۸۷	از بین ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، به تصادف ۲ مهره انتخاب می‌کنیم. احتمال این را که هر دو مهره سفید باشد، محاسبه کنید.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۱
۸۸	جای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید. (الف) مجموعه زیر مجموعه همه مجموعه‌هاست.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۰
۸۹	درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید. (الف) فضای نمونه‌ای پرتاب سه سکه ۹ عضو دارد. (ب) در پرتاب یک تاس، احتمال وقوع عددی بیش از شش یک پیشامد حتمی است.	۰/۵	دی ۱۴۰۰
۹۰	در پرتاب دو تاس، پیشامد «مجموع اعداد رو شده بزرگتر از ۱۰ باشد» را بنویسید.	۰/۷۵	دی ۱۴۰۰
۹۱	هر یک از اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به طور تصادفی یک کارت را بر می‌داریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.	۰/۷۵	دی ۱۴۰۰
۹۲	می‌خواهیم از جعبه‌ای شامل ۵ مهره قرمز و ۴ مهره آبی، سه مهره به تصادف خارج کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال آن که ۲ مهره آبی و ۱ مهره قرمز باشد.	۱	دی ۱۴۰۰
۹۳	جای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید. پیشامد A' زمانی رخ می‌دهد که پیشامد رخ ندهد.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۰
۹۴	احتمال پیشامد نشدنی برابر کدام است؟ الف: صفر ب: ۱ ج: $\frac{1}{2}$ د: $\frac{1}{6}$	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۰
۹۵	در شکل زیر پیشامد خواسته شده را سایه بزنید. "پیشامد B یا A رخ دهد"	۰/۵	شهریور ۱۴۰۰





شماره ۱۴۰۰	۱	۹۶ یک سکه و یک تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. الف: فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید. ب: پیشامد A که در آن سکه پشت و تاس عدد فرد بیاید را بنویسید.
شماره ۱۴۰۰	۱	۹۷ خانواده‌ای دارای ۲ فرزند است. مطلوبست محاسبه احتمال اینکه: الف: هر دو فرزند دختر باشند. ب: همه فرزندان دارای یک جنسیت باشند.
خرداد ۱۴۰۰	۵/۰	۹۸ جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید. الف: اگر پیشامد A حتمی باشد، احتمال آن برابر با است. ب: هرگاه A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری که در این صورت پیشامدهای A و B را ناسازگار می‌گوییم.
خرداد ۱۴۰۰	۷۵/۰	۹۹ از بین ۲ دانش آموز رشته ریاضی و ۳ دانش آموز رشته تجربی و ۲ دانش آموز رشته انسانی، ۳ دانش آموز را به تصادف برای اردوی مشهد انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد از هر رشته یک دانش آموز انتخاب شود؟
دی ۹۹	۲۵/۰	۱۰۰ درستی یا نادرستی از عبارت زیر را مشخص کنید. تهی را یک پیشامد حتمی می‌نامیم.
دی ۹۹	۱	۱۰۱ در کیسه‌ای ۴ مهره سفید، ۳ مهره زرد و ۲ مهره آبی وجود دارد. ۳ مهره به تصادف از آن خارج می‌کنیم. مطلوبست احتمال اینکه رنگ سه مهره متفاوت باشد.
دی ۹۹	۱	۱۰۲ یک تاکسی دارای ۴ سرشیش است. مطلوبست محاسبه احتمال اینکه هر ۴ نفر در ماه خرداد متولد شده باشند.
خرداد ۹۹	۷۵/۰	۱۰۳ جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید. الف: اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد، دو پیشامد A و B را می‌گوییم. ب: فضای نمونه پرتاب یک تاس و یک سکه عضو دارد. پ: پیشامد وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.
خرداد ۹۹	۷۵/۰	۱۰۴ درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید. الف: خارج کردن دو مهره سفید از جعبه‌ای که در آن ۵ مهره سفید است، یک پیشامد حتمی است. ب: در فضای نمونه پرتاب یک تاس، پیشامد رو شدن عددی بزرگتر از ۶ نشدنی است. پ: نتیجه‌ی حل معادله $(x+1)^2 = 0$ یک پدیده تصادفی است.



۱۰۵	خانواده‌ای دارای سه فرزند است. الف: فضای نمونه‌ای برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده بنویسید. ب: مطلوبست محاسبه احتمال آنکه هر سه فرزند از یک جنسیت نباشند.	۱	خرداد ۹۹
۱۰۶	یک تاس و یک سکه را پرتاب می‌کنیم. مطلوبست محاسبه احتمال اینکه تاس حداکثر ۳ یا سکه رو بیاید	۰/۵	خرداد ۹۹
۱۰۷	درستی یا نادرستی هرگزینه را مشخص کنید. الف: پیشامد A' وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ می‌دهد. ب: در پرتاب یک تاس و یک سکه، فضای نمونه‌ای ۱۲ عضو دارد. پ: اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد، در این صورت دو پیشامد A و B را ناسازگار گویند.	۰/۷۵	خرداد ۹۹ خ
۱۰۸	احتمال اینکه فردا بارانی باشد، برابر $\frac{3}{8}$ است. مطلوبست، محاسبه احتمال اینکه فردا بارانی نباشد.	۱	خرداد ۹۹ خ
۱۰۹	دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. مطلوبست محاسبه‌ی احتمال اینکه مجموع اعداد رو شده بزرگتر از ۹ باشد.	۱/۲۵	خرداد ۹۹ خ
۱۱۰	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. پیش بینی نتیجه‌ی بازی فوتبال بین دو تیم، قبل از بازی یک پدیده‌ی تصادفی است.	۰/۲۵	خرداد ۹۹ خ
۱۱۱	جای خالی را با پاسخ درست کامل کنید. در پرتاب سه سکه باهم، فضای نمونه‌ای دارد.	۰/۲۵	خرداد ۹۹ خ
۱۱۲	انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ عضو دارد. در یک رای‌گیری، ۵ نفر رای موافق، ۳ نفر رای مخالف و ۲ نفر رای ممتنع داده‌اند. از بین آنها ۳ نفر به طور تصادفی انتخاب می‌شوند. احتمال اینکه نظر هیچ دو نفری از آنها مانند هم نباشند، چقدر است؟	۱/۵	خرداد ۹۹ خ
۱۱۳	جایهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید. الف: به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی می‌گوییم. ب: فضای نمونه‌ای پرتاب سه سکه عضو دارد. پ: پیشامد وقتی رخ می‌دهد که پیشامد B و A هر دو رخ دهند.	۰/۷۵	شهریور ۹۹
۱۱۴	درستی یا نادرستی هریک عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف: نتیجه‌ی یک آزمون چهارگزینه‌ای که نیمی از سؤالات را شانسی پاسخ داده‌ایم، یک پیشامد حتمی است. ب: تهی زیر مجموعه‌ی تمام مجموعه است.	۰/۵	شهریور ۹۹



شوربدر ۹۹	۱/۵	می‌خواهیم از بین ۵ دانش آموز پایه دوازدهم و ۴ دانش آموز پایه یازدهم، یک تیم ۶ نفره‌ی والیبال تشکیل دهیم. مطلوبست، احتمال آنکه ۴ نفر از اعضای تیم، دانش آموز پایه‌ی دوازدهم و ۲ نفر از اعضای تیم، دانش آموز پایه‌ی یازدهم باشند؟
شوربدر ۹۹	۱	هر یک از اعداد فرد طبیعی ۱ تا ۱۵ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به طور تصادفی یک کارت برمی‌داریم. مطلوبست محاسبه‌ی احتمال اینکه عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.
شوربدر ۹۹	۱/۵	در پرتاب دو تاس پیشامدهای زیر را مشخص کنید. الف: مجموع اعداد رو شده مساوی ۱۰ باشد. ب: اعداد رو شده از هر دو تاس یکسان و هر دو زوج باشند.
شوربدر ۹۹	۱	احتمال اینکه ریحانه امشب سریال شبکه‌ی یک سیما را تماشا نکند برابر با $\frac{۳۲}{۹۹}$ است. مطلوبست محاسبه‌ی احتمال اینکه ریحانه سریال را تماشا کند.
خرداد ۹۸	۱	تاسی را پرتاب می‌کنیم. پیشامدهای زیر را مشخص کنید. الف: پیشامد اینکه عدد رو شده زوج و اول باشد. ب: پیشامد اینکه عدد رو شده اول باشد ولی زوج نباشد.
خرداد ۹۸	۱	از جعبه‌ای که شامل ۹ سیب سالم و ۲ سیب لکه دار است، ۴ سیب را به طور تصادفی بر می‌داریم. مطلوبست محاسبه‌ی احتمال اینکه سه سیب سالم و یک سیب لکه دار باشد.
خرداد ۹۸	۱/۵	خانواده‌ای دارای ۲ فرزند است. الف: فضای نمونه‌ای برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده را بنویسید. ب: احتمال آنکه هر دو فرزند از یک جنس باشد را به دست آورید. ج: احتمال آنکه حداکثر یک فرزند پسر باشد را بدست آورید.
تیر ۹۸	۱/۵	یک سکه و یک تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. الف: فضای نمونه‌ای ای پدیده تصادفی را با اعضایش بنویسید. ب: احتمال آنکه تاس زوج بیاید، چقدر است؟ ج: احتمال آنکه تاس فرد و سکه پشت بیاید، چقدر است؟
شوربدر ۹۸	۲	دو تاس را پرتاب می‌کنیم. ابتدا هریک از پیشامدهای زیر را نوشته، سپس احتمال هر کدام را محاسبه کنید. الف: مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر ۱۰ باشد. ب: اعداد رو شده از هر دو تاس بر ۳ بخش پذیر باشد.
دی ۹۸	۱/۵	تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم، پیشامدهای زیر را مشخص کنید. الف: پیشامد اینکه مجموع دو عدد رو شده برابر چهار باشد. ب: پیشامد اینکه عدد رو شده در هر دو تاس یکسان باشد، ولی زوج نباشد.



۱۲۵	از جعبه‌ای شامل ۷ مهره قرمز و ۳ مهره سفید است، ۳ مهره را به طور تصادفی برمی داریم. مطلوبست محاسبه‌ی اینکه دو مهره قرمز و یک مهره سفید باشد.	۲	دی ۹۸
۱۲۶	یک تاس و یک سکه را باهم پرتاب می‌کنیم. الف: فضای نمونه‌ای را بنویسید. ب: احتمال آنکه سکه پشت و تاس زوج بیاید را به دست آورید. پ: احتمال آنکه عدد ظاهر شده برای تاس حداکثر ۳ باشد را بدست آورید.	۲	دی ۹۸
۱۲۷	دو تاس را پرتاب می‌کنیم. پیشامدهای زیر را مشخص کنید. الف: اعداد رو شده از دو تاس مانند هم باشند. ب: حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس کمتر از ۴ باشد.	۱/۵	دی ۹۷
۱۲۸	خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. الف: فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان‌ای خانواده را بنویسید. ب: احتمال آنکه هر سه فرزند از یک جنس باشند را بدست آورید.	۱/۵	دی ۹۷
۱۲۹	از جعبه‌ای که شامل ۸ سیب سالم و ۴ سیب لکه دار است، ۲ سیب را به طور تصادفی برمی داریم. مطلوبست محاسبه‌ی اینکه: الف: هر دو سیب سالم باشند. ب: یک سیب سالم و یک سیب لکه دار باشد.	۲	دی ۹۷

درس ۲

احتمال

یادداشت ضروری دانش آموز:

math-pilevar.ir



درس

۳

چرخه آمار در حل مسائل

خلاصه درسنامه

نمای کلی از چرخه حل مسئله به کمک آمار



- ۱ بیان مسئله: ابتدا مسئله‌ای رو که در دنیای واقعی وجود دارد، به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می‌کنیم.
- ۲ طرح و برنامه‌ریزی: سپس راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم و به نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.
- ۳ گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها: بعد از آن به گردآوری داده‌ها می‌پردازیم و تا حد ممکن از درستی اون‌ها مطمئن می‌شویم.
- ۴ تحلیل داده‌ها: سپس با استفاده از شاخص‌ها، نمودارها و مفاهیمی که آموخته‌ایم، نتایج رو متناسب با هدف‌های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها گزارش می‌کنیم.
- ۵ بحث و نتیجه‌گیری: در آخر به تفسیر نتایج به دست آمده می‌پردازیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.

گام‌های چرخه آمار در حل مسائل



گام ۱ بیان مسئله

طرح یک پرسش دقیق و شفاف، مهمترین گام برای رسیدن به پاسخ است.

گام ۲ طرح و برنامه‌ریزی

اندازه‌گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است. در اندازه‌گیری، در واقع سعی می‌کنیم اطلاعات توصیفی (کیفی) را تا حد ممکن به اطلاعات کمی (عددی) تبدیل کنیم.

در مرحله طرح و برنامه‌ریزی علاوه بر توافق در مورد چگونگی اندازه‌گیری متغیرها، درباره چگونگی نمونه‌گیری و همچنین شیوه تحلیل داده‌ها تصمیم‌گیری می‌شود.

گام ۳ گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها

در هر مطالعه ممکن است در مرحله اندازه‌گیری، گردآوری یا ثبت داده‌ها و یا وارد کردن داده‌ها در نرم‌افزار اشتباهی رخ بدهد یا بررسی دقیق داده‌ها می‌شود برخی از این اشتباهات را اصلاح کرد.

گام ۴ تحلیل داده‌ها

در این مرحله داده‌ها تحلیل شده و نتایج ارائه می‌شوند منظور از تحلیل داده‌ها در واقع صرفاً گزارش شاخص‌ها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج آماری است.

گام ۵ بحث و نتیجه‌گیری

پس از تحلیل داده‌ها، باید بتوانیم با تفسیر نتایج، پاسخی برای مسئله اصلی پیدا کنیم.

گام اول	گام دوم	گام سوم	گام چهارم	گام پنجم
بیان مسئله	طرح و برنامه‌ریزی	گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها	تحلیل داده‌ها	بحث و نتیجه‌گیری
- فهم مسئله - تعریف دقیق مسئله	- شیوه اندازه‌گیری - روش نمونه‌گیری - روش کار	- گردآوری - سازماندهی - پاک‌سازی	- مرتب کردن داده‌ها - معیارها - نمودارها و جدول‌ها	- تفسیر نتایج - نتیجه‌گیری - نقد و بررسی - ایده‌های جدید



نکته: تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه می‌گویند هرچه اندازه جامعه بزرگتر باشد، برای این که نمونه بتواند به خوبی بیانگر ویژگی‌های جامعه باشد، اندازه نمونه بزرگتری لازم است ضمناً هر چه پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد، برای حصول اطمینان از حضور تنوع در نمونه، اندازه نمونه بزرگتری لازم داریم.

مثال

در کدام مورد اندازه نمونه بزرگتری لازم است؟

- ① سن دانش‌آموزان یک کلاس
- ② وزن بچه‌های یک مدرسه
- ③ مدت زمان مطالعه افراد یک محله
- ④ میزان آب مصرفی خانواده‌های یک کشور

قطعاً پراکندگی افراد در کل کشور و همچنین تعداد اعضای آنها بسیار بیشتر از سایر گزینه‌هاست پس برای بررسی آب مصرفی خانواده‌های کشور، نیاز به نمونه بزرگتری خواهیم داشت.



تذکر: ① برای توصیف داده‌های کمی باید هر دو شاخص مرکزی و پراکندگی گزارش شوند شاخص‌های مرکزی مانند میانگین و میانه به ما کمک می‌کنند تا بدانیم داده‌ها در کجا متمرکز هستند و شاخص‌های پراکندگی مانند دامنه تغییرات، انحراف معیار و دامنه میان چارکی به ما کمک می‌کنند تا بدانیم داده‌ها چگونه متراکم یا پراکنده شده‌اند.

② اگر داده یا داده‌های دورافتاده داشته باشیم، میانگین و انحراف معیار، شاخص‌های مناسبی برای توصیف داده‌ها نخواهند بود و در این مواقع بهتره که از میانه و دامنه میان چارکی استفاده کنیم.

واریانس و انحراف معیار



واریانس: واریانس همان میانگین مجذورات اختلاف داده‌ها از میانگین است. واریانس به کمک رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$(واریانس) = \sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

به جذر واریانس، انحراف معیار گفته می‌شود. ضمناً انحراف معیار را با نماد σ نمایش می‌دهند (σ سیگما خوانده می‌شود).

مثال

واریانس و انحراف معیار داده‌های ۱۳، ۱۸، ۱۶، ۲۷، ۲۱، ۲۵ را بدست آورید.

پاسخ:

$$\bar{x} = \frac{13 + 18 + 16 + 27 + 21 + 25}{6} = \frac{120}{6} = 20$$

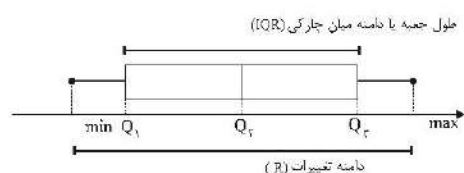
$$S^2 = \frac{(13-20)^2 + (18-20)^2 + (16-20)^2 + (27-20)^2 + (21-20)^2 + (25-20)^2}{6}$$

$$= \frac{49 + 4 + 16 + 49 + 1 + 25}{6} = \frac{144}{6} = 24$$

$$S = \sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$$

انحراف معیار هم، جذر واریانس است، پس:

نمودار جعبه‌ای



نمودار جعبه‌ای روشی سودمند برای نمایش دامنه‌ها (دامنه تغییرات و دامنه میان چارکی) و چارک‌های داده‌هاست. در شکل زیر محل قرارگیری چارک‌ها و مقادیر min و max داده‌ها نشان داده شده است.

نکته: اگر داده دورافتاده داشته باشیم بهتر است از نمودار جعبه‌ای استفاده کنیم.

در نمودار جعبه‌ای که گاهی اوقات به آن نمودار جعبه و سیل هم گفته می‌شود ۵ عدد اصلی زیر را مشخص می‌کنیم:

۱) کوچکترین داده (min)

۲) چارک اول (Q_1)

۳) چارک دوم (Q_2) یا میانه

۴) چارک سوم (Q_3)

۵) بزرگترین داده (max)

مثال

نمودار جعبه‌ای داده‌های ۵، ۶، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۸، ۲۰، ۲۱ را رسم کنید.

پاسخ: چارک‌ها را پیدا کرده و نمودار جعبه‌ای را رسم می‌کنیم:

۵، ۶، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۸، ۲۰، ۲۱

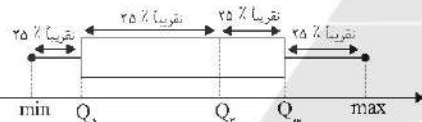
$$Q_1 = \frac{6+7}{2} = 6.5$$

$$Q_2 = 10$$

$$Q_3 = \frac{13+18}{2} = 15.5$$



نحوه پخش داده‌ها در نمودار جعبه‌ای: داده‌ها را به ۴ قسمت تقسیم می‌کنند که هر قسمت، شامل تقریباً ۲۵ درصد داده‌هاست. با توجه به نمودار داده شده می‌توان گفت:



۱) تقریباً ۵۰٪ داده‌ها بین Q_1 و Q_3 هستند (داخل جعبه)

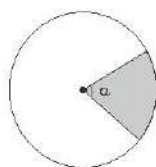
۲) تقریباً ۲۵٪ داده‌ها قبل از Q_1 هستند.

۳) تقریباً ۲۵٪ داده‌ها بعد از Q_3 هستند.

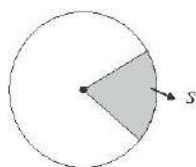
۴) تقریباً ۷۵٪ داده‌ها بعد از Q_1 هستند.

۵) تقریباً ۷۵٪ داده‌ها قبل از Q_3 هستند.

نمودار دایره‌ای



$$\alpha = \frac{f}{n} \times 360^\circ \text{ زاویه مرکزی}$$



$$S = \frac{f}{n} \times 100 \text{ درصد مساحت}$$

نمودارهای دایره‌ای یکی از پرکاربردترین نمودارها در آمار است. از این نمودار برای نمایش متغیرهای کیفی استفاده می‌شود. زاویه مربوط به هر دسته و درصد مساحت مربوط به هر دسته از روابط زیر به دست می‌آید:

تذکره: در نمودار دایره‌ای، به جای فرمول‌های بالا می‌توان از تناسب هم استفاده کرد.

مثال

در یک نمودار دایره‌ای مربوط به گروه‌های خونی افراد، زاویه متناظر با گروه خونی AB عدد 72° را نشان می‌دهد که اگر کل جمعیت مورد مطالعه ۸۰۰ نفر باشد، چند نفر گروه خونی AB دارند؟
روش اول (استفاده از فرمول):

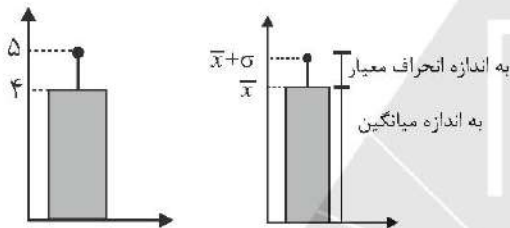
$$\alpha = \frac{f}{n} \times 360^\circ \quad \frac{\alpha = 72^\circ}{n = 800} \rightarrow 72^\circ = \frac{f}{800} \times 360^\circ \Rightarrow 360^\circ f = 72^\circ \times 800 \Rightarrow f = \frac{72^\circ \times 800}{360^\circ} = 160$$

روش دوم (بدون استفاده از فرمول): کافیست با یک عمل تناسب، در دو ستون مختلف، تعداد را با زاویه مقایسه کنیم

کل گروه خونی AB	زاویه 360°	تعداد ۸۰۰	زاویه x
	72°		x

$$\Rightarrow x = \frac{72^\circ \times 800}{360^\circ} = 160$$

بررسی یک نمودار مهم (نمودار مستطیل و میله خطا)



در داده‌هایی که میانگین و انحراف معیار شاخص مناسبی برای توصیف اونها هستند، می‌توانیم از نموداری استفاده کنیم که ارتفاع مستطیل اون، نشون دهنده میانگین و میله خطای روی اون، به اندازه انحراف معیار، روی مستطیل بالا آورده است.

مثلاً از نمودار مقابل نتیجه می‌گیریم که $\bar{x} = 4$ و $\sigma = 1$ است:

مثال

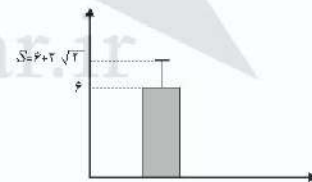
برای داده‌های ۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰ نمودار مستطیل و میله خطا را رسم کنید.

پاسخ:

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}} = \frac{2+4+6+8+10}{5} = 6$$

$$\sigma^2 = \frac{(2-6)^2 + (4-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (10-6)^2}{5}$$

$$= \frac{16+4+0+4+16}{5} = \frac{40}{5} = 8 \Rightarrow \sigma = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$$



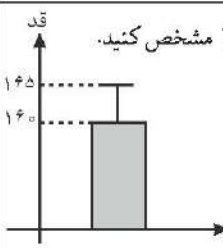
نکته: برای توصیف داده‌های کیفی (اسمی یا ترتیبی) گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.

مثال

دو مدرسه با تعداد دانش‌آموز مساوی داریم. مدرسه اول ۳۰ درصد قبولی‌هایش رشد کرده و مدرسه دوم ۵۰ درصد قبولی‌هایش افزایش یافته است. کدام مدرسه برای تحصیل مناسب‌تر است؟ (عملکرد کدام مدرسه بهتر است؟)
پاسخ: به نظر می‌رسد، مدرسه اول بهتر کار کرده ولی این فقط یک قضاوت زودهنگام است چون متغیر «عملکرد» یک متغیر کیفی و درصد تنها برای مقایسه عملکرد دو مدرسه کافی نیست بلکه تعداد هم باید گزارش شود (تعداد دانش‌آموزان دو مدرسه باید یکسان باشد)

سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۱۳۰	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. درگام از چرخه آمار، داده‌ها را تحلیل و نتایج را ارائه می‌دهیم.	۰/۲۵	شعبان ۱۴۰۳
۱۳۱	گزینه صحیح را انتخاب کنید. اگر داده دور افتاده نداشته باشیم، شاخص مرکزی و پراکندگی مناسب برای توصیف داده‌ها کدام است؟ (۱) میانگین - انحراف معیار (۲) میانگین - دامنه میان چارگی (۳) میانه - دامنه میان چارگی (۴) میانه - انحراف معیار	۰/۲۵	شعبان ۱۴۰۳
۱۳۲	نمودار مقابل مربوط به قد دانش‌آموزان یک دبیرستان است. با توجه به نمودار، میانگین و انحراف معیار را مشخص کنید. 	۰/۵	شعبان ۱۴۰۳
۱۳۳	برای بررسی وضعیت اجتماعی - اقتصادی خانوارهای یک شهر، در کدام یک از شیوه‌های نمونه‌گیری زیر، همه‌ی قشرهای جامعه شانس حضور ندارند؟ چرا؟ الف) انتخاب تصادفی خانوارها بر اساس رقم <u>اول</u> تلفن خانه‌ها ب) انتخاب تصادفی خانوارها بر اساس رقم <u>آخر</u> تلفن خانه‌ها	۰/۷۵	شعبان ۱۴۰۳
۱۳۴	گزینه صحیح را انتخاب کنید. اگر اندازه‌گیری وزن افراد با دو واحد متفاوت (کیلوگرم و پوند) انجام شده باشد، اجرای نادرست کدام گام از چرخه آمار است؟ (۱) بیان مسئله (۲) طرح و برنامه‌ریزی (۳) گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها (۴) تحلیل داده‌ها	۰/۲۵	مهر ۱۴۰۳



۱۳۵	با توجه به نمودارهای جعبه‌ای رسم شده به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) در کدام گروه، گزارش میانگین و انحراف می‌تواند گمراه کننده باشد؟ ب) دامنه میان چارکی کدام گروه بزرگتر است؟ ج) در کدام گروه مقدار میانه و میانگین به هم نزدیک‌ترند؟		۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۳
۱۳۶	جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید. الف) برای توصیف داده‌های گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد. ب) بیان مساله و فهم آن، گام در چرخه آمار است.		۰/۵	دی ۱۴۰۳
۱۳۷	گزینه صحیح را انتخاب کنید. کدام یک از موارد زیر جزء گام تحلیل داده‌ها در چرخه آمار نمی‌باشد. ۱) گزارش معیارها ۲) رسم نمودار ۳) تفسیر داده‌ها ۴) مرتب کردن داده‌ها		۰/۲۵	دی ۱۴۰۳
۱۳۸	برای بررسی میزان مطالعه افراد یک شهر، آیا انتخاب نمونه از بین افراد عضو کتابخانه عمومی آن شهر، روش نمونه‌گیری مناسبی است؟ چرا؟		۰/۵	دی ۱۴۰۳
۱۳۹	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است.		۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۱۴۰	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. مطمئن‌ترین نمودار برای متغیر کمی، است.		۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۱۴۱	گزینه صحیح را انتخاب کنید. کدام گزینه جزء گام بحث و نتیجه‌گیری از چرخه حل مسائل آماری محسوب می‌شود؟ ۱) نقد و بررسی ۲) سازماندهی ۳) شیوه اندازه‌گیری ۴) نمودارها و جدول‌ها		۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۱۴۲	داده‌های ۵، ۲۸، ۵، ۸، ۷، ۶، ۸، ۹، ۷، ۳۰، ۵ و ۶ متوسط ساعت‌های تماشای تلویزیون تعدادی از دانش‌آموزان یک کلاس در هفته را نشان می‌دهد. کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی، برای توصیف داده‌های «ساعت‌های تماشای تلویزیون» مناسب‌تر است؟ چرا؟	۱		شهریور ۱۴۰۳



۱۴۳	گزینه صحیح را انتخاب کنید. الف) کدام گزینه جزء گام تحلیل داده‌ها در چرخه حل مسائل آماری محسوب نمی‌شود؟ (۱) استفاده از نمودارها (۲) مرتب کردن داده‌ها (۳) گزارش معیارها (۴) تفسیر داده‌ها ب) در یک نمودار جعبه‌ای اگر چارک اول برابر ۳ و دامنه میان چارکی آن (IQR) برابر ۱۱ باشد، چارک سوم آن کدام است؟ ۱۴ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۱۵ (۴)	۰/۵	خرداد ۱۴۰۲
۱۴۴	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) در گام پنجم چرخه آمار، نتایج بدست آمده را تفسیر می‌کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم. ب) در شکل مقابل انحراف معیار و میانگین به ترتیب ۶ و ۸ است.	۰/۵	دی ۱۴۰۱
۱۴۵	درصد قبولی دانش‌آموزان دو مدرسه A و B در درس ریاضی، به ترتیب ۶۵ درصد و ۸۰ درصد بوده است. تعداد قبولی دانش‌آموزان کدام مدرسه بیشتر است؟ چرا؟	۰/۷۵	ب ۱۴۰۱
۱۴۶	جای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید. اگر داده‌ها برابر باشند دامنه تغییرات آنها می‌شود.	۰/۲۵	ب ۱۴۰۱
۱۴۷	درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید. برای جامعه آماری با داده دور افتاده، استفاده از میانگین و انحراف معیار کافی است.	۰/۲۵	شعبان ۱۴۰۱
۱۴۸	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. برای توصیف داده‌های کیفی، گزارش درصد باید همیشه با گزارش همراه باشد.	۰/۲۵	شعبان ۱۴۰۱
۱۴۹	در یک مطالعه آماری، برای اندازه‌گیری وزن افراد از دو واحد متفاوت استفاده شده است. الف: این مورد مربوط به اجرای نادرست کدام یک از گام‌های چرخه آمار در حل مسائل است؟ ب: این اجرای نادرست بر کدام گام‌های این چرخه آمار اثر می‌گذارد؟	۱	شعبان ۱۴۰۱
۱۵۰	برای بررسی میزان مطالعه افراد یک شهر، آیا انتخاب نمونه از بین افراد عضو کتابخانه عمومی آن شهر، روش نمونه‌گیری متناسبی است؟ چرا؟	۱	شعبان ۱۴۰۱
۱۵۱	گزینه صحیح را انتخاب کنید. تفسیر نتایج بدست آمده، کدام گام در چرخه حل مسائل آماری است؟ (۱) بیان مسئله (۲) گردآوری داده‌ها (۳) تحلیل داده‌ها (۴) بحث و نتیجه‌گیری	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۱



۱۴۰۱ خرداد	۱/۲۵	۱۵۲ داده‌های زیر، میزان حقوق ماهیانه (بر حسب میلیون تومان) کارمندان یک شرکت خصوصی را نشان می‌دهد: $۱۰, ۱۲, ۳۵, ۸, ۹, ۲۰, ۱۱, ۵, ۶, ۶, ۸$ الف) دامنه تغییرات و میانه داده‌های بالا را به دست آورید. ب) آیا میانه معیار گرایش به مرکز مناسبی برای توصیف این داده‌ها است؟ چرا؟
۱۴۰۰ دی	۰/۷۵	۱۵۳ جاهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید. الف: اولین قدم برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است. ب: تعداد اعضای جامعه را جامعه می‌نامیم. ج: نمودار بهتر نشان می‌دهد که داده‌ها کجا متراکم‌تر و کجا پراکنده‌ترند.
۱۴۰۰ دی	۰/۷۵	۱۵۴ درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید. الف: هنگامی که داده دور افتاده داشته باشیم، می‌توانیم از میانه و دامنه میان چارکی استفاده کنیم. ب) گرد آوری و سازماندهی داده‌ها سومین گام در چرخه آمار است. ج) برای توصیف داده‌های کیفی گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد متفاوت باشد.
۱۴۰۰ شهریور	۰/۲۵	۱۵۵ جای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید. بیان یا مفهوم مساله، گام چرخه آماری در حل مسائل است.
۱۴۰۰ شهریور	۰/۷۵	۱۵۶ گزینه صحیح را انتخاب کنید. الف: کدام نمودار، بهتر نشان می‌دهد که داده‌ها متراکم‌تر و پراکنده‌تر است؟ (۱) مستطیلی (۲) دایره‌ای (۳) میله‌ای (۴) جعبه‌ای ب: گام سوم در چرخه آمار، در حل مسائل می‌باشد. (۱) بحث و نتیجه‌گیری (۲) گرد آوری و پاک سازی داده‌ها (۳) طرح و برنامه‌ریزی (۴) تحلیل داده‌ها ج: اگر در داده‌ها، داده دور افتاده وجود نداشته باشد کدام معیار گرایش به مرکز مناسب است. (۱) مد (۲) انحراف معیار (۳) میانگین (۴) میانه
۱۴۰۰ شهریور	۱/۲۵	۱۵۷ با توجه به داده‌های زیر میانگین و میانه آن‌ها را به دست آورید. $۳ - ۱ - ۵ - ۷ - ۳ - ۸ - ۲ - ۴ - ۳ - ۴$
۱۴۰۰ خرداد	۰/۲۵	۱۵۸ جای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید. اگر داده دور افتاده داشته باشیم از نمودار استفاده می‌کنیم.



۱۵۹	درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید. الف: وقتی داده دور افتاده داریم، میانه معیار مناسبی برای توصیف داده‌ها می‌باشد. ب: برای توصیف داده‌های کمی گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد برابر باشد. پ: مرتب کردن داده‌ها در گام دوم چرخه آمار اتفاق می‌افتد. ت: طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهمترین گام رسیدن به پاسخ است که در مرحله بیان مسئله صورت می‌گیرد.	۱	خرداد ۱۴۰۰
۱۶۰	روش نمونه‌گیری مربوط به کدام مرحله چرخه آمار است؟ (۱) طرح و برنامه‌ریزی (۲) بیان مسئله (۳) بحث و نتیجه‌گیری (۴) تحلیل داده‌ها	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۰
۱۶۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید. الف: داده‌ای است که نصف داده‌ها از آن کمتر و نصف داده‌ها از آن بیشتر هستند. ب: بیان مسئله و فهم آن گام در چرخه آمار است. ج: هرچه پراکنندگی متغیر در جامعه بیشتر باشد، برای اطمینان از وجود تنوع، به اندازه نمونه نیاز داریم.	۰/۲۵	دی ۹۹
۱۶۲	درستی یا نادرستی هریک از عبارات زیر را مشخص کنید. الف: معیارهایی مانند میانگین و میانه به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها در کجا متمرکزند. ب: برای توصیف داده‌های کیفی گزارش درصد باید با گزارش تعداد همراه باشد. ج: دامنه تغییرات از معیارهای گرایش به مرکز می‌باشد. د: وقتی داده دور افتاده‌ای نداریم، میانه شاخص مناسب تری از میانگین برای توصیف داده‌ها می‌باشد.	۱	دی ۹۹
۱۶۳	در موارد زیر نام گام را بنویسید. الف: برگزاری آزمون‌های پیشرفت تحصیلی در مدارس و بررسی نمره دانش آموزان ب: بررسی علل پایین بودن سرانه مطالعه دانش آموزان کشور در مقطع متوسطه دوم	۱	دی ۹۹
۱۶۴	جای خالی را با یک عبارت مناسب کامل کنید. گرد آوری و پاک سازی داده‌ها، گام در چرخه آمار است.	۰/۲۵	خرداد ۹۹
۱۶۵	با توجه به چرخه آماری، نام هر گام را بنویسید. الف: راهی برای رسیدن به پاسخ مساله پیدا می‌کنیم و به نمونه‌گیری و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم. ب: نتایج به دست آمده را تفسیر می‌کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.	۰/۵	خرداد ۹۹
۱۶۶	جای خالی را با یک عبارت مناسب کامل کنید. الف: اندازه‌گیری یا سنجش، گام برای دریافت داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است. ب: برای توصیف داده‌های کیفی، گزارش درصد باید همیشه با گزارش همراه باشد.	۰/۵	خرداد ۹۹ خ



۱۶۷	با توجه به داده‌ها جدول زیر را کامل کنید.	۱/۵	خرداد ۹۹										
<table><tr><td>متغیر</td><td>داده‌ها</td><td>میانگین</td><td>دامنه میان چارگی</td><td>دامنه تغییرات</td></tr><tr><td>سن (سال)</td><td>۱۵, ۱۸, ۱۷, ۱۸ ۱۷, ۱۹, ۱۷, ۱۶, ۱۶</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		متغیر	داده‌ها	میانگین	دامنه میان چارگی	دامنه تغییرات	سن (سال)	۱۵, ۱۸, ۱۷, ۱۸ ۱۷, ۱۹, ۱۷, ۱۶, ۱۶					
متغیر	داده‌ها	میانگین	دامنه میان چارگی	دامنه تغییرات									
سن (سال)	۱۵, ۱۸, ۱۷, ۱۸ ۱۷, ۱۹, ۱۷, ۱۶, ۱۶												
۱۶۸	جای خالی را با یک عبارت مناسب کامل کنید. الف: هنگامی که داده‌ی دورافتاده نداشته باشیم، میانگین و شاخص‌های مناسبی برای توصیف هستند. ب: مطمئن ترین نمودار برای متغیر نمودار جعبه‌ای است.	۰/۵	شهریور ۹۹										
۱۶۹	درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف: طرح و برنامه‌ریزی دومین گام در چرخه‌ی آمار است. ب: برای توصیف داده‌های کیفی گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد متفاوت باشد.	۰/۵	شهریور ۹۹										
۱۷۰	جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید. الف: اگر در داده‌ها، داده‌ی دور افتاده داشته باشیم، معیار پراکندگی مناسب است. ب: فعالیت "داده‌ها را گردآوری می‌کنیم و تا حد ممکن از درستی آنها مطمئن می‌شویم"، مربوط به گام چرخه آمار است.	۰/۵	خرداد ۹۸										
۱۷۱	اولین و آخرین گام چرخه آمار را بنویسید.	۰/۵	تیر ۹۸										
۱۷۲	جای خالی را با یک عبارت مناسب کامل کنید. برای توصیف داده‌های کیفی، گزارش درصد باید همیشه با گزارش همراه باشد.	۰/۵	شهریور ۹۸										
۱۷۳	درستی یا نادرستی هر یک را مشخص کنید. الف: طرح و برنامه‌ریزی، دومین گام برای یافتن داده‌ها است. ب: هرچه جامعه بزرگتر شود، اندازه نمونه ثابت می‌ماند.	۱	شهریور ۹۸										
۱۷۴	در نمونه‌گیری زیر مصرف آب ۹ خانوار در یک دوره (برحسب مترمکعب) به دست آمده است. ۴۰, ۱۱۰, ۷۰, ۳۰, ۵۰, ۱۲۰, ۷۵, ۶۵, ۱۳۰ میان، چارک اول و چارک سوم را مشخص کنید.	۱/۵	شهریور ۹۸										
۱۷۵	جای خالی را با یک عبارت مناسب کامل کنید. الف: اندازه‌گیری یا سنجش گام برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است. ب: تعداد اعضای جامعه را جامعه می‌نامند.	۰/۵	تیر ۹۸										



۱	۹۷	۱۷۶	جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید. الف: راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم. به نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم، این گام چرخه آمار را گام می‌نامند. ب: تعداد اعضای جامعه را می‌نامند.
۵/۰	۹۷	۱۷۷	در کدام یک از موارد زیر احتیاج به نمونه بیشتری داریم؟ چرا؟ الف: سن دانش آموزان یک کلاس ب: معدل دانش آموزان یک کلاس

یادداشت ضروری دانش‌آموز:

math-pilevar.ir



الگوهای خطی

مدلسازی و دنباله ۴۵
دنباله‌های حسابی ۵۲



درس

۱

مدلسازی و دنباله

خلاصه درسنامه

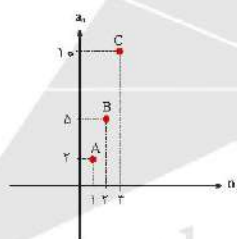
معمولاً الگو را به کمک تابعی که دامنه آن اعداد طبیعی است، مدل‌سازی می‌کنیم. دنباله نوعی تابع است که دامنه آن اعداد طبیعی و برد آن اعداد حقیقی است.

برای مثال: به دنباله‌ای با فرمول $a_n = n^2 + 1$ توجه کنید چند جمله اول این دنباله را مشخص کنیم برای این کار به جای n اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ... رو قرار می‌دهیم

$$\left. \begin{array}{l} a_n = n^2 + 1 \\ n = 1 \Rightarrow a_1 = 1^2 + 1 = 2 \quad \text{جمله اول} \\ n = 2 \Rightarrow a_2 = 2^2 + 1 = 5 \quad \text{جمله دوم} \\ n = 3 \Rightarrow a_3 = 3^2 + 1 = 10 \quad \text{جمله سوم} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جملات دنباله}} \begin{array}{c} a_1 \quad a_2 \quad a_3 \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 2, 5, 10, \dots \end{array}$$

رسم نمودار دنباله

$$\begin{aligned} a_1 = 2 &\Rightarrow A(1, 2) \\ a_2 = 5 &\Rightarrow B(2, 5) \\ a_3 = 10 &\Rightarrow C(3, 10) \end{aligned}$$



معمولاً در سوال‌ها پیدا کردن چند جمله اول، کفایت می‌کند
برای رسم نمودار دنباله محور x ‌ها همان n و محور y ‌ها همان a_n است.

نکته: ۱ نقاط موجود در نمودار را به هم وصل نکنید. نمودار دنباله‌ها در واقع نقاط جدا از هم هستند.

۲ به فرمول $a_n = n^2 + 1$ ضابطه تابعی یا جمله عمومی دنباله گفته می‌شود به کمک این ضابطه، هر جمله دلخواه از دنباله رو می‌توان به دست آورد.
برای مثال جمله بیستم این دنباله برابر هست با:

$$a_n = n^2 + 1 \xrightarrow{n=20} a_{20} = 20^2 + 1 = 400 + 1 = 401$$

مثال

کدام جمله دنباله $a_n = n^2 - 3n$ برابر ۴ است؟

پاسخ: چون گفته شده «کدام جمله» پس باید به جای a_n عدد ۴ رو قرار بدهیم و n رو بدست بیاریم

$$a_n = n^2 - 3n \xrightarrow{a_n=4} n^2 - 3n = 4 \Rightarrow \underbrace{n^2 - 3n - 4}_\text{تجزیه با جمله مشترک} = 0$$

$$\Rightarrow (n-4)(n+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n-4=0 \Rightarrow n=4 \text{ ق ق} \\ n+1=0 \Rightarrow n=-1 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

n نمی‌تواند (-1) باشد چون باید فقط عدد طبیعی باشد.



پیدا کردن جمله عمومی یک دنباله (الگویابی)



برخی از دنباله‌های معروف در جدول زیر نوشته شده است.

توصیف فارسی دنباله	جملات دنباله	جمله عمومی
اعداد طبیعی (۱, ۲, ۳, ۴, ...)	۱, ۴, ۹, ۱۶, ...	$a_n = n^2$
دنباله اعداد فرد طبیعی	۱, ۳, ۵, ۷, ...	$a_n = 2n - 1$
دنباله اعداد زوج طبیعی	۲, ۴, ۶, ۸, ...	$a_n = 2n$
معکوس اعداد طبیعی	$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$	$a_n = \frac{1}{n}$

تذکره: بازی با علامت‌ها در جمله عمومی



اگر علامت جملات یکی در میان + و - بود به این صورت عمل می‌کنیم. ابتدا علامت‌ها را در نظر نمی‌گیریم و جمله عمومی دنباله را می‌نویسیم سپس طبق جدول زیر عمل می‌کنیم.

مثال	در جمله عمومی ضرب می‌کنیم	شکل دنباله
۱, -۴, ۹, -۱۶, ... $a_n = n^2 \times (-1)^{n+1}$	جمله عمومی را در عبارت $(-1)^{n+1}$ ضرب می‌کنیم.	$+\square, -\bigcirc, +\triangle, -\square, \dots$ جملات فرد مثبت است
-۲, ۴, -۶, ۸, ... $a_n = 2n \times (-1)^n$	جمله عمومی را در $(-1)^n$ ضرب می‌کنیم.	$-\square, +\bigcirc, -\triangle, +\square, \dots$ جملات فرد منفی است

سه دنباله معروف زیر را به خاطر بسپارید.

نام دنباله	شکل هندسی	جمله عمومی
دنباله مثلثی		$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$
دنباله مربعی		$a_n = n^2$

دنباله‌های دو ضابطه‌ای



برای نوشتن جملات یک دنباله دو ضابطه‌ای با توجه به دامنه، ضابطه مناسب را انتخاب می‌کنیم.

برای مثال: به دنباله $a_n = \begin{cases} n^2 + 1 & n < 5 \\ \frac{4}{n} & n \geq 5 \end{cases}$ توجه کنید. اگر ورودی یا همان n از ۵ کمتر بود (۱, ۲, ۳, ۴) باید از فرمول بالایی و

اگر ورودی بزرگ‌تر یا مساوی ۵ بود (۵, ۶, ۷, ۸, ...) باید از فرمول پایینی استفاده کنید؛ مثلاً برای یافتن a_3 و a_7 خواهیم داشت:

$$a_n = \frac{4}{n} \xrightarrow{n=7} a_7 = \frac{4}{7} \quad \text{ضابطه پایین}$$

$$a_n = n^2 + 1 \xrightarrow{n=3} a_3 = 3^2 + 1 = 10 \quad \text{ضابطه بالا}$$



هر جمله این رابطه با توجه به جمله قبلی نوشته می‌شود. حتماً a_1 (جمله اول) در رابطه بازگشتی باید داشته باشیم.

برای مثال: در دنباله با رابطه بازگشتی $a_1 = 6$, $a_n = a_{n-1} + 4$, اگر جمله اول ۶ باشد، جمله پنجم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{جمله دوم: } n=2 \Rightarrow a_2 = a_{2-1} + 4 \Rightarrow a_2 = 6 + 4 = 10$$

$$\text{جمله سوم: } n=3 \Rightarrow a_3 = a_{3-1} + 4 \Rightarrow a_3 = 10 + 4 = 14$$

$$\text{جمله چهارم: } n=4 \Rightarrow a_4 = a_{4-1} + 4 \Rightarrow a_4 = 14 + 4 = 18$$

$$\text{برای مثال: جمله پنجم دنباله بازگشتی } a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{زوج } n \\ 5a_n + 2 & \text{فرد } n \end{cases} \text{ را بدست آورید. } (a_1 = 6)$$

پاسخ: این دنباله، هم بازگشتی است (چون با a_{n+1} شروع شده) و هم دو ضابطه‌ای و مثل همیشه به n اعداد ۱ و ۲ و ۳ و را می‌دهیم تا جایی که به a_5 برسیم:

$$n=1 \text{ فرد} \xrightarrow{\text{ضابطه پایین}} a_{n+1} = 5a_n + 2 \xrightarrow{n=1} a_2 = 5a_1 + 2 = 5 \times 6 + 2 = 32$$

$$n=2 \text{ زوج} \xrightarrow{\text{ضابطه بالا}} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \xrightarrow{n=2} a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2} \times 32 = 16$$

$$n=3 \text{ فرد} \xrightarrow{\text{ضابطه پایین}} a_{n+1} = 5a_n + 2 \xrightarrow{n=3} a_4 = 5a_3 + 2 = 5 \times 16 + 2 = 82$$

$$n=4 \text{ زوج} \xrightarrow{\text{ضابطه بالا}} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \xrightarrow{n=4} a_5 = \frac{1}{2}a_4 = \frac{1}{2} \times 82 = 41$$

♦ یک دنباله خاص و معروف: دنباله فیبوناتچی

دو جمله ابتدایی این دنباله ۱ هستند سپس هر دو جمله متوالی رو با هم جمع می‌کنیم تا جمله بعدی به دست بیاید.



۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، ۸۹، ۱۴۴، ...

این دنباله، جمله عمومی (ضابطه تابعی) ندارد ولی رابطه بازگشتی اون به صورت $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ است. (با فرض $a_1 = a_2 = 1$)

سوالات نهایی

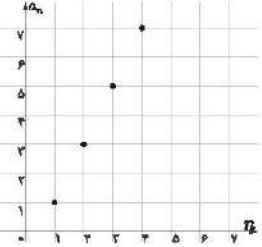


ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۱۷۸	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. در دنباله با جمله عمومی $a_n = n^2 + 1$ جمله سوم برابر با است.	۰/۲۵	شماره ۱۴۰۳



شهریور ۱۴۰۳	۰/۲۵	گزینه صحیح را انتخاب کنید. جمله عمومی دنباله $2, 5, 8, 11, \dots$ کدام گزینه است؟ (۱) $a_n = 3n + 2$ (۲) $a_n = 2n - 1$ (۳) $a_n = 3n - 1$ (۴) $a_n = 5 - 3n$	۱۷۹
شهریور ۱۴۰۳	۰/۷۵	پنج جمله‌ی اول دنباله بازگشتی $a_1 = a_2 = 1$ و $a_n + 2 = a_{n+1} + a_n$ را بنویسید.	۱۸۰
خرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵	گزینه صحیح را انتخاب کنید. ضابطه تابعی دنباله $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots$ کدام گزینه است؟ (الف) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$ (ب) $a_n = \frac{-n}{n+1}$ (ج) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ (د) $a_n = \frac{n}{n+1}$	۱۸۱
خرداد ۱۴۰۳	۰/۷۵	با توجه به دنباله‌های $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ و $b_n = n^2 + 2$ حاصل عبارت $8a_3 + b_2$ را بنویسید.	۱۸۲
خرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵	در دنباله بازگشتی $a_{n+1} = 2a_n + n$ با جمله $a_1 = 3$ چهار جمله اول را به دست آورید.	۱۸۳
دی ۱۴۰۲	۰/۲۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. یک دنباله، تابعی است که دامنه‌ی آن اعداد حقیقی می‌باشد. (درست-نادرست)	۱۸۴
دی ۱۴۰۲	۱	اگر $a_n = 3^n$ ، $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ باشد حاصل $a_2 \times b_1$ را بیابید.	۱۸۵
دی ۱۴۰۲	۱	جملات دنباله‌ای به صورت $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, \dots$ می‌باشد. رابطه بازگشتی این دنباله را بنویسید.	۱۸۶
شهریور ۱۴۰۲	۰/۲۵	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. رابطه‌ای را که بیانگر ارتباط جملات دنباله، با یکدیگر است، می‌نامیم.	۱۸۷
شهریور ۱۴۰۲	۰/۷۵	با توجه به دنباله‌های $a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-3}$ و $b_n = 3n - 2$ حاصل عبارت $a_3 - b_2$ را بیابید.	۱۸۸



شهریور ۱۴۰۲	۱	جمله‌های دوم تا پنجم دنباله بازگشتی $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + n \end{cases}$ را مشخص کنید.	۱۸۹
خرداد ۱۴۰۲	۱	با توجه به دنباله‌های $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2}$ و $b_n = n^2 + 1$ حاصل عبارت $2a_1 + b_3$ را بنویسید.	۱۹۰
خرداد ۱۴۰۲	۱	جمله پنجم دنباله بازگشتی زیر را مشخص کنید. $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \quad a_1 = a_2 = a_3 = 1$	۱۹۱
خرداد ۱۴۰۲	۰/۵	با توجه به نمودار دنباله داده شده، با نوشتن اعضای دنباله، جمله عمومی آن را بنویسید. 	۱۹۲
دی ۱۴۰۱	۲/۲۵	اگر ضابطه تابعی (جمله عمومی) دنباله‌ای $a_n = 2n - 1$ باشد: الف) جمله اول دنباله را بنویسید. ب) رابطه بازگشتی دنباله را مشخص کنید. ج) نمودار دنباله را برای ۳ جمله اول رسم کنید.	۱۹۳
دی ۱۴۰۱	۱	با توجه به دنباله‌های $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$ ، $b_n = 2n^2 + 1$ و $c_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}$ ، حاصل عبارت $b_3 - a_2 + c_3$ را بیابید.	۱۹۴
شهریور ۱۴۰۱	۱/۷۵	الف: چهار جمله اول دنباله $a_n = n^2 + 1$ را بنویسید. ب: رابطه بازگشتی دنباله $10, 17, 24, \dots$ را بنویسید.	۱۹۵
خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵	درستی یا نادرستی جمله‌ی زیر را مشخص کنید. در دنباله $a_{n+1} = a_n + 3$ ، اگر جمله پنجم ۱۷ باشد، جمله ششم آن ۲۳ است.	۱۹۶
خرداد ۱۴۰۱	۱/۷۵	الف) چهار جمله اول دنباله $a_n = 3n + 2$ را بنویسید. ب) رابطه بازگشتی دنباله $5, 11, 17, \dots$ را بنویسید.	۱۹۷



دی ۱۴۰۰	۰/۷۵	۱۹۸ برای جملات دنباله زیر رابطه بازگشتی بنویسید. $5, 10, 15, \dots$						
دی ۱۴۰۰	۱	۱۹۹ با توجه به دنباله‌های $a_n = \frac{2n-1}{n-2}$, $c_n = \frac{n}{2}$ و $b_n = n^2$ حاصل عبارت $a_3 + b_5 + c_4$ را به دست آورید.						
شهریور ۱۴۰۰	۱	۲۰۰ جمله عمومی (ضابطه تابعی) یک دنباله به صورت $a_n = \frac{n+1}{n}$ است. چهار جمله اول این دنباله را بنویسید.						
خرداد ۱۴۰۰	۱/۵	۲۰۱ جدول زیر را کامل کنید. <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">ضابطه تابعی</td><td style="padding: 5px;">فرمول بازگشتی</td><td style="padding: 5px;">جمله اول دنباله</td></tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$a_n = 2n + 1$</td><td style="padding: 5px;"></td><td style="padding: 5px;"></td></tr> </table>	ضابطه تابعی	فرمول بازگشتی	جمله اول دنباله	$a_n = 2n + 1$		
ضابطه تابعی	فرمول بازگشتی	جمله اول دنباله						
$a_n = 2n + 1$								
خرداد ۱۴۰۰	۱	۲۰۲ به توجه به دنباله‌های $a_n = 2^{2n+1}$ و $b_n = \frac{15}{n+1}$ و $c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ حاصل عبارت $a_1 - b_4 + c_2$ را به دست آورید.						
تبی ۹۹	۱	۲۰۳ برای جملات دنباله رویرو: $3, 8, 13, 18, 23, \dots$ الف: رابطه بازگشتی دنباله را بنویسید. ب: ضابطه تابعی دنباله را بدست آورید.						
تبی ۹۹	۱	۲۰۴ جمله پنجم از دنباله بازگشتی زیر را بنویسید. $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ $a_1 = a_2 = a_3 = 2$						
خرداد ۹۹	۱	۲۰۵ پنج جمله اول دنباله $a_{n+1} = -a_n + (-1)^n$ را با فرض $a_1 = 3$ بنویسید.						
خرداد ۹۹	۱	۲۰۶ با توجه به دنباله‌های $a_n = \frac{n^2}{(-1)^n}$ و $b_n = n + 4$ و $c_n = \frac{n}{2}$ حاصل $a_1 + b_8 - c_2$ را بدست آورید.						
خرداد ۹۹	۱	۲۰۷ چهار جمله اول دنباله $a_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$ را بدست آورید.						
خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵	۲۰۸ جای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید. جمله‌ی پنجم $10 - 2n^2$ ، برابر است.						



۲۰۹	الف: جمله‌ی چندم دنباله $b_n = n^2 - 1$ برابر ۳۵ است؟ ب: جمله‌ی سوم دنباله بازگشتی $a_1 = 5$ و $a_{n+1} = a_n + n$ را مشخص کنید.	۱	خرداد ۹۹
۲۱۰	برای جملات دنباله‌ی $1, 4, 7, 10, 13, \dots$ الف: رابطه بازگشتی دنباله را بنویسید. ب: ضابطه‌ی تابعی دنباله را به دست آورید.	۱	شهریور ۹۹
۲۱۱	با توجه به دنباله‌های $a_n = \frac{n+6}{3n-2}$ و $b_n = n^2 - 1$ حاصل عبارت $a_7 + b_7$ را به دست آورید.	۰/۷۵	شهریور ۹۹
۲۱۲	چهار جمله اول دنباله $C_n = \frac{1}{n}$ را بنویسید.	۱	شهریور ۹۹
۲۱۳	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. الف: در دنباله $1, -4, -9, \dots$ ضابطه تابعی دنباله می‌باشد. ب: جمله‌ی چهارم دنباله‌ی $a_n = \frac{1}{2}n - \frac{5}{2}$ برابر می‌باشد.	۰/۵	خرداد ۹۸
۲۱۴	با توجه به دنباله‌های $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}$ و $c_n = \frac{1}{3n-1}$ و $d_n = n^2 + 1$ حاصل عبارت $b_7 + d_7 - c_7$ را بدست آورید.	۱/۵	خرداد ۹۸
۲۱۵	جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید. الف: یک دنباله، تابعی است که دامنه‌ی آن می‌باشد. ب: جمله‌ی چهارم دنباله $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ برابر می‌باشد.	۰/۵	تیر ۹۸
۲۱۶	با توجه به دنباله‌های $a_n = \frac{8-n}{n+2}$ و $b_n = 3^{n-1}$ و $c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ حاصل عبارت $a_7 + b_7 + c_7$ را بدست آورید.	۱/۲۵	شهریور ۹۸
۲۱۷	جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. جمله‌ی پنجم دنباله‌ی $a_n = n^2 - 3$ برابر است.	۰/۲۵	دی ۹۸
۲۱۸	با توجه به دنباله‌های $c_n = 3^{n-2}$ و $b_n = n^2$ و $a_n = \frac{n+6}{n}$ حاصل عبارت $b_7 + a_7 - c_7$ را بدست آورید.	۱	دی ۹۸
۲۱۹	جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. جمله عمومی دنباله $3, 7, 11, \dots$ برابر و جمله‌ی دهم دنباله می‌باشد.	۰/۵	دی ۹۷



درس

۲

دنباله‌های حسابی

خلاصه درسنامه

دنباله حسابی



دنباله‌ای که هر جمله آن (به جز جمله اول) از اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبلی به دست می‌آید و جمله عمومی آن به صورت مقابل است:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{و} \quad d = a_{n+1} - a_n$$

که در آن a جمله اول و عدد ثابت d «اختلاف مشترک» جملات دنباله است.

$$a = 3, d = 4$$

برای مثال: دنباله $3, 7, 11, \dots$ را در نظر بگیرید.

$$a_n = 3 + (n-1) \times 4 = 4n - 1$$

♦ رابطه بازگشتی دنباله حسابی

رابطه بازگشتی یک دنباله حسابی به شکل مقابل است:

$$a_{n+1} = a_n + d \quad \text{یا} \quad a_{n+1} - a_n = d$$

برای مثال: رابطه بازگشتی دنباله‌های حسابی زیر را بنویسید.

(الف) $100, 97, 94, \dots$ (ب) $\frac{1}{2}, \frac{11}{10}, \frac{17}{10}, \dots$

(الف) $d = 97 - 100 = -3 \Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = a_n - 3 \\ a_1 = 100 \end{cases}$ رابطه بازگشتی

(ب) $d = \frac{11}{10} - \frac{1}{2} = \frac{11-5}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{3}{5} \\ a_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$

نکته: دنباله حسابی صعودی و نزولی (افزایشی و کاهشی)

① در یک دنباله حسابی، اگر d مثبت باشد ($d > 0$) دنباله صعودی است (افزایشی است)

برای مثال: دنباله $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2 \\ a_1 = 4 \end{cases}$ صعودی چون مقدار d مثبت است ($d = 2$)

② اگر d منفی باشد ($d < 0$) دنباله نزولی است (کاهشی است)

برای مثال: دنباله $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 1 \\ a_1 = 4 \end{cases}$ نزولی است چون مقدار d منفی است ($d = -1$)



استراتژی یافتن تعداد جملات یک دنباله حسابی

بهترین روش برای پیدا کردن n یا همان تعداد جملات یک دنباله حسابی، استفاده از فرمول مقابل است

$$n = \frac{\text{جمله اول} - \text{جمله آخر}}{d} + 1$$

برای مثال: دنباله $1, 3, 5, \dots, 151$ ، چند جمله دارد؟

$$d = a_2 - a_1 = 1 - (-1) = 2$$

$$n = \frac{\text{جمله اول} - \text{جمله آخر}}{d} + 1 = \frac{151 - (-1)}{2} + 1 = \frac{152}{2} + 1 = 76 + 1 = 77$$

استراتژی یافتن a_1 و d با داشتن دو جمله دلخواه حسابی

گاهی اوقات دو جمله دلخواه مثل a_m و a_n از دنباله حسابی به ما داده می‌شوند و باید a_1 و d رو به کمک آن‌ها به دست بیاوریم.

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

می‌توانیم از فرمول مقابل استفاده کنیم

$$d = \frac{a_6 - a_4}{6 - 4} = \frac{40 - 20}{2} = 10$$

برای مثال: در یک دنباله حسابی $a_4 = 20$ و $a_6 = 40$ باشند مقدار d برابر می‌شود با:

مثال

در یک دنباله حسابی روابط $a_3 = 10$ و $a_7 = 14$ برقرارند. مقادیر a_1 و d را به دست آورید. سپس جمله بیستم را نیز محاسبه کنید.

$$d = \frac{a_7 - a_3}{7 - 3} = \frac{14 - 10}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$a_3 = 10 \Rightarrow a_1 + 2d = 10 \xrightarrow{d=1} a_1 + 2(1) = 10 \Rightarrow a_1 = 8, \quad a_{20} = a_1 + 19d \Rightarrow a_{20} = 8 + 19(1) = 27$$

یک خاصیت مهم دنباله حسابی

فرض کنید (a, b, c) سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند. به عدد b واسطه حسابی بین a و c گفته می‌شود که از رابطه

$$b = \frac{a+c}{2}$$

به دست می‌آید. $2b = a + c$

$$-2, b, 18 \Rightarrow b = \frac{a+c}{2} = \frac{-2+18}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

برای مثال: واسطه حسابی بین -2 و 18 برابر است با:

مثال

جملات $16m, 4m+1, 2m-1$ از چپ به راست، سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی‌اند. مقدار m را بدست آورید.

$$2m-1, 4m+1, 16m \xrightarrow{2b=a+c} 2(4m+1) = 2m-1 + 16m \Rightarrow 8m+2 = 18m-1$$

$$\Rightarrow 8m - 18m = -1 - 2 \Rightarrow -10m = -3 \Rightarrow m = \frac{3}{10}$$



استراتژی یافتن چند واسطه حسابی بین دو عدد

اگر بخواهیم بین دو عدد که آن‌ها را جملات اول و آخر نام‌گذاری می‌کنیم به تعداد k جمله (K واسطه) بنویسیم به طوری که همه روی هم، یک دنباله حسابی را تشکیل بدهند از دو روش می‌توانیم استفاده کنیم.

۱) روش اول «استفاده از فرمول $d = \frac{\text{جمله اول} - \text{جمله آخر}}{k+1}$ » است.

۲) روش دوم: جمله آخر را باز می‌کنیم تا d به دست بیاید.

برای مثال: می‌خواهیم بین دو عدد ۳ و ۱۰۳ به تعداد ۴ واسطه حسابی درج کنیم، مقدار این واسطه‌ها را بدست آورید.

روش اول:
$$d = \frac{\text{جمله اول} - \text{جمله آخر}}{k+1} = \frac{103-3}{4+1} = \frac{100}{5} = 20$$

روش دوم:
$$3, 23, 43, 63, 83, 103$$

روش دوم: جمله آخر، همان جمله ششم است، پس داریم:

$$3, \text{○}, \text{○}, \text{○}, \text{○}, 103$$

$$a_6 = 103 \xrightarrow{a_6 \text{ رو باز می‌کنیم}} a_1 + 5d = 103 \xrightarrow{a_1=3} 3 + 5d = 103 \Rightarrow 5d = 100 \Rightarrow d = \frac{100}{5} = 20$$

حالا مثل روش اول واسطه‌ها را می‌نویسیم.

مجموع n جمله اولیه یک دنباله حسابی

برای جمع کردن n جمله اول یک دنباله حسابی می‌توانیم از ۲ فرمول مختلف استفاده کنیم:

فرمول (۱):
$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

فرمول (۲):
$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

از فرمول (۱) وقتی استفاده می‌کنیم که جملات اول و آخر مطرح باشند در غیر این صورت باید از فرمول (۲) استفاده کنیم.

برای مثال: مجموع ۲۰ جمله اول دنباله حسابی $1, 4, 9, \dots$ را محاسبه کنید.

پاسخ: جمله آخر را نداریم، پس از فرمول ۲ استفاده می‌کنیم d هم که برابر ۵ است

$$S_{20} = \frac{20}{2} (2(-1) + \underbrace{19 \times 5}_{95}) = 10 \times 93 = 930$$

مثال

حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$A = 3 + 5 + 7 + \dots + 203$$

پاسخ: اعداد $(3, 5, 7, \dots, 203)$ یک دنباله حسابی با اختلاف مشترک ۲ رو تشکیل می‌دهند از طرفی تعداد جملات به ما داده نشده است پس

ابتدا باید n را بدست بیاوریم.

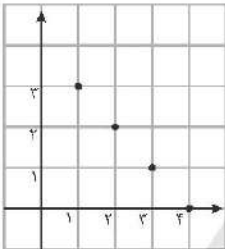
$$n = \frac{\text{جمله اول} - \text{جمله آخر}}{d} + 1 = \frac{203-3}{2} + 1 = \frac{200}{2} + 1 = 101$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \xrightarrow[n=101, a_1=3]{a_n=203} S_{101} = \frac{101}{2} (3 + 203) = \frac{101}{2} \times 206 = 10403$$



سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۲۲۰	درستی یا نادرستی جمله‌ی زیر را مشخص کنید. هر دنباله‌ی حسابی یک تابع خطی است که شیب خط، همان اختلاف مشترک جملات دنباله، یعنی d است.	۰/۲۵	شعبان ۱۴۰۳
۲۲۱	الف) دنباله‌ی حسابی $۱۰۵, ۱, ۵, ۹, ۰۰۰$ چند جمله دارد؟ ب) مجموع ده جمله‌ی اول این دنباله را با استفاده از فرمول به دست آورید.	۱/۷۵	شعبان ۱۴۰۳
۲۲۲	در یک دنباله حسابی، جمله‌ی دهم برابر ۲۵ و جمله‌ی پانزدهم برابر ۴۰ می‌باشد. جمله‌ی اول و اختلاف مشترک دنباله را حساب کنید.	۱/۵	شعبان ۱۴۰۳
۲۲۳	نمودار یک دنباله حسابی به صورت زیر است. سه جمله‌ی اول دنباله را بنویسید.	۰/۲۵	شعبان ۱۴۰۳
			
۲۲۴	درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید. دنباله $۱, ۴, ۹, ۱۶, \dots$ یک دنباله حسابی است. (درست - نادرست)	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۲۲۵	در یک دنباله حسابی، جمله هفتم برابر ۵۳ و جمله بیست و پنجم برابر ۱۰۷ است. الف) جمله اول و اختلاف مشترک دنباله را حساب کنید. ب) جمله پنجاه و یکم دنباله را مشخص کنید.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۳
۲۲۶	بین اعداد ۷ و ۲۷ سه عدد را طوری قرار دهید که این پنج عدد باهم، تشکیل دنباله حسابی افزایشی دهند.	۱	خرداد ۱۴۰۳
۲۲۷	مدت زمان روزانه مطالعه دانش‌آموزی در درس ریاضی و آمار برحسب دقیقه به صورت دنباله زیر است. $۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵, \dots$ مجموع مدت زمان مطالعه دانش‌آموز در شانزده روز اول را بیابید. (با استفاده از فرمول مجموع)	۱	خرداد ۱۴۰۳
۲۲۸	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. اگر ضابطه دنباله‌ای به صورت $a_n = ۵ - ۳n$ باشد، جمله دنباله برابر ۲۸ - است.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۲



دی ۱۴۰۲	۱/۵	سه عدد به گونه‌ای میان اعداد ۱۰ و ۲۶ قرار دهید که یک دنباله حسابی تشکیل دهند.	۲۲۹
دی ۱۴۰۲	۱/۵	یک طراح برای یک سینما در ردیف اول ۱۵ صندلی و در ردیف دوم ۱۸ صندلی و در ردیف سوم ۲۱ صندلی مشخص کرده است. اگر صندلی‌های هر ردیف با همین نظم اضافه شوند، برای این سالن با ۱۶۸ صندلی، باید چند ردیف داشته باشیم؟	۲۳۰
شهریور ۱۴۰۲	۰/۲۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر در یک دنباله حسابی اختلاف مشترک (d) عددی مثبت باشد، جملات دنباله کاهشی می‌شود.	۲۳۱
شهریور ۱۴۰۲	۰/۲۵	گزینه صحیح را انتخاب کنید. با مصرف یک قرص آسپرین، ۲۵۰ میلی‌گرم دارو به بدن شخصی وارد می‌شود و پس از پایان هر یک ساعت، ۱۵ میلی‌گرم دارو در سطح خونس کاهش می‌یابد. چند ساعت پس از مصرف دارو، سطح آن در بدنش ۱۳۰ میلی‌گرم می‌شود؟ ۷ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)	۲۳۲
شهریور ۱۴۰۲	۱/۷۵	در دنباله حسابی ۱، ۵، ۹، ...، ۴۰ الف) جمله عمومی دنباله را بنویسید. ب) مجموع جملات دنباله را به دست آورید.	۲۳۳
شهریور ۱۴۰۲	۱/۲۵	میان دو عدد ۱۲ و ۵۲ چهار عدد را به گونه‌ای قرار دهید که شش جمله حاصل یک دنباله حسابی افزایشی تشکیل دهند.	۲۳۴
خرداد ۱۴۰۲	۰/۲۵	درستی یا نادرستی جمله‌ی زیر را مشخص کنید. هر دنباله حسابی یک تابع خطی است که شیب خط آن، همان اختلاف مشترک جملات دنباله، یعنی d است.	۲۳۵
خرداد ۱۴۰۲	۱	یازدهمین جمله یک دنباله حسابی ۴۷ و جمله هفدهم آن ۷۷ است. جمله اول این دنباله را به دست آورید.	۲۳۶
خرداد ۱۴۰۲	۱/۷۵	در دنباله حسابی مقابل ۲، ۵، ۸، ۱۱، ... الف) جمله چندم آن ۹۵ است؟ ب) مجموع <u>چهار جمله اول</u> این دنباله را به دست آورید.	۲۳۷
تیر ۱۴۰۱	۰/۲۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اختلاف مشترک در دنباله اعداد ... و ۱۲ و ۸ و ۵ و ۲ برابر ۳ است.	۲۳۸



۲۳۹	جمله اول یک دنباله حسابی ۵ و جمله دهم آن ۳۲ است: الف) اختلاف مشترک را بیابید. ب) مجموع ۲۰ جمله اول آن را بدست آورید.	۲	دی ۱۴۰۱
۲۴۰	درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید. الف: هر دنباله حسابی، یک تابع خطی است که شیب آن همان اختلاف مشترک جملات دنباله است. ب: دنباله ۲، ۰، ۳، ۶ - یک دنباله حسابی است.	۰/۵	شعبان ۱۴۰۱
۲۴۱	در یک دنباله حسابی با جمله اول ۳ و اختلاف مشترک ۶: الف: جمله پانزدهم را بدست آورید. ب: مجموع ده جمله اول را بدست آورید.	۱/۷۵	شعبان ۱۴۰۱
۲۴۲	سه عدد را به گونه‌ای میان دو عدد ۱۰ و ۲۲ قرار دهید که یک دنباله حسابی با اختلاف مشترک مثبت تشکیل شود.	۱/۵	شعبان ۱۴۰۱
۲۴۳	در یک دنباله حسابی، جمله اول ۵ و اختلاف مشترک برابر ۷ است. الف) جمله یازدهم این دنباله را به دست آورید. ب) کدام جمله دنباله، برابر ۹۶ است؟	۲	خرداد ۱۴۰۱
۲۴۴	در دنباله حسابی ۳، ۷، ۱۱، ۱۵، ... مجموع <u>بیست</u> جمله اول این دنباله را به دست آورید.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۱
۲۴۵	جمله یازدهم یک دنباله حسابی ۳۲ و جمله نوزدهم آن ۷۲ است. جمله سی‌ام این دنباله را مشخص کنید.	۱/۲۵	دی ۱۴۰۰
۲۴۶	در یک دنباله حسابی جمله اول ۲۵ و اختلاف مشترک ۱۰ است. کدام جمله از دنباله برابر ۲۲۵ است.	۱/۵	دی ۱۴۰۰
۲۴۷	مجموع بیست جمله اول دنباله حسابی زیر را به دست آورید. $۴, ۱۰, ۱۶, ۲۲, \dots$	۱	دی ۱۴۰۰
۲۴۸	سه عدد را به گونه‌ای میان اعداد ۱۵ و ۲۳ قرار دهید که یک دنباله حسابی با اختلاف مشترک مثبت تشکیل دهند.	۱/۵	شعبان ۱۴۰۰



شهریور ۱۴۰۰	۱/۵	مجموع بیست جمله اول دنباله حسابی زیر را با استفاده از فرمول به دست آورید. $1, 3, 5, 7, \dots$	۲۴۹
شهریور ۱۴۰۰	۱/۵	در یک دنباله حسابی جمله اول برابر ۲۵ و اختلاف مشترک برابر ۲۰ است. کدام جمله دنباله برابر ۲۲۵ است؟	۲۵۰
خرداد ۱۴۰۰	۱	در یک دنباله حسابی جمله اول ۱۷- و جمله دهم برابر ۱۰ است. جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.	۲۵۱
خرداد ۱۴۰۰	۱	در دنباله حسابی زیر، مجموع ۱۶ جمله اول را بدست آورید. $\dots, 5, 8, 11$	۲۵۲
خرداد ۱۴۰۰	۱	کدامیک از جملات عمومی زیر مربوط به دنباله حسابی است؟ اختلاف مشترک آن را بدست آورید. الف) $a_n = n(n-1)$ ب) $b_n = 3(n-2)$	۲۵۳
دی ۹۹	۱	مجموع بیست جمله اول دنباله حسابی روبرو را بدست آورید. $\dots, 2, 6, 10, -2, -6, -10$	۲۵۴
دی ۹۹	۱/۲۵	در یک دنباله حسابی جمله اول ۱۲ و اختلاف مشترک ۲۰ است. کدام جمله از دنباله برابر ۵۹۲ است؟	۲۵۵
دی ۹۹	۱/۲۵	در یک دنباله حسابی $a_6 + a_4 + a_8 = 90$ باشد، جمله ششم دنباله چقدر است؟	۲۵۶
شهریور ۹۹	۱	با توجه به رابطه $\begin{cases} a_{n+1} = 5 + a_n \\ a_1 = -2 \end{cases}$ مطلوبست محاسبه S_{12}	۲۵۷
شهریور ۹۹	۱/۲۵	مجموع سی جمله اول دنباله حسابی روبرو را بدست آورید. $\dots, 9, 4, 1, -1$	۲۵۸
شهریور ۹۹	۱	اگر جمله عمومی یک دنباله، به صورت $a_n = -5 + 3(n-1)$ باشد. جمله اول و اختلاف مشترک را بدست آورید.	۲۵۹



شماره ۹۹	۱/۵	۲۶۰ در یک دنباله حسابی جمله‌ی اول ۲۵ و اختلاف مشترک ۱۸ است. کدام جمله از دنباله برابر ۶۰۱ است؟
شماره ۹۹	۱	۲۶۱ دنباله زیر را در نظر بگیرید. $\begin{cases} a_{n+1} = -a_n + 4 \\ a_1 = -2 \end{cases}$ الف: چهار جمله از این دنباله را بنویسید. ب: آیا این دنباله حسابی است؟
خرداد ۹۹ خ	۱/۵	۲۶۲ مجموع جملات دنباله‌ی ۱، ۵، ۹، ...، ۳۸۵ را بدست آورید.
خرداد ۹۹ خ	۱/۵	۲۶۳ بین اعداد ۱۵ و ۴۵ چهار عدد را به گونه‌ای قرار دهید که یک دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند.
خرداد ۹۹ خ	۱/۵	۲۶۴ در یک دنباله حسابی جمله‌ی نهم برابر ۵۷ و جمله‌ی هفدهم برابر ۹۷ است. الف: اختلاف مشترک این دنباله را مشخص کنید. ب: جمله‌ی بیستم این دنباله را بدست آورید.
خرداد ۹۹ خ	۱	۲۶۵ مجموع بیست جمله اول دنباله‌ی ۷۰، ۶۵، ۶۰، ... را محاسبه کنید.
خرداد ۹۹ خ	۱/۵	۲۶۶ یازدهمین جمله‌ی یک دنباله حسابی برابر ۴۵ و جمله‌ی نوزدهم آن برابر ۸۵ است. جمله‌ی سی و یکم این دنباله را به دست آورید.
خرداد ۹۹ خ	۱	۲۶۷ سه عدد را به گونه‌ای بین اعداد ۸ و ۲۰ قرار دهید که یک دنباله حسابی تشکیل دهند.
خرداد ۹۹ خ	۲	۲۶۸ با توجه به دنباله روبرو به سؤالات زیر پاسخ دهید. ۱، ۴، ۷، ۱۰، ۱۳، ... الف: نوع دنباله را مشخص کنید. ب: ضابطه‌ی بازگشتی دنباله را بنویسید. پ: جمله‌ی عمومی دنباله را بنویسید. ت: جمله‌ی بیستم این دنباله را بنویسید.
خرداد ۹۹	۱	۲۶۹ مجموع سی جمله اول اعداد طبیعی فرد را بدست آورید.



۲۷۰	سه عدد را به گونه‌ای میان اعداد ۱۰ و ۲۶ قرار دهید که تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با اختلاف مشترک مثبت دهد. (به دست آوردن اختلاف مشترک الزامی است)	۱/۲۵	خرداد ۹۹
۲۷۱	الف: مجموع شانزده جمله اول اعداد طبیعی زوج را محاسبه کنید. ب: در یک دنباله حسابی، جمله‌ی اول ۲۵ و اختلاف مشترک برابر ۱۸ است. کدام جمله‌ی دنباله برابر ۶۰۱ است؟	۲	خرداد ۹۹
۲۷۲	هفتمین جمله‌ی یک دنباله حسابی برابر ۴۵ و جمله‌ی پانزدهم آن برابر ۹۳ است. جمله‌ی سی و یکم این دنباله را بدست آورید.	۲	خرداد ۹۹
۲۷۳	هشتمین جمله‌ی یک دنباله حسابی برابر ۶۵ و جمله‌ی شانزدهم آن برابر ۱۰۵ است. جمله‌ی بیست و نهم این دنباله را بدست آورید.	۲	دی ۹۸
۲۷۴	مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی $4, 7, 10, \dots$ را محاسبه کنید.	۱/۲۵	دی ۹۸
۲۷۵	مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله $35, 31, 27, \dots$ را بدست آورید.	۱/۲۵	شهریور ۹۸
۲۷۶	در یک دنباله حسابی جمله‌ی نهم برابر ۶۱ و جمله‌ی شانزدهم برابر ۹۶ است. اختلاف مشترک و جمله‌ی سی‌ام این دنباله را بدست آورید.	۲	شهریور ۹۸
۲۷۷	جای خالی را با عدد مناسب پر کنید. بین دو عدد ۳ و ۱۹ به تعداد واسطه‌ی حسابی با اختلاف مشترک ۴ می‌توان نوشت.	۰/۵	شهریور ۹۸
۲۷۸	مجموع ده جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۳ و اختلاف مشترک ۶ را بدست آورید.	۱	تیر ۹۸
۲۷۹	در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی اول برابر ۲- و جمله‌ی ششم آن برابر ۱۸ است. جمله‌ی بیستم این دنباله را بدست آورید.	۱/۵	تیر ۹۸
۲۸۰	الف: با توجه به رابطه بازگشتی زیر، چهار جمله‌ی اول دنباله‌ی زیر را بنویسید. $a_{n+1} = a_n + 2, \quad a_1 = 3$ ب: نمودار مختصاتی دنباله را رسم کنید.	۱/۵	تیر ۹۸
۲۸۱	جمله‌ی n ام دنباله‌های زیر را بدست آورید. الف) $4, 9, 14, 19, \dots$ ب) $\sqrt{7}, \sqrt{7}, \sqrt{7}, \dots$	۱	تیر ۹۸



۲۸۲	یازدهمین جمله‌ی یک دنباله حسابی برابر ۵۲ و جمله‌ی نوزدهم آن برابر ۹۲ است. جمله‌ی بیست و ششم این دنباله را به دست آورید.	۲	خرداد ۹۸
۲۸۳	مجموع سی جمله‌ی اول اعداد طبیعی فرد را بدست آورید.	۱/۵	خرداد ۹۸
۲۸۴	سه عدد را به گونه‌ای میان اعداد ۱۰ و ۱۸ قرار دهید که یک دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند.	۱/۵	دی ۹۷
۲۸۵	مجموع ده جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی زیر را بدست آورید. $1, 5, 9, \dots$	۱/۵	دی ۹۷
۲۸۶	یازدهمین جمله‌ی یک دنباله حسابی ۵۲ و جمله‌ی نوزدهم آن ۹۲ است. جمله‌ی سی‌ام این دنباله را مشخص کنید.	۲	دی ۹۷

یادداشت ضروری دانش‌آموز:

math-pilevar.ir



فصل سوم: الگوهای غیر خطی

دنباله هندسی ۶۳
ریشه n ام و توان گویا ۷۳
تابع نمایی ۸۲



درس

۱

دنباله هندسی

خلاصه درسنامه

دنباله هندسی



به دنباله‌هایی از اعداد که هر جمله‌شان به جز جمله اول از ضرب یک عدد ثابت مخالف صفر در جمله پیشین به دست می‌آید، دنباله هندسی گفته می‌شود. عدد ثابت را نسبت مشترک می‌نامند و عموماً با r نشان می‌دهند.

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$$

یک دنباله هندسی، دنباله‌ای به صورت

است که در آن $a \neq 0$ جمله اول و $r \neq 0$ نسبت مشترک دنباله است. جمله n ام این دنباله هندسی از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ بدست می‌آید.

برای مثال: جمله عمومی (جمله n ام) دنباله مقابل را بدست آورید.

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots \Rightarrow \text{جمله عمومی: } a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = \frac{1}{4} \times 2^{n-1}$$

تکنیک محاسبه نسبت مشترک دنباله هندسی



ساده‌ترین روش پیدا کردن r محاسبه $\frac{a_2}{a_1}$ است.

برای مثال:

$$\begin{aligned} & 2, 6, 18, 54, \dots \Rightarrow r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 3 \\ & -\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{9}{14}, \dots \Rightarrow r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-\frac{3}{7}}{-\frac{2}{7}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

نکته: در حالت کلی داریم:

اگر a_m و a_n دو جمله از دنباله هندسی باشند نسبت مشترک (قدرنسبت) برابر است با:

الف) $r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

ب) $r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$

رابطه بازگشتی دنباله هندسی



رابطه بازگشتی دنباله هندسی برابر است با: $a_{n+1} = r \times a_n$

برای مثال: رابطه بازگشتی مربوط به دنباله $2, 6, 18, 54, \dots$ به صورت زیر است:

$$a_{n+1} = 3a_n, \quad a_1 = 2$$

**نکته:** دنباله هندسی صعودی و نزولی

در هر دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1 r^{(n-1)}$ با فرض $a_1 > 0$:

الف) اگر $0 < r < 1$ ، دنباله a_n کاهشی است.

برای مثال:

جمله اول مثبت و $0 < r < 1$ است. $\Rightarrow 10, 5, \frac{5}{2}, \dots$

ب) اگر $r > 1$ دنباله a_n ، افزایشی است.

برای مثال:

جمله اول مثبت و $r > 1$ است. $\Rightarrow \frac{1}{4}, 1, 4, \dots$

اگر جمله اول منفی باشد، با فرض $r > 1$ دنباله نزولی و با فرض $0 < r < 1$ دنباله صعودی خواهد شد.

ج) اگر $r = 1$ ، دنباله a_n ثابت است.

برای مثال:

$2, 2, 2, \dots \Rightarrow r = 1$

د) اگر $r < 0$ باشد، دنباله نه صعودی است و نه نزولی (اصطلاحاً می‌گوییم نوسانی است).

برای مثال:

جمله اول مثبت باشد یا منفی، مهم نیست و دنباله نه صعودی است نه نزولی. $\Rightarrow 3, -6, 12, -24, \dots$

استراتژی پیدا کردن a_1 و d به کمک دو جمله دلخواه دنباله هندسی

اگر a_m و a_n دو جملات دلخواه از یک دنباله هندسی باشند داریم:

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$$

برای مثال: در یک دنباله هندسی، جمله هفتم ۶۴ و جمله سوم ۴ است. نسبت مشترک دنباله را بدست آورید.

پاسخ:

$$\begin{cases} a_7 = 64 \\ a_3 = 4 \end{cases} \quad r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n} \Rightarrow r^{7-3} = \frac{a_7}{a_3} \Rightarrow r^4 = \frac{64}{4} \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r^4 = 2^4 \Rightarrow r = \pm 2$$

مثال

جملات سوم و پنجم یک دنباله هندسی به ترتیب ۲۷ و ۲۴۳ هستند. جمله هفتم این دنباله را بدست آورید. (r عددی منفی است).

پاسخ:

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n} \Rightarrow r^{5-3} = \frac{243}{27} \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = \pm 3 \Rightarrow r = -3$$

$$a_1 r^4 = 27 \xrightarrow{(r=-3)} 9 a_1 = 27 \Rightarrow a_1 = \frac{27}{9} = 3$$

$$a_7 = a_1 r^6 = 3 \times (-3)^6 = 3 \times 3^6 = 3^7$$



استراتژی یافتن تعداد جملات یک دنباله هندسی

$$r^{n-1} = \frac{\text{جمله آخر}}{\text{جمله اول}}$$

ساده‌ترین راه برای بدست آوردن n در دنباله هندسی، استفاده از فرمول مقابل هست:

برای مثال: کدام جمله دنباله $3, 6, 12, \dots$ برابر با ۳۸۴ است؟

پاسخ:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$r^{n-1} = \frac{\text{جمله آخر}}{\text{جمله اول}} \Rightarrow 2^{n-1} = \frac{384}{3} \Rightarrow 2^{n-1} = 128 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^7 \Rightarrow n-1 = 7 \Rightarrow n = 8$$

چند خاصیت مهم دنباله هندسی

مثال	فرمول	توضیحات فارسی
$\overset{a}{3}, b, \overset{c}{27}$ $b^2 = 3 \times 27 \Rightarrow b^2 = 81 \Rightarrow b = \pm 9$	$b = ac$ $b = \sqrt{ac}$	اگر سه جمله (a, b, c) تشکیل یک دنباله هندسی بدهند، به عدد b (وسطی) واسطه هندسی می‌گوییم.
$3, 6, 12, 24 \Rightarrow 3 \times 24 = 6 \times 12$	$ad = bc$	اگر چهار جمله (a, b, c, d) تشکیل یک دنباله هندسی بدهند
$\frac{y}{3}, m, n, z, \frac{y}{12}$ $n^2 = \frac{y}{3} \times \frac{y}{12} \Rightarrow n^2 = \frac{y^2}{36}$ $\Rightarrow n = \pm \sqrt{\frac{y^2}{36}} = \pm \frac{y}{6}$	$c^2 = ae$ $c^2 = bd$	اگر پنج جمله (a, b, c, d, e) به همین ترتیب تشکیل یک دنباله هندسی بدهند

برای مثال: اگر $(x+2, x-1, x-2)$ به ترتیب از چپ به راست سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار نسبت مشترک دنباله را بدست آورید.

پاسخ:

$$\underbrace{x+2}_a, \underbrace{x-1}_b, \underbrace{x-2}_c \Rightarrow b^2 = ac \Rightarrow (x-1)^2 = (x+2)(x-2) \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - 4$$

$$\Rightarrow -2x = -5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\begin{cases} x+2 = 2.5+2 = 4.5 \\ x-1 = 2.5-1 = 1.5 \\ x-2 = 2.5-2 = 0.5 \end{cases} \quad r = \frac{\text{هر جمله}}{\text{جمله قبلی}} = \frac{1.5}{4.5} = \frac{1.5 \times 10}{4.5 \times 10} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

استراتژی پیدا کردن دو یا چند واسطه هندسی بین دو جمله داده شده

اگر بخواهیم بین جملات a و b به تعداد k جمله ایجاد کنیم که همگی روی هم یک دنباله هندسی تشکیل بدهند.

① روش اول: از فرمول $r^{k+1} = \frac{b}{a}$ استفاده کنیم تا r بدست بیاید با ضرب هر جمله در r جمله بعدی بدست می‌آید.

② روش دوم: از هیچ فرمولی استفاده نکنیم فقط کافی است جمله آخر را باز کنیم تا r خیلی راحت، بدست بیاید.



برای مثال: بین اعداد $\frac{1}{3}$ و 16 چهار جمله درج کرده‌ایم تا روی هم، تشکیل دنباله هندسی بدهند. این چهار واسطه را بدست آورید.
پاسخ: مقدار r را از هر دو روش پیدا می‌کنیم:

روش اول: $r^{k+1} = \frac{b}{a} \Rightarrow r^{4+1} = \frac{16}{\frac{1}{3}} \Rightarrow r^5 = 32 \Rightarrow r^5 = 2^5 \Rightarrow r = 2$

روش دوم: $a_6 = 16 \Rightarrow a_1 r^5 = 16 \Rightarrow \frac{1}{3} r^5 = 16 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} r^5 = 32 \Rightarrow r^5 = 2^5 \Rightarrow r = 2$

جمله آخر، جمله ششم است

حالا از $\frac{1}{3}$ که جمله اول ما هست شروع کرده و هر جمله را در ۲ ضرب می‌کنیم تا واسطه‌ها بدست بیاید.

$\frac{1}{3}, 1, 2, 4, 8, 16$

(Diagram showing the sequence starting from 1/3 and multiplying by 2 to get 1, 2, 4, 8, 16)

مجموع n جمله اول دنباله هندسی



اگر جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت $a_n = ar^{n-1}$ باشد، حاصل مجموع: $S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$ ($r \neq 1$)

فرمول (۱): $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

یا

فرمول (۲): $S_n = \frac{a_1 - ra_n}{1-r}$

از رابطه:

بدست می‌آید.



تذکر: از فرمول (۱) زمانی استفاده می‌کنیم که a_1 و r و n را داشته باشیم ولی از فرمول (۲) وقتی استفاده می‌کنیم که a_1 و r و a_n را داشته باشیم (a_n جمله آخره)

درس ۱

دنباله هندسی

برای مثال: مجموع ۱۰ جمله اول دنباله هندسی $3, 6, 12, \dots$ را بدست آورید.

$r = \frac{6}{3} = 2, a_1 = 3, n = 10, S_{10} = ?$

$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow S_{10} = \frac{3(1-2^{10})}{1-2} = \frac{3(1-1024)}{-1} = -3(-1023) = 3069$

مثال

حاصل عبارت $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{64}$ را بدست آورید.

پاسخ: اعداد $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{64})$ یک دنباله هندسی با نسبت مشترک $r = \frac{1}{2}$ را تشکیل می‌دهند از طرفی جمله آخر معلوم است پس از فرمول

(۲) مقدار S را بدست می‌آوریم.

$a_1 = 1, r = \frac{1}{2}, a_n = \frac{1}{64}, S = ?$

$S_n = \frac{a_1 - ra_n}{1-r} = \frac{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{64}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{128}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{127}{128}}{\frac{1}{2}} = \frac{127 \times 2}{128} = \frac{127}{64}$

مسائل مربوط به نیمه عمر مواد و عناصر



بعضی از مواد هستند که با گذشت زمان، بدون اینکه ما اصلاً با آن‌ها کاری داشته باشیم خود به خود مقدارشان کاهش پیدا می‌کند مثل مواد رادیواکتیو بعضی مواد دیگر هم وقتی وارد بدن می‌شوند با گذشت زمان به طور منظم کم می‌شوند مثل داروها.



تعریف

نیمه عمر یک ماده: مدت زمانی که طول می کشد تا مقدار یک ماده یا عنصر، نصف شود مثلاً یک نوع کربن هر ۵۷۰۰ سال نصف می شود به همین علت می گوئیم نیمه عمر کربن ۵۷۰۰ سال است برای حل سوالات این بخش، می توانیم از روشی که در جدول زیر آورده شده است استفاده کنید.

	مقدار ماده مرتباً بر عدد ۲ تقسیم می شود.	اگر در متن سوال، مقدار اولیه (مثلاً عدد A) به ما داده شد، و مقدار نهایی را خواست
	مقدار ماده مرتباً در ۲ ضرب می شود.	اگر در متن سوال مقدار نهایی (مثلاً عدد B) داده شد و مقدار اولیه را خواست

برای یافتن تعداد فلش ها (در مسائلی که تعداد فلش ها معلوم نبود) کافی است زمانی که در متن سوال داده می شود را بر نیمه عمر ماده تقسیم کنیم.

برای مثال: شخصی یک قرض ۲۴۰ میلی گرمی را مصرف می کند. اگر نیمه عمر این دارو در بدن ۸ ساعت باشد پس از ۴۸ ساعت چند میلی گرم دارو در بدن او باقی می ماند؟

$$\frac{48}{8} = 6 = \frac{240}{2^6} = \frac{240}{64} = 3.75$$

$$240 \xrightarrow{+2} 120 \xrightarrow{+2} 60 \xrightarrow{+2} 30 \xrightarrow{+2} 15 \xrightarrow{+2} 7.5 \xrightarrow{+2} 3.75$$

پس بعد از ۴۸ ساعت ۳/۷۵ میلی گرم از دارو در بدن شخص وجود دارد.

سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۲۸۷	درستی یا نادرستی جمله ی زیر را مشخص کنید. دنباله با رابطه بازگشتی $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$ ، کاهشی است.	۰/۲۵	شماره ۱۴۰۳
۲۸۸	دنباله هندسی ۲, ۶, ۱۸, ... مفروض اند. الف) نسبت مشترک را به دست آورید. ب) جمله ی عمومی دنباله را بنویسید. پ) مجموع شش جمله ی اول را با استفاده از فرمول محاسبه کنید.	۱/۵	شماره ۱۴۰۳
۲۸۹	بین دو عدد ۲ و ۱۶ دو واسطه هندسی بنویسید.	۰/۷۵	شماره ۱۴۰۳



۲۹۰	برای دنباله هندسی مقابل: الف) نسبت مشترک و جمله عمومی دنباله را بنویسید. ب) رابطه بازگشتی آن را مشخص کنید.	$\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{250}, \dots$	۱/۲۵ خرداد ۱۴۰۲
۲۹۱	جمله اول یک دنباله هندسی ۵ و نسبت مشترک آن ۲ است. الف) جمله چندم این دنباله برابر ۶۴۰ است؟ ب) با استفاده از فرمول، مجموع ۸ جمله اول دنباله را به دست آورید.		۱/۵ خرداد ۱۴۰۲
۲۹۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در یک دنباله هندسی با نسبت مشترک r و جمله اول $a_1 > 0$ ، اگر $1 < r < \infty$ باشد، دنباله کاهشی است. (درست-نادرست)		۰/۲۵ دی ۱۴۰۲
۲۹۳	دنباله هندسی $1, 2, 4, \dots$ را در نظر بگیرید. الف) چهارجمله بعدی این دنباله را بنویسید. ب) مجموع پنج جمله اول این دنباله را به دست آورید.		۲ دی ۱۴۰۲
۲۹۴	جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله ششم همین دنباله ۷۲۹ است. جمله نهم دنباله را به دست آورید.		۱ دی ۱۴۰۲
۲۹۵	در یک دنباله هندسی، جمله دوم ۳۲ و جمله پنجم این دنباله ۲۵۶ است. جمله هفتم این دنباله را به دست آورید.		۱/۲۵ شهریور ۱۴۰۲
۲۹۶	در دنباله هندسی $\frac{2}{3}, 2, 6, \dots$ الف) ضابطه بازگشتی این دنباله را بنویسید. ب) مجموع ۶ جمله اول دنباله داده شده را به دست آورید.		۱/۵ شهریور ۱۴۰۲
۲۹۷	درستی یا نادرستی جمله‌ی زیر را مشخص کنید. اگر فرض کنیم جرم باکتری‌ها در هر نیم ساعت a برابر شود، بعد از یک ساعت جرم آن $\sqrt{a}$ برابر می‌شود.		۰/۲۵ خرداد ۱۴۰۲
۲۹۸	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. در یک دنباله هندسی با نسبت مشترک r ، اگر $r = 1$ باشد، آن‌گاه دنباله است.		۰/۲۵ خرداد ۱۴۰۲
۲۹۹	گزینه صحیح را انتخاب کنید. چه تعداد از دنباله‌های زیر، هندسی نیست؟	$3, 6, 12, \dots$ $8, 4, 2, \dots$ $4, 8, 12, \dots$ $2, 2\sqrt{2}, 4, \dots$ (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار	۰/۲۵ خرداد ۱۴۰۲



۳۰۰	در دنباله هندسی مقابل $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \dots$ الف) جمله عمومی دنباله را بنویسید. ب) رابطه بازگشتی آن را مشخص کنید.	۱	خرداد ۱۴۰۲
۳۰۱	اگر $5+x, 3, 3-x$ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی افزایشی باشند، مقدار x را به دست آورید.	$\frac{1}{25}$	خرداد ۱۴۰۲
۳۰۲	جمله اول یک دنباله هندسی ۶ و نسبت مشترک این دنباله ۲ است. الف) جمله نهم این دنباله را بنویسید. ب) مجموع ده جمله اول این دنباله را بیابید.	$\frac{1}{25}$	خرداد ۱۴۰۲
۳۰۳	اگر $3+x, x$ و $1-x$ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید.	۱	دی ۱۴۰۱
۳۰۴	با توجه به دنباله هندسی $\dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$ حاصل $\frac{a_8}{a_3}$ را به دست آورید.	۱	دی ۱۴۰۱
۳۰۵	جای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید. نسبت مشترک دنباله هندسی $\dots, 150, 6, 30, \dots$ برابر است.	$\frac{1}{25}$	شهریور ۱۴۰۱
۳۰۶	مجموع هفت جمله اول دنباله هندسی $\dots, 12, 6, 3$ را با استفاده از فرمول به دست آورید.	۱	شهریور ۱۴۰۱
۳۰۷	در یک دنباله هندسی، جمله چهارم برابر ۵ و جمله هفتم برابر ۱۳۵ است. نسبت مشترک دنباله چند می باشد؟	$\frac{1}{25}$	شهریور ۱۴۰۱
۳۰۸	کدام یک از دنباله های زیر هندسی است؟ در صورت مثبت بودن جواب، نسبت مشترک را به دست آورید. الف) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$ ب) $1, 4, 9, 16, \dots$	۱	خرداد ۱۴۰۱
۳۰۹	جمله دوم یک دنباله هندسی ۶ و جمله پنجم همین دنباله ۴۸ است. الف) نسبت مشترک این دنباله را پیدا کنید. ب) جمله هفتم این دنباله را بنویسید.	۲	خرداد ۱۴۰۱
۳۱۰	در دنباله هندسی زیر جمله نهم را به دست آورید. $\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \dots$	۱	دی ۱۴۰۰



۳۱۱	اگر $\sqrt{x}+2$ ، 3 ، $\sqrt{x}-2$ به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید.	۱	دی ۱۴۰۰
۳۱۲	اگر $x+3$ و 4 و $x-3$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله هندسی باشد، مقدار x را بدست آورید.	۱/۲۵	شعبان ۱۴۰۰
۳۱۳	کدامیک از دنباله‌های زیر هندسی است؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، نسبت مشترک را بنویسید. (الف) $2, 8, 32, \dots$ (ب) $2, 8, 14, \dots$ (پ) $10, 100, 1000, \dots$	۱	شعبان ۱۴۰۰
۳۱۴	با توجه به دنباله روبرو به سوالات زیر پاسخ دهید. $1, 5, 25, \dots$ الف: ضابطه بازگشتی این دنباله را بدست آورید. ب: جمله ششم این دنباله را بدست آورید.	۱/۲۵	شعبان ۱۴۰۰
۳۱۵	به کمک رابطه بازگشتی $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$ ، $a_1 = \frac{1}{3}$ الف: سه جمله اول دنباله را بنویسید. ب: جمله عمومی و نسبت مشترک آن را به دست آورید.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۰
۳۱۶	نخستین جمله یک دنباله هندسی ۹۶ و نسبت مشترک این دنباله ۲ می‌باشد، کدام جمله دنباله برابر ۷۶۸ است؟	۱/۵	خرداد ۱۴۰۰
۳۱۷	با توجه به دنباله هندسی $1, 2, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ حاصل عبارت زیر را بدست آورید. $\frac{14}{a_9 - a_6}$	۰/۷۵	دی ۹۹
۳۱۸	در دنباله هندسی زیر جاهای خالی را پر کنید. $4, 12, \dots, 108, \dots, \dots$	۰/۷۵	دی ۹۹
۳۱۹	اگر $x+3$ ، $x+2$ ، x سه جمله‌ی متوالی یک دنباله هندسی باشد، مقدار x را بدست آورید.	۱	شعبان ۹۹
۳۲۰	اگر $x+5$ ، $x+2$ ، x سه جمله‌ی متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را بیابید.	۱	خرداد ۹۹ خ



۳۲۱	جمله‌ی ششم یک دنباله هندسی ۹۶ و جمله‌ی سوم آن ۱۲ است. الف: جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی را بدست آورید. ب: مجموع هشت جمله‌ی اول این دنباله را بدست آورید.	۱/۵	خرداد ۹۹
۳۲۲	دنباله‌ی $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \dots$ را در نظر بگیرید. الف: نسبت مشترک و جمله‌ی ششم این دنباله را بنویسید. ب: نسبت $\frac{a_7}{a_5}$ را بدست آورید.	۱/۵	خرداد ۹۹
۳۲۳	در یک دنباله هندسی جمله‌ی چهارم برابر ۱۶ و نسبت مشترک دنباله برابر ۲ است. چندمین جمله‌ی دنباله برابر ۱۲۸ می‌باشد؟ (با استفاده از فرمول)	۲	خرداد ۹۹
۳۲۴	اگر $x, x+3, x+5$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید.	۱/۵	خرداد ۹۹
۳۲۵	با توجه به جملات مقابل به سؤالات زیر پاسخ دهید. $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \dots$ الف: رابطه بازگشتی دنباله را بنویسید. ب: ضابطه دنباله را بدست آورید.	۱	خرداد ۹۹
۳۲۶	مجموع شش جمله‌ی اول دنباله زیر را با استفاده از فرمول به دست آورید. $1, 4, 16, \dots$	۱	خرداد ۹۹
۳۲۷	در دنباله هندسی زیر با فرض نسبت مشترک مثبت آن را بدست آورید، سپس جاهای خالی را پر کنید. $7, \dots, \dots, \dots, 112$	۱	خرداد ۹۹
۳۲۸	جای خالی را با یک عدد مناسب کامل کنید. در دنباله $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \dots$ ضابطه‌ی این دنباله برابر است.	۰/۲۵	دی ۹۸
۳۲۹	در یک دنباله هندسی جمله‌ی اول ۱۰۲۴ و نسبت مشترک دنباله $\frac{1}{4}$ است. الف: چندمین جمله‌ی دنباله برابر ۶۴ می‌باشد؟ ب: مجموع شش جمله‌ی اول این دنباله را بدست آورید.	۱/۲۵	دی ۹۸
۳۳۰	با توجه به دنباله‌ی روبرو به سؤالات زیر پاسخ دهید. $3, 9, 27, 81, 243, \dots$ الف: نوع دنباله را مشخص کنید. ب: ضابطه‌ی بازگشتی دنباله را بنویسید. پ: جمله‌ی عمومی دنباله را بنویسید. ت: جمله‌ی دهم این دنباله را بنویسید.	۱	دی ۹۸



شماره ۹۸	۱	۳۳۱	در یک دنباله هندسی جمله‌ی اول $\frac{1}{6}$ و نسبت مشترک دنباله ۶ است. چندمین جمله از این دنباله برابر ۲۱۶ می‌باشد؟
شماره ۹۸	۱	۳۳۲	با توجه به دنباله هندسی $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$ حاصل عبارت $\frac{a_{10}}{a_7}$ را بدست آورید.
شماره ۹۸	۱/۵	۳۳۳	مقدار a را چنان بیابید که $1, \sqrt{a}+1, \sqrt{a}-1$ تشکیل یک دنباله هندسی بدهند. سپس مقدار نسبت مشترک دنباله را تعیین کنید.
شماره ۹۸	۱/۵	۳۳۴	اگر $x, x+2, x+3$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله هندسی باشند. مقدار x را بدست آورید.
شماره ۹۸	۲	۳۳۵	با توجه به دنباله روبرو به سؤالات زیر پاسخ دهید. $\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots$ الف: نوع دنباله را مشخص کنید و نسبت مشترک آن را به دست آورید. ب: جمله‌ی عمومی دنباله را بنویسید. ج: مجموع ۲۰ جمله‌ی اول این دنباله را بدست آورید.
شماره ۹۸	۲	۳۳۶	در یک دنباله هندسی جمله‌ی اول ۱۵۳۶ و نسبت مشترک دنباله $\frac{1}{4}$ است. الف: تعیین کنید که چندمین جمله‌ی دنباله برابر ۶ می‌باشد؟ ب: مجموع ده جمله‌ی اول این دنباله را به دست آورید.
شماره ۹۸	۲	۳۳۷	با توجه به دنباله روبرو به سؤالات زیر پاسخ دهید. $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \dots$ الف: نوع دنباله را مشخص کنید. ب: ضابطه بازگشتی دنباله را بنویسید. پ: جمله‌ی عمومی دنباله را بنویسید. ت: جمله‌ی یازدهم این دنباله را بنویسید.
شماره ۹۷	۱/۵	۳۳۸	جمله‌ی سوم یک دنباله هندسی ۹ و جمله‌ی ششم آن ۲۴۳ است. جمله‌ی دهم این دنباله را بدست آورید.
شماره ۹۷	۲	۳۳۹	با توجه به دنباله روبرو به سؤالات زیر پاسخ دهید. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$ الف: نوع دنباله را مشخص کنید و نسبت مشترک آن را بدست آورید. ب: جمله‌ی عمومی دنباله را بنویسید. پ: ضابطه‌ی بازگشتی دنباله را بنویسید.



درس

۲

ریشه n ام و توان گویا

خلاصه درسنامه

♦ ضرب اعداد توان دار

مثال	توضیحات	رابطه	شرط
$2^7 \times 2^5 = 2^{7+5} = 2^{12}$	یکی از پایه‌ها را نوشته و توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم	$a^m \times a^n = a^{m+n}$	پایه‌ها برابر
$2^7 \times 3^7 = (2 \times 3)^7 = 6^7$	پایه‌ها را در هم ضرب کرده و یکی از توان‌ها را می‌نویسیم.	$a^n \times b^n = (a \cdot b)^n$	توان‌ها برابر

♦ تقسیم اعداد توان دار

مثال	توضیحات	رابطه	شرط
$\frac{2^7}{2^5} = 2^{7-5} = 2^2$, $\frac{6^3}{6^5} = 6^{3-5} = 6^{-2}$	یکی از پایه‌ها را نوشته و توان مخرج را از توان صورت کم می‌کنیم	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	پایه‌ها برابر
$\frac{2^7}{2^7} = \left(\frac{2}{2}\right)^7 = 2^0$	پایه صورت را بر پایه مخرج تقسیم کرده و توان مشترک را برای این کسر می‌نویسیم.	$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$	توان‌ها برابر

♦ جمع و تفریق اعداد توان دار

ابتدا حاصل هر عدد تواندار را بدست آورده سپس جواب‌ها را با هم جمع یا تفریق می‌کنیم.

$$2^5 - 2^2 = 32 - 4 = 28 \quad , \quad 3^3 + 4^3 = 27 + 64 = 91$$

برای مثال:

♦ به توان رساندن عدد تواندار

مثال	توضیحات	رابطه
$81^{10} = (3^4)^{10} = 3^{4 \times 10} = 3^{40}$	اگر یک عدد تواندار، مجدداً به توان برسد، پایه را نوشته و توان‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.	$(a^m)^n = a^{mn}$

♦ توان صفر و منفی

به جدول زیر توجه کنید:

مثال	توضیحات	رابطه
$(-2)^0 = 1, 3^0 = 1$	اگر عدد a حقیقی و مخالف صفر باشد و به توان صفر برسد حاصل برابر ۱ می‌شود.	$a^0 = 1$
$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \xrightarrow{\text{معکوس}} \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$	اگر بخواهیم توان منفی را از بین ببریم، باید پایه را معکوس و توان را قرینه کنیم.	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$



برای مثال: با توجه به معادله $\frac{x^5 \times 15^3}{3^3 \times 35 \times 3} = 5^8$ مقدار x را بدست آورید.

پاسخ: ابتدا تمام پایه‌ها را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم، بعد عبارت را تا جایی که می‌توان ساده می‌کنیم:

$$\frac{x^5 \times (3 \times 5)^3}{3^8} = 5^8 \Rightarrow \frac{x^5 \times 3^3 \times 5^3}{3^8} = 5^8 \Rightarrow x^5 \times 5^3 = 5^8 \times 3^5 \Rightarrow x^5 = \frac{5^8 \times 3^5}{5^3} \Rightarrow x^5 = 5^5 \times 3^5 \Rightarrow x = 5 \times 3 = 15$$

ریشه‌گیری



به عکس عمل توان رسانی ریشه‌گیری گفته می‌شود. اگر $b^n = a$ باشد در این صورت $b = \sqrt[n]{a}$ خواهد بود که خوانده می‌شود «ریشه n ام عدد a است». برای مثال: $2^5 = 32 \Rightarrow \sqrt[5]{32} = 2$

در حالت کلی‌تر، درباره ریشه‌های n ام ($n \in \mathbb{N}$) عدد مانند a می‌توان گفت:

مثال	ریشه n ام	زوج یا فرد	علامت a
ریشه چهارم عدد ۵ برابر $\sqrt[4]{5}$ و $-\sqrt[4]{5}$ است.	ریشه n ام a = $\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	n زوج باشد	$a \geq 0$
ریشه سوم عدد ۲ برابر $\sqrt[3]{2}$ است.	ریشه n ام a = $\sqrt[n]{a}$	n فرد باشد	$a \geq 0$
ریشه دوم عدد ۳- تعریف نشده است.	ریشه ندارد	n زوج باشد	$a < 0$
ریشه سوم عدد ۸- برابر $\sqrt[3]{-8} = -2$ است	ریشه n ام a = $\sqrt[n]{a}$	n فرد باشد	$a < 0$

اگر عددی منفی باشد ریشه مرتبه زوج ندارد.



برای مثال: هیچ یک از عبارت‌های $\sqrt{-3}$ و $\sqrt[3]{-1}$ و $\sqrt[5]{-25}$ قابل تعریف (قابل محاسبه) نیستند چون فرجه‌ها زوج‌اند ولی اعداد زیر رادیکال، منفی هستند.

درس ۲

توان گویا

نکته: چند نکته مهم در مورد محاسبات رادیکالی

① اگر چند رادیکال تودرتو داشته باشیم می‌توان فرجه‌ها را در هم ضرب کرد و به جای تمام رادیکال‌ها، فقط یک رادیکال بنویسیم.

برای مثال: $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[5 \times 3]{2} = \sqrt[15]{2}$ یا $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt{6}}} = \sqrt[3 \times 5 \times 2]{6} = \sqrt[30]{6}$

② اگر فرجه رادیکال، زوج باشد و همچنین توان و فرجه با هم مساوی باشند در این صورت پس از ساده کردن توان و فرجه با هم، عبارت زیر رادیکال با قدرمطلق خارج خواهد شد. مثلاً حاصل $\sqrt[4]{(-5)^4}$ برابر می‌شود با $|-5| = 5$.

اگر فرجه فرد باشد نیازی به قدرمطلق نیست: برای مثال: $\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$

در حالت کلی داریم:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & n \text{ زوج است} \\ a & n \text{ فرد است} \end{cases}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

③ هرگاه $a > 0$ ، برای دو عدد طبیعی m و n ، $a^{\frac{m}{n}}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

بنابراین، $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$. همچنین $a^{-\frac{m}{n}}$ نیز به این صورت تعریف می‌شود:



برای مثال: $3^{\frac{1}{5}}$ برابر است با $\sqrt[5]{3^1}$ همچنین $\sqrt{7}$ برابر است با $7^{\frac{1}{2}}$

تذکر مهم: اگر پایه منفی باشد توان نمی‌تواند کسر یا اعشاری باشد.

برای مثال: حاصل $(-2)^{\frac{1}{5}}$ تعریف نشده است.

سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۳۴۰	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. ریشه سوم عدد -27 برابر است با	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۳۴۱	درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید. حاصل $\sqrt[4]{(-3)^4}$ برابر -3 است.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۳۴۲	گزینه صحیح را انتخاب کنید. در تساوی $5^{-2} = 5^x$ مقدار x کدام است؟ $(1) -\frac{1}{4} \quad (2) \frac{1}{4} \quad (3) -4 \quad (4) +2$	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۳۴۳	عبارت توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید. الف) $(0.53)^{\frac{2}{3}}$ ب) $\sqrt[5]{6^3}$	۰/۵	شهریور ۱۴۰۳
۳۴۴	حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. $(m, n > 0)$ $(m^{\frac{2}{3}} n^{\frac{1}{2}})^3 (mn^{\frac{1}{3}}) =$	۱	شهریور ۱۴۰۳
۳۴۵	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. ریشه‌های چهارم عدد 7 برابر است با و	۰/۵	خرداد ۱۴۰۳
۳۴۶	عبارت توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید. (الف) $(0.35)^{\frac{1}{4}}$ (ب) $\sqrt[4]{4.2}$ (ج) $\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^3}$ (د) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{4}}$	۱	خرداد ۱۴۰۳



۳۴۷	حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. ($a > 0$)	۱/۵	خرداد ۱۴۰۳
	الف) $\left[\frac{a^{-\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{1}{6}}} \right]^{-6}$ ب) $(0.7)^0 \times (12)^{\frac{1}{2}} \times (3)^{\frac{1}{2}}$		
۳۴۸	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. ریشه‌های ششم عدد ۶۴ برابر و می‌باشد.	۰/۵	دی ۱۴۰۳
۳۴۹	عبارت توانی را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید.	۱	دی ۱۴۰۲
	الف) $\sqrt[5]{47}$ ب) $(0.34)^{\frac{1}{5}}$		
۳۵۰	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. ریشه‌ی پنجم عدد ۳۲ - برابر ۲ است.	۰/۲۵	شعبان ۱۴۰۳
۳۵۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. عبارت $\sqrt{7/1}$ به صورت توان‌دار و عبارت $(41)^{\frac{2}{3}}$ به صورت رادیکالی نوشته می‌شود.	۰/۵	شعبان ۱۴۰۳
۳۵۲	حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.	۱/۲۵	شعبان ۱۴۰۳
	الف) $5^{0.12} \times 5^{0.88}$ ب) $\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{6}}} \right)^{-12}$		
۳۵۳	جای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. ریشه‌های چهارم عدد ۱۰ برابر است با و	۰/۵	خرداد ۱۴۰۳
۳۵۴	در تساوی $(0.27)^{15} = (0.27)^{x+1} \times (0.27)^5 \times (0.27)^2$ مقدار x کدام است؟ ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۳۵۵	عبارت توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید.	۱	خرداد ۱۴۰۳
	الف) $\sqrt[5]{(3.5)^4}$ ب) $2^{\frac{1}{10}}$		



۳۵۶	حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.	۱/۲۵ ۱۴۰۲ خرداد	$(a^{\frac{2}{3}} \cdot d^{\frac{5}{3}})^3 \times (a^8)^{\frac{1}{2}} =$
۳۵۷	جای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید. ریشه سوم عدد ۱۰۰۰ - برابر است.	۰/۲۵ ۱۴۰۱ دی	
۳۵۸	مقدار x را در تساوی زیر بدست آورید.	۱ ۱۴۰۱ شهریور	$\frac{x^6 \times 14^2}{2 \times 2^4 \times 2^3} = 7^4$
۳۵۹	عدد تواندار را بصورت رادیکالی و عدد رادیکالی را بصورت عدد تواندار بنویسید.	۱ ۱۴۰۱ شهریور	الف) $13^{\frac{5}{8}}$ ب) $\sqrt[3]{17^2}$
۳۶۰	درستی یا نادرستی جمله‌ی زیر را مشخص کنید. ریشه چهارم ۱۶ -، عدد ۲ - است.	۰/۲۵ ۱۴۰۱ شهریور	
۳۶۱	حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد تواندار بنویسید.	۱/۵ ۱۴۰۱ شهریور	الف) $8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}$ ب) $(7^3)^{\frac{1}{2}}$ پ) $\left(\frac{1}{4}\right)^6 \div \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$
۳۶۲	عدد تواندار را به صورت رادیکالی و عدد رادیکالی را به صورت اعداد تواندار بنویسید.	۱ ۱۴۰۱ شهریور	الف) $\sqrt[5]{11^2}$ ب) $(0/9)^{\frac{2}{5}}$
۳۶۳	درستی یا نادرستی جمله‌ی زیر را مشخص کنید. نمایش $\sqrt[3]{-7}$ را به صورت $(-7)^{\frac{1}{3}}$ می‌توان نوشت.	۰/۲۵ ۱۴۰۱ خرداد	
۳۶۴	عبارت تواندار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت تواندار بنویسید.	۱ ۱۴۰۱ خرداد	الف) $\sqrt[5]{12^3}$ ب) $(0/24)^{\frac{2}{7}}$



۳۶۵	در تساوی $8^x \times 8^3 = 8^{10}$ مقدار x را مشخص کنید.	۱	خرداد ۱۴۰۱
۳۶۶	حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به سادهترین صورت ممکن بنویسید.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۱
	الف) $(15^6)^{\frac{1}{2}}$ ب) $11^{\frac{2}{5}} \times 6^{\frac{2}{5}}$ پ) $4^{\frac{1}{3}} \div 4^{\frac{1}{3}}$		
۳۶۷	حاصل عبارات زیر را به دست آورید.	۱	دی ۱۴۰۰
	الف) $(\frac{38}{32})^{\frac{1}{2}}$ ب) 5×5^2		
۳۶۸	عدد توان دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید.	۱/۵	دی ۱۴۰۰
	الف) $\sqrt[5]{x^5}$ ب) $(m)^{\frac{5}{6}}$ پ) $(0/9)^{\frac{1}{2}}$		
۳۶۹	جاهای خالی را با اعداد مناسب تکمیل کنید. الف: ریشه پنجم عدد ۳۲ برابر است. ب: ریشههای چهارم عدد ۱۶ برابر و است. پ: ریشه سوم عدد ۲۷ برابر است.	۱	شهریور ۱۴۰۰
۳۷۰	حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به سادهترین صورت ممکن بنویسید.	۱	شهریور ۱۴۰۰
	الف) $\frac{15^2}{15^2}$ ب) $2^9 \times 2^{-9}$		
۳۷۱	عبارت تواندار را به صورت رادیکالی و عبارتهای رادیکالی را به صورت تواندار بنویسید.	۲	خرداد ۱۴۰۰
	الف) $4^{\frac{1}{2}}$ ب) $(0/8)^{\frac{2}{3}}$ پ) $\sqrt[5]{21^4}$ ت) $\sqrt[4]{(0/47)^2}$		



۳۷۲	در هر یک از تساوی‌های زیر مقدار x را مشخص کنید.	۱/۵ خرداد ۱۴۰۰
	الف) $8^x \times 9^x = 72^4$ ب) $(5^x)^6 = \frac{1}{5^2}$ پ) $(0/6) \times (0/6)^x \times (0/6)^3 = (0/6)^8$	
۳۷۳	حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.	۱ خرداد ۱۴۰۰
	الف) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^4$ ب) $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{3}}$	
۳۷۴	حاصل عبارات زیر را بدست آورید.	۱ دی ۹۹
	الف) $11^{\frac{5}{6}} \times 11^{\frac{1}{6}} =$ ب) $3^{\frac{5}{6}} \times 5^{\frac{5}{6}} =$	
۳۷۵	اعداد توان دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید.	۱/۵ دی ۹۹
	الف) $\sqrt[3]{x^5}$ ب) $(0/1)^{\frac{1}{2}}$ پ) $(a)^{\frac{5}{8}}$	
۳۷۶	حاصل عبارات زیر را بدست آورید.	۱ شهریور ۹۹
	الف) $\left(\frac{3^4}{2^6}\right)^{\frac{1}{2}}$ ب) $3^{0/26} \times 3^{0/24}$	
۳۷۷	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. ریشه‌ی سوم عدد ۲۷ برابر با است و ریشه‌های ششم عدد ۶۴ برابر و می‌باشند.	۰/۷۵ خرداد ۹۹ خ
۳۷۸	عبارات توانی زیر را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید.	۱/۵ خرداد ۹۹ خ
	الف) $12^{\frac{3}{5}}$ ب) $\sqrt[5]{15}$ پ) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-\frac{1}{4}}$	



۳۷۹	حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.	۱/۵	خرداد ۹۹ خ
		الف) $125^{\frac{2}{3}} \div 125^{\frac{1}{3}}$ ب) $(a^{\frac{2}{3}} \times b^{\frac{1}{3}})^2 \times (a^2 \times b^6)^{\frac{1}{3}}$	
۳۸۰	حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (m و n اعداد حقیقی مثبت‌اند.)	۱/۵	خرداد ۹۹ خ
		الف) $(m^2 n)^3 (m^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{3}})^6$ ب) $3^{0/26} \times 3^{0/74}$	
۳۸۱	عبارت‌های توان دار را به صورت رادیکالی و عبارت‌های رادیکالی را به صورت تواندار بنویسید.	۲	خرداد ۹۹ خ
		الف) $\sqrt[3]{41}$ ب) $(0/32)^{\frac{1}{5}}$ پ) $9^{\frac{1}{2}}$ ت) $\sqrt[3]{27}$	
۳۸۲	عبارت تواندار را به صورت رادیکالی و عبارت‌های رادیکالی را به صورت تواندار بنویسید.	۱	خرداد ۹۹ خ
		الف) $3^{\frac{1}{5}}$ ب) $6^{\frac{1}{4}}$ پ) $\sqrt[3]{25}$ ت) $\sqrt[3]{3/7}$	
۳۸۳	حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (m و n اعداد حقیقی مثبت‌اند.)	۱	دی ۹۸
		الف) $(m^4 n^3)^2 (m^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{3}})^6$ ب) $21^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{2}{3}}$	
۳۸۴	عبارت تواندار را به صورت رادیکالی و عبارت‌های رادیکالی را به صورت تواندار بنویسید.	۱	دی ۹۸
		الف) $\sqrt[3]{41}$ ب) $(0/32)^{\frac{1}{5}}$	



شماره ۹۸	۱	عبارت توانی زیر را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید. (الف) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$ (ب) $\sqrt[5]{5/18}$	۳۸۵
شماره ۹۸	۱/۵	حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید. (الف) $4^{\frac{1}{4}} \times 8^{\frac{1}{5}}$ (ب) $\left(\frac{a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{5}}}\right)^{-2}$	۳۸۶
شماره ۹۸	۱	عبارت توان دار زیر را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید. (الف) $12^{\frac{3}{4}}$ (ب) $\sqrt[4]{10^{\frac{3}{4}}}$	۳۸۷
شماره ۹۸	۲	حاصل عبارت‌های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید. (m و n اعداد حقیقی مثبت‌اند). (الف) $\left(m^{\frac{2}{3}} n^{\frac{1}{3}}\right)^2 \left(m^2 n^3\right)^{\frac{1}{2}}$ (ب) $8^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$	۳۸۸
شماره ۹۸	۱	عبارت توان دار زیر را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید. (الف) $(0/31)^{\frac{1}{4}}$ (ب) $\sqrt[4]{47}$	۳۸۹
شماره ۹۷	۱	حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید. (m عدد حقیقی مثبت است). (الف) $2^{\frac{1}{4}} \times 8^{\frac{1}{4}}$ (ب) $\left(\frac{m^{\frac{1}{4}}}{m^{\frac{1}{2}}}\right)^{-4}$	۳۹۰
شماره ۹۷	۰/۵	عبارت توان دار زیر را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید. (الف) $2^{-\frac{3}{11}}$ (ب) $\sqrt[3]{25}$	۳۹۱
شماره ۹۷	۰/۵	جای خالی را کامل کنید. ریشه‌های چهارم عدد ۱۶ برابر و می‌باشد.	۳۹۲



درس

۳

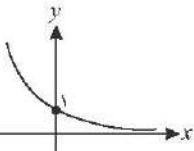
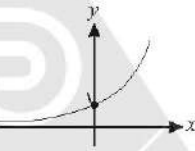
تابع نمایی

خلاصه درسنامه

تابع نمایی و نمودار آن



به توابع $y = 2^x$ ، $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ و $y = (\sqrt{2} - 1)^x$ توجه کنید. در همه این توابع، متغیر x فقط در توان مشاهده می‌شود و ضمناً عدد پایه، عددی مثبت و مخالف یک است به این گونه توابع، نمایی گفته می‌شود ضابطه کلی تابع نمایی به شکل $y = a^x$ است که با توجه به مقدار a دو حالت برای نمودارش خواهیم داشت

اگر $0 < a < 1$ باشد	اگر $a > 1$ باشد
 ۱ نمودار نزولی (کاهشی است). ۲ محور xها را قطع نمی‌کند. ۳ محور yها را در $A(0, 1)$ قطع می‌کند. ۴ نمودار از نواحی اول و دوم می‌گذرد.	 ۱ نمودار صعودی (افزایشی است). ۲ محور xها را قطع نمی‌کند. ۳ محور yها را در $A(0, 1)$ قطع می‌کند. ۴ نمودار از نواحی اول و دوم می‌گذرد.

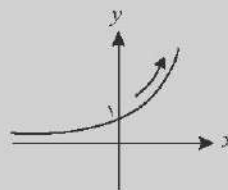
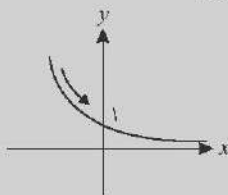
دامنه تابع نمایی برابر: $\mathbb{R}$ یا اعداد حقیقی و برد آن برابر $\mathbb{R}^+$ یا $(0, +\infty)$ است.

درس ۳

تابع نمایی

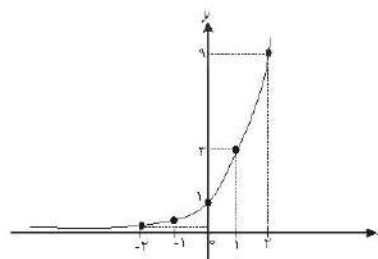
برای مثال: نمودارهای تقریبی توابع $f(x) = 3^x$ و $g(x) = \left(\frac{5}{6}\right)^x$ را رسم کنید.

پاسخ: در تابع f پایه یعنی عدد ۳، بزرگتر از ۱ است، پس نمودار صعودی است
ولی در تابع g پایه یعنی عدد $\frac{5}{6}$ بین صفر و یک قرار دارد (چون صورت از مخرج کوچکتر است). پس تابع نزولی است.



اگر بخواهیم نمودار را دقیق‌تر رسم کنیم کافی است از چند تا نقطه کمکی استفاده کنیم، یعنی به x چند عدد دلخواه بدهیم و y را پیدا کنیم مثلاً نمودار دقیق‌تر $y = 3^x$ به صورت زیر است:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9





مقایسه نمودار توابع نمایی با یکدیگر

$a > 1$	$0 < a < 1$
$y_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^x$	$y_3 = 7^x$, $y_2 = 4^x$, $y_1 = 2^x$
نمودار افزایشی	نمودار کاهشی

نکته: ۱) در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $0 < a < 1$ باشد، وقتی x بزرگ می‌شود مقدار y کم می‌شود.

برای x های کوچک‌تر از صفر، با کاهش مقدار x مقدار y به سرعت افزایش پیدا می‌کند.

۲) اگر $0 < a < 1$ باشد، وقتی x بزرگ می‌شود، مقدار y کم می‌شود.

برای x های کوچک‌تر از صفر، با کاهش مقدار x مقدار y به سرعت افزایش پیدا می‌کند.

کاربردهای تابع نمایی



تابع نمایی کاربرد زیادی در مسائل رشد و مسائل زوال دارد.

توصیف	(۱) افزایش تدریجی متناسب با زمان را رشد می‌گویند	(۲) کاهش تدریجی متناسب با زمان را زوال گویند.
نمودار		
فرمول	$f(t) = c(1+r)^t$	$f(t) = c(1-r)^t$

در فرمول‌های رشد و زوال جدول بالا داریم:

t = زمان

c = مقدار ابتدای جمعیت یا سرمایه

r = درصد رشد یا زوال معمولاً به صورت اعشاری =

$f(t)$ = مقدار کل جمعیت یا سرمایه

برای مثال: قیمت اولیه کالایی ۲۵۰۰ تومان و قیمت آن پس از ۲ سال ۶۴۰۰ تومان است. نرخ تورم سالانه به این صورت محاسبه می‌شود:

$$f(t) = c(1+r)^t$$

$$6400 = 2500(1+r)^2 \Rightarrow (1+r)^2 = \frac{6400}{2500} \Rightarrow (1+r)^2 = \frac{64}{25} \Rightarrow 1+r = \frac{8}{5} \Rightarrow r = \frac{3}{5} = 60\%$$



مثال

سرمایه شخصی یک میلیون تومان است. اگر این سرمایه با نرخ ۱ درصد در سال کاهش یابد، مقدار این سرمایه بعد از ۲ سال را محاسبه کنید.

$$f(t) = c(1-r)^t = 1000000(1-0.01)^2$$

$$\Rightarrow 1000000 \times (0.99)^2 = 1000000 \times 0.9801 = 980100$$

سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۳۹۳	نمودار تابع نمایی $y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.	۰/۷۵	شهریور ۱۴۰۳
۳۹۴	اگر مقدار اولیه‌ی ماده‌ای ۱۰۰۰ گرم باشد و سالانه ۱۰ درصد مقدار آن کاهش یابد، پس از دو سال مقدار ماده‌ی باقیمانده چقدر خواهد بود؟	۱	شهریور ۱۴۰۳
۳۹۵	نمودار تابع نمایی $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۳
۳۹۶	شخصی چهل میلیون تومان در یک شرکت تولیدی در راستای حمایت از تولید ملی سرمایه‌گذاری می‌کند. اگر در پایان هر سال ۳۰ درصد سود علی‌الحساب به او پرداخت شود، پس از دو سال سرمایه او چقدر خواهد شد؟	۱	خرداد ۱۴۰۳
۳۹۷	نمودار تابع $y = 4^x$ را رسم کنید.	۰/۷۵	دی ۱۴۰۲
۳۹۸	پدر احسان قصد دارد مبلغ ۵۰ میلیون تومان برای راه‌اندازی یک شرکت تولیدی دانش‌بنیان سپرده‌گذاری کند، اگر بانک سالانه ۱۰ درصد به سپرده‌ها سود پرداخت کند، پدر احسان بعد از ۲ سال چه مبلغی دریافت می‌کند؟	۱	دی ۱۴۰۲
۳۹۹	نمودار مختصاتی تابع نمایی $y = 3^x$ را رسم کنید.	۰/۷۵	شهریور ۱۴۰۲
۴۰۰	فردی ده میلیون تومان پول خود را در یک حساب شرکت تولید کالای ایرانی سرمایه‌گذاری می‌کند. اگر در پایان هر سال به پاس اعتمادش ۲۰ درصد سود علی‌الحساب از طرف شرکت به او پرداخت شود، آنگاه پس از دو سال مبلغ سرمایه‌گذاری او چه مقدار خواهد شد؟	۱	شهریور ۱۴۰۲

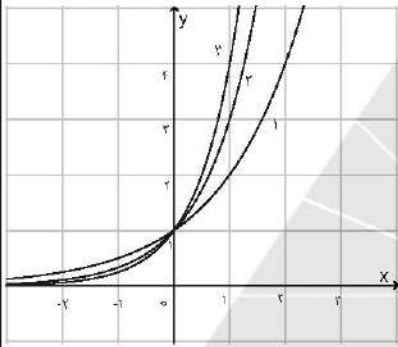
درس ۳

تابع نمایی



۴۰۱	نمودار مختصاتی تابع نمایی $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ را رسم کنید.	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۲								
۴۰۲	جمعیت کشوری در سال ۲۰۲۳ میلادی، حدود بیست میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور به صورت نمایی و با نرخ دو درصد در حال کاهش باشد، جمعیت این کشور در سال ۲۰۲۴ میلادی چند نفر خواهد بود؟	۱	خرداد ۱۴۰۲								
۴۰۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. نمودار تابع نمایی $y = 3^{-x}$ ، نموداری کاهشی است.	۰/۷۵	دی ۱۴۰۱								
۴۰۴	الف) به کمک جدول، تابع $y = 2^x$ را رسم کنید. ب) مقدار تقریبی $2^{\frac{1}{3}}$ را از روی نمودار الف بدست آورید.	۱/۲۵	دی ۱۴۰۱								
۴۰۵	جمعیت کشوری در پایان سال ۲۰۲۲ میلادی حدود ۴۰ میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن کشور در پایان سال ۲۰۲۴ چند نفر خواهد بود؟	۰/۷۵	دی ۱۴۰۱								
۴۰۶	نمودار تابع نمایی $y = 3^x$ را با مشخص کردن نقطه برخورد با محور عرض‌ها، رسم کنید.	۰/۷۵	شهریور ۱۴۰۱								
۴۰۷	طی چند سال اخیر، جمعیت گونه ای از پرندگان هر سال نسبت به سال قبل ۲۰ درصد کاهش می‌یابد. اگر جمعیت آن‌ها در حال حاضر، ۱۰۰۰۰ (ده هزار) باشد، پس از گذشت دو سال، جمعیت آن‌ها چه تعداد خواهد بود؟	۱	شهریور ۱۴۰۱								
۴۰۸	تابع نمایی $y = 2^x$ را در نظر بگیرید؛ الف) جدول زیر را کامل کنید. نمودار مختصاتی $y = 2^x$ را رسم کنید.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۱								
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td><td>-۱</td><td>۰</td><td>۱</td></tr> <tr> <td>$y = 2^x$</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>				x	-۱	۰	۱	$y = 2^x$			
x	-۱	۰	۱								
$y = 2^x$											
۴۰۹	جمعیت شهری در سال ۱۴۰۰ شمسی، حدود <u>دو میلیون</u> نفر برآورد شده است، اگر رشد جمعیت این شهر به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۱۰ درصد در حال افزایش باشد، جمعیت این شهر در سال ۱۴۰۱ چند نفر خواهد بود؟	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۱								
۴۱۰	نمودار مختصاتی تابع نمایی $y = 2^x$ را رسم کنید.	۱	دی ۱۴۰۰								
۴۱۱	جمعیت کشوری در سال ۲۰۲۰ میلادی حدود ده میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال افزایش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۲۱ میلادی چند نفر خواهد بود.	۱	تیر ۱۴۰۰								



شعبه ۱۴۰۰	۱	۴۱۲	نمودار مختصاتی تابع نمایی $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ را رسم کنید.
خرداد ۱۴۰۰	۱	۴۱۳	نمودار مختصاتی تابع نمایی $y = 3^x$ را رسم کنید.
خرداد ۱۴۰۰	۱	۴۱۴	پدر سارا قصد دارد مبلغ ۲۰ میلیون تومان را برای هزینه دانشگاه دخترش در بانکی سپرده گذاری کند. این بانک سالانه ۲۰٪ سود به سپرده‌ها پرداخت می‌کند. پدر سارا بعد از دو سال چه مبلغی را می‌تواند دریافت کند؟
دی ۹۹	۱	۴۱۵	جمعیت شهری در سال ۲۰۲۰ میلادی حدود ۱۰۰۰۰۰ نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این شهر با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۲۱ میلادی چند نفر خواهد بود؟
دی ۹۹	۱/۵	۴۱۶	نمودارهای توابع $f(x) = 4^x$, $f(x) = 2^x$, $f(x) = 3^x$ در شکل زیر رسم شده‌اند. ضابطه هر نمودار را مشخص کنید. 
شعبه ۹۹	۱	۴۱۷	نمودار مختصاتی تابع $y = 3^x$ را رسم کنید.
شعبه ۹۹	۱	۴۱۸	جمعیت کشوری در سال ۲۰۱۷ میلادی حدود چهار میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۱۸ میلادی چند نفر خواهد بود؟
خرداد ۹۹	۰/۲۵	۴۱۹	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $a > 1$ باشد، هرچه x کوچک می‌شود، مقدار y می‌شود.
خرداد ۹۹	۱	۴۲۰	نمودار مختصاتی تابع نمایی $y = 2^x$ را رسم کنید.
خرداد ۹۹	۱/۵	۴۲۱	سرمایه اولیه یک شرکت ۱۰۰ میلیون تومان، سود سالانه آن ۲۰ درصد و میزان آن را در تمام مدت یکسال در نظر می‌گیریم. سرمایه شرکت پس از گذشت سه سال چقدر خواهد بود؟

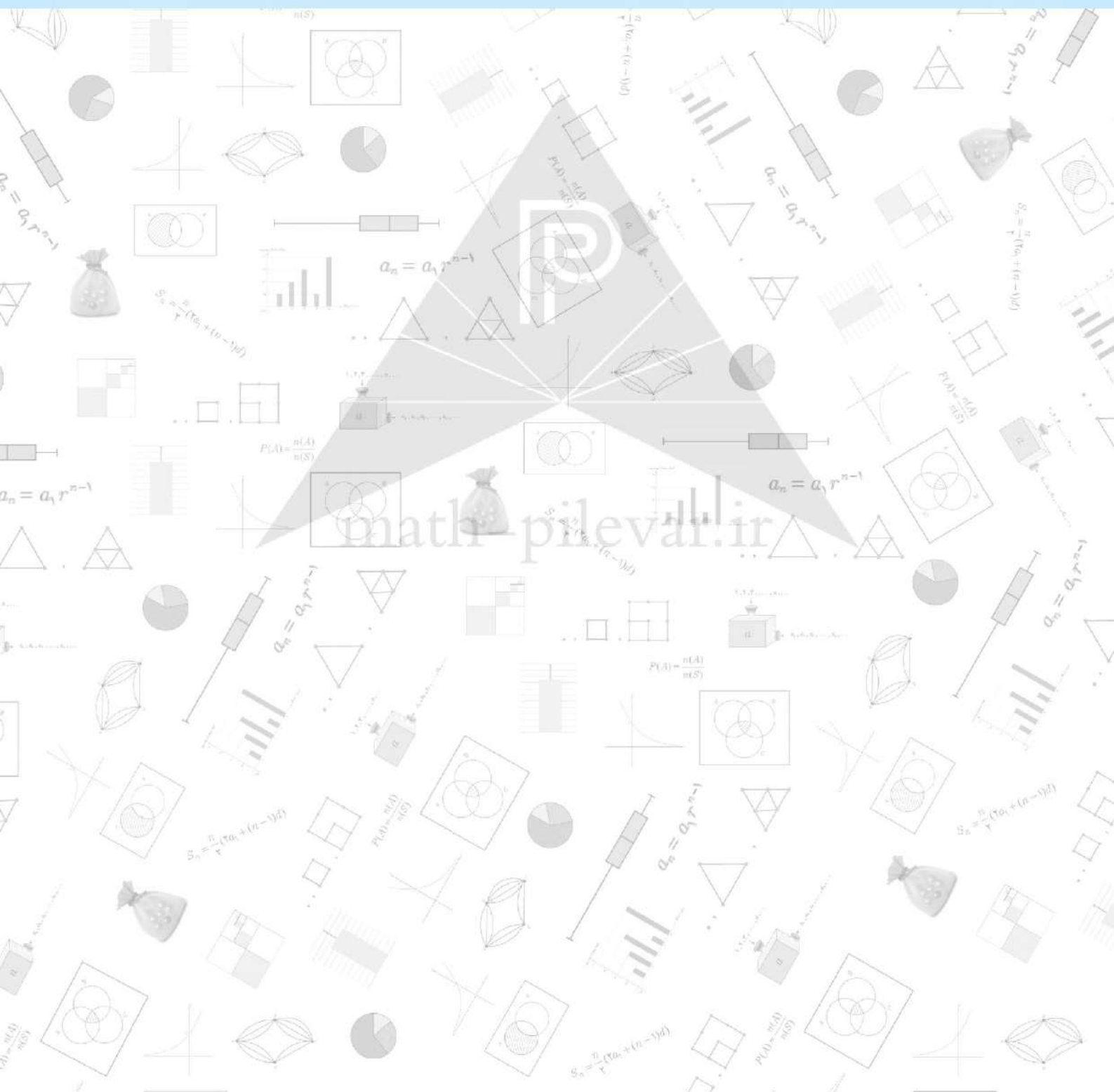


۴۲۲	جمعیت شهری، حدود ۱۰۰ هزار نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این شهر با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن پس از یکسال چند نفر خواهد بود؟	۱/۵	خرداد ۹۹ خ
۴۲۳	نمودار مختصاتی تابع نمایی $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را رسم کنید.	۱	خرداد ۹۹
۴۲۴	نمودار مختصاتی تابع نمایی $y = 2^x$ را رسم کنید.	۱	دی ۹۸
۴۲۵	جمعیت کشوری در سال ۱۳۹۶ حدود بیست میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال افزایش باشد، جمعیت آن در سال ۱۳۹۸ چند نفر خواهد بود؟	۱	دی ۹۸
۴۲۶	نمودار مختصاتی تابع نمایی $y = 2^x$ را رسم کنید.	۱	شهریور ۹۸
۴۲۷	جمعیت شهری در سال ۲۰۱۸ میلادی حدود یک میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این شهر با نرخ ۱۰ درصد در حال رشد افزایش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۲۰ میلادی چند نفر خواهد بود؟	۱	شهریور ۹۸
۴۲۸	نمودار مختصاتی تابع نمایی $y = 2^x$ را رسم کنید. و کاهشی یا افزایشی بودن آن را بیان کنید.	۱/۵	تیر ۹۸
۴۲۹	جمعیت اولیه یک روستا، حدود دو هزار نفر برآورد شده است. اگر جمعیت این روستا با نرخ ۲ درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن بعد از ۳ سال چند نفر خواهد بود؟	۱/۵	تیر ۹۸
۴۳۰	نمودار تابع $y = 3^x$ را رسم کنید.	۱	خرداد ۹۸
۴۳۱	جمعیت یک روستا در سال ۱۳۹۶ حدود دو هزار نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این روستا با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۱۳۹۸ چند نفر خواهد بود؟	۱/۵	خرداد ۹۸
۴۳۲	نمودار مختصاتی تابع نمایی $y = 2^x$ را رسم کنید. و کاهشی یا افزایشی بودن آن را بیان کنید.	۱	دی ۹۷

بدرداشت ضروری دانش آموز:

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

ریاضی و آمار ۳





درس

۱

شمارش

۲۵-۱ صفحه ۵

۲- صفحه ۶

روش اول:

$$\underbrace{4 \times 3 \times 3}_{75/0} = \underbrace{36}_{0/75} \quad \text{(الف)}$$

روش دوم:

کل اعداد سه رقمی با ارقام متفاوت و با ارقام موجود: $5 \times 4 \times 3 = 60$ (۰/۲۵)کل اعداد سه رقمی زوج با ارقام متفاوت و با ارقام موجود: $4 \times 3 \times 2 = 24$ (۰/۵)کل اعداد سه رقمی فرد با ارقام متفاوت و با ارقام موجود: $60 - 24 = 36$ (۰/۲۵)

صفحه ۱۰

$$\text{ب) } \left(\frac{5}{3} \right) = \frac{10}{0/25}$$

۳- گزینه ۳، (عدد ۶) (۰/۲۵) (صفحه ۳۰)

۴-

$$\underbrace{3 \times 2 + 2 \times 1}_{(0/25)} = \underbrace{8}_{(0/25)}$$

۵-

۵-۱ (۰/۵) $5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60$ حالت اول: رقم یکان صفر باشد.۵-۲ (۰/۵) $4 \times 4 \times 3 \times 1 = 48$ حالت دوم: رقم یکان ۵ باشند.

$$\Rightarrow 6 + 48 = 108 \quad (0/25)$$

(صفحه ۶ و ۷)

روش دوم: کل اعداد ۴ رقمی با ارقام ذکر شده و بدون تکرار

$$\underbrace{5 \times 5 \times 4 \times 3}_{(0/5)} = 300$$

اعداد ۴ رقمی با ارقام ذکر شده که مضرب ۵ نیستند و بدون تکرار ارقام

$$\underbrace{4 \times 4 \times 3 \times 4}_{(0/5)} = 192$$

اعداد ۴ رقمی با ارقام ذکر شده مضرب ۵ و بدون تکرار ارقام

$$\underbrace{300 - 192}_{(0/25)} = 108$$

۶- نادریست (۰/۲۵)

۷- الف) حالت ۱۲ $4 + 3 + 5 = 12$ (۰/۷۵)

$$\text{ب) حالت } 60 = 4 \times 3 \times 5 = 60 \quad (0/75)$$

صفحه ۱۰ و ۱۱

۸-

$$\begin{cases} \underbrace{5 \times 4 \times 3 \times 1}_{(0/5)} = 60 \\ \underbrace{4 \times 4 \times 3 \times 1}_{(0/5)} = 48 \end{cases} \quad \underbrace{60 + 48}_{(0/5)} = 108$$

صفحه ۶

۸-۲ (۰/۲۵)

$$\underbrace{2 \times 3 + 1 + 2 \times 2}_{(0/25)(0/25)} = \underbrace{11}_{(0/25)}$$

۱۰- صفحه ۴

۱۱- الف)

(۰/۵) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ یا $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ یا $7!$

$$\underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 1}_{(0/75)} = \underbrace{120}_{(0/25)}$$

ب) صفحه ۱۱

۱۲- نادریست

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

۱۳-

$$4! = 24$$

۱۴-

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{6 \times 5 \times 1}_{(0/5)} \Rightarrow 30 \\ \underbrace{5 \times 5 \times 3}_{(0/5)} \Rightarrow 75 \end{array} \right\} \Rightarrow 30 + 75 = 105$$

(اگر رقم یکان فقط صفر باشد)

(اگر رقم یکان ۶ یا ۴ یا ۲ باشد)

۱۵-

$$\text{الف) } \left(\frac{6}{3} \right) = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

۱۶-

$$\text{ب) } \left(\frac{4}{2} \right) = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

۱۷- ۲۰

$$3 \times 4 = 12$$

۱۸-

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$$

۱۹-

۲۰- نادریست

۲۱- تمام مسائلی که انتخاب ۳ شی از ۵ شی باشد، به طوری که ترتیب در انتخاب آنها اهمیت نداشته باشد.



مانند: به چند طریق میتوان از بین ۵ کتاب، ۳ کتاب را انتخاب کرد؟

۲۲- ۷ تایی

۲۳- الف: $6 \times 5 \times 4 = 120$ ب: $1 \times 5 \times 4 = 20$

۲۴- $\binom{9}{1} = 9$

۲۵- الف: جایگشت ب: ترکیب پ: ۱

۲۶- الف) $\binom{9}{1} = \frac{9!}{1! \times 8!} = 9$

ب) $\binom{3}{1} = 3$

۲۷- $5 \times 4 \times 3 = 60$

۲۸- الف: ۱ ب: $m \times n$ پ: $n!$

۲۹- الف: گزینه ۳ ب: گزینه ۴ پ: گزینه ۳

۳۰- $3 \times 4 = 12$

۳۱- الف: $A - B$ ب: $n!$

۳۲- الف: $3 + 2 + 4 = 9$ ب: $3 \times 2 \times 4 = 24$

۳۳- $3 \times 4 \times 3 = 36$

۳۴- نادروست

۳۵- $\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4! \times 5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5!} = 126$

۳۶- $7 \times 6 \times 5 = 210$

۳۷- $\binom{4}{3} + \binom{5}{2} = \frac{4!}{3!(4-3)!} + \frac{5!}{2!(5-2)!} = 4 + 10 = 14$

۳۸- $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} = 10$

۳۹- $\left. \begin{array}{l} A \rightarrow B \rightarrow C \quad 3 \times 4 = 12 \\ A \rightarrow D \rightarrow C \quad 3 \times 2 = 6 \end{array} \right\} \rightarrow 12 + 6 = 18$

۴۰- $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$

۴۱- $n!$

۴۲- $\binom{5}{1} \binom{6}{1} \binom{4}{1} = 5 \times 6 \times 4 = 120$

۴۳- درست

۴۴- الف) $5 \times 4 \times 3 = 60$
ب) $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \times (6-3)!} = 20$

۴۵- درست

۴۶- الف) $1 \times 5 \times 4 = 20$

ب) $1 \times 4 \times 3 \times 1 = 12$

۴۷- $10 + 12 + 6 = 28$

۴۸- $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times (8-3)!} = 56$

۴۹- $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times (8-3)!} = 56$

۵۰- $3 + 5 = 8$

۵۱- الف) $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

ب) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 4 = 480$

ج) $5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60$

۵۲- الف) $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

ب) $1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$

۵۳- الف) $\binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \times (9-6)!} = 84$

ب) $n!$

۵۴- $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times (8-3)!} = 56$

۵۵- $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

۵۶- $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times (5-2)!} = 10$

۵۷- الف) $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$

ب) $8 \times 7 \times 6 \times 4 = 1344$



درس

۲

احتمال

روش دوم:

$$p(B) = 1 - p(B') = 1 - \frac{\overbrace{\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)}^{(0.25)}}{\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}$$

$$= 1 - \frac{\overbrace{4 \times 10 + 10}^{0.25}}{84} = 1 - \frac{50}{84} = \frac{34}{84}$$

(صفحه ۲۷)

۶۶- نادرست (۰/۲۵)

۶۷- گزینه ۴ (۰/۲۵)

$$A = \{(پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶),$$

(الف)

$$(و, ۵), (و, ۶)\} \quad (0.75)$$

$$n(B) = 3$$

(ب)

$$n(S) = 6 \times 2 = 12 \quad p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

صفحه ۱۸ و ۱۹

$$p(A) = \frac{\overbrace{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}^{(0.5)}}{\overbrace{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}^{(0.5)}} = \frac{1}{2}$$

۶۹-

صفحه ۲۶

$$۷۰- \text{الف)} \{(پسر, پسر), (دختر, پسر), (پسر, دختر), (دختر, دختر)\} = S \text{ فضای نمونه‌ای (۱)}$$

هر زوج مرتب (۰/۲۵)

$$\text{ب)} \{(دختر, دختر), (پسر, پسر)\} = A \quad (0.5)$$

هر زوج مرتب (۰/۲۵) (صفحه ۲۶)

$$۷۱- p(A) = \frac{\overbrace{\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}^{(0.5)}}{\left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)} = \frac{35}{70} = \frac{1}{2}$$

صفحه ۲۲ و ۲۶

$$۷۲- p(A') = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (0.5)$$

(صفحه ۲۳)

۵۸- نادرست صفحه ۲۰

۵۹- گزینه ۲، $(A - (B \cup C))$ (۰/۲۵) صفحه ۱۸

۶۰-

$$\text{الف)} \{(پ, پ, د), (پ, د, پ), (د, پ, پ)\} \quad (0.75)$$

$$\text{ب)} \{(پ, پ, پ), (د, د, د)\} \quad (0.5)$$

پ) به ناسازگاریند. (۰/۲۵) زیرا $A \cap B = \emptyset$ (اشتراک دو مجموعه تهی است). (۰/۲۵)

(صفحه ۲۶)

۶۱-

$$\text{الف)} P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\overbrace{\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}^{0.5}}{\left(\begin{smallmatrix} 10 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)} = \frac{\overbrace{15 \times 4}^{0.25}}{120} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ب)} P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\overbrace{\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)}^{0.5}}{\left(\begin{smallmatrix} 10 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)} = \frac{\overbrace{6 \times 6 + 4}^{0.25}}{120} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

به سایر روش‌های درست به تناسب نمره تعلق گیرد.

۶۲- درست (صفحه ۱۷)

۶۳- الف) برآمد (صفحه ۱۲)

$$\text{ب)} \frac{4}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$$

(صفحه ۲۷)

۶۴- الف) $\{2, 3\}$ (۰/۵) ب) $\{1, 9\}$ (۰/۵) (صفحه ۲۵)

۶۵-

$$\text{الف)} P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\overbrace{\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}^{(0.5)}}{\left(\begin{smallmatrix} 9 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)} = \frac{\overbrace{10 \times 4}^{0.25}}{84} = \frac{10}{21}$$

$$\text{ب)} p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\overbrace{\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)}^{(0.5)}}{\left(\begin{smallmatrix} 9 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)} = \frac{\overbrace{6 \times 5 + 4}^{0.25}}{84} = \frac{34}{84} = \frac{17}{42}$$

۸۶- صفحه ۱۳ کتاب

الف) قطعی ب) تصادفی

۸۷- صفحه ۲۳ کتاب

$$n(S) = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \times 5!} = 21$$

$$n(A) = \binom{4}{2} = 6 \quad P(A) = \frac{6}{21}$$

۸۸- نهی

۸۹- الف: نادرست ب: نادرست

$$A = \{(\Delta, \Delta), (\Delta, \Delta), (\Delta, \Delta)\} \quad -90$$

$$A = \{3, 6, 9\} \quad P(A) = \frac{3}{10} \quad -91$$

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{6! \times 3!} = 84 \quad -92$$

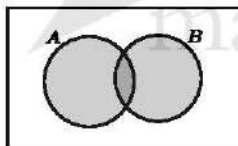
$$n(A) = \binom{4}{2} \times \binom{5}{1} = 30$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{84}$$

۹۳- A

۹۴- الف: صفر

۹۵-



$$\text{الف: } S = \{(p, 1), (p, 2), (p, 3), (p, 4), (p, 5), (p, 6),$$

$$(r, 1), (r, 2), (r, 3), (r, 4), (r, 5), (r, 6)\}$$

$$\text{ب: } A = \{(p, 1), (p, 2), (p, 5)\}$$

$$\text{الف: } P(A) = \frac{1}{4} \quad -97$$

$$\text{ب: } P(B) = \frac{1}{4}$$

۹۸- الف) ۱

ب) $A \cap B = \emptyset$

$$n(S) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = 35 \quad -99$$

۷۳- درست

۷۴- حتمی

$$A = \{(\Delta, \Delta), (\Delta, \Delta), (\Delta, \Delta)\} \quad -75 \text{ الف)}$$

ب) نهی یا $\emptyset$ یا $\{ \}$

$$-76 \text{ الف)} \quad n(S) = \binom{9}{6} = \frac{9!}{3! \times 6!} = 84$$

$$P(A) = \frac{\binom{5}{4} \binom{4}{2} + \binom{5}{3} \binom{4}{3}}{\binom{9}{6}} = \frac{30 + 4}{84} = \frac{34}{84}$$

$$\text{ب)} \quad P(B) = \frac{\binom{5}{4} \binom{4}{2}}{\binom{9}{6}} = \frac{10 \times 4}{84} = \frac{40}{84}$$

۷۷- غیرممکن (نشدنی)

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \quad -78 \text{ الف)}$$

$$B = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$$

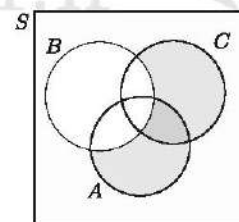
ب) ناسازگار نیستند $A \cap B = \{(4, 4)\} \rightarrow$

$$-79 \text{ راه اول: } \frac{\binom{5}{4} \binom{4}{2} + \binom{5}{3} \binom{4}{3}}{\binom{9}{6}} = \frac{185}{220} = \frac{37}{44}$$

$$\text{راه دوم: } A \Rightarrow \text{هر ۳ مهره قرمز} \Rightarrow \frac{\binom{5}{4} \binom{4}{2}}{\binom{9}{6}} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$$

$$P(A) = 1 - \frac{7}{44} = \frac{37}{44}$$

۸۰-



۸۱- برآمد

$$-82 \text{ الف: } n(S) = 2 \times 6 = 12$$

$$\text{ب: } A = \{(و, 2), (و, 4), (و, 6)\}$$

$$-83 \quad P(A) = \frac{\binom{4}{3} \binom{2}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{4 \times 2}{120} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

۸۴- درست

۸۵- الف) گزینه ۲ ب) گزینه ۴



$$S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$$

-۱۱۶

$$A = \{3, 9, 15\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}$$

الف: $A = \{(4, 6), (6, 4), (5, 5)\}$

-۱۱۷

ب: $B = \{(2, 2), (4, 4), (6, 6)\}$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{32}{99} = \frac{67}{99}$$

-۱۱۸

الف: $A = \{2\}$

-۱۱۹

ب: $B = \{3, 5\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{3}{1} \binom{7}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{8 \times 7}{35} = \frac{16}{7}$$

-۱۲۰

الف: $S = \{(d, p), (p, d), (p, p), (d, d)\}$

-۱۲۱

ب: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4}$

ج: $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{4}$

الف: $S = \{(r, 1), (r, 2), (r, 3), (r, 4), (r, 5), (r, 6),$

-۱۲۲

$$(p, 1), (p, 2), (p, 3), (p, 4), (p, 5), (p, 6)\}$$

ب: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{12}$

ج: $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{12}$

الف: $n(S) = 36$

-۱۲۳

ب: $A = \{(6, 4), (4, 6), (5, 5)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36}$

$$B = \{(3, 3), (3, 6), (6, 3), (6, 6)\}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{36}$$

الف: $A = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}$

-۱۲۴

ب: $B = \{(1, 1), (3, 3), (5, 5)\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{\binom{3}{1} \binom{3}{1}}{\binom{3}{2}} = \frac{2 \times 3}{3} = \frac{2}{1}$$

-۱۲۵

الف: $S = \{(r, 1), (r, 2), (r, 3), (r, 4), (r, 5), (r, 6), (p, 1)$

-۱۲۶

$$(p, 2), (p, 3), (p, 4), (p, 5), (p, 6)\}$$

ب: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{12}$

پ: $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{12}$

الف: $A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

-۱۲۷

$$n(A) = \binom{2}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 12$$

$$P(A) = \frac{12}{35}$$

-۱۰۰ نادرست

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{4 \times 3 \times 2}{84} = \frac{2}{7}$$

-۱۰۱

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1 \times 1 \times 1 \times 1}{12 \times 12 \times 12 \times 12} = \frac{1}{12^4}$$

-۱۰۲

-۱۰۳ الف: ناسازگار ب: $2 \times 6 = 12$ پ: A'

-۱۰۴ الف: درست ب: درست پ: نادرست

الف: $S = \{(p, p, p), (p, p, d), (p, d, p), (d, p, p),$

-۱۰۵

$$(d, d, p), (d, p, d), (p, d, d), (d, d, d)\}$$

ب: $p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{8}$

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5),$$

-۱۰۶

$$(1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

-۱۰۷ الف: نادرست ب: درست پ: درست

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

-۱۰۸

$$A = \{(6, 4), (4, 6), (5, 5), (6, 6), (6, 5), (5, 6)\}$$

-۱۰۹

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

-۱۱۰ درست

$$2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ عضو}$$

-۱۱۱

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5 \times 3 \times 2}{120} = \frac{1}{4}$$

-۱۱۲

-۱۱۳ الف: برآمد

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

ب:

$$A \cap B$$

پ:

-۱۱۴ الف: نادرست ب: درست

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{5 \times 4}{36} = \frac{5}{9}$$

-۱۱۵



ب: $B = \{(1, 1)(1, 2)(1, 3)(2, 1)(2, 2)(2, 3)(3, 1)(3, 2)(3, 3)\}$

الف: $S = \{(p, p, p)(p, p, d)(p, d, p)(d, p, p)(d, d, p)(d, p, d)(p, d, d)(d, d, d)\}$

-۱۲۸

ب: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{8}$

الف: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{6}{1}}{\binom{12}{1}} = \frac{28}{66}$

-۱۲۹

ب: $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{1}} = \frac{8 \times 4}{66} = \frac{32}{66}$

در داشته ضروری دانش آموز:

درس ۲

احتمال

درس

۳

چرخه آمار در حل مسائل

۱۴۵- نمی‌توان نظری داد؛ چون گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.

۱۴۶- صفر

۱۴۷- نادرست

۱۴۸- تعداد

۱۴۹- الف: گام دوم: طرح و برنامه ریزی

ب: بر روی گام سوم، گام چهارم و گام پنجم اثر می‌گذارد.

۱۵۰- خیر؛ چون معرف خوبی از جامعه نیستند.

۱۵۱- گزینه ۴

۱۵۲- الف: دامنه تغییرات: $30 = 35 - 5$ ، میانه: ۹

ب: بله؛ زیرا در بین داده‌ها داده دور افتاده وجود دارد.

۱۵۳- الف: اندازه‌گیری یا سنجش

ب: اندازه

ج: جعبه‌ای

۱۵۴- الف: درست ب: درست ج: نادرست

۱۵۵- اولین

۱۵۶- الف: جعبه‌ای

ب: گرد آوری و پاک سازی داده‌ها

ج: میانگین

۱۵۷- $\bar{x} = \frac{40}{10} = 4$ میانه $= 3/5$

۱۵۸- جعبه‌ای

۱۵۹- الف: درست ب: نادرست پ: نادرست ت: درست

۱۶۰- گزینه ۱

۱۶۱- الف: میانه

ب: اولین

ج: بزرگتری

۱۶۲- الف: درست

ب: درست

ج: نادرست

۱۳۰- گام چهارم (تحلیل داده‌ها) (صفحه ۳۴)

۱۳۱- گزینه ۱، (میانگین - انحراف معیار) (۰/۲۵) (صفحه ۳۴)

۱۳۲- (صفحه ۳۵)

(۰/۲۵) میانگین $= 160$ یا $\bar{x} = 160$

(۰/۲۵) انحراف معیار $= 5$ یا $\sigma = 165 - 160 = 5$

۱۳۳- قسمت الف (۰/۲۵) زیرا شماره تلفن‌ها با رقم اول یکسان، همگی در یک منطقه از شهر هستند و ساکنین دیگر مناطق این شهر، شانس انتخاب شدن ندارند.

(۵۰۰) (صفحه ۳۳)

۱۳۴- گزینه ۲: (طرح و برنامه‌ریزی) (۰/۲۵) (صفحه ۴۱)

۱۳۵- الف: گروه دوم (ب) گروه اول (ج) گروه اول
هرمورد (۰/۲۵) (صفحه ۴۱)

۱۳۶- الف: کیفی (اسمی یا ترتیبی) (۰/۲۵)

ب: گام اول (بیان مسئله) (۰/۲۵)

۱۳۷- گزینه ۳ (۰/۲۵)

۱۳۸- خیر (۰/۲۵) زیرا کسانی که در کتابخانه نیستند، شانس حضور در نمونه را ندارند و چون فقط از افراد کتابخانه، نمونه‌گیری انجام شده است، میانگین داده‌های به دست آمده (آماره نمونه) بزرگتر از میانگین آن در جامعه آماری (پارامتر جامعه) می‌شود چون افرادی که اصلاً به کتابخانه نمی‌روند، در نظر گرفته نشده‌اند. (۰/۲۵)

صفحه ۳۳

۱۳۹- درست (۰/۲۵)

۱۴۰- نمودار جعبه‌ای (۰/۲۵)

۱۴۱- گزینه ۱ (نقد و بررسی) (۰/۲۵)

۱۴۲- میانه، معیار گرایش به مرکز مناسب (۰/۲۵) و دامنه میان چارکی، معیار پراکندگی مناسب (۰/۲۵) است. چون در میان داده‌ها، دو داده دور افتاده مانند ۳۰ و ۲۸ وجود دارد. (۰/۵)

صفحه ۳۴

۱۴۳- الف: گزینه ۴ (ب) گزینه ۱

۱۴۴- الف: درست (ب) نادرست



یادداشت ضروری دانش آموز:

د: نادرست

۱۶۳- الف: طرح و برنامه ریزی

ب: بیان مسئله

۱۶۴- سوم

۱۶۵- الف: طرح و برنامه ریزی

ب: بحث و نتیجه گیری

۱۶۶- الف: اولین

ب: تعداد

۱۶۷-

$$\text{میانگین} = \frac{۱۹+۱۵+۱۸+۱۷+۱۶+۱۷+۱۶+۱۸+۱۷}{۹} = ۱۷$$

$$IQR = Q_3 - Q_1 = ۱۸ - ۱۶ = ۲$$

$$\text{دامنه تغییرات} = ۱۹ - ۱۵ = ۴$$

۱۶۸- الف: انحراف معیار

ب: کمی

۱۶۹- الف: درست

ب: نادرست

۱۷۰- الف: دامنه میان چارکی

ب: سوم

۱۷۱- اولین گام: بیان مسئله

آخرین گام: بحث و نتیجه گیری

۱۷۲- تعداد

۱۷۳- الف: درست

ب: نادرست

۱۷۴- ۳۰, ۴۰, ۵۰, ۶۵, ۷۰, ۷۵, ۱۱۰, ۱۲۰, ۱۳۰

میانه = ۷۰

$$Q_1 = \frac{۴۰+۵۰}{۲} = ۴۵ \quad Q_2 = \frac{۱۱۰+۱۲۰}{۲} = ۱۱۵$$

۱۷۵- الف: اولین

ب: اندازه جامعه

۱۷۶- الف: طرح و برنامه ریزی

ب: اندازه جامعه

۱۷۷- ب، چون تنوع بیشتری دارد.



درس

۱

مدلسازی و دنباله

۱۸۷- رابطه بازگشتی $(0/25)$

$$a_3 = \left(\frac{1}{5}\right)^{3-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 1 \quad (0/25)$$

۱۸۸- صفحه ۵۸

$$b_2 = 3 \times 2 - 2 = 6 - 2 = 4 \quad (0/25)$$

$$a_3 - b_2 = 1 - 4 = -3 \quad (0/25)$$

$$a_1 = 2$$

۱۸۹- صفحه ۵۶

$$a_2 = a_1 + 1 = 2 + 1 = 3 \quad (0/25)$$

$$a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5 \quad (0/25)$$

$$a_4 = a_3 + 3 = 5 + 3 = 8 \quad (0/25)$$

$$a_5 = a_4 + 4 = 8 + 4 = 12 \quad (0/25)$$

$$a_1 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

۱۹۰-

$$b_3 = (3)^2 + 1 = 10$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right) + 10 = 1 + 10 = 11$$

درس ۱

مدلسازی و دنباله

$$\frac{n=1}{a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 1 + 1 = 3}$$

۱۹۱-

$$\frac{n=2}{a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 1 + 3 = 5}$$

$$1, 3, 5, \dots \quad a_n = 2n - 1$$

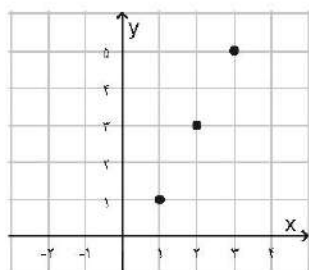
۱۹۲-

$$\text{الف) } a_1 = 1 \quad a_2 = 3 \quad a_3 = 5$$

۱۹۳-

$$\text{ب) } a_1 = 1 \quad a_{n+1} = a_n + 2$$

(ج)



$$b_3 - a_2 + c_3 = 2(3)^2 + 1 - \frac{2(2) - 1}{2 + 1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{3-1}$$

۱۹۴-

$$\Rightarrow 19 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{37}{2} \text{ یا } 18\frac{1}{2}$$

۱۷۸- ۱۰ (صفحه ۵۸)

$$179- \text{گزینه ۳ یعنی } an = 2n - 1 \quad (0/25) \quad \text{صفحه ۵۴}$$

۱۸۰-

$$n=1 \rightarrow a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2 \quad (0/25)$$

$$(روش اول) \quad n=2 \rightarrow a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3 \quad (0/25)$$

$$n=3 \rightarrow a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5 \quad (0/25)$$

$$(روش دوم) \quad 1, 1, \underbrace{2, 3, 5}_{0/25} \quad (58)$$

$$181- \text{گزینه ۱، یعنی } a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \quad (0/25)$$

(صفحه ۵۹)

$$182- \quad a_3 = \frac{(-1)^3}{3+1} = -\frac{1}{4} \quad (0/25)$$

۱۸۲-

$$b_2 = 2^2 + 2 = 6 \quad (0/25)$$

$$8a_3 + b_2 = 8\left(-\frac{1}{4}\right) + 6 = -2 + 6 = 4 \quad (0/25)$$

(صفحه ۵۸)

$$183- \quad n=1 \Rightarrow a_2 = 2a_1 + 1 = 6 + 1 = 7$$

۱۸۳-

$$n=2 \Rightarrow a_3 = 2a_2 + 2 = 14 + 2 = 16$$

$$n=3 \Rightarrow a_4 = 2a_3 + 3 = 32 + 3 = 35$$

$$\underbrace{3, 7, 16, 35}_{(0/25)}$$

هر مورد $(0/25)$ (صفحه ۵۹)۱۸۴- نادرست $(0/25)$

$$a_2 = 9 \quad (0/25)$$

۱۸۵-

$$b_1 = \frac{1}{4} \quad (0/25)$$

$$a_2 \times b_1 = 9 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \quad (0/25)$$

صفحه ۵۸

$$\begin{cases} a_1 = 9 \quad (0/25) \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n \text{ یا } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (0/25)$$

۱۸۶-

صفحه ۵۶



الف) $-n^2$ -۲۱۳

ب) $\frac{1}{2} \times 4 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$

$b_4 = \left(\frac{-1}{2}\right)^{\frac{4}{2}-1} = -\frac{1}{2}$ -۲۱۴

$d_2 = 2^2 + 1 = 5, c_1 = \frac{1}{3 \times 1 - 1} = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow b_4 + d_2 - c_1 = -\frac{1}{2} + 5 - \frac{1}{2} = 4$

-۲۱۵ الف: اعداد طبیعی
 ب: $\frac{(-1)^4}{4 \times 4 + 1} = \frac{1}{9}$

$a_3 = \frac{5}{5} = 1, b_2 = 3,$ -۲۱۶

$c_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \Rightarrow 1 + 3 + 1 = 5$

۲۲ -۲۱۷

$b_4 = 16, a_3 = 3, c_2 = 1 \Rightarrow 16 + 3 - 1 = 18$ -۲۱۸

$a_{10} = 39, a_n = 4n - 1$ -۲۱۹

برداشت ضروری دانش آموز:

-۱۹۵ الف) $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 10, a_4 = 17$

ب) $\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + 7 \end{cases}$

-۱۹۶ نادرست

-۱۹۷ الف) $5, 8, 11, 14$

ب) $a_{n+1} = a_n + 6$

-۱۹۸ $a_{n+1} = 5 + a_n, a_1 = 5$

-۱۹۹ $a_2 = 5, b_5 = 25, c_4 = 2 \rightarrow 5 + 25 + 2 = 32$

-۲۰۰ $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$

-۲۰۱ $3, 5, 7, 9$: چهار جمله اول

فرمول بازگشتی: $a_{n+1} = a_n + 2, a_1 = 3$

-۲۰۲ $a_1 = 2^3 = 8, b_4 = \frac{15}{5} = 3, c_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

$a_1 - b_4 + c_2 = 8 - 3 + 1 = 6$

-۲۰۳ الف: $a_{n+1} = a_n + 5, a_1 = 3$

ب: $a_n = 3 + (n-1) \times 5, a_n = 5n - 2$

-۲۰۴ $a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 6$

$\Rightarrow a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 2 + 6 = 10$

-۲۰۵ $3, -4, 5, -6, 7$

-۲۰۶ $a_1 = -1, b_8 = 12, c_2 = 1 \Rightarrow -1 + 12 - 1 = 10$

-۲۰۷ $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}$

-۲۰۸ $2 \times 5^2 - 10 = 40$

-۲۰۹ الف) $n^2 - 1 = 35 \Rightarrow n^2 = 35 + 1 = 36 \Rightarrow n = 6$

ب) $a_1 = 5, a_2 = a_1 + 1 = 5 + 1 = 6$

$a_3 = a_2 + 2 = 6 + 2 = 8$

-۲۱۰ الف) $a_{n+1} = 3 + a_n, a_1 = 1$

ب) $a_n = 3n - 2$

-۲۱۱ $a_2 = 2, b_4 = 15 \Rightarrow 2 + 15 = 17$

-۲۱۲ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$



درس

۲

دنیاچه‌های حسابی

روش دوم:

$$d = \frac{a_{25} - a_7}{25 - 7} = \frac{107 - 53}{18} = \frac{54}{18} = 3$$

$$a_7 = a_1 + 6d = 53 \Rightarrow a_1 + 18 = 53 \Rightarrow a_1 = 35$$

اگر جمله اول را به کمک جمله ۲۵ بدست آورد نموده تعلق گیرد:

$$a_{25} = a_1 + 24d = a_1 + 72 = 107 \Rightarrow a_1 = 35$$

$$\text{ب) } a_{51} = a_1 + 50d = 35 + 50(3) = 185 \quad (0.5)$$

(صفحه ۷۱)

۲۲۶- به دست آوردن d از هر ۳ روش زیر درست است. (۰/۲۵)

$$\text{روش اول: } d = \frac{27 - 7}{3 + 1} = \frac{20}{4} = 5 \Rightarrow d = 5$$

$$\text{روش دوم: } 27 = 7 + 4d \Rightarrow d = 5$$

$$\text{روش سوم: } d = \frac{a_5 - a}{5 - 1} = \frac{27 - 7}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$7, 12, 17, 22, 27$$

(صفحه ۷۱)

$$S_{16} = \frac{16}{2} (2 \times 10 + (16 - 1) \times 5) = \frac{16}{2} (20 + 15 \times 5)$$

-۲۲۷

$$= 8(20 + 75) = 8 \times 95 = 760$$

(صفحه ۷۰)

روش دوم:

$$a_{16} = 10 + (15)(5) = 85 \Rightarrow S_{16} = \frac{16}{2} (10 + 85) = 8 \times 95 = 760$$

۲۲۸- جمله یازدهم (۱۱) (۰/۲۵)

$$10, 14, 18, 22, 26$$

-۲۲۹

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m} = \frac{26 - 10}{5 - 1} = 4 \quad (0.75)$$

۲۲۰- درست (صفحه ۶۶)

۲۲۱- الف (صفحه ۷۱)

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow 105 = 1 + 4(n - 1) \Rightarrow 26 = n - 1 \Rightarrow n = 27$$

$$n = \frac{105 - 1}{4} + 1 = 27$$

ب) روش اول:

$$S_{10} = \frac{10}{2} (2 \times 1 + (10 - 1) \times 4) = 5(2 + 9 \times 4) = 5(2 + 36) = 190$$

$$a_{10} = 37 - S_{10} = \frac{10}{2} (1 + 37) = 5 \times 38 = 190$$

(صفحه ۷۱)

۲۲۲- (صفحه ۷۱)

$$\text{روش اول: } d = \frac{40 - 25}{15 - 10} = \frac{15}{5} = 3 \Rightarrow$$

$$a_{10} = a_1 + 9d \Rightarrow 25 = a_1 + 9 \times 3 \Rightarrow a_1 = -2$$

$$\text{روش دوم: } d = \frac{40 - 25}{15 - 10} = \frac{15}{5} = 3 \Rightarrow$$

$$a_1 = 40 - ((15 - 1) \times 3) = 40 - (14 \times 3) = -2$$

$$\text{روش سوم: } \begin{cases} a_{15} = a_1 + 14d = 40 \\ a_{10} = a_1 + 9d = 25 \end{cases} \Rightarrow$$

$$5d = 15 \Rightarrow d = 3 \rightarrow a_1 + 9 \times 3 = 25 \rightarrow a_1 = -2$$

۲۲۳- ۳, ۲, ۱ (صفحه ۶۷) (هر کدام ۰/۲۵)

۲۲۴- نادرست (صفحه ۵۶)

-۲۲۵

$$\text{الف) } \begin{cases} a_7 = a_1 + 6d = 53 \\ a_{25} = a_1 + 24d = 107 \end{cases} \Rightarrow 18d = 54$$

$$\Rightarrow d = 3 \Rightarrow a_1 + 6 \times 3 = 53 \Rightarrow a_1 = 35$$



$$= \frac{101 \times 402}{2} = 101 \times 201 = 20301 \quad (0.75)$$

$$d = \frac{52 - 12}{4 + 1} = \frac{40}{5} = 8 \Rightarrow d = 8 \quad (0.75) \quad -234$$

$$a_{52} \Rightarrow 12 + 5d = 52 \Rightarrow d = 8 \quad (0.75)$$

$$12 \xrightarrow{+8} 20 \xrightarrow{+8} 28 \xrightarrow{+8} 36 \xrightarrow{+8} 44 \xrightarrow{+8} 52 \quad \text{یا} \quad (0.75)$$

به دست آوردن d از هر دو روش درست است.

-235 درست

$$\begin{cases} a_1 + 10d = 47 \\ a_1 + 16d = 77 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_1 - 10d = -47 \\ a_1 + 16d = 77 \end{cases} \quad -236$$

$$d = 5 \quad a_1 = -3$$

راه حل دوم:

$$d = \frac{77 - 47}{17 - 11} = 5 \quad 47 = a_1 + 10 \times 5 \Rightarrow a_1 = -3$$

صفحه 70

-231 نادرست (0.75)

$$\text{الف)} \quad a_n = 95 \Rightarrow 2 + (n-1) \times 3 = 95 \quad -237$$

$$\Rightarrow 3n - 3 = 93 \Rightarrow n = 32$$

$$\text{ب)} \quad S_{40} = \frac{40}{2} [2 \times 2 + (40-1) \times 3] = 2420$$

$$a_{40} = 119 \quad S_{40} = \frac{40}{2} (2 + 119) = 2420 \quad \text{راه حل دوم:} \quad -238$$

-238 نادرست

$$\text{الف)} \quad a_{10} = a_1 + 9d = 32 \Rightarrow 9d = 27 \Rightarrow d = 3 \quad -239$$

$$\text{ب)} \quad S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$\rightarrow S_{40} = \frac{40}{2} [2(5) + 19(3)] = 670$$

-240 الف: درست ب: نادرست

$$\text{الف)} \quad a_n = a_1 + (n-1) \times d \quad -241$$

$$\rightarrow a_{15} = 3 + 14 \times 6 = 87$$

$$\text{ب)} \quad S_{10} = \frac{10}{2} [(2 \times 3) + (9 \times 6)]$$

$$= 5(6 + 54) = 5 \times 60 = 300$$

$$d = \frac{a_5 - a_1}{4} = \frac{22 - 10}{4} = 3 \quad -242$$

$$10, 13, 16, 19, 22$$

$$d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{26-10}{3+1} = \frac{16}{4} = 4 \quad (0.75)$$

$$15, 18, 21, \dots$$

-230

$$\begin{cases} a_1 = 15, \quad d = 3, \quad s_n = 168 \\ s_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \\ 168 = \frac{n}{2} [2 \times 15 + 3n - 3] \rightarrow 168 = \frac{n}{2} [27 + 3n] \\ 336 = 27n + 3n^2 \rightarrow \\ \text{یا} \\ n^2 + 9n - 112 = 0 \rightarrow \begin{cases} n = 7 \text{ قی (0.75)} \\ n = -16 \text{ غ (0.5)} \end{cases} \end{cases} \quad (0.5)$$

-232 گزینه 2 (عدد 8) (0.75) صفحه 68

$$a_n = 130 \Rightarrow 250 + (n-1)(-15) = 130$$

$$\Rightarrow 250 - 15n + 15 = 130 \Rightarrow -15n = 130 - 265$$

$$\Rightarrow -15n = -135 \Rightarrow n = 9$$

$$250 \xrightarrow{-15} 235 \xrightarrow{-15} 220 \xrightarrow{-15} 205 \xrightarrow{-15} 190 \xrightarrow{-15} 175$$

$$\xrightarrow{-15} 160 \xrightarrow{-15} 145 \xrightarrow{-15} 130$$

8 ساعت پس از مصرف دارو سطح آسیرین در بدن 130 میلی گرم می شود.

-233 صفحه 64

$$\text{الف)} \quad a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow{a_1=1, d=4} a_n = 1 + (n-1)(4)$$

$$\rightarrow a_n = 4n - 3 \quad (0.5)$$

$$\text{ب)} \quad a_n = 4n - 3 \Rightarrow 4n - 3 = 401 \Rightarrow 4n = 401 + 3$$

$$\Rightarrow 4n = 404 \Rightarrow n = \frac{404}{4} = 101 \quad (0.5)$$

$$S_n = \frac{101 \times (1 + 401)}{2} = \frac{101 \times 402}{2} = 101 \times 201$$

$$= 20301 \quad (0.75)$$

یا

$$S_n = \frac{101 \times (2 \times 1 + (101-1) \times 4)}{2} = \frac{101 \times (2 + 400)}{2}$$



$$S_{20} = \frac{20}{2} [2 \times (-10) + 19 \times 4] = 560 \quad -254$$

$$a_n = a + (n-1)d \quad -255$$

$$\Rightarrow 592 = 12 + (n-1) \times 20$$

$$\Rightarrow 592 - 12 + 20 = 20n$$

$$\Rightarrow 600 = 20n \Rightarrow n = 30$$

$$a + 5d + a + 3d + a + 7d = 90 \quad -256$$

$$\Rightarrow 3a + 15d = 90 \Rightarrow a + 5d = 30 \Rightarrow a_5 = 30$$

$$d = 5, \quad S_{12} = \frac{12}{2} [-4 + (12-1) \times 5] = 306 \quad -257$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} [2a + (n-1)d] \quad -258$$

$$= 15 [-2 + 145] = 2145$$

$$a = -5, \quad a_2 = -2, \quad d = -2 + 5 = 3 \quad -259$$

$$601 = 25 + (n-1) \times 18 \quad -260$$

$$\Rightarrow 601 - 25 + 18 = 18n \Rightarrow 594 = 18n \Rightarrow n = 33$$

$$-2 و 6 و -2 و 6 \quad -261$$

الف:

ب: حسابی نیست.

$$a_n = a + (n-1)d \quad -262$$

$$\Rightarrow 385 = 1 + (n-1) \times 4$$

$$\Rightarrow 385 = 4n - 3 \Rightarrow n = 97$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a + a_n) = \frac{97}{2} (1 + 385) = 18721$$

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{45 - 15}{6 - 1} = 6 \quad -263$$

$$15, 21, 27, 33, 39, 45$$

$$d = \frac{a_{17} - a_9}{17 - 9} = \frac{97 - 57}{8} = 5 \quad -264$$

$$a_9 = 57 \Rightarrow a + 8d = 57 \Rightarrow a + 8 \times 5 = 57 \Rightarrow a = 17$$

$$a_{20} = a + 19d = 17 + 19(5) = 112$$

$$a = 70, \quad S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \quad -265$$

$$\Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2} [2 \times 70 + (20-1) \times (-5)] \Rightarrow$$

$$S_{20} = 10 \times 45 = 450$$

$$a_{11} = 5 + (11-1) \times 7 = 75 \quad -243$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \times d$$

$$\Rightarrow 96 = 5 + (n-1) \times 7$$

$$91 = 7n - 7 \rightarrow n = \frac{98}{7} = 14$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} [(2 \times 3) + (19 \times 4)] \quad -244$$

$$= 10 \times (6 + 76) = 820$$

$$d = \frac{72 - 32}{19 - 1} = \frac{40}{8} = 5 \quad -245$$

$$a_{11} = a_1 + 10d \Rightarrow 32 = a_1 + 50 \Rightarrow a_1 = -18$$

$$a_{20} = -18 + 19 \times 5 = 127$$

$$225 = 25 + (n-1) \times 10 \quad -246$$

$$\Rightarrow 225 - 25 + 10 = 10n$$

$$\Rightarrow 210 = 10n \Rightarrow n = 21$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} [2 \times a_1 + (20-1) \times d] \quad -247$$

$$\Rightarrow S_{20} = 10 [8 + 19 \times 6] = 1220$$

$$d = \frac{23 - 15}{5 - 1} = 2 \quad 17, 19, 21 \quad -248$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} [2 \times 1 + 19 \times 2] = 400 \quad -249$$

$$225 = 25 + (n-1)20 \Rightarrow 200 = 20n - 20 \quad -250$$

$$\Rightarrow 220 = 20n \Rightarrow n = 11$$

$$d = \frac{10 - (-17)}{10 - 1} = \frac{27}{9} = 3 \quad -251$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \times d = -17 + (n-1) \times 3$$

$$\Rightarrow a_n = 3n - 20$$

$$S_{16} = \frac{16}{2} [2 \times 11 + 15 \times (-3)] \quad -252$$

$$= 8(22 - 45) = -184$$

-253 ب: دنباله حسابی است.

$$-3, 0, 3, 6, \dots \Rightarrow d = 3$$



۳-۲۷۷

$$S_{10} = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \\ = \frac{10}{2} [2 \times 2 + (10-1) \times 6] = 300$$

-۲۷۸

$$d = \frac{18 - (-2)}{6 - 1} = 4$$

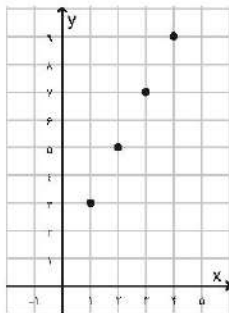
-۲۷۹

$$a_{20} = a + (20 - 1)d = -2 + 19 \times 4 = 74$$

$$a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7, a_4 = 9$$

-۲۸۰ الف:

ب:



$$a_n = \sqrt{n} \quad \text{ب:} \quad a_n = 5n - 1 \quad \text{الف:}$$

$$d = \frac{92 - 52}{19 - 1} = 5, \quad a_{11} = a_1 + (11 - 1) \times 5$$

-۲۸۲

$$\Rightarrow a_1 + 50 = 52 \Rightarrow a_1 = 2$$

$$a_{26} = a + (26 - 1)d = 2 + 25 \times 5 = 127$$

$$S_{30} = \frac{30}{2} [2a + (30 - 1)d]$$

-۲۸۳

$$= 15 [2 \times 1 + 19 \times 2] = 900$$

$$18 = 10 + 4d \Rightarrow d = 2 \Rightarrow 12, 14, 16$$

-۲۸۴

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

-۲۸۵

$$= \frac{10}{2} [2 \times 1 + (10 - 1) \times 4] = 190$$

$$\begin{cases} 52 = a + 10d \\ 92 = a + 18d \end{cases} \Rightarrow d = 5, a = 2$$

-۲۸۶

$$a_{30} = a + (n-1)d$$

$$= 2 + (30 - 1) \times 5 = 147$$

-۲۶۶

$$d = \frac{a_{19} - a_{11}}{19 - 11} = \frac{85 - 45}{8} = 5$$

$$a_{11} = 45 \xrightarrow{d=5} a + (11 - 1) \times 5 = 45$$

$$\Rightarrow a + 50 = 45 \Rightarrow a = -5$$

$$a_{31} = a + (31 - 1)d = -5 + 30 \times 5 = 145$$

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{20 - 8}{5 - 1} = \frac{12}{4} = 3$$

-۲۶۷

$$\Rightarrow 8, 11, 14, 17, 20$$

-۲۶۸ الف: دنباله حسابی

$$a_{n+1} = a_n + 3$$

الف:

$$a_n = 3n - 2$$

ب:

$$a_{20} = 1 + 19 \times 3 = 58$$

ج:

$$d = 2, a = 1$$

-۲۶۹

$$S_{30} = \frac{30}{2} [2 \times 1 + 29 \times 2] = 900$$

$$d = 4 \Rightarrow 14, 18, 22$$

-۲۷۰

$$\text{الف)} \quad S_{16} = \frac{16}{2} [2 \times 2 + 15 \times 2] = 272$$

-۲۷۱

$$\text{ب)} \quad 601 = 25 + (n-1) \times 18 \Rightarrow n = 33$$

$$d = \frac{92 - 45}{15 - 7} = 6$$

-۲۷۲

$$a_7 = a + 36 = 45 \Rightarrow a = 9$$

$$a_{31} = 9 + 30 \times 6 = 189$$

$$d = \frac{105 - 65}{16 - 8} = 5, \quad a_8 = a + (8 - 1) \times 5$$

-۲۷۳

$$\Rightarrow 65 = a + 35 \Rightarrow a = 30$$

$$a_{29} = 30 + (29 - 1) \times 5 \Rightarrow a_{29} = 170$$

$$d = 3, \quad a = 4$$

-۲۷۴

$$S_{20} = \frac{20}{2} [2 \times 4 + 19 \times 3] = 650$$

$$a = 35 \quad a_{20} = -41$$

-۲۷۵

$$d = -4 \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2} (35 - 41) = -60$$

$$d = \frac{96 - 61}{16 - 9} = 5, \quad 61 = a + 8d \Rightarrow a = 21$$

-۲۷۶

$$a_{30} = 21 + 29 \times 5 = 166$$



درس

۱

دنباله هندسی

۲۹۴ - صفحه ۸۴

$$\begin{cases} a_3 = 27 \rightarrow a_1 r^2 = 27 \\ a_6 = 729 \rightarrow a_1 r^5 = 729 \rightarrow \frac{a_1 r^5}{a_1 r^2} = \frac{729}{27} \\ \rightarrow r^3 = 27 \rightarrow r = 3 \\ a_1 r^2 = 27 \rightarrow a_1 \times 9 = 27 \rightarrow a_1 = 3 \\ a_9 = a_1 r^8 \rightarrow 3 \times 3^8 = 3^9 \end{cases} \quad (۰/۵)$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} r^5 - 2 &= \frac{729}{27} = 27 \rightarrow r = 3 \\ a_9 &= a_3 \times r^{9-3} \rightarrow a_9 = 27 \times 3^6 = 3^9 \end{aligned}$$

$$\frac{a_5}{a_1} = \frac{a_1 r^4}{a_1 r^1} \Rightarrow \frac{256}{33} = r^3 \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2 \quad (۰/۵)$$

۲۹۵ -

هر کدام از سه روش درست است (صفحه ۸۳)

$$\begin{cases} a_7 = 32 \Rightarrow 2a_1 = 32 \Rightarrow a_1 = 16 \\ a_7 = a_1 \times r^6 = 16 \times 2^6 = 1024 \end{cases} \quad (۰/۷۵)$$

اول روش

$$a_7 = a_5 \times r^2 = 256 \times 4 = 1024 \quad (۰/۷۵)$$

دوم روش

$$a_7 = a_2 \times r^5 = 32 \times 32 = 1024 \quad (۰/۷۵)$$

سوم روش

$$\begin{cases} a_1 = \frac{2}{3} \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{2}{3} \\ a_{n+1} = 3a_n \end{cases} \quad (۰/۵)$$

صفحه ۸۱

(ب)

$$S_6 = \frac{\frac{2}{3}(1-3^6)}{1-3} = \frac{\frac{2}{3}(1-729)}{-2} = \frac{\frac{2}{3}(-728)}{-2} = \frac{-2 \times 728}{-2} = \frac{728}{3}$$

۲۹۷ - نادرست

۲۹۸ - ثابت

۲۹۹ - گزینه ۱

$$\text{الف) } a_n = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \quad -300$$

۲۸۷ - درست (صفحه ۷۶)

$$-288 \quad \text{الف) } r = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{ب) } a_n = \frac{2}{0.25} \times 3^{n-1} \quad \text{ب) } a_n = \frac{2}{0.25} \times 3^{n-1} \quad (صفحه ۷۶)$$

$$\text{ب) } S_6 = \frac{2(1-3^6)}{1-3} = \frac{2(1-729)}{-2} = \frac{2(-728)}{-2} = 728 \quad (صفحه ۸۱)$$

$$-289 \quad r^3 = \frac{16}{2} = 8 \rightarrow r = 2 \quad (۰/۲۵)$$

(صفحه ۸۳)

$$-290 \quad \text{الف) } r = \frac{1}{5}, \quad a_n = a_1 a^{n-1} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\text{ب) } a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n, \quad a_1 = \frac{1}{5} \quad \text{یا} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{5}, \quad a_1 = \frac{1}{5}$$

(صفحه ۷۶)

$$-291 \quad \text{الف) } a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow 5 \times 2^{n-1} = 640 \\ \Rightarrow 2^{n-1} = 128 \Rightarrow n-1 = 7 \Rightarrow n = 8 \quad (۰/۵)$$

روش دوم: ۶۴۰ و ۳۲۰ و ۱۶۰ و ۸۰ و ۴۰ و ۲۰ و ۱۰ و ۵ در نتیجه جمله هشتم برابر ۶۴۰ است. (۰/۵)

(ب)

$$\text{ب) } S_9 = \frac{5(1-2^9)}{1-2} = \frac{5(1-512)}{-1} = \frac{5(-511)}{-1} = 5 \times 511 = 2555$$

(صفحه ۸۴)

۲۹۲ - درست (۰/۲۵)

$$-293 \quad \text{الف) } a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_5 = \frac{1}{4}, \quad a_8 = \frac{1}{8}, \quad a_{11} = \frac{1}{16}$$

$$\text{ب) } S_5 = \frac{a_1(1-r^5)}{1-r} = \frac{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{31}{4}$$

صفحه ۸۲ و ۸۵



$$3^2 = x - 4 \Rightarrow x = 13 \quad -311$$

$$16 = (x-3)(x+3) \Rightarrow 16 = x^2 - 9 \Rightarrow x = \pm 5 \quad -312$$

-313 الف: هندسی است $r = 4$

ب: هندسی است $r = 10$

$$\text{الف) } a_{n+1} = 5a_n, \quad a_1 = 1 \quad -314$$

$$\text{ب) } a_6 = 1(5)^5 = 3125$$

$$\text{الف) } \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9} \quad -315$$

$$\text{ب) } r = \frac{1}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{3}, \quad a_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_n = a_1 \times r^{n-1} \Rightarrow 768 = 96 \times 2^{n-1} \quad -316$$

$$\Rightarrow 8 = 2^{n-1} \Rightarrow n-1 = 3 \Rightarrow n = 4$$

$$\frac{14}{a_9 - a_8} = \frac{14}{32 - 4} = \frac{1}{2} \quad -317$$

$$r = 3 \Rightarrow 12 \times 3 = 36 \quad -318$$

$$108 \times 3 = 324, \quad 324 \times 3 = 972$$

$$(x+2)^2 = x(x+3) \quad -319$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 3x \Rightarrow x = -4$$

$$(x+2)^2 = x(x+5) \quad -320$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 5x \Rightarrow x = 4$$

$$\text{الف) } \frac{a_8}{a_7} = \frac{ar^7}{ar^6} = \frac{96}{12} \quad -321$$

$$\Rightarrow r^7 = 8 \Rightarrow r = 2$$

$$a_7 = 12 \Rightarrow ar^6 = 12 \Rightarrow a = 3$$

$$\text{ب) } S_8 = a \frac{1-r^8}{1-r} = 3 \times \frac{1-2^8}{1-2} = 3 \times \frac{1-256}{-1} = 765$$

$$\text{الف) } r = \frac{1}{3}, \quad a_8 = ar^7 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{3^8} \quad -322$$

$$\text{ب) } \frac{a_7}{a_5} = \frac{ar^6}{ar^4} = r^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$a_7 = 16 \Rightarrow 16 = ar^6 \Rightarrow a = \frac{16}{\lambda} = 2 \quad -323$$

$$a_n = ar^{n-1} \Rightarrow 128 = 2 \times 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow 2^7 = 2^n \Rightarrow n = 7$$

$$\text{ب) } a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n \quad \text{یا} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{5}$$

$$(x-3)(x+5) = 9 \Rightarrow x^2 + 2x - 24 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -6 \end{cases} \quad -301$$

$x = 4$ قابل قبول است.

$$\text{الف) } a_9 = 6(2)^{9-1} = 6 \times 2^8 = 1536 \quad -302$$

$$\text{ب) } S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)}$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{6(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 6 \times 1023 = 6138$$

$$x^2 = (x-1)(x+3) \quad -303$$

$$x^2 = x^2 + 2x - 3 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

-304 راه اول (فرمول):

$$a_n = \frac{1}{27} (3)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{a_8}{a_7} = \frac{\frac{1}{27} \times 3^7}{\frac{1}{27}} = \frac{3^7}{1} = 2187$$

راه دوم:

$$\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, 81 \Rightarrow \frac{a_8}{a_7} = \frac{81}{1} = 81$$

-305

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \quad -306$$

$$\Rightarrow S_7 = \frac{2(1-2^7)}{1-2} = 2 \times 127 = 254$$

$$\frac{a_7}{a_6} \Rightarrow \frac{a_1 r^6}{a_1 r^5} \Rightarrow r^2 = \frac{135}{5} = 27 \Rightarrow r = 3 \quad -307$$

-308 مورد الف دنباله هندسی است.

$$r = \left(\frac{1}{9}\right) \div \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\text{الف) } \frac{a_1 r^7}{a_1 r} = r^6 \Rightarrow r^6 = \frac{48}{6} = 8 \Rightarrow r = 2 \quad -309$$

$$\text{ب) } a_2 = a_1 r \Rightarrow 6 = a_1 \times 2 \Rightarrow a_1 = 3$$

$$a_7 = a_1 r^6 \Rightarrow a_7 = 3 \times 2^6 = 192$$

$$a_9 = a_1 r^8 \Rightarrow a_9 = \frac{1}{27} \times 3^8 = 223 \quad -310$$



$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow n=9$$

$$\text{ب) } S_{10} = \frac{1536 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1536 \left(1 - \frac{1}{1024}\right)}{\frac{1}{2}} = 3069$$

۳۳۷- الف: دنباله هندسی

$$\text{ب) } a_n = \frac{1}{5} a_{n-1}, \quad a_1 = 1$$

$$\text{پ) } a_n = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\text{ت) } \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$$

$$9 = ar^9, 243 = ar^5 \Rightarrow \frac{243}{9} = \frac{r^5}{r^4} = \frac{r^5}{r^4} \quad -338$$

$$\Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3, a = 1$$

$$a_{10} = 1 \times 3^9 = 3^9$$

۳۳۹- الف: دنباله هندسی، $r = \frac{1}{3}$

$$\text{ب) } a_n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{پ) } a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n, a_1 = 1$$

یادداشت ضروری دانش آموز:

درس ۱

دنباله هندسی

$$(x+3)^2 = x(x+5) \quad -324$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 5x \Rightarrow x = -9$$

$$\text{الف) } a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n, \quad a_1 = 9 \quad -325$$

$$\text{ب) } a_n = 3^{3-n}$$

$$S_6 = \frac{1(1 - \frac{1}{3^6})}{1 - \frac{1}{3}} = 1365 \quad -326$$

$$r = 2 \Rightarrow 14, 28, 56 \quad -327$$

$$a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad -328$$

$$64 = 1024 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad -329$$

$$\Rightarrow n = 5$$

$$S_6 = \frac{1024 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2048 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right)$$

۳۳۰- الف: دنباله هندسی

$$\text{ب) } a_{n+1} = 3a_n, a_1 = 3$$

$$\text{پ) } a_n = 3^n$$

$$\text{ت) } a_{10} = 3^{10}$$

$$a_n = ar^{n-1} \Rightarrow 216 = \frac{1}{6} \times 6^{n-1} \quad -331$$

$$\Rightarrow 6^{n-1} = 1296 \Rightarrow n = 5$$

$$r = 2 \Rightarrow \frac{ar^9}{ar^6} = \frac{r^9}{r^6} = r^3 = 8 \quad -332$$

$$7^2 = (\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1) \quad -333$$

$$\Rightarrow 49 = a-1 \Rightarrow a = 50$$

$$r = \frac{7}{\sqrt{50}-1}$$

$$(x+2)^2 = x(x+3) \quad -334$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 3x \Rightarrow x = -4$$

۳۳۵- الف: دنباله هندسی و $r = \frac{1}{2}$

$$\text{ب) } a_n = \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{ج) } S_{20} = \frac{2}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{5} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right)$$

$$\text{الف) } 6 = 1536 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{256} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad -336$$



درس

۲

ریشه نام و توان گویا

صفحه ۹۴

۳۵۰- نادرست (۰/۴۵)

۳۵۱- $\sqrt[3]{41^2}, (71)^{\frac{2}{3}}$ (۰/۵)

۳۵۲- الف) $\sqrt[5]{5}$ (۰/۲۵)

ب) $\frac{y^{+4}}{y^{+2}} = y^{+4-2} = y^2 = 49$ (۰/۲۵)

صفحه ۹۳

۳۵۳- $\sqrt[3]{10}, -\sqrt[3]{10}$

۳۵۴- گزینه ۲

۳۵۵- الف) $(25)^{\frac{2}{3}}$

ب) $\sqrt[3]{25}$

۳۵۶- $(a^x \cdot b^x) \times a^x = a^x b^x = (ab)^x$

۳۵۷- ۱۰-

۳۵۸- $\frac{x^6 \times 14^2}{14} = 14 \Rightarrow x^6 \times 14^2 = 14 \times 14$

$x^6 \times 14^2 = 14^1 \Rightarrow x^6 = 14^0 \Rightarrow x = 14$

۳۵۹- الف) $\sqrt[3]{135}$ ب) $17^{\frac{2}{3}}$

۳۶۰- نادرست

۳۶۱- الف) $16^{\frac{1}{2}}$

ب) $7^{\frac{2}{3}}$

پ) $\left(\frac{1}{4}\right)^{6-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{11}{2}}$

۳۶۲- الف) $11^{\frac{2}{3}}$

ب) $\sqrt[5]{(0/9)^4}$

۳۶۳- نادرست

۳۶۴- الف) $(12)^{\frac{2}{3}}$

ب) $\sqrt[3]{(0/34)^2}$

۳۴۰- نادرست (صفحه ۸۸)

۳۴۱- ۳- یا $\sqrt{-27}$ (صفحه ۸۷)

۳۴۲- گزینه ۱، یعنی $-\frac{1}{4}$ (۰/۲۵) (صفحه ۹۴)

۳۴۳- $(0/53)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(0/53)^2}$ یا $(0/53)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{53}{100}\right)^2}$ الف)

ب) $\sqrt[5]{6^3} = (6)^{\frac{3}{5}}$ (هر مورد ۰/۲۵)

(صفحه ۹۲)

۳۴۴- $m^{\frac{2}{3}} n^{\frac{1}{3}} \cdot m n^{\frac{1}{3}} = m^{\frac{5}{3}} n^{\frac{2}{3}}$

(صفحه ۹۳)

۳۴۵- $-\sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{7}$ (صفحه ۸۸)

۳۴۶-

الف) $(0/25)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{0/25}$ ب) $\sqrt[3]{4/2} = (4/2)^{\frac{1}{3}}$

ج) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2}{3}} = 6^{-\frac{2}{3}}$ ج) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$

هر مورد (۰/۲۵) (صفحه ۹۲)

۳۴۷- الف) $\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-6} = \frac{a^2}{a^1} = \frac{a}{0/25}$

روش دوم:

$\left(a^{-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^{-6} = \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^{-6} = \frac{a}{0/25}$

ب) $(3^{\frac{1}{2}}) \times (12^{\frac{1}{2}}) \times (0/7)^0 = \underbrace{(3 \times 12^{\frac{1}{2}})}_{0/5} \times 1 = \underbrace{(36^{\frac{1}{2}})}_{0/25} = 6$

(صفحه ۹۳)

۳۴۸- ۲، +۲، -۲ (۰/۵)

۳۴۹- الف) $\left(\frac{27}{0/5}\right)^{\frac{1}{3}}$

ب) $\sqrt[5]{(0/34)^2}$ یا $\sqrt[5]{\left(\frac{34}{100}\right)^2}$ (۰/۵)



الف) $125^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{5} = 125^{\frac{2}{3}}$ -۳۷۹

ب) $a^x \times b \times a \times b^x = a^x b^x = (ab)^x$

الف) $m^x n^x \times m^{-x} n^{-1} = m^x n^x$ -۳۸۰

ب) ۳

الف) $41^{\frac{1}{5}}$ -۳۸۱

ب) $\sqrt[5]{5/32}$

پ) $\sqrt[5]{9}$

ت) $2^{\frac{5}{12}}$

الف) $\sqrt[5]{3}$ -۳۸۲

ب) $\sqrt[5]{6}$

پ) $5^{\frac{1}{2}}$

ت) $(3/7)^{\frac{1}{2}}$

الف) $(m^x n^y)(m^x n^y) = m^{11} n^y$ -۳۸۳

ب) $(21 \times \frac{3}{5})^{\frac{1}{5}} = 9^{\frac{1}{5}}$

الف) $41^{\frac{1}{5}}$ -۳۸۴

ب) $\sqrt[5]{5/32}$

الف) $\sqrt[5]{(\frac{1}{5})^3}$ -۳۸۵

ب) $(5/18)^{\frac{1}{5}}$

الف) $(2^2)^{\frac{1}{5}} \times (2^3)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{4}{5}}$ -۳۸۶

ب) $\frac{a^{-1}}{a^{-4}} = a^{-1} \times a^4 = a^3$

الف) $\sqrt[5]{122}$ -۳۸۷

ب) $10^{\frac{1}{12}}$

-۳۸۸

الف) $(m^{\frac{5}{7}} n)(mn^{\frac{5}{7}}) = m^{\frac{5}{7}} n^{\frac{5}{7}} = (mn)^{\frac{5}{7}} = \sqrt[7]{(mn)^5}$

ب) $(8 \times \frac{3}{5})^{\frac{5}{7}} = 12^{\frac{5}{7}} = \sqrt[7]{12^5} = \sqrt[7]{144}$

الف) $\sqrt[5]{5/31}$ -۳۸۹

ب) $47^{\frac{1}{5}}$

الف) $16^{\frac{1}{5}} = 4$ -۳۹۰

ب) $(m^{\frac{5}{7}})^{-7} = m^5$

$8^{x+3} = 8^{10} \Rightarrow x+3=10 \Rightarrow x=7$ -۳۹۵

الف) $15^{\frac{6}{7}} = 15^3$ -۳۹۶

ب) $66^{\frac{5}{7}}$

پ) $4^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{4} = 4^{\frac{1}{3}}$

الف) $(3^4)^{\frac{1}{5}} = 3^2$ -۳۹۷

ب) 5^3

الف) $x^{\frac{5}{7}}$ -۳۹۸

ب) $\sqrt[5]{m^3}$

پ) $\sqrt[5]{5/9}$

-۳۹۹ الف: ۲ ب: ۲ و ۲- پ: ۳

الف) $15^2 = 225$ -۳۷۰

ب) $2^9 - 9 = 1$

الف) $\sqrt[5]{4}$ -۳۷۱

ب) $\sqrt[5]{(0/8)^2}$

پ) $21^{\frac{5}{7}}$

ت) $(0/47)^{\frac{5}{7}}$

الف) $8^x \times 9^x = 8^x \times 9^x \Rightarrow x=4$ -۳۷۲

ب) $5^{6x} = 5^{-2} \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$

پ) $(0/6)^{x+4} = (0/6)^8 \Rightarrow x+4=8 \Rightarrow x=4$

الف) $\frac{a^{\frac{5}{7}}}{a^{\frac{5}{7}}} = \frac{a^2}{a} = a$ -۳۷۳

ب) $5^{\frac{1}{5}} - \frac{1}{5} = 5^0 = 1$

الف) $11^{\frac{8}{9} + \frac{1}{9}} = 11^1$ -۳۷۴

ب) $15^{\frac{4}{7}}$

الف) $x^{\frac{8}{9}}$ -۳۷۵

ب) $\sqrt[5]{5/1}$

پ) $\sqrt[5]{a^3}$

الف) $\frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$ -۳۷۶

ب) ۳

-۳۷۷ ۳ و ۲±

الف) $\sqrt[5]{122}$ -۳۷۸

ب) $15^{\frac{1}{5}}$

پ) $\sqrt[5]{(\frac{5}{8})^{-1}}$



۳۹۱-

الف) $\frac{1}{\sqrt[3]{43}}$
ب) $25^{\frac{1}{3}}$

۳۹۲-۲ و ۲

در داشته ضروری داشته آموز:

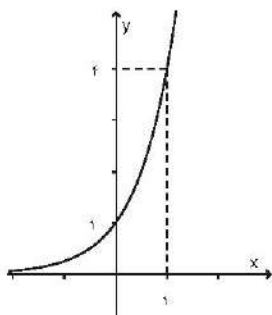
درس ۲

توان گویا

درس

۳

تابع نمایی



(محور y ها را در نقطه $(0, 1)$ قطع کند و محور x ها را قطع کند.)

صفحه ۱۰۲

۳۹۸- صفحه ۱۰۴

$$f(t) = C(1+r)^t$$

$$f(t) = 500000000(1+0.1)^t$$

$$= 500000000(1.1)^t = 605000000$$

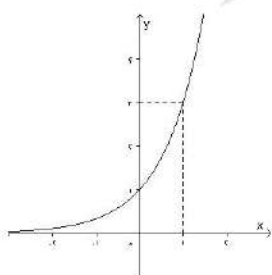
درس ۲

تابع نمایی

۳۹۹- رسم نمودار (نمره ۰/۵) و تعیین درست نقطه محل برخورد منحنی با محور عرض ها

(نمره ۰/۲۵)

(صفحه ۹۷)



۴۰۰- صفحه ۱۰۳

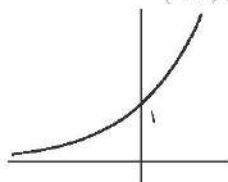
$$f(t) = 1000000000 \times \left(1 + \frac{20}{100}\right)^t = 1000000000 \times (1.2)^t$$

$$= 1000000000 \times (1.44) \quad (0.75)$$

$$= 1440000000$$

۴۰۱- رسم نمودار و تعیین درست محل برخورد منحنی با محور عرض ها.

۳۹۳- (صفحه ۱۰۲) رسم نمودار (۰/۲۵) محور طول ها را قطع نکند (۰/۲۵) تعیین درست نقطه محل برخورد منحنی با محور عرض ها در نقطه $(0, 1)$ (۰/۲۵)



۳۹۴

$$f(2) = 1000 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right)^2 = 1000 \times (0.9)^2 = 810 \quad (1.03)$$

۳۹۵- رسم نمودار (۰/۲۵) محور طول ها را قطع نکند (۰/۲۵) و تعیین درست نقطه محل برخورد منحنی با محور عرض ها در نقطه $(0, 1)$ (۰/۲۵) (صفحه ۱۰۲)



۳۹۶

$$f(2) = 400000000 \times \left(1 + \frac{30}{100}\right)^2$$

$$= 400000000 \times (1.3)^2 = 400000000 \times (1.69)$$

$$= 676000000$$

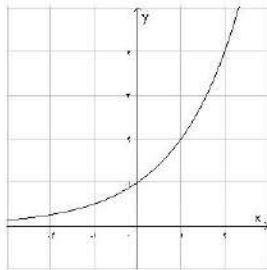
یا

$$f(2) = 40 \times \left(1 + \frac{30}{100}\right)^2 = 40 \times (1.3)^2 = 40 \times (1.69)$$

$$= 67.6 \quad (\text{میلیون تومان})$$

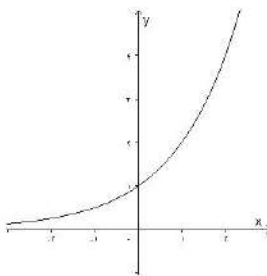
(صفحه ۱۰۳)

۳۹۷- رسم صحیح نمودار نمره تعلق بگیرد (۰/۷۵)

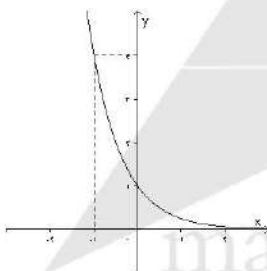


$$y = 2000000 \times (1 + 0/10)^1 \quad -409$$

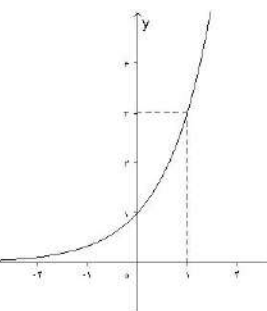
$$= y = 2000000 \times (1/1) = 2000000$$



$$y = 1000000(1 + 0/10) = 1000000 \quad -411$$



-412



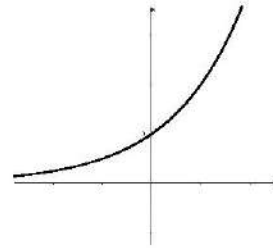
-413

$$y = 2000000(1 + 0/2)^2 \quad -414$$

$$\Rightarrow y = 2000000(1/4) = 4880000$$

$$y = 100000(1 - 0/10) = 99000 \quad -415$$

-416 شماره ۱: $f(x) = 2^x$



$$f(t) = c(1-r)^t = 2000000(1 - 0/20)^1 \quad -402$$

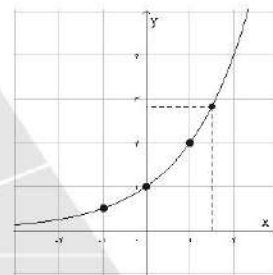
$$2000000(0/98) = 1960000$$

-403 درست

x	-1	0	1
y	1/2	1	2

-404 الف

ب) عددی بین ۲ و ۳ یا عددی نزدیک به ۳
(اگر روی نمودار مشخص کرد نمره کامل داده شود)

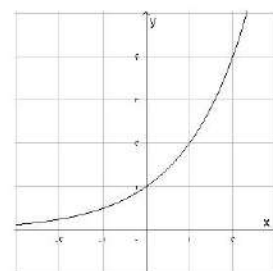


$$f(t) = c(1-r)^t \quad -405$$

$$f(2) = 2000000(1 - 0/10)^2$$

$$= 2000000 \times 0/99 = 2920400 \dots$$

-406



$$y = 10000 \times (1 - 0/2)^2 \quad -407$$

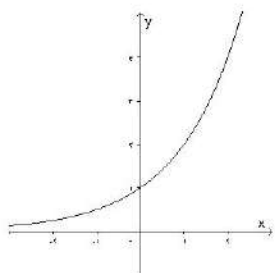
$$= 10000 \times (0/64) = 6400$$

-408 الف

x	-1	0	1
y = 2^x	1/2	1	2

$$y = 20 \times 10^6 (1 + 0.01)^7 = 20/402 \times 10^6$$

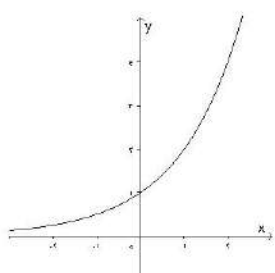
-۴۲۵



-۴۲۶

$$y = 1000000 (1 + 0.01)^7 = 1210000$$

-۴۲۷



-۴۲۸ افزایشی

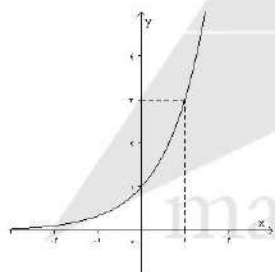
$$y = 40000000 (1 - 0.01)^7 = 39600000$$

-۴۱۸

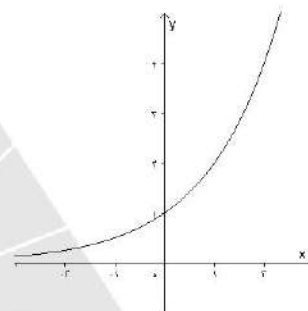
-۴۱۹ کوچک

$$y = 2000 (1 - 0.02)^3 = 1882/385$$

-۴۲۹



-۴۳۰



-۴۲۰

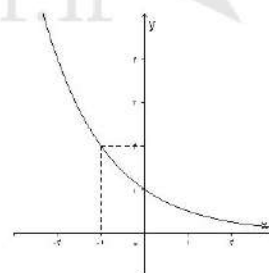
$$y = 1 \times 10^8 \times (1 + 0.02)^3 = 107280000$$

-۴۲۱

$$y = 100000 (1 - 0.01)^7 = 99000$$

-۴۲۲

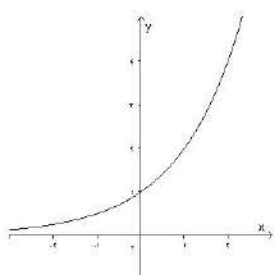
-۴۲۳



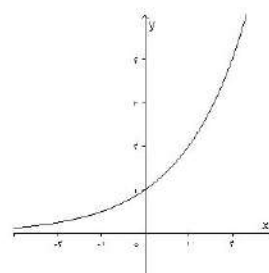
$$f(t) = 2000 (1 - 0.01)^7 = 1960/7$$

-۴۳۱

-۴۳۲ تابع افزایشی



-۴۲۴



«مجموعه کتاب‌های سمن»



math-pilevar.ir



انتشارات گونش نگار



math-pilevar.ir

@plv.math



978-622-5513-46-4