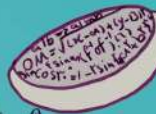


بخور جانم!
برات خوبه!

۱

سوالات
موضوعی
نهایی
(سمن)



a/b
 $\sin 2x$
 a/b
 $a < \cos$
 $4x$



۷

حسابان ۲

۷

۷

مجموعه سوالات نهایی حسابان ۲
پایه دوازدهم رشته ریاضی فیزیک

پاسخ
تشریحی

رقبه پيله ور - میکائيل صدقي

بِسْمِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

سوالات موضوعی نهایی (سمن)

حسابان ۲

(۲۰ دوره سوال نهایی حسابان ۲)

مؤلفین:

رقیه پیلهورنبار

میکائیل صدقی

math-pilevar.ir



تقدیم بہ

دیران فرہختہ ریاضی

و دانش آموزان برتر

و روح بلند مریم میرزاخانی

math-pilevar.ir

فهرست مطالب

۵	مقدمه
۷	۱ تابع
۸	تبدیل نمودار توابع
۱۶	تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم
۲۷	۲ مثلثات
۲۸	تناوب و تناوب
۳۷	معادلات مثلثاتی
۴۳	۳ حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت
۴۴	حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت
۶۰	۴ مشتق
۶۱	آشنایی با مفهوم مشتق
۶۷	مشتق پذیری و پیوستگی
۸۵	آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر
۸۹	۵ کاربردهای مشتق
۹۰	اکسترم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی
۹۹	جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن
۱۰۴	رسم نمودار تابع

مقدمه

سپاس بی‌کران خداوندی را که انسان را آفرید و او را به زیور علم آراست شاکریم این توفیق را یافتیم مجموعه سوالات موضوعی نهایی حسابان ۲ را به صورت کتاب در آوریم. استفاده گسترده دانش‌آموزان و همکاران از این مجموعه سوالات و تشویق برخی همکاران مشوق ما در این راه بود. کتاب حاضر شامل ۲۰ دوره سوالات نهایی حسابان ۲ از دی ۱۳۹۷ تا شهریور ۱۴۰۳ می‌باشد. مهمترین ویژگی منحصر به فرد این کتاب دسته‌بندی سوالات نهایی منطبق بر موضوعات کتاب درسی می‌باشد.

سوالات درس به درس تفکیک شده و به همراه نمره و تاریخ برگزاری آزمون دسته‌بندی شده است. در ابتدای هر درس خلاصه درسی از کتاب برای یادآوری مطالب و فرمول‌ها آورده شده است. حل سوالات نهایی سال‌های گذشته به ارتقاء نمره نهایی شما عزیزان کمک خواهد کرد. توصیه ما به شما عزیزان این است که اول، کتاب درسی یا جزوه دبیرتان را با دقت بخوانید سپس به سراغ حل سوالات این کتاب بروید. تا علاوه بر تمرین و تکرار مطالب کتاب، مفاهیم نیز در ذهنتان تثبیت شود. نتیجه‌گیری از ریاضی سخت نیست کافی است سخت‌کوش باشید.

سخنی با همکاران و اساتید محترم ریاضی

همکار عزیز از این که کتاب حاضر را به عنوان مرجع کلاس خود انتخاب کرده‌اید به خود می‌بالیم. شما می‌توانید با توجه به روند تدریس‌تان در کلاس درس، با اتمام هر درس، سوالات مربوط به همان درس را به عنوان تکلیف به دانش‌آموزان بدهید. یا خودتان با توجه به زمان کلاس تعدادی از سوالات را حین تدریس در کلاس حل کنید. تجربه ما در حل این سوالات در کلاس درس یا مهمتر از آن در طول سالتحصیلی، تکلیف کردن حل این سوالات در منزل، ارتقاء نمره نهایی دانش‌آموزان را ثابت کرده است.

از شما همکاران فرهیخته و دانشمند تقاضا داریم که کاستی یا نقایص کتاب و حتی غلط‌های املایی و چاپی را به ما در سایت math-pilevar.ir اطلاع دهید تا در چاپ‌های بعدی مرتفع گردد.

با تشکر: پيله‌ور - صدقی

برای خرید فایل pdf کتاب به سایت math-pilevar.ir مراجعه کنید.





نمونه سوالات نهایی که در این کتاب به صورت موضوعی تفکیک شده است عبارتند از:

دی ۹۷	۱
خرداد ۹۸	۲
شهریور ۹۸	۳
دی ۹۸	۴
خرداد ۹۹	۵
خرداد ۹۹ خارج از کشور نوبت صبح	۶
خرداد ۹۹ خارج از کشور نوبت عصر	۷
شهریور ۹۹	۸
دی ۹۹	۹
خرداد ۱۴۰۰	۱۰
شهریور ۱۴۰۰	۱۱
دی ۱۴۰۰	۱۲
خرداد ۱۴۰۱	۱۳
شهریور ۱۴۰۱	۱۴
دی ۱۴۰۱	۱۵
خرداد ۱۴۰۲	۱۶
شهریور ۱۴۰۲	۱۷
دی ۱۴۰۲	۱۸
خرداد ۱۴۰۳	۱۹
شهریور ۱۴۰۳	۲۰



تابع



تبدیل نمودار توابع ۸
تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم ۱۶



درس

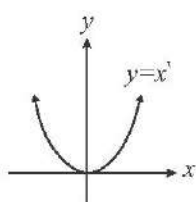
۱

تبدیل نمودار توابع

خلاصه درسنامه

برای رسم بسیاری از توابع، نیاز به روش‌های پیچیده نیست. اگر نمودار یک تابع را در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم به کمک برخی از تبدیل‌ها، نمودار توابع دیگری را رسم کنیم.

❖ رسم نمودار تابع‌های معروف



از معروف‌ترین توابع، تابع سهمی است. که سال‌های گذشته با آن آشنا شده‌اید.

در سوالات نهایی توابع زیادی مطرح می‌شوند که علاوه بر سهمی مهم‌ترین آن‌ها عبارت‌اند از:

$y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$	$y = x $	$y = \frac{1}{x}$	$y = \sqrt{x}$	$y = x^3$

$y = b^x$ $0 < b < 1$	$y = a^x$ $a > 1$	$y = \log_b x$ $0 < b < 1$	$y = \log_a x$ $a > 1$	$y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$



رسم تابع با کمک انتقال و ...، ساختن تابع های جدید

مثال	تأثیر بر نمودار (روش رسم)	تغییر انجام شده	
$y= x$ → $y= x +2$ تابع را به اندازه ۲ واحد به بالا منتقل کنید.	$a > 0$ است: نمودار تابع را به اندازه a واحد به بالا منتقل کنید. $a < 0$ است: نمودار تابع را به اندازه a واحد به پایین منتقل کنید.	کل تابع با عدد ثابت a جمع یا منها شده است.	$f(x) + a$
$y= x$ → $y= x+1$ تابع را به اندازه ۱ واحد به راست منتقل کنید.	$b > 0$ است: نمودار تابع را به اندازه b واحد به سمت چپ منتقل کنید. $b < 0$ است: نمودار تابع را به اندازه b واحد به سمت راست منتقل کنید.	در ضابطه تابع x شما با عدد ثابت b جمع یا منها شده است.	$f(x+b)$
$y= x$ → $y=2 x$ فشرده در ۲.	تابع بدون هیچ تغییری در x و البته بدون انتقال، کشیده می شود طوری که همه y های قبلی، k برابر می شوند.	تابع در عدد ثابت k ضرب شده است. ($k > 0$)	$kf(x)$

نکته:

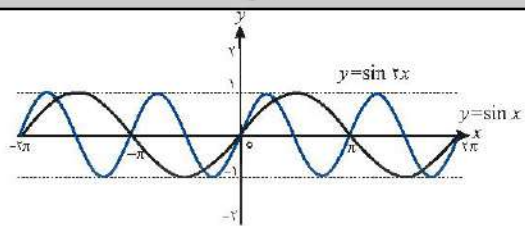
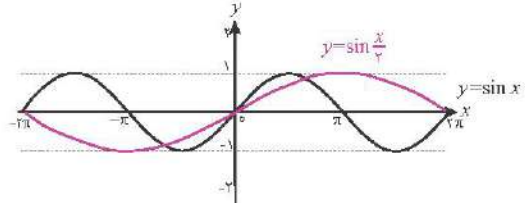
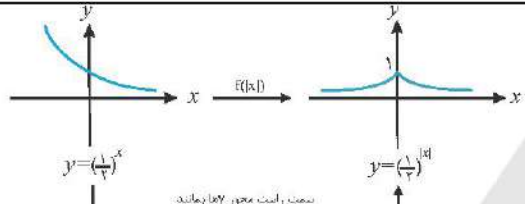
- محل تلاقی نمودار تابع های f و kf با محور x ها یکسان است.
- (x_0, y_0) در تابع f تبدیل می شود به (x_0, ky_0) در تابع kf ...
- در نمودار $y = kf(x)$:

- اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار تابع f در امتداد محور y ها با ضریب k فشرده می شود: انقباض عمودی

- اگر $k > 1$ باشد، نمودار تابع f در امتداد محور y ها با ضریب k کشیده می شود: انبساط عمودی

مثال	تأثیر بر نمودار (روش رسم)	تغییر انجام شده	
$y=\sqrt{x}$ → $y=-\sqrt{x}$ بر مبنای ضرب کردن، قرینه کن	تابع را نسبت به محور x ها قرینه کنید.	تابع در منفی ضرب شده است.	$-f(x)$
$y=x^2-1$ → $y= x^2-1$ اندازه مطلق بگیر، باقی ها رو قرینه کن	بخشی از تابع که بالای محور x هاست، سر جای خودش می ماند و قسمتی که پایین محور x هاست، نسبت به محور x ها قرینه کنید.	کل تابع داخل قدرمطلق قرار گرفته است.	$ f(x) $

از آنجا که تبدیل شدن $y = f(x)$ به $y = f(kx)$ فقط روی دامنه تأثیر می گذارد ($kx \in D_f$) و هیچ ربطی به عرض نقاط نمودار ندارد، برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ از کلمات انقباض و انقباض در راستای محور x ها استفاده می کنیم.

تایع مطلوب	نحوه کشیدن نمودار از روی $y = f(x)$	مثال
۱ $y = f(kx)$ فرض $k > 0$	هر نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ را اینطوری می‌کشیم: x اش در $\frac{1}{k}$ ضرب شود و y اش تغییر نکند! $(a, b) \in f(x) \Rightarrow (\frac{a}{k}, b) \in f(kx)$	 
۲ $y = f(x)$	هر بخشی از نمودار تابع را که سمت چپ محور y هست، حذف می‌کنیم و بخشی که در سمت راست محور y ها باقی مانده نگه می‌داریم قرینه‌اش را هم نسبت به محور y ها رسم می‌کنیم.	 نمونه راست محور y ها بماند. این یعنی، قرینه هم بشود.

نکته: برای رسم $f(-x)$ اول نمودار $y = f(x)$ را رسم کن و بعد نمودار آن را نسبت به محور y ها قرینه کن.

انتقال نمودار تابع در حالت کلی

۱ فرض کنید می‌خواهید از روی نمودار تابع $y = f(x)$ به نمودار $y = f(bx + c)$ برسید. ($b \neq 0$)

برای مثال: با داشتن تابع $y = f(x)$ بخواهیم نمودار تابع $y = f(2x + 3)$ را رسم کنیم...

ترتیب مراحل	اثر روی نقطه	مثال برای حالت $y = f(x) \rightarrow y = f(2x + 3)$
اول هر x را منهای c کرده و بعد هر x را در $\frac{1}{b}$ ضرب کنید.	$(x_0, y_0) \rightarrow (\frac{x_0 - c}{b}, y_0)$	$(7, 5) \rightarrow (2, 5)$ $2x + 3 = 7 \Rightarrow x = \frac{7-3}{2} = 2$

۲ فرض کنید می‌خواهید از روی نمودار تابع $y = f(x)$ به نمودار تابع $y = af(x) + d$ برسید. ($a \neq 0$)

برای مثال: با داشتن نمودار تابع $y = f(x)$ بخواهیم نمودار تابع $y = 2f(x) + 3$ را رسم کنیم...

ترتیب مراحل	اثر روی نقطه	مثال برای حالت $y = f(x) \rightarrow y = 2f(x) + 3$
اول هر y را در a ضرب کرده و بعد هر y را با d جمع کنید.	$(x_0, y_0) \rightarrow (x_0, ay_0 + d)$	$(7, 5) \rightarrow (7, 13)$ $(5 \times 2) + 3$

نکته: در تبدیل نمودار تابع $y = f(x)$ به $y = af(bx + c) + d$ ، ترتیب عملیات به صورت زیر است:

$$y = f(x) \rightarrow y = af(bx + c) + d$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 ۴ ۳ ۲ ۱

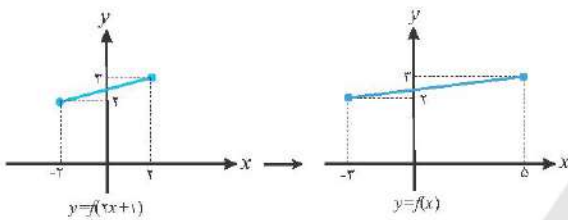
$$(x_0, y_0) \rightarrow \left(\frac{x_0 - 4}{3}, 2y_0 + 5 \right)$$

برای مثال: در انتقال $y = f(x) \rightarrow y = 2f(3x + 4) + 5$ داریم:

۳) حالا فرض کنید می‌خواهید از روی نمودار انتقال یافته‌ی $y = f(x)$ به نمودار آن برسید؛ مثلاً نمودار تابع $y = f(2x + 1)$ را به شما داده‌اند و قرار است نمودار $y = f(x)$ را مشخص کنید ...

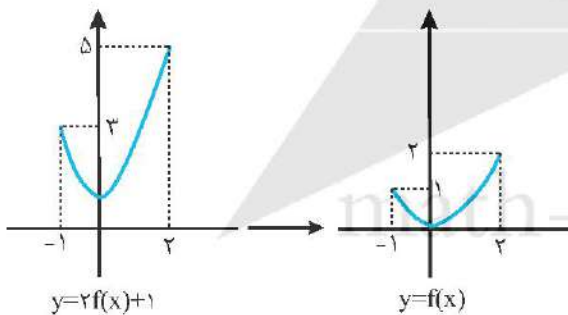
▪ رسیدن به نمودار $y = f(x)$ ؛ با داشتن نمودار تابع $y = f(2x + 1)$ برای رسیدن به نمودار تابع $y = f(x)$ ، اول هر x را در ۲ ضرب کنید و بعد هر x را به اضافی ۱ کنید ...

نکته: اگر خواستید با داشتن نمودار تابع $y = f(bx + c)$ ($b \neq 0$) به نمودار $y = f(x)$ برسید؛ دستور داخل پرانتز را عیناً اجرا کنید! یعنی هر x ضربدر b و بعد هر x به اضافی c
 برای مثال:



در آخر فرض کنید با داشتن نمودار $y = 2f(x) + 1$ ، می‌خواهید به نمودار تابع $y = f(x)$ برسید؛ اول از هر y یک واحد کم می‌کنید و بعد هر y را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنی

نکته: اگر خواستید با داشتن نمودار $y = af(x) + d$ ($a \neq 0$) به نمودار $y = f(x)$ برسید؛ از راست به چپ و با عملیات مخالف حرکت کنید! یعنی هر y منهای d و بعد هر y تقسیم بر a



نکته: در تابع $y = mf(ax + b) + n$ ، مقادیر a و b روی دامنه و مقادیر m و n روی برد تأثیر دارند.

نکته: اگر $Df(x) = [m, n]$ باشد، برای محاسبه $Df(ax + b)$ ، کافی است نامعادله $m \leq ax + b \leq n$ را حل کرده، سپس محدوده x را به دست آوریم که همان دامنه $f(ax + b)$ می‌باشد.

نکته: اگر $Df(ax + b) = [m, n]$ باشد، برای محاسبه $Df(x)$ ، کافی است از نامساوی $m \leq x \leq n$ ، محدوده $ax + b$ را به دست آوریم.

مثال

اگر دامنه تابع $f(x)$ برابر $[-1, 7]$ باشد، دامنه تابع $-2f(3x + 1)$ را بدست آورید.

حل. کافی است نامعادله $-1 \leq 3x + 1 \leq 7$ را حل کنیم:

$$-1 \leq 3x + 1 \leq 7 \Rightarrow -2 \leq 3x \leq 6 \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq x \leq 2 \Rightarrow D_{-2f(3x+1)} = \left[-\frac{2}{3}, 2 \right]$$

مثال

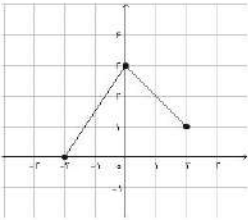
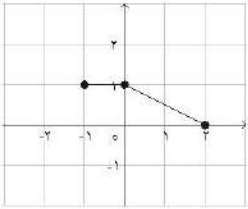
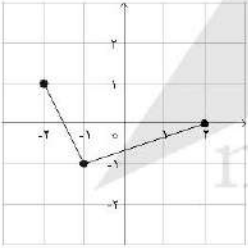
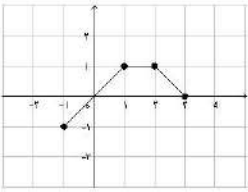
اگر دامنه تابع $y = f(2x - 3)$ برابر $[-1, 2]$ باشد، دامنه تابع $y = f(x)$ را بدست آورید.
 حل: $-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow -5 \leq 2x - 3 \leq 1 \Rightarrow D_{f(x)} = [-5, 1]$

سوالات نهایی

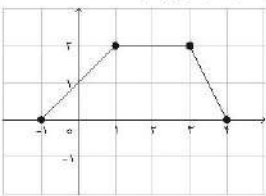
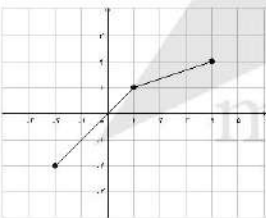
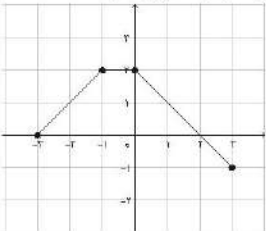


ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۱	الف) اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y = f(2x + 1)$ را به کمک آن رسم کنید. ب) اگر دامنه تابع g بازه $[-2, 4]$ باشد، آنگاه دامنه تابع $k(x) = 3g(-2x)$ را به دست آورید.	۱/۵	شهریور ۱۴۰۳
۲	نمودار تابع $f(x)$ در زیر رسم شده است، نمودار تابع $y = -f(2x - 1)$ را رسم کرده، سپس دامنه و برد تابع حاصل را به دست آورید.	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۳	نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = -3f\left(\frac{x}{2}\right) + 2$ را رسم کرده و سپس برد تابع $g(x)$ را تعیین کنید.	۱	دی ۱۴۰۲
۴	جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. الف) اگر برد تابع $y = \sqrt{x}$ بازه $[0, 2]$ باشد، برد تابع $y = 2 + \sqrt{x - 2}$ برابر است.	۰/۵	شهریور ۱۴۰۲
۵	نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = f(1 - x) + 1$ را رسم کنید.	۱	شهریور ۱۴۰۲



دتی ۱۴۰۱	۵/۰	۶	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید. الف) نقطه $(-۸, ۶)$ روی نمودار $y = f(x)$ با نقطه $(-۸, ۱۲)$ روی نمودار $y = \frac{1}{2}f(x)$ متناظر است. ب) نمودار تابع $y = -(x-۳)^۳$ را می‌توان با ۳ واحد انتقال نمودار $y = -x^۳$ به سمت راست رسم کرد.
شهریور ۱۴۰۱	۱	۷	الف) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در بازه $[۰, ۴]$ رسم کنید. به کمک نمودار $f(x)$ نمودار تابع $g(x) = ۲f(x-۱)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد g را تعیین کنید.
خرداد ۱۴۰۱	۱	۸	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(x-۱)$ را رسم کرده و دامنه تابع g را تعیین کنید. 
دی ۱۴۰۰	۱	۹	نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = f(x-۱) + ۲$ را رسم کرده و دامنه تابع $g(x)$ را تعیین کنید. 
شهریور ۱۴۰۰	۱	۱۰	نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = ۲f(x+۱)$ را رسم کرده و دامنه و برد تابع g را تعیین کنید. 
شهریور ۱۴۰۰	۵/۲	۱۱	جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. اگر $k > ۱$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از نمودار $y = f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید.
خرداد ۱۴۰۰	۱	۱۲	نمودار تابع $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)$ را به کمک نمودار $y = \cos x$ در بازه $[۰, ۲\pi]$ رسم کنید.
دتی ۹۹	۱	۱۳	نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = f(۲x-۱)$ را رسم، دامنه و برد آن را تعیین کنید. 



شهریور ۹۹	۰/۵	۱۴	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. اگر بازه‌ی $[-2, 1]$ دامنه‌ی تابع $f(x)$ باشد، دامنه تابع $f(3x+1)$ برابر است.
شهریور ۹۹	۱	۱۵	نمودار تابع زیر را به کمک نمودار $y = \cos x$ رسم کنید. $y = \cos(2x) - 1$
خرداد ۹۹	۰/۵	۱۶	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. نقطه‌ی $(2, -1)$ در تابع $y = f(2x+1) - 1$ متناظر با نقطه‌ی در تابع $y = f(x)$ است.
خرداد ۹۹	۱	۱۷	اگر نمودار f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x) = f(x-1) + 2$ زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را بنویسید. 
خرداد ۹۹	۰/۲۵	۱۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. نمودار تابع $y = (x+2)^3$ را می‌توان با ۲ واحد انتقال نمودار تابع $y = x^3$ به سمت چپ، رسم کرد.
خرداد ۹۹	۱	۱۹	با توجه به نمودار تابع f که در شکل زیر آمده است، نمودار تابع $g(x) = f(2x) - 1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید. 
مهر ۹۸	۰/۲۵	۲۰	نمودار $f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(2x+1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید. 
شهریور ۹۸	۰/۵	۲۱	کوتاه پاسخ دهید. نمودار تابع $y = -f(x)$ ، قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به کدام محور است؟



شماره سؤال	۱	۲۲	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(3-x)$ را رسم کرده و دامنه‌ی آن را تعیین کنید.	
شماره سؤال	۱/۲۵	۲۳	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(2x) - 1$ را رسم کنید. سپس دامنه تابع g را تعیین کنید.	
شماره سؤال	۲/۲۵	۲۴	درستی یا نادرستی بودن عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید.	
شماره سؤال	۱	۲۵	نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = 2f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را بنویسید.	
شماره سؤال	۱/۵	۲۶	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = -f(2x)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد تابع g را تعیین کنید.	

یادداشت ضروری دانش‌آموز:



درس

۲

تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

خلاصه درسنامه

تابع درجه سوم



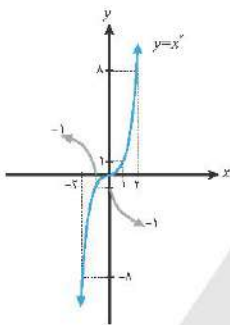
تابع چندجمله‌ای: هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را یک تابع چندجمله‌ای از درجه n می‌گوییم که در آن $a_0, a_1, \dots, a_n$ اعداد حقیقی، n عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ است.

① دامنه‌ی همه‌ی تابع‌های چندجمله‌ای، $\mathbb{R}$ است.

② اگر در یک تابع چندجمله‌ای، n بزرگ‌ترین توان موجود برای x باشد، تابع را چندجمله‌ای درجه‌ی n می‌گوییم.

برای مثال: $f(x) = 4 + x + x^3$ ، یک تابع چندجمله‌ای درجه‌ی سوم و $f(x) = x^2 + x^2 + 1$ هم تابعی چندجمله‌ای از درجه‌ی چهارم است....

③ تابع‌های ثابت، همانی و خطی، تابع چندجمله‌ای محسوب می‌شوند.



تابع $y = x^3$: تابع $y = x^3$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه ۳ است که نمودار آن به صورت مقابل می‌باشد: با توجه به نمودار، دامنه و برد این تابع برابر $\mathbb{R}$ است. همچنین این تابع، یک به یک و وارون‌پذیر می‌باشد. از دیگر ویژگی‌های این تابع آن است که نمودار آن نسبت به مبدأ مختصات متقارن می‌باشد.

درس ۲

توابع یکنوا

مقایسه نمودارهای توابع $y = x^3$ و $y = x^2$ 

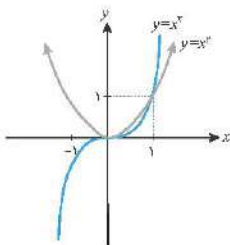
اعداد بین صفر و ۱، ویژگی جالبی دارند: هرچه توانشان را بیشتر کنید، حاصلشان کمتر می‌شود. مثال: $(0.8)^2 = 0.64$ ، $(0.8)^3 = 0.512$ ولی برای اعداد بزرگتر از ۱، روال معمولی است؛ توان بیشتر، حاصل بیشتر می‌دهد. مثال: $2^2 = 4$ ، $2^3 = 8$

$$b > 1 \xrightarrow{m > n} b^m > b^n$$

و

$$0 < a < 1 \xrightarrow{m > n} a^m < a^n$$

نکته:



از آنجا که نمودار هر دو از نقطه‌ی $(1, 1)$ می‌گذرند، رفتار $y = x^3$ و $y = x^2$ را قبل از $x = 1$ و بعد از آن، با توجه به مطلب بالا بررسی می‌کنیم. $y = x^3$ برای x های مثبت، حرکتش را از زیر $y = x^2$ شروع می‌کند و پس از رسیدن به نقطه‌ی $x = 1$ ، می‌رود بالای $y = x^2$.

توابع صعودی و توابع نزولی



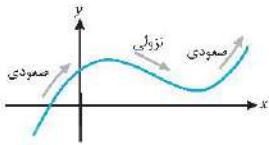
در یک تقسیم‌بندی کلی همه‌ی تابع‌هایی که می‌شناسیم، از نظر رفتار، در یکی از پنج دسته‌ی زیر قرار می‌گیرند:

① صعودی ② نزولی ③ اکیداً صعودی ④ اکیداً نزولی ⑤ غیریکنوا

تابع	به بیان فارسی	تشخیص از روی زوج مرتبها	تعریف ریاضی: برای هر x_1 و x_2 عضو مجموعه‌ی I به طوری که $I \subseteq D_f$	وضعیت نمودار
۱ اکتشافی صعودی	وقتی مقدار x ها زیاد می‌شود، مقدار y های نظیر آن‌ها هم زیاد می‌شود.	اگر زوج مرتبها را طوری مرتب کنید که x ها از کوچک به بزرگ نوشته شده باشند، y ها هم باید از کوچک به بزرگ باشند. $\{(1, 10), (2, 11), (3, 15), (4, 19)\}$	در $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ در مقایسه‌ی دو نقطه با طول نامساوی روی نمودار تابع، عرض بیشتر برای نقطه‌ای با طول بیشتر است...	اگر از سمت چپ، قلم را روی نمودار بگذارید و روی آن حرکت کنید، مدام در حال بالا رفتن هستی.
۲ اکتشافی نزولی	وقتی مقدار x ها زیاد می‌شود، y های نظیر آن‌ها کم می‌شود.	اگر زوج مرتبها را طوری مرتب کنید که x ها از کوچک به بزرگ نوشته شده باشند، y ها از بزرگ به کوچک قرار می‌گیرند. $\{(1, 20), (2, 14), (3, 9), (4, 8)\}$	در $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ در مقایسه‌ی دو نقطه با طول نامساوی روی نمودار تابع، عرض بیشتر برای نقطه‌ای با طول کمتر است....	اگر از سمت چپ، قلم را روی نمودار بگذارید و روی آن حرکت کنید، مدام در حال پایین رفتن هستی.
۳ مجموعی	وقتی مقدار x ها زیاد می‌شود، y های نظیر آن‌ها کم نمی‌شود؛ y ها یا زیاد می‌شوند یا درجا می‌زنند و مساوی قبلی می‌شوند...	اگر زوج مرتبها را طوری مرتب کنید که x ها از کوچک به بزرگ نوشته شده باشند، هر y ، یا از y قبلی خود بزرگ‌تر است یا با آن مساوی. $\{(1, 10), (2, 11), (3, 11), (4, 17)\}$	در دو نقطه $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ با طول متفاوت روی نمودار تابع، یا عرض مساوی دارند یا نقطه‌ای که طول بیشتر دارد، عرض بیشتری هم خواهد داشت...	اگر از سمت چپ، قلم را روی نمودار بگذارید و روی آن حرکت کنید، یا بالا می‌روی یا روی خط صاف حرکت می‌کنی.
۴ مجموعی	وقتی مقدار x ها زیاد می‌شود، y های نظیر آن‌ها زیاد نمی‌شود؛ y ها یا کم می‌شوند یا درجا می‌زنند و مساوی قبلی می‌شوند....	اگر زوج مرتبها را طوری مرتب کنید که x ها از کوچک به بزرگ نوشته شده باشند، هر y ، یا از y قبلی خود کوچک‌تر است یا با آن مساوی. $\{(1, 20), (2, 20), (3, 16), (4, 11)\}$	در دو نقطه $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ با طول متفاوت روی نمودار تابع، یا عرض مساوی دارند یا نقطه‌ای که طول بیشتر دارد، عرض کمتری خواهد داشت...	اگر از سمت چپ، قلم را روی نمودار بگذارید و روی آن حرکت کنید، یا پایین می‌روی یا روی خط صاف حرکت می‌کنی.



تعریف تابعی را که در دامنه‌ی خود، در محدوده‌هایی صعودی و در محدوده‌هایی دیگر نزولی باشد، غیریکنوا می‌گوییم. آهنگ رفتاری تابع غیریکنوا تغییر می‌کند: گاهی بالا می‌رود و گاهی هم پایین.



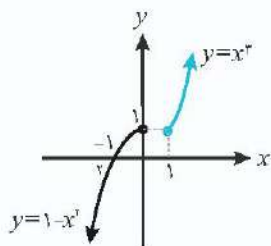
تعریف ۱ به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، می‌گوییم تابع اکیداً یکنوا.
۲ به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم تابع یکنوا.

یکنوا		اکیداً یکنوا	
نزولی هست؛ ولی اکیداً صعودی نه!	صعودی هست؛ ولی اکیداً صعودی نه!	اکیداً نزولی و نزولی	اکیداً صعودی و صعودی

نکته:

- ۱ فرق تابع صعودی با اکیداً صعودی در این است که تابع صعودی غیراکید در محدوده‌ای از دامنه‌ی خود، ثابت می‌شود یا در دامنه‌ی خود نقطه‌های هم‌عرض دارد.
- ۲ فرق تابع نزولی با اکیداً نزولی در این است که تابع نزولی غیراکید در محدوده‌ای از دامنه‌ی خود، ثابت می‌شود یا در دامنه‌ی خود نقطه‌های هم‌عرض دارد.
- ۳ تابع ثابت، هم صعودی محسوب می‌شود، هم نزولی.

مثال



تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ 1 - x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ روی دامنه‌اش چگونه است؟

پاسخ: اگر از چپ به راست قلم را حرکت دهید می‌فهمید که تابع صعودی است. به خاطر وجود دو نقطه‌ی هم‌عرض $(0, 1)$ و $(1, 1)$ اکیداً صعودی نیست!

رفتار تابع‌های f و f^{-1}

در آخر می‌خواهیم ببینیم رفتار f^{-1} چگونه از رفتار f دستور می‌گیرد...

- ۱ اگر f اکیداً صعودی باشد، f^{-1} هم اکیداً صعودی خواهد بود و برعکس.
- ۲ اگر f اکیداً نزولی باشد، f^{-1} هم اکیداً نزولی خواهد بود و برعکس.
- ۳ اگر f یک به یک باشد، f^{-1} هم یک به یک خواهد بود و برعکس.



تقسیم و بخش پذیری



قضیه تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها: با تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $g(x)$ خارج قسمت منحصر به فرد $Q(x)$ و باقی‌مانده منحصر به فرد $R(x)$ وجود دارند به طوری که می‌توان نوشت:

$$f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$$

باقی‌مانده + خارج قسمت $\times$ مقسوم علیه = مقسوم

توجه داشته باشید که همواره درجه باقی‌مانده $R(x)$ از درجه مقسوم‌علیه $g(x)$ کوچکتر است.



تعریف اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $g(x)$ برابر صفر شود، می‌گوییم $f(x)$ بر $g(x)$ بخش‌پذیر است. در این حالت $g(x)$ را یک فاکتور یا عامل $f(x)$ گویند.



محاسبه باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $ax+b$ بدون انجام عمل تقسیم



نکته: باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-a$ برابر با $f(a)$ است.



اگر مقسوم علیه برابر $x-a$ باشد، باقی‌مانده باید عددی ثابت باشد. بنابراین اتحاد تقسیم به صورت مقابل است: $f(x) = (x-a)q(x) + r$

مثال

باقی‌مانده تقسیم عبارت $x^4 - 3x^3 + x + 9$ بر $x-2$ برابر است با:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow r=f(2)=2^4-3 \times 2^3+2+9=16-24+2+9=3$$



نکته: به طور مشابه، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر با $f\left(-\frac{b}{a}\right)$ است.

مثال

مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x) = ax^4 + bx^3 - 3x^2 + x + 2$ بر $(x-1)$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌مانده تقسیم آن بر $(x+1)$ برابر (-4) باشد.

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow p(1)=0 \Rightarrow a(1)^4 + b(1)^3 - 3(1)^2 + (1) + 2 = 0 \Rightarrow a+b=0$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow p(-1)=-4 \Rightarrow a(-1)^4 + b(-1)^3 - 3(-1)^2 + (-1) + 2 = -4 \Rightarrow a-b=-2$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=-1}, \boxed{b=1}$$





تقسیم و بخش پذیری



قضیه تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها: با تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $g(x)$ خارج قسمت منحصر به فرد $Q(x)$ و باقی‌مانده منحصر به فرد $R(x)$ وجود دارند به طوری که می‌توان نوشت:

$$f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$$

باقی‌مانده + خارج قسمت $\times$ مقسوم علیه = مقسوم

توجه داشته باشید که همواره درجه باقی‌مانده $R(x)$ از درجه مقسوم‌علیه $g(x)$ کوچکتر است.



تعریف اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $g(x)$ برابر صفر شود، می‌گوییم $f(x)$ بر $g(x)$ بخش‌پذیر است. در این حالت $g(x)$ را یک فاکتور یا عامل $f(x)$ گویند.



محاسبه باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $ax+b$ بدون انجام عمل تقسیم



نکته: باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-a$ برابر با $f(a)$ است.



اگر مقسوم علیه برابر $x-a$ باشد، باقی‌مانده باید عددی ثابت باشد. بنابراین اتحاد تقسیم به صورت مقابل است: $f(x) = (x-a)q(x) + r$

مثال

باقی‌مانده تقسیم عبارت $x^4 - 3x^3 + x + 9$ بر $x-2$ برابر است با:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow r=f(2)=2^4-3 \times 2^3+2+9=16-24+2+9=3$$

نکته: به طور مشابه، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر با $f\left(-\frac{b}{a}\right)$ است.

مثال

مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x) = ax^4 + bx^3 - 3x^2 + x + 2$ بر $(x-1)$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌مانده تقسیم آن بر $(x+1)$ برابر (-4) باشد.

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow p(1)=0 \Rightarrow a(1)^4 + b(1)^3 - 3(1)^2 + (1) + 2 = 0 \Rightarrow a+b=0$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow p(-1)=-4 \Rightarrow a(-1)^4 + b(-1)^3 - 3(-1)^2 + (-1) + 2 = -4 \Rightarrow a-b=-2$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=-1}, \boxed{b=1}$$



مثال

اگر باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x+1)$ و $(x-2)$ به ترتیب ۲ و ۳ باشد. باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - x - 2$ کدام است؟
پاسخ: با توجه به سوال $f(-1) = 2$ و $f(2) = 3$ است، بنابراین اگر باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$ را به صورت $R(x) = ax + b$ نشان دهیم، داریم:

$$f(x) = (x+1)(x-2)Q(x) + ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = -a + b = 2 \\ f(2) = 2a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = \frac{7}{3}$$

در نتیجه باقی مانده به صورت $\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ در می آید.

مثال

باقی مانده تقسیم $x^n \pm a^n$ را بر $x \pm a$ تعیین کنید. ($n \in \mathbb{N}$)

پاسخ: در چهار حالت مختلف به حل این مثال می پردازیم:

$$P(a) = a^n - a^n = 0$$

(۱) باقی مانده تقسیم $P(x) = x^n - a^n$ بر $x - a$

یعنی $P(x) = x^n - a^n$ همواره بر $x - a$ بخش پذیر است.

$$P(-a) = (-a)^n - a^n = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ -2a^n & n = 2k + 1 \end{cases}$$

(۲) باقی مانده تقسیم $P(x) = x^n - a^n$ بر $x + a$

یعنی $P(x) = x^n - a^n$ زمانی بر $x + a$ بخش پذیر است که n زوج باشد.

$$P(-a) = (-a)^n + a^n = \begin{cases} 2a^n & n = 2k \\ 0 & n = 2k + 1 \end{cases}$$

(۳) باقی مانده تقسیم $P(x) = x^n + a^n$ بر $x + a$

یعنی $P(x) = x^n + a^n$ زمانی بر $x + a$ بخش پذیر است که n فرد باشد.

$$P(a) = a^n + a^n = 2a^n$$

(۴) باقی مانده تقسیم $P(x) = x^n + a^n$ بر $x - a$

یعنی $P(x) = x^n + a^n$ هیچ گاه بر $x - a$ بخش پذیر نیست.

بررسی سه اتحاد مهم: حالت تعمیم یافته اتحادهای چاق و لاغر را در سه اتحاد زیر می توانید مشاهده کنید:

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

$$x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \dots - xa^{n-2} + a^{n-1}); \text{ (فرد } n \text{)}$$

$$x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \dots + xa^{n-2} - a^{n-1}); \text{ (زوج } n \text{)}$$

مثال

چند جمله ای $x^6 - 64$ را بر حسب $(x+2)$ تجزیه کنید.

$$x^6 - 64 = (x+2)(x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x - 32)$$

پاسخ: با استفاده از اتحادهای گفته شده داریم:



سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۲۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر n عدد طبیعی زوج و a عدد حقیقی باشد، آنگاه چند جمله‌ای $x^n + a^n$ بر $x + a$ بخش پذیر است.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۲۸	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. اگر نمودار تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در راستای محور x ها، دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم و آن را $g(x)$ بنامیم. آنگاه نمودار تابع $g^{-1}(x)$ از ناحیه محورهای مختصات نمی‌گذرد.	۰/۷۵	شهریور ۱۴۰۳
۲۹	نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & x < 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$ را رسم کنید. بزرگترین بازه‌ای که این تابع در آن اکیداً صعودی است را بنویسید.	۰/۷۵	شهریور ۱۴۰۳
۳۰	اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + kx^2 + 2$ بر $x - k$ بخش پذیر باشد، مقدار k را بیابید.	۰/۷۵	شهریور ۱۴۰۳
۳۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً نزولی باشند، تابع $f + g$ نیز در آن فاصله اکیداً نزولی است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۳۲	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. تابع $f(x) = (x-2)^3 + 1$ را در نظر بگیرید. نمودار f^{-1} از ناحیه محورهای مختصات عبور نمی‌کند.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۳۳	الف) اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + mx + 2$ بر $x - 2$ بخش پذیر باشد، آنگاه باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x + 1$ را به دست آورید. ب) چند جمله‌ای $x^5 - 1$ را طوری تجزیه کنید که $x - 1$ یک عامل آن باشد.	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۳۴	ابتدا نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} (x-2)^3 & x \geq 1 \\ -2 & 0 \leq x < 1 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.	۱/۵	دی ۱۴۰۲
۳۵	اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = 3x^2 + mx + 2m + 1$ بر $x - 2$ برابر ۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = 3x^2 - mx + 3$ بر $x + 2$ را تعیین کنید.	۱	دی ۱۴۰۲



شهریور ۱۴۰۱	۰/۷۵		۳۶ با توجه به نمودار تابع مقابل، تعیین کنید: الف) تابع f در چه بازه‌هایی اکیداً یکنوا است. ب) آیا تابع در کل دامنه خود اکیداً یکنوا است؟
شهریور ۱۴۰۲	۱		۳۷ مقادیر a و b را چنان بیابید که عبارت $p(x) = x^3 - ax + b$ بر $(x - 2)$ بخش‌پذیر باشد و باقیمانده تقسیم آن بر $(x + 1)$ برابر ۳ باشد.
شهریور ۱۴۰۲	۰/۲۵		۳۸ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید. الف) عبارت $1 + x^{16}$ بر $x + 1$ بخش‌پذیر است.
خرداد ۱۴۰۲	۱		۳۹ نمودار تابع $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ را به کمک انتقال نمودار $f(x) = x^3$ رسم کنید. سپس اکیداً یکنوایی تابع $g(x)$ را در تمام دامنه خود، بررسی کنید.
خرداد ۱۴۰۲	۰/۷۵		۴۰ اگر $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} \leq \frac{1}{125}$ باشد، حدود x را بیابید.
خرداد ۱۴۰۲	۰/۷۵		۴۱ اگر چندجمله‌ای $x^2 + ax - 8$ بر $x - a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.
دی ۱۴۰۱	۰/۲۵		۴۲ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. تابع $f(x) = x^2 - 4x$ روی بازه $[2, +\infty)$ اکیداً صعودی است.
دی ۱۴۰۱	۰/۲۵		۴۳ جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. اگر مقدار a برابر باشد، تابع $f(x) = ax + b$ هم صعودی و هم نزولی است.
دی ۱۴۰۱	۱/۵		۴۴ در چند جمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + b$ مقادیر a و b را چنان بیابید که باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x + 2$ برابر -1 و $P(x)$ بر $x - 1$ بخش‌پذیر باشد.
دی ۱۴۰۱	۱		۴۵ عبارت $\frac{x^5 + 1}{x + 1}$ را ساده کنید.
شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵		۴۶ جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. اگر تابعی در یک فاصله هم صعودی و هم نزولی باشد، تابع در آن فاصله است.



شماره ۱۴۰۱	۰/۷۵	۴۷	اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = x^6 + kx^2 - 3$ بر $x + 1$ برابر ۲ باشد، k را تعیین کنید.
شماره ۱۴۰۱	۱	۴۸	اگر $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{27}\right)$ باشد، حدود x را به دست آورید.
شماره ۱۴۰۱	۰/۵	۴۹	چندجمله‌ای $x^5 + 32$ را بر حسب عامل $x + 2$ تجزیه کنید.
شماره ۱۴۰۱	۱	۵۰	ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x$ را رسم نمائید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیدا صعودی و در چه بازه‌ای اکیدا نزولی است.
شماره ۱۴۰۱	۰/۵	۵۱	باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = 8x^3 - 4x^2 + 2$ بر $2x + 1$ به دست آورید.
شماره ۱۴۰۰	۱	۵۲	ابتدا نمودار تابع $f(x) = x - 1 $ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که تابع در چه بازه‌ای اکیدا صعودی و در چه بازه‌ای اکیدا نزولی است.
شماره ۱۴۰۰	۱/۵	۵۳	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ بر $(x + 2)$ و $(x - 1)$ بخش پذیر باشد.
شماره ۱۴۰۰	۰/۲۵	۵۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $y = -\log_8 x + 1$ در دامنه خود، یک تابع اکیداً یکنوا است.
شماره ۱۴۰۰	۱	۵۵	با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & -2 \leq x < -1 \\ -x - 1 & -1 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & 1 \leq x \end{cases}$ تعیین کنید، تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی می‌باشد.
شماره ۱۴۰۰	۰/۵	۵۶	چند جمله‌ای $x^5 + 32$ را بر حسب عامل $(x + 2)$ تجزیه کنید.
شماره ۱۴۰۰	۰/۵	۵۷	در $\left(\frac{1}{3}\right)^{10-2x} \leq \left(\frac{1}{81}\right)$ حدود x را بدست آورید.



۵۸	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۰
۵۹	با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -3x & -1 < x < 0 \end{cases}$ تعیین کنید، تابع در چه بازه‌ای اکیدا صعودی و در چه بازه‌ای اکیدا نزولی می‌باشد؟	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۰
۶۰	باقیمانده تقسیم عبارت‌های $p(x) = x^3 + ax + 1$ و $q(x) = 2x^2 - x + 1$ بر $(x + 2)$ یکسان می‌باشد. مقدار a را بیابید.	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۰
۶۱	با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$ تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی می‌باشد.	۱	دی ۹۹
۶۲	چند جمله‌ای $1 - x^6$ را به عامل $x - 1$ تجزیه کنید.	۱	دی ۹۹
۶۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x)$ در بازه شامل a, b صعودی است. اگر $f(a) \leq f(b)$ آنگاه $a \leq b$	۰/۲۵	دی ۹۹
۶۴	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) چند جمله‌ای $P(x) = (2 - x)^2(x + 1)^3$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی ۵ است. ب) اگر تابع f در یک بازه نزولی اکیدا باشد، در این بازه نزولی نیز هست.	۰/۵	شهریور ۹۹
۶۵	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ بر $x - 2$ بخش‌پذیر بوده و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x + 1$ برابر ۳ باشد.	۱/۵	شهریور ۹۹
۶۶	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) تابع $g(x) = 2^{-x}$ ، تابعی است که در تمام دامنه‌ی خود اکیدا یکنوا است. ب) در تقسیم $f(x) = x^3 + 2$ بر $p(x) = 2x - 1$ باقی مانده برابر صفر است.	۰/۵	خرداد ۹۹ خ
۶۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $y = -x^2 + 2x$ روی بازه‌ی $(-\infty, 3]$ اکیدا صعودی است.	۰/۲۵	خرداد ۹۹ خ



۶۸	جای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. برای آنکه تابع $y = ax + b$ در دامنه اش هم صعودی باشد هم نزولی، مقدار a باید برابر با باشد.	۰/۲۵	خرداد ۹۹ خ
۶۹	در چند جمله‌ای $y = x^3 + ax^2 + x + b$ مقادیر a و b را چنان بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x - 1$ برابر ۴ باشد و بر $x + 2$ بخش پذیر باشد.	۱	خرداد ۹۹ خ
۷۰	چند جمله‌ای $x^5 + 1$ را بر حسب عامل $x + 1$ تجزیه کنید.	۰/۵	خرداد ۹۹ خ
۷۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) نمودار تابع $y = x^3$ در بازه‌ی $[0, 1]$ پایین‌تر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد. ب) اگر تابع $y = f(x)$ در یک فاصله صعودی باشد، آنگاه در آن فاصله اکیدا صعودی نیز خواهد بود.	۰/۵	خرداد ۹۹ خ
۷۲	نمودار تابع $y = x^2 + 2$ را رسم کرده و مشخص کنید در چه بازه‌ای این تابع اکیدا صعودی و در چه بازه‌ای اکیدا نزولی است.	۱	خرداد ۹۹ خ
۷۳	مقادیر a, b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر است.	۱	خرداد ۹۹ خ
۷۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر تابع f در یک بازه نزولی باشد، آنگاه در این بازه اکیدا نزولی می‌باشد.	۰/۲۵	دی ۹۸
۷۵	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. اگر $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} \leq \frac{1}{64}$ باشد، حدود x برابر است.	۰/۵	دی ۹۸
۷۶	در چند جمله‌ای $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ ، مقادیر a و b را چنان بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x - 1$ برابر ۴ باشد و بر $x + 2$ بخش پذیر باشد.	۱/۲۵	دی ۹۸
۷۷	کوتاه پاسخ دهید. الف) در فاصله‌ی $(0, 1)$ از بین دو تابع $g(x) = x^3$ و $f(x) = x^2$ ، نمودار کدام تابع پایین‌تر از دیگری قرار دارد؟ ب) درجه‌ی تابع $f(x) = x^2(1-x)^5$ را مشخص کنید. پ) تابع $h(x) = x+2 $ در چه بازه‌ای اکیدا صعودی است؟	۰/۷۵	شهریور ۹۸

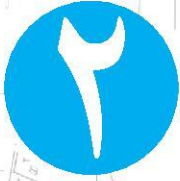


شهریور ۹۸	۰/۵	۷۸ اگر $\log(x+1) \leq \log(2x-3)$ ، حدود x را به دست آورید؟
شهریور ۹۸	۱	۷۹ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x+1$ و $x-2$ بخش پذیر باشد.
تیر ۹۸	۰/۲۵	۸۰ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. باقی مانده تقسیم $f(x) = x^3 - 2x$ بر $x-1$ برابر با است.
تیر ۹۸	۱	۸۱ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x-2$ بخش پذیر بوده و باقی مانده تقسیم آن بر $x+1$ برابر ۳ باشد.
خرداد ۹۸	۰/۷۵	۸۲ اگر چند جمله‌ای $f(x) = x^2 + ax - 3$ بر $x+1$ بخش پذیر باشد. باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x-2$ را بدست آورید.
خرداد ۹۸	۰/۵	۸۳ چند جمله‌ای $x^6 - 1$ را بر حسب عامل $x+1$ تجزیه کنید.
دی ۹۷	۰/۷۵	۸۴ نمودار تابع $f(x) = (x+1)^3$ را رسم کنید. سپس تعیین کنید که این تابع در دامنه‌ی خود اکیدا صعودی است یا اکیدا نزولی؟
دی ۹۷	۰/۲۵	۸۵ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. اگر باقی مانده‌ی تقسیم $f(x) = x^2 + kx - 1$ بر $x+1$ برابر ۲ باشد. مقدار k برابر است.
دی ۹۷	۱	۸۶ هریک از چند جمله‌ای‌های زیر را بر حسب عامل خواسته شده، تجزیه کنید. الف) $x^5 + 1$ با عامل $x+1$ ب) $x^6 - 1$ با عامل $x-1$

درس ۲

نواب یکتوا

یادداشت ضروری دانش آموز:



مثلات

تناوب و تانوانت ۲۸
معادلات مثلثاتی ۳۷



درس

۱

تناوب و تانژانت

خلاصه درسنامه

تابع متناوب



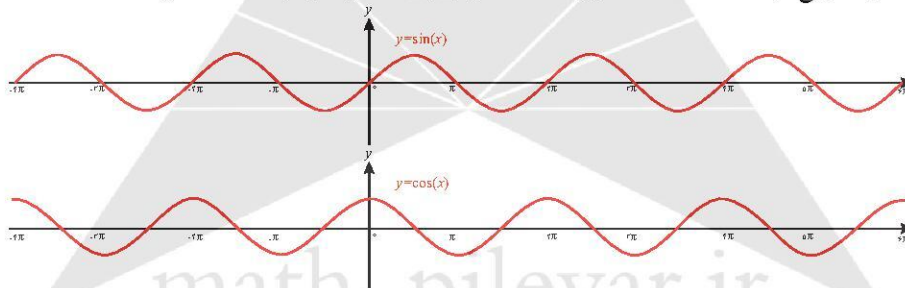
اگر نمودار یک تابع طوری باشد که همواره قسمتی از نمودار به طور مرتب و منظم تکرار شود، به آن تابع، متناوب و به کوچکترین فاصله‌ای که تابع در آن تکرار می‌شود، دوره تناوب تابع گویند.

تعریف تعریف ریاضی تابع متناوب: تابع f را متناوب می‌نامیم، هرگاه عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم:

$$x + T \in D_f, \quad f(x + T) = f(x)$$

کوچکترین عدد T با این خاصیت را دوره تناوب تابع f می‌نامند.

با توابع مثلثاتی $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصله 2π روی محور x ها یکسان است $\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x$ و $\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x$ به عبارتی اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در بازه‌ای به طول 2π داشته باشیم، با تکرار این تکه می‌توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می‌توانید در شکل‌های زیر مشاهده نمایید.



دوره‌ی تناوب تابع‌های مثلثاتی

دوره‌ی تناوب	ضابطه‌ی کلی تابع	
$T = \frac{2\pi}{ a }$	$f(x) = k \sin(ax + b) + t$	۱
$T = \frac{2\pi}{ a }$	$f(x) = k \cos(ax + b) + t$	۲
$T = \frac{\pi}{ a }$	$f(x) = k \tan(ax + b) + t$	۳
$T = \frac{\pi}{ a }$	$f(x) = k \sin^n(ax + b) + t$	۴
$T = \frac{\pi}{ a }$	$f(x) = k \cos^n(ax + b) + t$	۵
$T = \frac{2\pi}{ a }$	$f(x) = k \sin^{n-1}(ax + b) + t$	۶
$T = \frac{2\pi}{ a }$	$f(x) = k \cos^{n-1}(ax + b) + t$	۷



تأثیر توان و قدرمطلق بر دوره‌ی تناوب

- ۱ اگر نسبت مثلثاتی سینوس و کسینوس دارای توان زوج یا قدرمطلق باشد، دوره‌ی تناوب آن، نصف حالتی است که این‌ها را نداشته باشد!
- ۲ اگر نسبت مثلثاتی دارای توان فرد باشد، هیچ تأثیری بر دوره‌ی تناوبش ندارد، به طور کلی توان و قدرمطلق روی تناوبت و کتناوبت اثری ندارد.

مثال

دوره‌ی تناوب تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = 3 \sin\left(\frac{x}{4}\right) - 1$ را بدست آورید.

$$f(x) = 3 \sin\left(\frac{x}{4}\right) - 1 \xrightarrow{x \text{ ضریب } = \frac{1}{4}} T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$$

دوره‌ی تناوب، وقتی عبارت‌های مثلثاتی با هم جمع و منها شده‌اند!

نکته: اگر تابعی از مجموع یا تفاضل چند تابع مثلثاتی تشکیل شده باشد و این مجموع یا تفاضل قابل ساده شدن و یا تبدیل به یک تابع مثلثاتی نباشند در این صورت دوره تناوب تابع برابر است با کوچکترین مضرب مشترک بین دوره تناوب‌ها

مثال

دوره تناوب تابع $y = \tan 2x + \sin 3x + \sin 4x$ را بدست آورید.

$$y_1 = \tan 2x \Rightarrow T_1 = \frac{\pi}{2} \quad y_2 = \sin 3x \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{3} \quad y_3 = \sin 4x \Rightarrow T_3 = \frac{2\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6} \quad \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{6} \quad \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6}$$

مخرج‌ها را مشترک می‌کنیم:

$$T = \frac{12\pi}{6} = 2\pi \text{ است پس } 4 \text{ و } 3 \text{ و } 2 \text{ برابر } 12 \text{ است پس } T = \frac{12\pi}{6} = 2\pi$$

مثال

دوره تناوب تابع $y = \sin \frac{2}{3}x + \cos \frac{3}{4}x$ را بیابید.

$$y_1 = \sin \frac{2}{3}x \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = \frac{6\pi}{2} = 3\pi \quad y_2 = \cos \frac{3}{4}x \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi}{3}$$

$$T = \frac{36\pi}{3} = 12\pi \text{ می‌باشد پس: } 9 \text{ و } 4 \text{ برابر } 36 \text{ می‌باشد پس: } T = \frac{36\pi}{3} = 12\pi$$

نکته: بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی $y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$ با قرار دادن ۱ یا -۱ به جای سینوس و کسینوس به دست می‌آید پس:

$$\max(y) = |a| + d, \quad \min(y) = -|a| + d$$

برای مثال:

$$y = -2 \cos x + 3 \Rightarrow \begin{cases} \max(y) = |-2| + 3 = 5 \\ \min(y) = -|-2| + 3 = 1 \end{cases}, \quad y = 4 \sin x - 1 \Rightarrow \begin{cases} \max(y) = |4| - 1 = 3 \\ \min(y) = -|4| - 1 = -5 \end{cases}$$

بدست آوردن پارامترهای a, b, c

در تابع $y = a \cos bx + c$ و $y = a \sin(bx) + c$ وقتی نمودار آن داده شود.



■ موج سینوسی

در موج سینوسی همواره داریم:

$$f(t) = a \sin(bt) + c$$

$|a| = \frac{\max - \min}{2}$ $|b| = \frac{2\pi}{T}$ $c = \frac{\max + \min}{2}$

برای موج کسینوسی هم همینطور ...

جهت حرکت نمودار تابع‌های $y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$ با شرط $0 \leq c < \frac{\pi}{4}$ در شروع رسم از $x = 0$ به صورت زیر است:

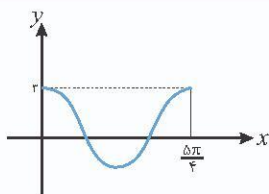
نمودار $y = a \sin(bx + c)$		نمودار $y = a \cos(bx + c) + d$	
$ab > 0$	$ab < 0$	علامت a مثبت	علامت a منفی
در شروع از $x = 0$ به بالا می‌رود. [شبهه $y = \sin x$]	در شروع از $x = 0$ به پایین می‌رود. [شبهه $y = -\sin x$]	در شروع از $x = 0$ به پایین می‌رود. [شبهه $y = \cos x$]	در شروع از $x = 0$ به بالا می‌رود. [شبهه $y = -\cos x$]

در حالت کلی نکات زیر را به خاطر بسپارید:

نکته: در تابع $y = a \sin bx + c$ اگر a و b هم‌علامت باشند آن‌گاه با شروع از $x = 0$ ، نمودار به صورت $\cup$ می‌شود (یعنی نمودار در ابتدا صعودی است). اما اگر a و b غیر هم‌علامت باشند، آن‌گاه با شروع از $x = 0$ نمودار به صورت $\cap$ در می‌آید (یعنی نمودار در ابتدا نزولی است).

نکته: در تابع $y = a \cos bx + c$ اگر a مثبت باشد آن‌گاه با شروع از $x = 0$ ، نمودار به صورت $\cap$ می‌شود (یعنی نمودار در ابتدا نزولی است). اما اگر a منفی باشد، آن‌گاه با شروع از $x = 0$ نمودار به صورت $\cup$ در می‌آید (یعنی نمودار در ابتدا صعودی است). حتماً توجه دارید که چون $\cos(-a) = \cos a$ پس علامت b تأثیری روی نمودار ندارد.

■ مثال



اگر قسمتی از نمودار تابع $y = b \cos ax$ به صورت روبرو باشد، حاصل $\frac{b}{a}$ را بدست آورید.

حل: دوره تناوب $y = b \cos ax$ برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ می‌باشد. با توجه به نمودار داده شده، دوره تناوب $y = b \cos ax$ برابر $\frac{2\pi}{5}$ است، بنابراین:

$$\frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{5} \Rightarrow |a| = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{5}{2}$$

تابع از نقطه $(0, 3)$ می‌گذرد، بنابراین داریم:

$$f(0) = 3 \Rightarrow 3 = b \cos 0 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{3}{\pm \frac{5}{2}} = \pm \frac{6}{5}$$



تانژانت در دایره مثلثاتی



غیر از این که حاصل $\tan \alpha$ می شود $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ، می خواهیم جا و علامت تانژانت و نحوه ی مشخص کردن آن را در دایره ی مثلثاتی، به طور مستقل بررسی کنیم:

	محور تانژانت و جهت آن خطی را در سمت راست دایره ی مثلثاتی، بر این دایره مماس می کنیم؛ این خط با جهت مثبت رو به بالا، محور تانژانت خواهد بود.	
	مبدأ محور تانژانت نقطه ی A است؛ جایی که محور تانژانت و کسینوس برخورد دارند. بالای A، تانژانت مثبت و پایین هم تانژانت منفی است؛	مبدأ محور تانژانت و علامت آن
	مبدأ برای تانژانت نقطه ی A است. اگر انتهای کمانی OM باشد، OM را امتداد دهید تا محور تانژانت را قطع کند. وقتی نقطه ی برخورد روی محور تانژانت مشخص شد، مثل N، از A تا N می شود تانژانت آن زاویه، البته با لحاظ کردن علامت..... تانژانت در ناحیه های اول و سوم مثبت و در ناحیه های دوم و چهارم منفی است: $\tan \beta < 0, \tan \alpha > 0$	چگونگی مشخص کردن تانژانت یک زاویه روی محور آن (دید هندسی تانژانت)

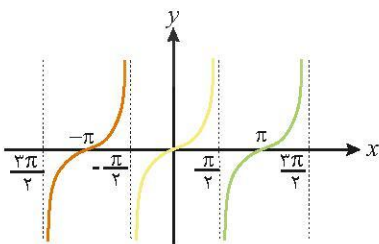
نقاطی که تانژانت تعریف نشده دارد



در دور اول دایره مثلثاتی، انتهای کمان زاویه های $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ روی محور y هاست که موازی با محور تانژانت است و این یعنی انتهای کمان آن ها محور تانژانت را قطع نمی کند؛ پس تانژانت این دو زاویه و هر زاویه ای که پس از دور زدن در دایره ی مثلثاتی، روی این ها بیفتد، تعریف نشده است.

نکته: در حالت کلی: $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \tan \alpha$ تعریف نشده $(k \in \mathbb{Z})$

نکته: نمودار تابع $y = \tan x$ به صورت مقابل است. با توجه به نمودار:





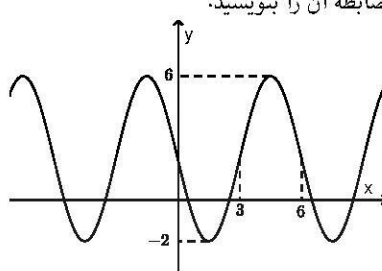
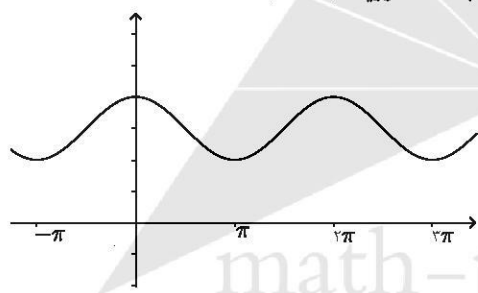
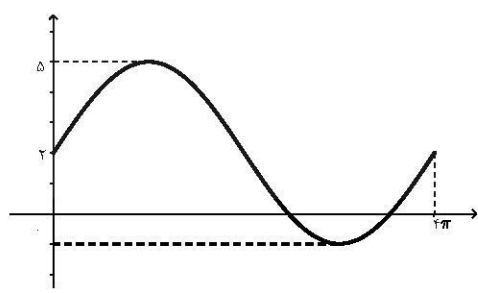
- ۱) نمودار تابع تانژانت در بازه‌های $\dots, \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \dots$ تکرار می‌شود. از آن جایی که طول هر یک از این بازه‌ها برابر π است پس $y = \tan x$ تابعی متناوب با دوره تناوب $T = \pi$ است.
- ۲) این تابع در هر یک از بازه‌های $\dots, \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \dots$ اکیداً صعودی است؛ اما در کل $\mathbb{R}$ تابعی غیریکنوا است.
- ۳) این تابع محور x ها را در $x = k\pi$ که $k \in \mathbb{Z}$ قطع می‌کند. (یعنی در این نقاط مقدار تابع برابر صفر است)
- ۴) دامنه تابع برابر $\mathbb{R} - \left\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ و برد آن $\mathbb{R}$ است.
- ۵) در حالت کلی، دوره تناوب تابع $y = \tan ax$ از رابطه $T = \frac{\pi}{|a|}$ به دست می‌آید.

سوالات نهایی



ردیف	سوال	بازم	تاریخ
۸۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $y = \tan x$ در مجموعه $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{2}\right\} - [0, 2\pi]$ ، اکیداً صعودی است.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۸۸	نمودار داده شده در شکل مقابل مربوط به تابع با ضابطه $y = a \cos(bx) + c$ است. اگر $b < 0$ باشد، مقادیر a ، b و c را بدست آورید. (راه حل نوشته شود)	۱/۵	شهریور ۱۴۰۳
۸۹	نمودار داده شده در شکل زیر مربوط به تابع با ضابطه $y = a \sin bx + c$ است. با فرض $a > 0$ ، مقادیر a ، b و c را به دست آورید.		خرداد ۱۴۰۳
۹۰	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید. الف) دوره تناوب تابع $y = 5 \cos \frac{x}{4} + 1$ برابر با 4π است. ب) تابع تانژانت در بازه $(-\pi, \pi)$ ، تابع صعودی است.	۰/۵	دی ۱۴۰۳



دی ۱۴۰۲	۱/۲۵	۹۱ نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $y = a \sin(bx) + c$ است. با توجه به نمودار، ضابطه آن را بنویسید. 	
شهریور ۱۴۰۲	۱/۵	۹۲ ضابطه تابعی به صورت $y = a \cos bx + c$ را بنویسید که دوره تناوب آن ۲، مقدار ماکزیم آن ۳ و مقدار مینیم آن -۱ باشد.	
خرداد ۱۴۰۲	۰/۵	۹۳ جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. الف) اگر دوره تناوب تابع $y = \sin bx$ برابر $\frac{\pi}{3}$ باشد. مقدار b برابر است. ب) دامنه تابع $y = \tan(3x)$ برابر است.	
دی ۱۴۰۱	۰/۵	۹۴ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. دوره تناوب و مقدار ماکزیم تابع $f(x) = 3 \sin 2x$ به ترتیب برابر و است.	
دی ۱۴۰۱	۱	۹۵ نمودار تابع $f(x) = a + \cos bx$ به صورت زیر است. حاصل $a + b$ را به دست آورید. ($b > 0$) 	
شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵	۹۶ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. تابع تانژانت در هر بازه‌ای که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.	
شهریور ۱۴۰۱	۱/۵	۹۷ نمودار داده شده مربوط به تابعی با ضابطه $y = a \sin bx + c$ است. مقادیر a و b و c را محاسبه کنید و ضابطه آن را مشخص نمایید. 	



۹۸	جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. الف) دوره تناوب تابع $y = 7\sin\left(-\frac{\pi}{4}x\right) + 2$ برابر است.	۰/۵	خرداد ۱۴۰۱
۹۹	ضابطه تابعی به فرم $y = a\cos bx + c$ را بنویسید که دوره تناوب آن ۲ و مقدار ماکزیم آن ۴ و مقدار مینیم آن -۲ باشد.	۱/۵	دی ۱۴۰۰
۱۰۰	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. در بازه $0 < \theta < 2\pi$ مقدار $\tan \theta$ از مقدار $\sin \theta$ کوچکتر است.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۰
۱۰۱	جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. دوره تناوب تابع تانژانت برابر می باشد.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۰
۱۰۲	دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیم تابع $y = 9 - 2\pi \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ را محاسبه کنید.	۱/۵	شهریور ۱۴۰۰
۱۰۳	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. برد تابع تانژانت $y = \tan x$ برابر است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۰
۱۰۴	ضابطه تابع مثلثاتی سینوسی با دوره تناوب ۳ و مقادیر ماکزیم ۵ و مینیم ۳ بنویسید.	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۰
۱۰۵	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. دامنه تابع با ضابطه $y = \tan x$ به صورت $\{x \in R x \neq \dots\}$ است.	۰/۲۵	دی ۹۹
۱۰۶	در شکل زیر، با تعیین مقادیر ماکزیم و مینیم تابع، ضابطه‌ی آن را بنویسید.	۱/۲۵	دی ۹۹
۱۰۷	دوره تناوب و مقادیر ماکزیم تابع $y = \sqrt{5} - \pi \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ را محاسبه کنید.	۱	شهریور ۹۹
۱۰۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. مقدار تابع سینوس در $x = \frac{\pi}{4}$ تعریف نشده است.	۰/۲۵	شهریور ۹۹



۱۰۹	معادله منحنی زیر را به صورت $y = a \cos(bx)$ یا $y = a \sin(bx)$ بیان کنید.	۱	خرداد ۹۹ خ	
۱۱۰	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) دوره تناوب و مقدار مینیم تابع $y = 2 \sin \frac{\pi}{4} x - 1$ به ترتیب برابر و است. ب) دوره تناوب اصلی تابع $y = \tan x$ برابر است.	۰/۷۵	خرداد ۹۹ خ	
۱۱۱	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب را بنویسید. دوره تناوب تابع $y = 8 \cos\left(\frac{x}{8}\right)$ برابر با است.	۰/۲۵	خرداد ۹۹ خ	
۱۱۲	مقدار ماکزیم و مینیم تابع $y = 1 + 2 \sin 7x$ را بدست آورید.	۱	خرداد ۹۹ خ	
۱۱۳	ضابطه تابع به صورت $y = a \sin bx + c$ را بنویسید که دوره تناوب آن π ، مقدار ماکزیم آن ۶ و مقدار مینیم آن -۲ باشد.	۱/۵	دی ۹۸	
۱۱۴	دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیم تابع $y = -3 \cos(\pi x) + 1$ را مشخص کنید.	۱/۵	شهریور ۹۸	
۱۱۵	کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟ الف) تابع تانژانت در بازه $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ اکیدا صعودی است. ب) نقاطی به فرم $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ که در آن $k \in \mathbb{Z}$ در دامنه‌ی تابع تانژانت قرار دارند.	۰/۵	شهریور ۹۸	
۱۱۶	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. دوره تناوب تابع $y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x)$ برابر با است.	۰/۲۵	تیر ۹۸	
۱۱۷	مقدار ماکزیم و مینیم تابع $y = 1 - 2 \sin(3x)$ را بدست آورید.	۰/۵	تیر ۹۸	
۱۱۸	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. دوره تناوب تابع $y = 3 \cos\left(-\frac{\pi x}{4}\right)$ برابر با است.	۰/۲۵	خرداد ۹۸	



۱۱۹	درست یا نادرست بودن جمله‌ی زیر را مشخص کنید. نقاطی به فرم $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ که در آن $k \in Z$ در دامنه‌ی تابع تانژانت قرار ندارند.	۰/۲۵	خرداد ۹۸
۱۲۰	درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید. الف) مینیمم تابع $y = -3\cos(\pi x) + 2$ برابر یک است. ب) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.	۰/۵	دی ۹۷
۱۲۱	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. دوره‌ی تناوب تابع تانژانت برابر با است.	۰/۲۵	دی ۹۷
۱۲۲	ضابطه‌ی تابعی به فرم $y = a \sin bx + c$ را بنویسید که دوره‌ی تناوب آن π ، مقدار ماکزیمم آن ۳ و مقدار مینیمم آن -۳ باشد.	۱	دی ۹۷

یادداشت ضروری دانش آموز:



درس

۲

معادلات مثلثاتی

خلاصه درسنامه

معادلات مثلثاتی



به معادله‌ای که در آن نسبت مثلثاتی داشته باشیم معادله مثلثاتی گفته می‌شود. ساده‌ترین معادلات مثلثاتی، چهار معادله زیر هستند که به بررسی جواب‌های آن‌ها می‌پردازیم:

- ۱ $\sin x = k \quad (-1 \leq k \leq 1)$
- ۲ $\cos x = k \quad (-1 \leq k \leq 1)$
- ۳ $\tan x = k \quad (k \text{ هر مقدار حقیقی می‌تواند باشد})$
- ۴ $\cot x = k \quad (k \text{ هر عدد حقیقی می‌تواند باشد})$

برای حل این نوع معادلات دو روش ۱ هندسی (رسم نمودار) و ۲ استفاده از دایره مثلثاتی وجود دارد.

تذکره. از روش هندسی، بیشتر برای پیدا کردن تعداد جواب‌های معادله استفاده می‌کنیم.

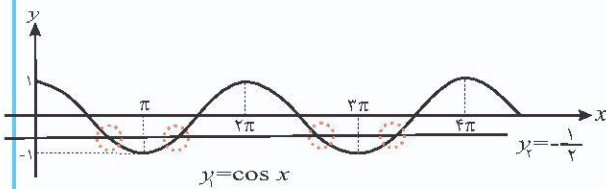


مثال

معادله $2 \cos x + 1 = 0$ چند جواب در بازه $[0, 4\pi]$ دارد؟

پاسخ: با استفاده از روش هندسی تعداد جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم، برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم. معادله را به صورت $\cos x = k$ تبدیل می‌کنیم:

$$2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \underbrace{\cos x}_{y_1} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{y_2}$$



حال نمودارهای y_1 و y_2 را رسم می‌کنیم و تعداد نقاط تلاقی این

نمودار در بازه $[0, 4\pi]$ را پیدا می‌کنیم: $y_1 = \cos x, y_2 = -\frac{1}{2}$

نقاط نقاط برخورد y_1 و y_2 ، ۴ تا است؛ پس معادله $2 \cos x + 1 = 0$

در بازه $[0, 4\pi]$ ، ۴ جواب دارد.

از روش دایره مثلثاتی زمانی استفاده می‌کنیم که به مقدار جواب‌ها نیاز داریم. در این روش روی دایره مثلثاتی کمان‌هایی را پیدا می‌کنیم که نسبت مثلثاتی آن، برابر با عدد (k) باشد.



معادلات	دایره مثلثاتی	جواب کلی	مثال
$\sin x = k$ $-1 \leq k \leq 1$		k ابتدا زاویه‌ای را پیدا می‌کنیم که سینوس آن برابر α است، مانند $\sin \alpha = k$	$\sin x = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}}$ $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \xrightarrow{\alpha = -\frac{\pi}{6}}$ $\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$
$\cos x = k$ $-1 \leq k \leq 1$		زاویه‌ای که کسینوس آن k است را پیدا می‌کنیم $\cos \alpha = k$	$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ $\cos x = \cos \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{6}}$ $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$
$\tan x = k$ k دلخواه است.		α ای را می‌یابیم که در آن $\tan \alpha = k$ باشد. $\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$	$\tan x = -\sqrt{3} \xrightarrow{\tan(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}}$ $\tan x = \tan \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{3}}$ $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$
$\cot x = k$ k دلخواه است.		زاویه‌ای مانند α را طوری پیدا می‌کنیم که $\cot \alpha = k$	$\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\cot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$ $\cot x = \cot \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{3}}$ $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$

math-pilevar.ir

■ حالت‌های خاص

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$		$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	
$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$		$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$	
$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$		$\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi$	



روش های حل معادله های مثلثاتی

اصلی ترین روش های موجود برای حل یک معادله ی مثلثاتی را به صورت زیر دسته بندی می کنیم؛ (u و v عبارت هایی برحسب x هستند).

حالت	فرم معادله	روش حل معادله
۱	$\sin u = \sin v$ $\cos u = \cos v$	با این که v خودش مجهول است، اما فرم کلی جواب ها را می نویسیم، انگار که v معلوم است! بعد با حل معادله ای برحسب x ، آن را پیدا می کنیم.
۲	$\sin u = \cos v$	با متمم کردن یکی از کمان ها، مثل حالت بالا می شود! $\sin u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ یا $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos v$
۳	$a \sin^2 u + b \sin u + c = 0$ $a \cos^2 u + b \cos u + c = 0$	با روش Δ یا تجزیه، نسبت مثلثاتی را در می آوریم و بعد هم فرم کلی جواب ها و ... انگار در ابتدا داریم: $aA^2 + bA + c = 0$

مثال

جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x = \cos x$ را بدست آورید.

$$\cos 3x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \\ 3x = 2k\pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

اجتماع جواب های به دست آمده برابر $x = \frac{k\pi}{2}$ است.

مثال

جواب کلی معادله $\sin 2x = \cos x$ را بدست آورید.

حل) می توانیم با استفاده از تساوی $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ سمت راست معادله را به سینوس تبدیل کنیم:

$$\sin 2x = \cos x \Rightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ 2x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

حل معادلات مثلثاتی با ظاهر درجه دوم

برای حل معادلات مثلثاتی با ظاهر درجه دوم، با دو حالت کلی زیر مواجه می شویم:

- اگر نسبت های مثلثاتی یکسان باشند، می توانیم با استفاده از اتحاد های جبری، معادله را به صورت ضرب چند عامل بنویسیم.
- اگر در معادله، هم سینوس و هم کسینوس وجود داشته باشد، ابتدا عبارت را برحسب نسبت مثلثاتی یکسان می نویسیم و سپس آن را تجزیه می کنیم.

چیزی که در معادله ی مثلثاتی می بینید	کاری که باید انجام بدهید...
$\sin^2 u$ به همراه $\cos^2 u$ $\sin u$ به همراه $\cos^2 u$	با اتحاد مثلثاتی $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ ، نسبت مثلثاتی توان دو را هم جنس دیگری کنید.
$\cos 2u$ در کنار $\sin u$ $\cos 2u$ در کنار $\cos u$	با اتحاد $\cos 2u = 1 - 2\sin^2 u$ ، تمامی نسبت های مثلثاتی موجود می شوند $\sin u$. با اتحاد $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$ ، تمامی نسبت های مثلثاتی موجود می شوند $\cos u$.
$\sin 2u$ در کنار $\cos u$ یا $\sin u$	$2\sin u \cos u = \sin 2u$ یا $\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u$



مثال

برای حل معادله مثلثاتی $\cos 2x + \sin x = -2$ با استفاده از رابطه $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ معادله را برحسب $\sin x$ می‌نویسیم:

$$(1 - 2\sin^2 x) + \sin x = -2 \Rightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 3 = 0 \xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

مثال

برای حل معادله مثلثاتی $\sin 2x - 2\cos x = 0$ از رابطه $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ استفاده می‌کنیم:

$$2\sin x \cos x - 2\cos x = 0 \Rightarrow 2\cos x(\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۱۲۳	معادله مثلثاتی $\tan 5x = \tan x$ را حل کنید. سپس جواب‌هایی از آن را که در بازه $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ قرار دارند، مشخص کنید.	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۱۲۴	معادله $\sin 2x = \sin x$ را حل کنید.	۱	خرداد ۱۴۰۳
۱۲۵	نشان دهید در شکل زیر رابطه بین زاویه β و x به صورت زیر است. $\tan \beta = \frac{5x}{x^2 + 6}$	۱	خرداد ۱۴۰۳
۱۲۶	معادله مثلثاتی $\sqrt{3}\tan 3x - 1 = 0$ را حل کنید.	۱/۲۵	دی ۱۴۰۲
۱۲۷	جواب‌های معادله مثلثاتی $4\sin x + 2\sqrt{3} = 0$ را در بازه $[0, 2\pi]$ به دست آورید.	۱/۵	شهریور ۱۴۰۲
۱۲۸	معادله $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ را حل کنید.	۱	خرداد ۱۴۰۲

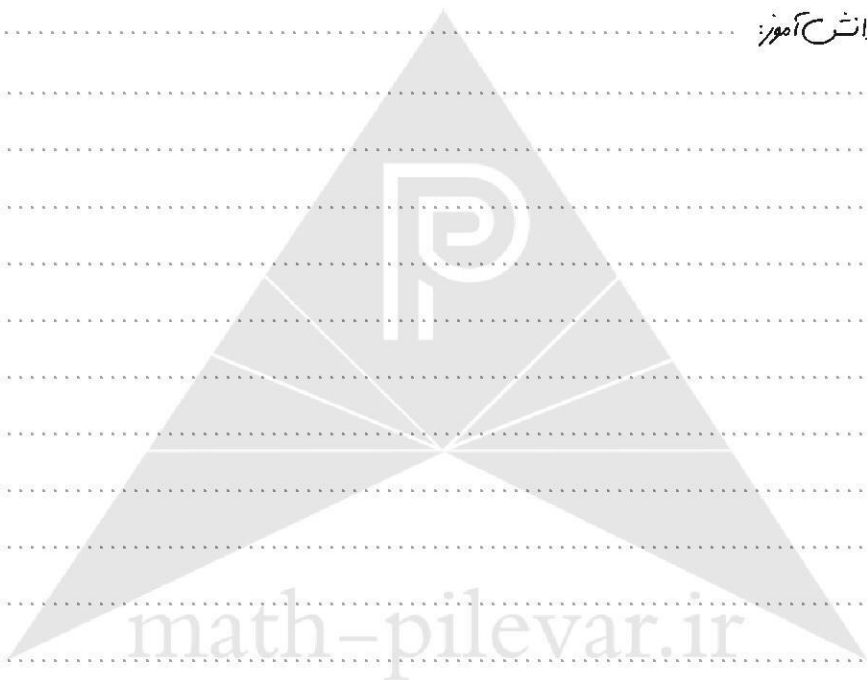


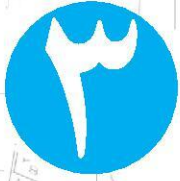
دی ۱۴۰۱	۱/۵	معادله مثلثاتی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را در بازه $0 \leq x \leq \pi$ حل کنید.	۱۲۹
شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵	معادله مثلثاتی $2 \cos^2 x + \cos x = 0$ را حل کنید.	۱۳۰
خرداد ۱۴۰۱	۱/۵	معادله مثلثاتی $\sin 2x - \cos x = 0$ را حل کنید.	۱۳۱
دی ۱۴۰۰	۱/۵	معادله $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.	۱۳۲
شهریور ۱۴۰۰	۱	معادله $2 \sin x \cos x + 3 \cos x = 0$ را حل کنید.	۱۳۳
خرداد ۱۴۰۰	۱	معادله مثلثاتی $2 \cos^2 x = \sin x - 1$ را حل کنید.	۱۳۴
دی ۹۹	۱/۵	معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کنید.	۱۳۵
شهریور ۹۹	۱/۷۵	معادله مثلثاتی $\cos 3x - \cos x = 0$ را حل کنید.	۱۳۶
خرداد ۹۹	۱	مثلی با مساحت $8\sqrt{2}$ سانتی متر مربع است. اگر اندازه‌ی هر ضلع آن ۴ و ۸ سانتی متر باشد، آنگاه چند مثلث با این خاصیت وجود دارد؟	۱۳۷
خرداد ۹۹	۱	معادله مثلثاتی مقابل را حل کنید. $2 \sin^2 x + 9 \cos x + 3 = 0$	۱۳۸
خرداد ۹۹	۱/۵	معادله $2 \sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.	۱۳۹
دی ۹۸	۱/۵	معادله‌ی $2 \cos 3x - \sqrt{3} = 0$ را حل کنید.	۱۴۰



شهریور ۹۸	۱	معادله $\sin(3x) = \sin 2x$ را حل کنید.	۱۴۱
تیر ۹۸	۱/۲۵	معادله $\sin 2x - \cos x = 0$ را حل کنید.	۱۴۲
خرداد ۹۸	۱/۵	معادله $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.	۱۴۳
دی ۹۷	۱/۲۵	معادله مثلثاتی $\cos 3x - \cos x = 0$ را حل کنید.	۱۴۴

بدراشت ضروری دانش آموز:





حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت ۴۴



درس

۲ و ۱

حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

خلاصه درسنامه

حد بی نهایت



تعریف $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$: یعنی می‌توانیم $f(x)$ را هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبت بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم. (فرض می‌کنیم f در هر دو طرف a تعریف شده باشد)

تعریف $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$: یعنی می‌توانیم $f(x)$ را هر قدر بخواهیم از هر عدد منفی کوچک‌تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم. (فرض می‌کنیم f در هر دو طرف a تعریف شده باشد)

حد بی نهایت در نمودار توابع مختلف ممکن است به یکی از صورت‌های زیر می‌باشد:

حدهای نامتناهی دو طرف هم‌سایگی هم‌علامت‌اند.		حد چپ و راست هم‌علامت نیستند.	
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

$$\frac{\text{عدد حقیقی غیر صفر}}{\text{صفر}} = \infty$$

چه حدهایی نامتناهی می‌شوند؟



تذکر: وقتی می‌گوییم مخرج صفر شود، منظورمان صفر حدی است، یعنی مخرج دقیقاً خود صفر نمی‌شود بلکه حد صفر دارد ...



نکته: وقتی با کسری مواجه شده‌اید که صورتش صفر نیست و مخرجش صفر است، جواب حد را ∞ بنویسید، اما یادتان باشد، مرحله‌ی مهم بعدی پیدا کردن علامت ∞ است؛ علامت ∞ بستگی به علامت صورت و مخرج دارد. از آن‌جا که صورت کسر، عددی حقیقی و معلوم است در نتیجه علامتش هم مشخص است؛ اما برای مخرج معمولاً نیاز به تعیین علامت دارید، به خصوص وقتی که x در هم‌سایگی یک طرفه‌ی a قرار گرفته باشد، یعنی $x \rightarrow a^+$

برای مثال اگر در محاسبه حد به حالت $\frac{\text{عدد حقیقی غیر صفر}}{\text{صفر}} = \infty$ رسیدید، بلافاصله مخرج را تعیین علامت کنید...

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 1}{x - 3} \xrightarrow{x=3} \frac{9-1}{3-3} = \frac{8}{0} = \infty \xrightarrow{\text{تعیین علامت مخرج}} \begin{array}{c|c} x & 3 \\ \hline x-3 & - \quad + \\ \hline x \rightarrow 3 & \end{array} \xrightarrow{\text{مخرج منفی بوده صورت مثبت است}} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 1}{x - 3} = \frac{+8}{0^-} = -\infty$$

■ وضعیت کلی حدهای نامتناهی



$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$	$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$	$\frac{\text{عدد غیر صفر}}{\text{صفر}} = \infty$
$\frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$	$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$	

مثال

حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^2 - 4x - 5}{x^2 - x - 6}$ کدام است؟

پاسخ:

تعیین علامت $x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2, 3$

مخرج مثبت بوده $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^2 - 4x - 5}{x^2 - x - 6} = \frac{+1}{0^+} = +\infty$

اگر مخرج کسری که بعد از عددگذاری به فرم $\frac{\text{عدد غیر صفر}}{\text{صفر}}$ درآمد، عبارت مثلثاتی بود، برای تعیین علامت مخرج، ببینید با میل کردن x به a از سمت داده شده، عبارت مخرج در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی واقع می‌شود و حدوداً چقدر می‌شود...

مثال

حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \frac{1 - \cos x}{\cos x}$ کدام است؟

پاسخ:

تعیین علامت مخرج $\cos x \rightarrow 0^-$ در ناحیه سوم منفی است

تعیین ناحیه $\cos x$ در دایره‌ی مثلثاتی $x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-$ از $\frac{3\pi}{2}$ کمی کم کن!

$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \frac{1 - \cos x}{\cos x} = \frac{+1}{0^-} = -\infty$

مجانِب قائم



تعریف **مجانِب قائم:** خط $x = a$ مجانب قائم نمودار تابع f است، اگر حداقل یکی از دو حد $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ یا $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ نامتناهی شود. به عبارت ساده‌تر هرگاه حداقل یکی از موارد زیر برقرار باشد، می‌گوییم $x = a$ مجانب قائم تابع است.

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

نکته: فقط توابعی که شامل کسری یا لگاریتم هستند، می‌توانند مجانب قائم داشته باشند. (البته توابعی مثل $\tan x$ و $\cot x$ را نیز می‌توان به صورت کسری نوشت.)



روش به دست آوردن مجانب قائم کسری



در توابع کسری معمولاً ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم. ریشه‌های مخرج مانند $x = a$ را به دست می‌آوریم. سپس حد تابع را وقتی $x \rightarrow a$ پیدا می‌کنیم. اگر حاصل حد نامتناهی ($+\infty$ یا $-\infty$) شد، $x = a$ را مجانب قائم معرفی می‌کنیم.

نکته: اگر $x = a$ ریشه مخرج یک تابع کسری باشد برای داشتن مجانب قائم به موارد زیر توجه کنید:

- ۱) حداقل باید یکی از همسایگی‌های چپ یا راست $x = a$ در دامنه تابع، تعریف شده باشد.
- ۲) $x = a$ یا ریشه صورت نباشد یا اگر ریشه صورت باشد، باید بعد از رفع ابهام $\frac{0}{0}$ حاصل حد نامتناهی ($+\infty$ یا $-\infty$) شود.
- ۳) از سمتی که x را به a میل می‌دهیم، صورت یا مخرج کسر، صفر مطلق نباشد (صفر مطلق معمولاً در برکت‌ها رخ می‌دهد).

نکته: منحنی یک تابع می‌تواند بی‌شمار مجانب قائم داشته باشد. مانند $f(x) = \tan x$.

نکته: توابعی که بردشان بین دو عدد محدود است (برد کراندار) مجانب قائم ندارند. مانند $\sin u$, $\cos u$ و ...

مثال

$$y = \frac{5x^2 + 4x - 9}{x^2 - 2x + 1}$$

مجانب‌های قائم تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

ریشه مخرج $x = 1$ است و دامنه تابع $R - \{1\}$ می‌باشد، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + 4x - 9}{x^2 - 2x + 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(5x+9)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x+9}{x-1} = \frac{14}{0^\pm} = \pm\infty \Rightarrow x = 1 \text{ مجانب قائم است.}$$

مثال

$$y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$$

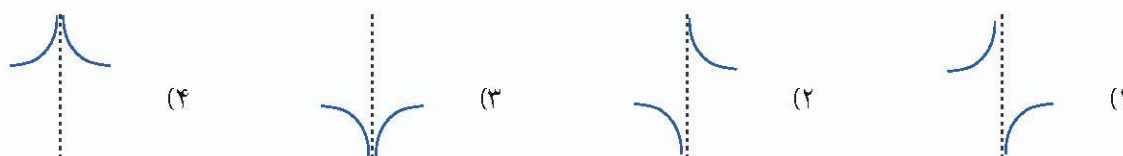
مجانب‌های قائم تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

ریشه مخرج $x = 2$ و دامنه تابع $R - \{2\}$ می‌باشد، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)} = -1 \neq \pm\infty \Rightarrow x = 2 \text{ مجانب قائم نیست.}$$

مثال

نمودار تابع $f(x) = \frac{\sin^4 x}{x^2 - x}$ در همسایگی مجانب قائم خود به کدام صورت است؟



پاسخ: مخرج کسر دارای دو ریشه $x = 0$ و $x = 1$ می‌باشد. حد تابع را در این نقاط به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{x^2 - x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{x(x-1)} \stackrel{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x-1} = -4 \neq \pm\infty \Rightarrow x = 0 \text{ مجانب قائم نیست.}$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^4 x}{x(x-1)} = \frac{\sin^4}{0^+} = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin^4 x}{x(x-1)} = \frac{\sin^4}{0^-} = +\infty$$

توجه داشته باشید که $\frac{3\pi}{2} < \frac{4}{\pi} < \pi$ است. پس انتهای کمان $\sin^4$ در ناحیه سوم دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد که در آن سینوس منفی است. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

حد در بی نهایت



معنای حد تابع، وقتی حد در بی نهایت مطرح است: اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ شود، معنایش این است که وقتی x را بسیار بزرگ کنید (طوری که از هر عدد قابل تصویری که در ذهن بیاید هم بیشتر باشد)، آن وقت $f(x)$ به عدد ℓ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. هم چنین $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ، یعنی $f(x)$ می‌تواند به هر اندازه‌ی دلخواهی به عدد ℓ نزدیک شود، مشروط به این که قدرمطلق x به اندازه‌ی کافی بزرگ انتخاب شود ولی خود x منفی باشد ... اما ممکن است حد تابع در بی نهایت، نامتناهی شود؛ این طوری: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ معنای این جمله هم این است که اگر x را بزرگ و بزرگ‌تر کنیم، $f(x)$ بسیار بزرگ می‌شود و از هر چه فکرش را هم نکنیم، بیشتر می‌شود. و به همین ترتیب برای بقیه‌ها نیز می‌توان مدلسازی کرد.

پیدا کردن حد تابع وقتی $x \rightarrow \pm\infty$

مهمترین ابزار ما برای محاسبه‌ی حد در بی نهایت، این است: $r > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{k}{x^r} = 0$

برای مثال اگر x با هر توان گویا و مثبتی در مخرج باشد و صورت کسر هم عددی حقیقی باشد، حد این تابع در ∞ می‌شود صفر ...

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x^2} = 0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x} = 0$$

درس ۱ و ۲

حد

روش تستی پیدا کردن حد در بی نهایت، هم‌ارزی پرتوان



اگر در یک چندجمله‌ای، x^m دارای بیشترین توان باشد، در این صورت x^m را پرتوان آن چندجمله‌ای می‌گوییم و در شرایطی که $x \rightarrow \pm\infty$ ، می‌توانیم به جای کل آن، تنها جمله‌ی پرتوان را با ضریب خودش نگه داریم و مابقی را نادیده بگیریم.

برای مثال:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} ax^n \quad (n \in \mathbb{N}, a \neq 0)$$

نکته: روش بسیار سریع بالا در واقع می‌گوید، وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ یک چندجمله‌ای، معادل است با جمله‌ی پرتوان خودش، از بقیه جملات صرف نظر می‌کنیم. بنابراین به آن هم‌ارزی پرتوان می‌گوییم؛

مثال

حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + x^2 + 1}{x^3 + x - 1}$ را بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + x^2 + 1}{x^3 + x - 1} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی پرتوان}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3}{x^3} = -2$$



نکته: وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ ، هم‌ارزی پرتوان را برای عبارت جبری در این موارد می‌توانید استفاده کنید: وقتی چندجمله‌ای، در موقعیت توان قرار گرفته باشد یا پایه یا پایه‌ی توان بوده یا زیر رادیکال یا داخل قدرمطلق حضور داشته باشد...

برای مثال:

$$\textcircled{۱} \quad 3x^2 + x \sim 3x^2 \quad \textcircled{۲} \quad (x^2 + x)^3 \sim (x^2)^3 \quad \textcircled{۳} \quad \sqrt[3]{x^2 + x} \sim \sqrt[3]{x^2} \quad \textcircled{۴} \quad |x^2 + x| \sim |x^2|$$

عملیات توانی روی ∞ : $(n \in \mathbb{N}) \quad (+\infty)^n = +\infty, \quad (-\infty)^{2n} = +\infty, \quad (-\infty)^{2n+1} = -\infty$

عدد غیرصفر ضربدر بی‌نهایت، می‌شود بی‌نهایت.



برای مثال:

$$\textcircled{۱} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + x - 1) \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2) = -2(-\infty)^2 = -2(+\infty) = -\infty$$

$$\textcircled{۲} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = -2(-\infty) = +\infty$$

حد بی‌نهایت برای تابع گویا



براساس هم‌ارزی پرتوان، یک نتیجه‌ی بسیار مهم درباره‌ی کسرهایی که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای است. برای $x \rightarrow \pm\infty$ به دست می‌آید:

مثال	حاصل حد	شرط	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x + 5} = -\infty$	$+\infty$ یا $-\infty$	$n > m$: درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج بیشتر است:	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots}$ $(m, n \in \mathbb{N}, a, a' \neq 0)$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x - 1}{x^2 + 2x - 7} = \frac{3}{1} = 3$	$\frac{a}{a'}$	$n = m$: درجه‌ی صورت و مخرج مساوی است:	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5}{x^2 + 6x - 1} = 0$	صفر	$n < m$: درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج کمتر است:	

نکته:

- ۱) اگر جواب حد تابعی گویا در حالت $x \rightarrow \pm\infty$ ، عددی غیر صفر شده بود، نتیجه بگیرید که: درجه‌ی صورت = درجه‌ی مخرج
- ۲) اگر جواب حد تابعی گویا در حالت $x \rightarrow \pm\infty$ ، صفر شده بود، نتیجه بگیرید که: درجه‌ی صورت < درجه‌ی مخرج
- ۳) اگر جواب حد تابعی گویا در حالت $x \rightarrow \pm\infty$ ، $+\infty$ یا $-\infty$ شده بود، نتیجه بگیرید که: درجه‌ی صورت > درجه‌ی مخرج

عملیات با ∞



این هم کارهایی که با ∞ می‌توان انجام داد؛ برای مرور:

$$\textcircled{۱} \quad \infty \pm \text{عدد} = \infty$$

$$\textcircled{۲} \quad \infty \times \text{عدد غیر صفر} = \infty$$

$$\textcircled{۳} \quad \frac{\infty}{\infty} = 0 \text{ و } \frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$$



مثال: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$

مثال: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$

④ $0 = -\infty = (\text{عدد بزرگتر از } 1)^{-\infty} = (\text{عدد بین صفر و یک})^{+\infty}$

⑤ $+\infty = +\infty = (\text{عدد بزرگتر از } 1)^{+\infty} = (\text{عدد بین صفر و یک})^{-\infty}$

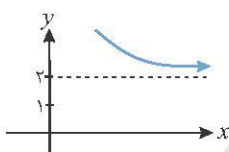
مجانِب افقی



حد متناهی در بی نهایت: زمانی که تابع در $+\infty$ (یا $-\infty$) حد متناهی ℓ داشته باشد؛ تابع در سمت راست محور x ها (یا سمت چپ آن) به خط افقی $y = \ell$ نزدیک و نزدیکتر می شود. خط افقی $y = \ell$ را به فرم خط چین نشان می دهیم، مگر آن که $\ell = 0$ شود و خط مورد نظر محور x ها باشد!

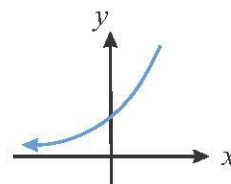
الف

$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \text{پرتوان}$



ب

$f(x) = 3^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$



تعریف **مجانِب افقی:** خط $y = b$ را **مجانِب افقی** منحنی $y = f(x)$ می گوئیم، هرگاه داشته باشیم: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ یا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$

روش به دست آوردن مجانب افقی: به دست آوردن **مجانِب افقی** $y = f(x)$ بسیار ساده است، زیرا **مجانِب افقی** همان محاسبه حد در بی نهایت است، یعنی فقط لازم است $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ را به دست آوریم که معمولاً از هم ارزی پرتوان، رادیکالی و دیگر مواردی که در قسمت حد در بی نهایت آموختید استفاده می شود.

نکته:

① توابعی که دامنه محدود دارند (دامنه کراندار) **مجانِب افقی** ندارند. برای مثال $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ **مجانِب افقی** ندارد.

② می دانیم توابع متناوب غیر ثابت در بی نهایت حد ندارند، در نتیجه این توابع **مجانِب افقی** ندارند.

③ منحنی یک تابع حداکثر دو **مجانِب افقی** دارد.

④ منحنی یک تابع ممکن است **مجانِب افقی** خود را در یک یا چند یا بی شمار نقطه قطع کند.

مثال

$y = \frac{x^3 + 2x}{4x^2 - 7x}$

مجانِب افقی تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

حل: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 2x}{4x^2 - 7x} \xrightarrow{\text{هم ارزی پرتوان}} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{4} = \pm\infty \Rightarrow$ **مجانِب افقی** ندارد.

مثال

$f(x) = \frac{3x+2}{1-2x}$

مجانِب افقی تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x+2}{1-2x} \xrightarrow{\text{پرتوان}} -\frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$ **مجانِب افقی** تابع است.



شکل تابع در اطراف مجانب افقی

مثال

شکل تابع $f(x) = \frac{2x^2 + x}{x^2 + 4}$ را در اطراف مجانب افقی اش (که $y = 2$ است) پیدا کنید.

$$\begin{array}{r} 2x^2 + x \quad | \quad x^2 + 4 \\ -2x^2 - 8 \quad | \quad 2 \\ \hline x - 8 \end{array}$$

پاسخ: روش اول: صورت را به مخرج تقسیم می‌کنیم:

نکته: اگر $\frac{A}{B} = q + \frac{r}{B}$ آن‌گاه: $\frac{A}{B} = q + \frac{r}{B}$

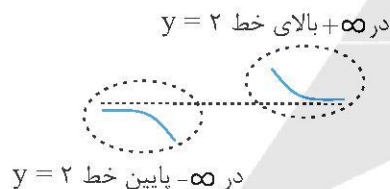
پس اینجا ضابطه به صورت مقابل درمی‌آید: $f(x) = 2 + \frac{x-8}{x^2+4}$

حد تابع در $+\infty$ و $-\infty$ به ضرایب پرتوان صورت و مخرج بستگی دارد پس:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{x-8}{x^2+4} = 2 + \frac{x}{x^2} = 2 + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{+\infty} = 2 + 0^+ = 2^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{x-8}{x^2+4} = 2 + \frac{x}{x^2} = 2 + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{-\infty} = 2 + 0^- = 2^-$$

پس در $+\infty$ باید بالای خط $y = 2$ و در $-\infty$ پایین خط $y = 2$ باشد:



روش دوم: می‌دانیم حدمان ۲ است، فقط 2^+ یا 2^- بودنش را نمی‌دانیم.

$$\frac{2x^2 + x}{x^2 + 4} = \frac{20100}{10004} \xrightarrow{\text{از ۲ بیشتره}} 2^+$$

$$\frac{2x^2 + x}{x^2 + 4} = \frac{19900}{10004} \xrightarrow{\text{از ۲ کم‌تره}} 2^-$$

برای $+\infty$, $x = 100$ را قرار می‌دهیم:

برای $-\infty$, $x = -100$ را قرار می‌دهیم:

ادامه حل مثل راه اول است.

مثال

شکل تابع $f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 1}{x^2 - 2x - 1}$ در اطراف مجانب افقی اش به کدام صورت است؟



$$\begin{array}{r} 3x^2 - 6x + 1 \quad | \quad x^2 - 2x - 1 \\ -3x^2 + 6x + 3 \quad | \quad 4 \\ \hline 4 \end{array} \Rightarrow f(x) = 3 + \frac{4}{x^2 - 2x - 1}$$

پاسخ: صورت را به مخرج تقسیم می‌کنیم:



مجاانب افقی که $y = 3$ است. الان باید معلوم کنیم حد f در $\pm\infty$ ، 3^+ می شود یا 3^- :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \frac{4}{x^2 - 2x - 1} = 3 + \frac{4}{x^2} = 3 + \frac{4}{+\infty} = 3 + 0^+ = 3^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \frac{4}{x^2 - 2x - 1} = 3 + \frac{4}{x^2} = 3 + \frac{4}{+\infty} = 3 + 0^+ = 3^+$$

پس در هر دو شاخه 3^+ است و در هر دو سمت باید بالای مجانب افقی باشد:



حد نامتناهی در بی نهایت



تعریف $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: اگر $f(x)$ در یک بازه $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد و با رفتن x به سمت $+\infty$ ، نیز $f(x)$ به سمت $+\infty$ برود،

می‌گوییم حد این تابع در $+\infty$ برابر $+\infty$ است و می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

تعریف بالا را برای $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ نیز می‌توان نوشت.

حدود نامتناهی در بی نهایت: حدودی مانند $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$ را حدود نامتناهی در بی نهایت می‌نامیم.

■ قضیه: اگر a عددی مثبت و n عددی طبیعی باشد، آنگاه:

۱ $\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = +\infty$

۲ $\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ زوج} \\ -\infty & n \text{ فرد} \end{cases}$

شکل‌ها تقریبی‌اند!...

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

سوالات نهایی

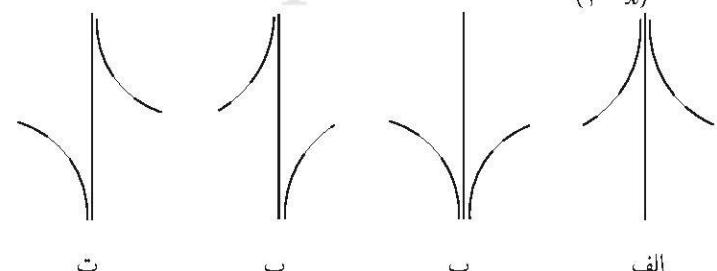


ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۱۴۵	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x+1}{\tan x}$ برابر است.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۱۴۶	حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{(x-3)^2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4x^2}{-x^3 x - 2}$	۱	شهریور ۱۴۰۳

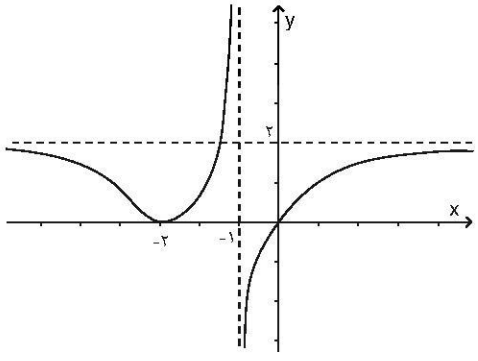
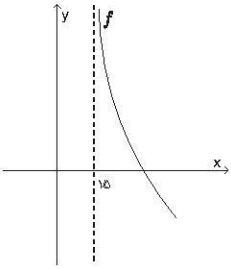


۱۴۷	مجانِب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ را در صورت وجود بدست آورید. سپس وضعیت نمودار تابع f را در همسایگی $x=3$ نمایش دهید.	۱/۷۵	شهریور ۱۴۰۳
۱۴۸	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$ برابر است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۱۴۹	حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[2x] - 1}{x - 1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x}{1 - x^2}$ پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 2x + 1)$	۱/۵	خرداد ۱۴۰۳
۱۵۰	مجانِب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x^3+2x}$ را به دست آورده و سپس وضعیت نمودار تابع را در نزدیکی مجانب قائم آن نمایش دهید.	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۱۵۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. حاصل حد $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1}{\sin x}$ برابر با $-\infty$ است.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۲
۱۵۲	حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید. الف) $\lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 10x + 25}$ ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4 - x + x^2}{5 - 2x^2}$	۱/۲۵	دی ۱۴۰۲
۱۵۳	مجانِب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{x^2-1}{4-3x-x^2}$ را در صورت وجود بیابید.	۱/۵	دی ۱۴۰۲
۱۵۴	حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید. الف) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x] - 1}{(x-1)^2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x - 1}{2 + x - x^4}$	۱/۵	شهریور ۱۴۰۳
۱۵۵	مجانِب قائم منحنی تابع $f(x) = \frac{1}{x- x }$ را به دست آورید.	۱	شهریور ۱۴۰۳

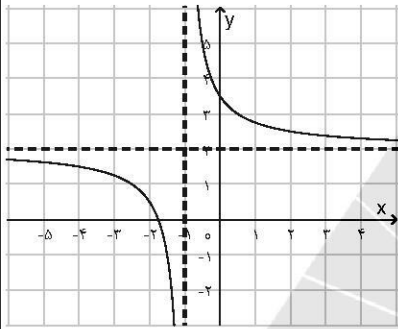
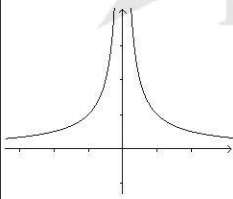


۱۴۰۲ شهریور	۰/۵	جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. مجاانب‌های افقی تابع $y = \frac{ x +1}{2x-1}$ برابر و است.	۱۵۶
۱۴۰۲ خرداد	۰/۵	اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx^2+x}{2x^2+3} = 7$ آنگاه m برابر عدد است.	۱۵۷
۱۴۰۲ خرداد	۱/۲۵	حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید. (الف) $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{5x}{ 2x-1 }$ (ب) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x+3}{x^2+6x+9}$	۱۵۸
۱۴۰۲ خرداد	۰/۷۵	مجاانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{3x-5}{x^2+2}$ را در صورت وجود بیابید.	۱۵۹
۱۴۰۱ دی	۰/۲۵	جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x+1}{\tan x} \right)$ برابر است.	۱۶۰
۱۴۰۱ دی	۱/۵	(الف) اگر $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(ax-3)}{(2-x)^3} = +\infty$ باشد، حدود a را تعیین کنید. (ب) مجاانب افقی تابع $f(x) = \frac{(x-4x^3)}{(x^3+5)}$ را به دست آورید.	۱۶۱
۱۴۰۱ تیر	۱/۲۵	کدام شکل وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{2[x]}{(4-x)}$ ، در نزدیکی مجاانب قائم آن است؟ دلیل خود را بنویسید. 	۱۶۲
۱۴۰۱ شهریور	۱/۵	حدود زیر را بیابید. (الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]-2}{x-2}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{2}{\tan x}$ (پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2+2x+1}{4x-1}$	۱۶۳

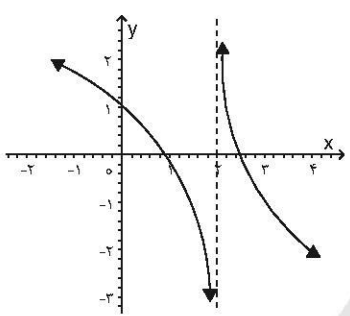
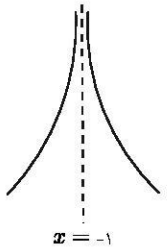


شماره ۱۴۰۱	۱	۱۶۴ با توجه به نمودار تابع f، موارد زیر را به دست آورید.  الف) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ ب) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \end{cases}$	۱۶۴
شماره ۱۴۰۱	۰/۵	۱۶۵ اگر خط $y = 2$ مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{ax^2 + 1}{2x^2 - 3x}$ باشد، مقدار a را بیابید.	۱۶۵
شماره ۱۴۰۱	۱	۱۶۶ حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید. الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)^2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - x^3}{2x - 1}$	۱۶۶
شماره ۱۴۰۱	۱/۵	۱۶۷ مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2 + x}$ را در صورت وجود بیابید.	۱۶۷
شماره ۱۴۰۰	۰/۵	۱۶۸ جای خالی را با کلمه مناسب کامل کنید. با توجه به نمودار تابع f، حاصل $\lim_{x \rightarrow (1.5)^+} f(x)$ برابر با است. 	۱۶۸
شماره ۱۴۰۰	۱/۵	۱۶۹ مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$ را در صورت وجود بیابید.	۱۶۹



۱۴۰۰ دی	۱	حدهای زیر را در صورت وجود بیابید. الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{[x] - 2}{ 3x - 1 }$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x+2}{5-x} - \frac{8}{x} \right)$	۱۷۰
۱۴۰۰ شهریور	۱	حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 5x + [-x]}{2x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{5 - x}$	۱۷۱
۱۴۰۰ شهریور	۱	اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{(a+1)x+7}{2x+b}$ به صورت مقابل باشد، آنگاه مقدار $a+b$ را پیدا کنید. 	۱۷۲
۱۴۰۰ شهریور	۱	مجاانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $y = \frac{(x+1)}{(x^2+3)}$ را در صورت وجود بیابید.	۱۷۳
۱۴۰۰ خرداد	۰/۲۵	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. با توجه به شکل مقابل حد تابع $f(x) = \frac{1}{ x }$ در نقطه $x = 0$ برابر است با 	۱۷۴
۱۴۰۰ خرداد	۱	حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{ x-2 }$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{\frac{4}{x} - 2}$	۱۷۵
۱۴۰۰ خرداد	۱/۲۵	مجاانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $y = \frac{(1+2x^2)}{(x^2-1)}$ را در صورت وجود بیابید.	۱۷۶

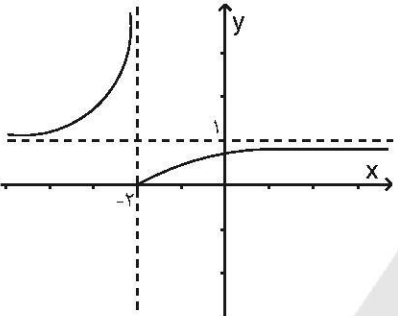


دی ۹۹	۱	حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{[x] + 1}{x + 1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - x^3}{3x^2 + 2}$	۱۷۷
دی ۹۹	۱/۵	مجانباتهای قائم و افقی نمودار تابع $f(x) = \frac{(4x^2 + 1)}{(2x^2 + x)}$ را در صورت وجود بیابید.	۱۷۸
دی ۹۹	۰/۵	در نمودار تابع $f(x)$ موارد زیر را مشخص کنید.  الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = ?$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = ?$	۱۷۹
شهریور ۹۹	۱/۵	حدود زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x + 1}{\tan x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 + 1}$	۱۸۰
شهریور ۹۹	۲	مجانباتهای قائم و افقی نمودار تابع $y = \frac{(1 + 2x^2)}{(1 - x^2)}$ را در صورت وجود به دست آورید.	۱۸۱
شهریور ۹۹	۱	نمودار تابع $f(x) = \frac{(x + 1)}{(x^2 + x)}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می باشد؟	۱۸۲
شهریور ۹۹	۱	اگر رفتار تابع $f(x) = \frac{(x + 3)}{(x^2 + bx + c)}$ در اطراف نقطه‌ی $x = -1$ به صورت شکل زیر باشد، مقادیر b و c را بدست آورید. 	۱۸۳



۱۸۴	نمودار تابع f به صورت مقابل است.	۱/۲۵	خرداد ۹۹ خ
	الف) حدود زیر را محاسبه کنید.		
	ب) نمودار تابع $y = \frac{-2x}{f(x)}$ در اطراف نقطه‌ی $x = a$ چگونه است؟	الف) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{-2x}{f(x)}$ ب) $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{-2x}{f(x)}$	
۱۸۵	حدهای زیر را بدست آورید.	۱	خرداد ۹۹ خ
		الف) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 2}{3 - x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2x^2}{4x^3 + 2x - 1}$	
۱۸۶	نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که تمامی شرایط زیر را دارا باشد.	۱/۲۵	خرداد ۹۹ خ
	الف) $f(1) = f(-2) = 0$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ پ) خط $y = -1$ مجانب افقی آن باشد.		
۱۸۷	مجانب‌های افقی و قائم تابع زیر را بدست آورید.	۱/۵	خرداد ۹۹ خ
		$y = \frac{(2x+5)}{(x -1)}$	
۱۸۸	حدود زیر را محاسبه کنید.	۲	خرداد ۹۹
		الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x^2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1}$	
۱۸۹	مجانب قائم و افقی نمودار تابع $y = \frac{x}{x^2 - 4}$ را در صورت وجود بدست آورید.	۲	خرداد ۹۹
۱۹۰	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x - 5x^4)$ برابر با است.	۰/۵	دی ۹۸



دی ۹۸	۱/۵	۱۹۱ حاصل حدهای زیر را بدست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 2}{3 - x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x - 1}{x - 5} - \frac{2}{x} \right)$	
دی ۹۸	۱	۱۹۲ مجانب قائم و افقی نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - x}$ را بنویسید.	
شهریور ۹۸	۰/۵	۱۹۳ با توجه به نمودار تابع f که در شکل زیر آورده شده است. به سؤالات زیر پاسخ دهید.  الف) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) =$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$	
شهریور ۹۸	۱/۷۵	۱۹۴ حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1)$ پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{2x^3 - 4x}$	
شهریور ۹۸	۰/۷۵	۱۹۵ مجانب قائم و افقی نمودار تابع $y = \frac{x + 3}{2 - x}$ را بنویسید.	
تیر ۹۸	۱/۲۵	۱۹۶ حدود زیر را بدست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 2x - 1}{-2x^3 + 4}$	
تیر ۹۸	۱/۲۵	۱۹۷ مجانبهای افقی و قائم تابع $f(x) = \frac{1 + 2x^2}{1 - x^2}$ را بیابید.	
خرداد ۹۸	۰/۲۵	۱۹۸ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x + 1}{9 - x^2}$ برابر با $-\infty$ است.	



۹۸ خرداد	۰/۲۵	۱۹۹ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. حاصل حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{x-2}$ برابر با است.
۹۸ خرداد	۰/۵	۲۰۰ با توجه به نمودار تابع f که در زیر آمده است. معادلات مجانب‌های افقی تابع را بنویسید.
۹۸ خرداد	۱/۵	۲۰۱ کدام یک از خطوط $x = 3$ و $x = -1$ مجانب قائم $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ می‌باشد؟ دلیل پاسخ خود را بنویسید.
۹۷ دی	۱/۵	۲۰۲ حدود زیر را بدست آورید. الف $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+1}{4-x^2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5 + 3x^3 + 1}{-3x^5 + 3x^3 + 3}$
۹۷ دی	۱/۵	۲۰۳ مجانب قائم و افقی تابع $y = \frac{3x}{x^3 - 1}$ را بیابید.

یادداشت ضروری دانش‌آموز: math-pilevar.ir



مشتق

۶۱		آشنایی با مفهوم مشتق
۶۷		مشتق پذیری و پیوستگی
۸۵		آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر



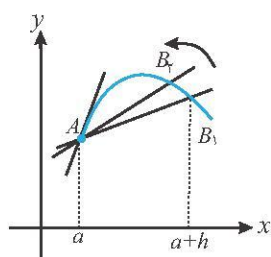
درس

۱

آشنایی با مفهوم مشتق

خلاصه درسنامه

مفهوم خط مماس:

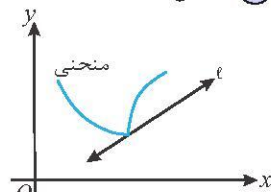
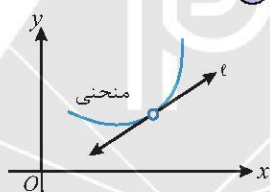


خطی که از نقطه A روی منحنی و نقطه دیگری مانند B_1 می‌گذرد را در نظر بگیرید، به این خط، خط قاطع می‌گوییم. حال روی منحنی نقطه‌های دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A انتخاب می‌کنیم و خط‌های قاطع گذرنده از A و آن نقطه‌ها را رسم می‌کنیم. وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می‌شوند، خط‌های قاطع نیز به خط مماس نزدیک می‌شوند.

خطی را که به دست آمده، خط مماس بر منحنی f می‌گوییم، مگر این که:

۲ آن نقطه، عضو دامنه‌ی f نباشد.

۱ منحنی در نقطه‌ی مورد نظر، تیز شده باشد.



انواع خط مماس

شکل نمونه	وضعیت هندسی خط مماس	مقدار شیب	انواع مماس	
	خط مماس، موازی محور x هاست.	صفر	مماس افقی	۱
	خط مماس، موازی محور y هاست.	تعریف نشده	مماس قائم	۲
	خط مماس، نه موازی محور x هاست و نه موازی محور y ها.	عددی غیر صفر	مماس مایل	۳

نکته: اگر مماس بر منحنی در یک نقطه، قائم و افقی نباشد، مقدار شیب، مثبت یا منفی خواهد بود.



از نظر کشیدن خط مماس	از نظر شکل خط مماس	شیب مماس...	
	اگر خودتان را سمت چپ و روی خط تصور کنید مسیر حرکت شما بر بالایی است.	مثبت است	۱
	اگر خودتان را سمت چپ و روی خط تصور کنید مسیر حرکت شما سرازیری است.	منفی است	۲

تعریف مشتق در نقطه مشتق تابع پیوسته $y = f(x)$ را در نقطه‌ای $x = a$ با نماد $f'(a)$ نشان داده و به یکی از فرم‌های زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف مشتق	
$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ یا $f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$	۱
$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$	۲

مثال

اگر $f(x) = x^2 - 3x + 2$ باشد، حاصل $f'(2)$ را به کمک تعریف مشتق به دست آورید.

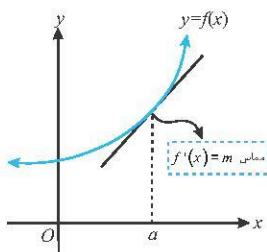
پاسخ: روش اول:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)} = 1$$

روش دوم:

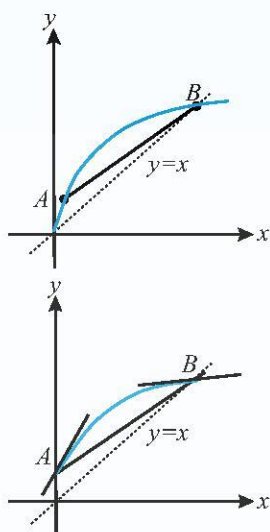
$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \Rightarrow f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 3(2+h) + 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + h^2 + 4h - 6 - 3h + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+1)}{h} = 1 \end{aligned}$$

ارتباط مشتق با خط مماس



معنای $f'(a)$ ، همان شیب خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ است در نقطه‌ای به طول a . اگر مشتق تابعی را در نقطه‌ای $x = a$ حساب کنید، انگار شیب خط مماس بر نمودار تابع را در آن نقطه به دست آورده‌اید.

مثال



نمودار $y = f(x)$ به صورت مقابل است. اگر شیب نمودار در نقطه A و B را با m_A و m_B و شیب خط AB را با m_{AB} نشان دهیم، کدام یک از نامساوی‌های زیر درست است؟

$$m_B > m_A > 1(2)$$

$$m_A > 1 > m_B(1)$$

$$m_{AB} > m_B > 1(4)$$

$$m_B > 1 > m_{AB}(3)$$

پاسخ می‌دانیم شیب خط $y = x$ برابر یک است. حال اگر خط مماس بر منحنی را در نقاط A و B رسم کنیم، از روی نمودار معلوم می‌شود که شیب در نقطه A از ۱ بیشتر است و شیب خط AB و شیب خط مماس در نقطه B هر دو از ۱ کمترند. از طرفی شیب خط AB تندتر از شیب نمودار در نقطه B می‌باشد. پس نتیجه می‌گیریم: $m_A > 1 > m_{AB} > m_B$. بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

نوشتن معادله‌ی خط مماس

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ی $x = a$ می‌شود:

مثال

معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^3 + 1$ را در نقطه $x = 1$ بنویسید.

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^3 + 1 = 2 \Rightarrow A(1, 2) \quad \text{نقطه تماس}$$

$$\text{شیب} = m = f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

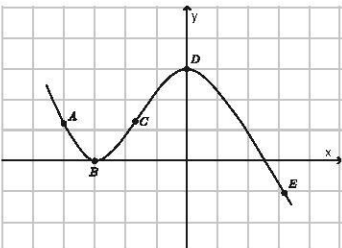
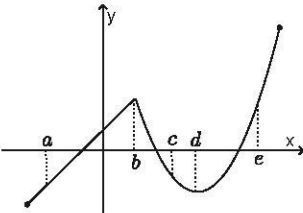
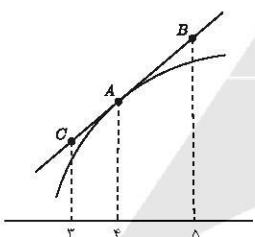
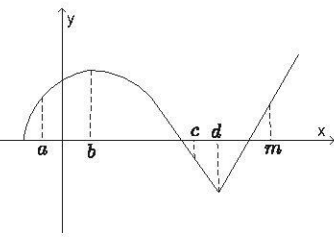
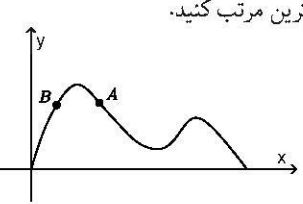
$$m = 3, A(1, 2) \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 1 \quad \text{معادله خط مماس}$$

سوالات نهایی

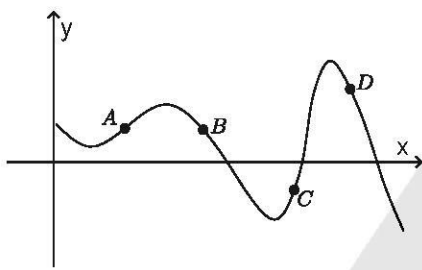
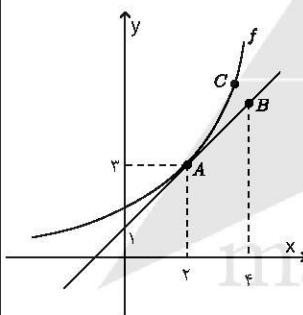
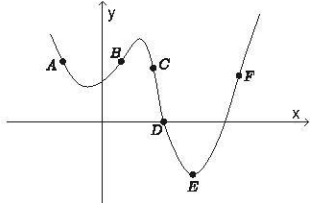


ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۲۰۴	اگر $f(2) = 7$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{2x - 4}$ باشد، مشتق تابع $g(x) = xf(x)$ را در $x = 2$ به دست آورید.	۱	شهریور ۱۴۰۳

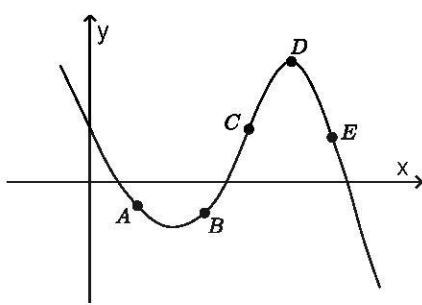
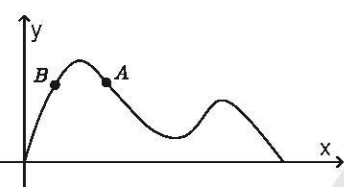
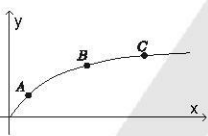
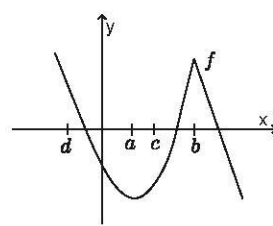


۲۰۵	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. اگر $f'(4) = 2$ و $f(4) = -1$ ، خط مماس بر نمودار f در $x = 4$ ، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض قطع می‌کند.	۰/۲۵	۱۴۰۳ خرداد
۲۰۶	با توجه به نمودار تابع مقابل: (الف) در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع منفی است؟ (ب) در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع برابر صفر است؟ (پ) در بین نقاط داده شده کدام نقطه بیشترین شیب را دارد؟ (ت) شیب نقاط A و D را با هم مقایسه نمایید.		۱ ۱۴۰۲ شهریور
۲۰۷	با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل مقابل از بین نقاط مشخص شده مطلوب است طول نقطه‌ای که: (الف) تابع در آن مشتق‌پذیر نیست. (ب) مماس در آن موازی محور طول‌هاست. (پ) مشتق و مقدار تابع در آن مثبت است.		۰/۷۵ ۱۴۰۱ شهریور
۲۰۸	برای تابع f در شکل زیر داریم: $f(4) = 25$ و $f'(4) = 15$. با توجه به شکل مختصات نقاط B و C را بیابید.		۱ ۱۴۰۰ دی
۲۰۹	با توجه به نمودار f به سوالات زیر پاسخ دهید. (الف) طول نقطه‌ای که مشتق در آن صفر است را بنویسید. (ب) طول نقطه «گوشه‌ای» را بنویسید. (پ) طول نقطه‌ای که در آن مقدار تابع و شیب خط هر دو منفی است، را بنویسید.		۰/۷۵ ۱۴۰۰ خرداد
۲۱۰	در نمودار $y = f(x)$ شیب نمودار در نقاط A و B و شیب خط AB را، از کوچکترین به بزرگترین مرتب کنید.		۱ ۹۹ دی



۲۱۱	اگر $f(x) = x^2 - 3x$ باشد، با استفاده از تعریف مشتق $f'(1)$ را حساب کنید.	۱/۲۵	شهریور ۹۹										
۲۱۲	معادله خط مماس بر منحنی $f(x) = -x^2 + 10x$ را در نقطه $A(2, f(2))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.	۱/۵	خرداد ۹۹										
۲۱۳	با استفاده از تعریف مشتق، معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ را در نقطه‌ی $x=3$ به دست آورید.	۱/۵	خرداد ۹۹ خ										
۲۱۴	با توجه به نمودار زیر جدول را کامل کنید.	۱	خرداد ۹۹ خ										
 <table border="1" data-bbox="754 781 1042 882"> <tr> <td>شیب</td> <td>-۲</td> <td>-۱</td> <td>۰/۵</td> <td>۲</td> </tr> <tr> <td>نقطه</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>				شیب	-۲	-۱	۰/۵	۲	نقطه				
شیب	-۲	-۱	۰/۵	۲									
نقطه													
۲۱۵	در شکل زیر نمودار تابع $f(x)$ و خط مماس بر منحنی آن در نقطه‌ی $x=2$ داده شده است. الف) مشتق تابع $f(x)$، در نقطه‌ی $x=2$ را بیابید. ب) معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع در نقطه‌ی A را بنویسید.	۱	دی ۹۸										
													
۲۱۶	با توجه به نمودار داده شده، گزینه‌ی مناسب را انتخاب کنید. I) در کدام نقطه، مماس افقی بر نمودار رسم می‌شود؟ الف) B ب) E II) شیب خط مماس در نقطه‌ی F چه علامتی دارد؟ الف) مثبت ب) منفی III) شیب خط مماس بر نمودار، در نقطه‌ی D نسبت به نقطه‌ی B چگونه است؟ الف) بیشتر ب) کمتر	۰/۷۵	شهریور ۹۸										
													



۲۱۷	نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب ارائه شده در جدول نظیر کنید.	۰/۷۵	۹۸										
 <table border="1" data-bbox="908 300 1059 557"> <thead> <tr> <th>شیب</th> <th>نقطه</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>۰</td> <td></td> </tr> <tr> <td>۲</td> <td></td> </tr> <tr> <td>۰/۵</td> <td></td> </tr> <tr> <td>-۰/۵</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		شیب	نقطه	۰		۲		۰/۵		-۰/۵			
شیب	نقطه												
۰													
۲													
۰/۵													
-۰/۵													
۲۱۸	اگر $f(x) = x^2 - 3x + 2$ باشد. با استفاده از تعریف $f'(1)$ را حساب کنید.	۱	۹۸										
۲۱۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را با توجه به شکل داده شده، مشخص کنید. در شکل زیر شیب خطوط مماس در نقاط A, B مثبت است.	۰/۲۵	۹۸ خرداد										
													
۲۲۰	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. با توجه به شکل روبرو، شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی بزرگتر از شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی B است.	۰/۲۵	۹۸ خرداد										
													
۲۲۱	با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) طول نقطه‌ای که مماس در آن افقی باشد. ب) طول نقطه‌ای که مشتق در آن مقداری منفی است. پ) طول نقطه‌ای که تابع در آن مشتق پذیر نیست.	۰/۷۵	دی ۹۷										
													

یادداشت ضروری دانش‌آموز:



درس

۲

مشتق پذیری و پیوستگی

خلاصه درسنامه

از آنجا که تعریف مشتق در نقطه‌ی $x = a$ ، یک حد است، ممکن است این حد موجود باشد یا نباشد! بنابراین مشتق تابع f در نقطه‌ی $x = a$ زمانی وجود دارد که f در a پیوسته بوده و حاصل $f'(a)$ هم عددی حقیقی شود؛ در این صورت می‌گوییم تابع f در نقطه‌ی $x = a$ مشتق‌پذیر است...

نکته: تابعی که در یک نقطه ناپیوسته است، در آن نقطه مشتق ندارد

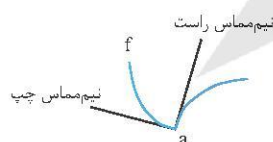
تعریف تعریف ریاضی مشتق راست و چپ

تعریف تعریف مشتق چپ و مشتق راست: مشتق چپ و راست تابع f در $x = a$ را با $f'_-(a)$ و $f'_+(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱
$$x = a \text{ در نقطه‌ی } f \text{ مشتق راست} = f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

۲
$$x = a \text{ در نقطه‌ی } f \text{ مشتق چپ} = f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تعبیر هندسی مشتق‌های چپ و راست: اگر $f'_+(a)$ موجود باشد، آنگاه منظور از $f'_+(a)$ ، شیب نیم‌مماس راست و اگر $f'_-(a)$ موجود باشد، منظور از $f'_-(a)$ شیب نیم‌مماس چپ در نقطه a می‌باشد. (نیم‌مماس راست، نیم‌خطی است که به شاخه سمت راست f در نقطه a مماس شده و نیم‌مماس چپ، نیم‌خطی است که به شاخه سمت چپ f در نقطه a مماس شده است.)



شیب نیم‌مماس راست $f'_+(a)$

شیب نیم‌مماس چپ $f'_-(a)$

نکته: شرط لازم برای مشتق راست، پیوستگی راست و شرط لازم برای مشتق چپ، پیوستگی چپ است.

برای آن که تابع پیوسته‌ی f در نقطه‌ی $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، باید مشتق راست و مشتق چپ آن عددهای حقیقی مساوی باشند؛ اگر هر کدام از مشتق‌های یک طرفه، عدد نباشد یا مساوی هم نباشند، می‌گوییم تابع f در آن نقطه مشتق ندارد یا مشتق‌ناپذیر است!

نکته: f در $x = a$ مشتق ندارد $\Rightarrow f'_-(a) = +\infty$ و $f'_+(a) = +\infty$

نتیجه‌های حاصل از ارتباط پیوستگی با مشتق‌پذیری:

- ۱ اگر تابع f در نقطه‌ی $x = a$ ناپیوسته باشد، حتماً در این نقطه مشتق‌پذیر نخواهد بود.
- ۲ اگر تابع f در نقطه‌ی $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، حتماً در این نقطه پیوسته بوده است.
- ۳ اگر تابع f در نقطه‌ی $x = a$ پیوسته باشد، نمی‌توان لزوماً نتیجه گرفت که f در این نقطه مشتق‌پذیر است!



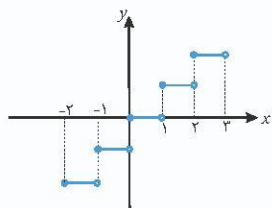
۴ اگر تابع f در نقطه‌ای $x = a$ مشتق‌پذیر نباشد، ممکن است f در آن نقطه پیوسته باشد یا نباشد!

نقاط مشتق‌ناپذیر

نقاط مشتق‌ناپذیر معمولاً در توابع ناپیوسته، گنگ، قدرمطلق، براکتی و چندضابطه‌ای وجود دارند. نقاط مشتق‌ناپذیر را به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

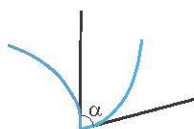
۱ نقاط ناپیوسته: تابع در نقاط ناپیوسته، مشتق‌ناپذیر است و از دید هندسی، در این نقاط نمی‌توان یک خط کامل مماس بر منحنی رسم کرد.

مثال



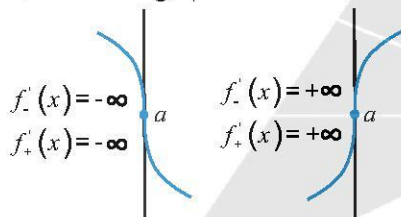
نقاط مشتق‌ناپذیر $f(x) = [x]$ را بنویسید.

پاسخ: $f(x) = [x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است و در نقاط غیر صحیح روی خط افقی $y = k$ قرار می‌گیرند که مشتق تابع در آن‌ها برابر صفر است.



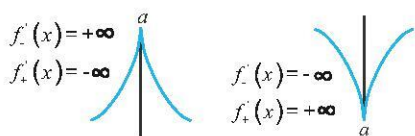
۲ نقاط گوشه‌ای (زاویه‌دار): نقاطی هستند که تابع در آن‌ها پیوسته بوده و مشتق چپ و راست در آن‌ها دو عدد حقیقی نابرابر است. از دید هندسی، در این نقاط یک نیم مماس چپ و یک نیم مماس راست بر منحنی رسم می‌شود که با هم زاویه می‌سازند. مانند شکل روبه‌رو:

تذکر: در صورتی که تابع در $x = a$ پیوسته و از مشتق‌های چپ و راست، یکی عدد و دیگری بی‌نهایت شود، باز هم تابع در آن مشتق‌ناپذیر است.



۳ نقاط با مماس قائم (نقاط عطف قائم): نقاط پیوسته‌ای هستند که مشتق‌های چپ و راست در آن‌ها بی‌نهایت‌های هم‌علامت است. از دید هندسی، در این نقاط می‌توان یک خط کامل مماس به موازات محور y ‌ها رسم کرد. نمودار عطف قائم همواره به یکی از دو حالت مقابل می‌باشد: (در درس‌های بعدی در مورد نقطه عطف خواهیم خواند).

- در نمودار سمت چپ، تابع در همسایگی a صعودی اکید است، پس $f'(a) > 0$.
- و در نمودار سمت راست، تابع در همسایگی a نزولی اکید است، پس $f'(a) < 0$ است.



۴ نقاط بازگشت: نقاط پیوسته‌ای هستند که مشتق‌های چپ و راست در آن‌ها، بی‌نهایت‌های غیرهم‌علامت است. از دید هندسی، در این نقاط یک نیم مماس به موازات محور y ‌ها بر منحنی رسم می‌شود. نمودار نقاط بازگشت همواره به یکی از دو حالت مقابل می‌باشند:

- در نمودار سمت چپ، تابع در همسایگی چپ a نزولی اکید است ($f'_-(a) < 0$) و در همسایگی راست a صعودی اکید می‌باشد ($f'_+(a) > 0$).
- در نمودار سمت راست، تابع در همسایگی چپ a صعودی اکید است ($f'_-(a) > 0$) و در همسایگی راست a نزولی اکید می‌باشد ($f'_+(a) < 0$).

مثال

مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ را در نقطه $x = 2$ بررسی کنید.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2| - 0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$$

تابع در $x = 2$ مشتق ندارد $\Rightarrow f'_+(2) \neq f'_-(2)$

مثال

مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & x \geq 1 \\ x^3 + 1 & x < 1 \end{cases}$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 4$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x-1} = 3$$

تابع در $x = 1$ مشتق ندارد $\Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1)$

قواعد مشتق گیری



نحوه مشتق گیری به فارسی	ضابطه مشتق	تابع
n بیاد پشت و یکی از توان x کم بشه ...	nx^{n-1}	x^n

هر تابعی که بتوان آن را به فرم توانی از x نوشت، با این فرمول مشتق گیری می شود؛



برای مثال:

الف) $y = x^4 \Rightarrow y' = 4x^3$

ب) $y = \frac{1}{x} \Rightarrow y = x^{-1} \Rightarrow y' = (-1)x^{-2} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\sqrt{x}$ یعنی $x^{\frac{1}{2}}$ ($x > 0$)، پس؛



$$f(x) = k \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = 0$$



مشتق عدد تنها، صفر است.

مشتق تابع خطی $y = ax + b$ می شود $y' = a$.





مشتق $\sqrt[n]{x}$

با استفاده از فرمول مشتق x^n می‌توانیم به راحتی مشتق $\sqrt{x}$ ، $\sqrt[n]{x}$ و ... را پیدا کنیم.

مثال	مشتق	تابع	
	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{x}$	دو تابع معروف
	$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$y = \sqrt[3]{x}$	
$y = \sqrt[n]{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{x}$	فرم کلی
$y = \sqrt[n]{x^m} \Rightarrow y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$	$y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$	$y = \sqrt[n]{x^m}$	

مشتق‌های مثلثاتی

۴ تا تابع مثلثاتی معروف داریم که مشتق‌هایشان را در جدول زیر می‌بینید

تابع	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
مشتق	$\cos x$	$-\sin x$	$1 + \tan^2 x$ یا $\frac{1}{\cos^2 x}$	$-(1 + \cot^2 x)$ یا $-\frac{1}{\sin^2 x}$

مشتق ضرب و تقسیم

تابع	$f(x) \times g(x)$	$\frac{f(x)}{g(x)}$
مشتق	$f'(x) \times g(x) + g'(x) \times f(x)$	$\frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$
بیان فارسی	(خود اولی $\times$ مشتق دومی) + (خود دومی $\times$ مشتق اولی)	(خود صورت $\times$ مشتق مخرج) - (خود مخرج $\times$ مشتق صورت) (مخرج) ^۲
مثال	$\underbrace{(x^2 + x)}_{\text{اولی}} \underbrace{\sqrt{x}}_{\text{دومی}} = \underbrace{(2x + 1)}_{\text{خود دومی}} \underbrace{(\sqrt{x})}_{\text{مشتق اولی}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}_{\text{مشتق دومی}} \underbrace{(x^2 + x)}_{\text{خود اولی}}$	$\left(\frac{x^2 - \sqrt{x}}{1 - 2x}\right)' = \frac{\overbrace{\left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}^{\text{مشتق صورت}} \underbrace{(1 - 2x)}_{\text{خود مخرج}} - \underbrace{(-2)}_{\text{مشتق مخرج}} \underbrace{(x^2 - \sqrt{x})}_{\text{خود صورت}}}{\underbrace{(1 - 2x)^2}_{\text{(مخرج)}^2}}$



👤 دو نتیجه مهم از فرمول مشتق تقسیم

با استفاده از رابطه $\frac{f}{g}$ می‌توانیم نشان دهیم که:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \quad y = \frac{\boxed{2}x + \boxed{1}}{\boxed{3}x + \boxed{5}} \Rightarrow y' = \frac{2 \times 5 - 1 \times 3}{(3x+5)^2} = \frac{7}{(3x+5)^2}$$

$$y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = -\frac{1}{x^2}$$

تابع	مشتق	مثال
u^n	$nu'u^{n-1}$ $n-1$ توان (پایه) $\times$ مشتق پایه $\times$ توان	$(3x-1)^7 \xrightarrow{\text{مشتق}} 7(3)(3x-1)^6$ $(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{3}{2} \left(0 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) (1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ مشتق زیر رادیکال دو برابر خود رادیکال	$\sqrt{3x+2} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$ $\sqrt{x^2+x} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$
$\sqrt[3]{u}$	$\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$	$\sqrt[3]{6x-5} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{6}{3\sqrt[3]{(6x-5)^2}}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2} = -\frac{\text{مشتق مخرج}}{(\text{مخرج})^2}$	$\frac{1}{x^2+x} \xrightarrow{\text{مشتق}} -\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$
$\sin u$	$u' \cos u$	$\sin 3x \xrightarrow{\text{مشتق}} 3 \cos 3x$
$\cos u$	$-u' \sin u$	$\cos \sqrt{x} \xrightarrow{\text{مشتق}} -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x}$
$\tan u$	$u' (1 + \tan^2 u)$ یا $\frac{u'}{\cos^2 u}$	$\tan 5x \xrightarrow{\text{مشتق}} 5(1 + \tan^2 5x)$ یا $\frac{5}{\cos^2 5x}$
$\cot u$	$-u' (1 + \cot^2 u)$ یا $-\frac{u'}{\sin^2 u}$	$\cot \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{مشتق}} -\left(-\frac{1}{x}\right) \left(1 + \cot^2 \frac{1}{x}\right)$ یا $-\frac{\left(-\frac{1}{x}\right)}{\sin^2 \frac{1}{x}}$

مشتق‌های مثلثاتی توان‌دار



برای مشتق گرفتن از عبارت‌های به شکل $\sin^n u$, $\cos^n u$, $\tan^n u$ و $\cot^n u$ ، اول آن‌ها را باید به چشم $\bigcirc^n$ ببینیم که مشتقش می‌شود:

$$n \bigcirc^{n-1} \times \underbrace{\bigcirc'}_{\text{مشتق داخل}}$$

بعدش باید $\bigcirc'$ را حساب کنید.



مثلاً برای محاسبه $\sin^3 4x$ ، اول آن را به شکل $(\sin 4x)^3$ می‌بینیم.

می‌دانیم مشتق u^3 می‌شود $3u^2 u'$ ، پس:

$$\begin{aligned} \underbrace{(\sin 4x)^3}_u &\xrightarrow{\text{مشتق}} \underbrace{3(\sin 4x)^2}_u \underbrace{(\sin 4x)'}_{u'} \\ 3(\sin 4x)^2 (\sin 4x)' &= 12 \sin^2 4x \cos 4x \end{aligned}$$

حالا برای محاسبه $(\sin 4x)'$ ، از قاعده $(\sin u)' = u' \cos u$ استفاده می‌کنیم:

■ ساده کردن قبل از مشتق‌گیری

در بعضی تابع‌ها قبل از مشتق گرفتن، بهتر است تابع را ساده‌تر کنیم، ایده‌های اصلی ساده کردن توابع را در جدول زیر می‌بینیم:

مدل تابع	ایده ساده کردن تابع	مثال
کسرهای چند طبقه!	مخرج مشترک و ساختن یک کسر	$y = \frac{1}{\frac{2}{x} + 1} = \frac{1}{\frac{x+2}{x}} = \frac{x}{x+2} \Rightarrow y' = \frac{2}{(x+2)^2}$
عبارات جبری در ضرب و تقسیم	استفاده از اتحادها	$y = (x-2)(x+2)(4+x^2) = x^6 - 16 \Rightarrow y' = 6x^5$
کسرهای رادیکال‌دار	فاکتورگیری، تجزیه و استفاده از توان کسری	$y = \frac{x^2 \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = x^{2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{13}{6}} \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = \frac{13}{6} x^{\frac{7}{6}}$
عبارات‌های مثلثاتی	استفاده از اتحادهای مثلثاتی	$y = \underbrace{\sin x \cos x \cos 2x}_{\frac{1}{2} \sin 2x} = \frac{1}{4} \sin 4x \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = \frac{1}{4} (4 \cos 4x)$

◀ مشتق‌گیری از تابع‌های قطعه‌ای (چندضابطه‌ای)

درس ۲

مشتق‌پذیری

$$y' = \begin{cases} f'(x) & x > a \\ g'(x) & x < a \end{cases}$$

پیوسته باشد، آنگاه

$$y = \begin{cases} f(x) & x \geq a \\ g(x) & x < a \end{cases}$$

اگر تابع

مثال

$$\text{تابع } f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & x \leq 2 \\ x^3 - 2 & x > 2 \end{cases} \text{ مفروض است.}$$

الف) مشتق‌پذیری f را در $x = 2$ بررسی کنید و در صورت وجود، $f'_-(2)$ و $f'_+(2)$ را تعیین نمایید.

ب) ضابطه و دامنه تابع مشتق را بنویسید.

پاسخ: الف) تابع $x = 2$ پیوسته است $(\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 6)$ ، بنابراین داریم:

$$x \rightarrow 2^- : f'(x) = (2x^2 - x)' = 4x - 1 \Rightarrow f'_-(2) = 7$$

$$x \rightarrow 2^+ : f'(x) = (x^3 - 2)' = 3x^2 \Rightarrow f'_+(2) = 12$$

چون $f'_-(2) \neq f'_+(2)$ ، پس در $x = 2$ تابع مشتق‌پذیر نیست.

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 1 & x < 2 \\ 3x^2 & x > 2 \end{cases} ; \quad D_{f'} = \mathbb{R} - \{2\}$$

ب) ضابطه و دامنه تابع مشتق برابر است با:

مثال

تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx & x < 1 \\ 2\sqrt{4x-3} & x \geq 1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=1$ مشتق‌پذیر است، مقدار b کدام است؟ پاسخ:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx & x < 1 \\ 2\sqrt{4x-3} & x \geq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط پیوستگی}} \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^3 + bx) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2\sqrt{4x-3} \xrightarrow{x=1} a+b=2 \quad *$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + b & x < 1 \\ 2 \times \frac{2}{2\sqrt{4x-3}} & x > 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط وجود مشتق}} \lim_{x \rightarrow 1^-} (3ax^2 + b) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4}{\sqrt{4x-3}}$$

$$\xrightarrow{x=1 \text{ را بنار}} 3a+b=\frac{4}{1} \Rightarrow 3a+b=4 \xrightarrow{\text{با * دستگاه بساز}} \begin{cases} a+b=2 \\ 3a+b=4 \end{cases} \xrightarrow{-} 2a=2 \Rightarrow a=1 \xrightarrow{a+b=2} b=1$$

در تابع‌های چندضابطه‌ای، نقطه‌های شکست دامنه، کاندیدای مشتق‌ناپذیری و ناپیوستگی‌اند. در مورد آن‌ها هر دو شرط را بررسی کنید.

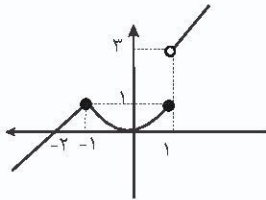
مشتق‌پذیری روی بازه

	① در تمامی نقطه‌های موجود در بازه‌ی (a, b) پیوسته است. ② در تک تک نقطه‌های این بازه هم، مشتق‌پذیر است.	مشتق‌پذیری تابع f روی بازه (a, b)	۱
	① در (a, b) مشتق‌پذیر است. ② در $x=a$ مشتق راست دارد (و البته پیوستگی راست!).	مشتق‌پذیری تابع f روی بازه‌ی $[a, b)$	۲
	① در (a, b) مشتق‌پذیر است. ② در $x=b$ مشتق چپ دارد (و البته لازم است که پیوستگی چپ هم داشته باشد...!).	مشتق‌پذیری تابع f روی بازه‌ی $(a, b]$	۳
	① در (a, b) مشتق‌پذیر است. ② در $x=a$ مشتق راست دارد (و البته پیوستگی راست!). ③ در $x=b$ مشتق چپ دارد (و البته پیوستگی چپ!).	مشتق‌پذیری تابع f روی بازه‌ی $[a, b]$	۴



مثال

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x+2 & x < -1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x+1 & x > 1 \end{cases}$ را رسم کرده سپس مشخص کنید تابع در کدامیک از بازه‌های زیر مشتق پذیر است؟



$(1, 3]$	$[1, 3]$	$[0, 2]$	$[-1, 1]$
مشتق پذیر است	مشتق ناپذیر ($x=1$ در)	مشتق ناپذیر ($x=1$ در)	مشتق پذیر
$[-3, -1)$	$[-2, -1)$	$[-2, 0]$	
مشتق پذیر	مشتق پذیر	مشتق ناپذیر ($x=1$ در)	

مشتق‌گیری از تابع مرکب



فرم کلی مشتق‌گیری از تابع مرکب: اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت: $(f \circ g)'(a) = g'(a)f'(g(a))$

مثلاً برای همان تابع‌های $g(x) = \sqrt{x}$ و $f(x) = (2x^2 - 1)$ داریم:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (4\sqrt{x}) = 2$$

مثال

اگر $f'(x) = \frac{1}{x}$ مطلوبیت محاسبه مشتق تابع $y = f(\Delta x)$: $y = f(\Delta x) \Rightarrow y' = \Delta x \times f'(\Delta x) = \Delta x \times \frac{1}{\Delta x} = \frac{1}{x}$

مثال

اگر $f(1) = 3$, $f'(1) = -2$ و $g(x) = x^3 + x$ مقدار $(g \circ f)'(1)$ را بدست آورید.

پاسخ: $(g \circ f)'(1) = f'(1)g'(f(1)) \Rightarrow (g \circ f)'(1) = -2g'(3)$

$g(x) = x^3 + x \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow g'(3) = 3(3)^2 + 1 = 28$

مشتق مرتبه‌های بالاتر، مشتق دوم



$$f \xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}} f' \xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}} f''$$

$$f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

رسیدن به مشتق دوم، اصلاً کار سختی نیست! فقط باید عملیات مشتق‌گیری را ادامه دهیم...

برای تابع مشتق‌پذیر f در نقطه‌ی $x = a$:

برای مثال: $f(x) = 5x^3 + 6x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 15x^2 + 12x \Rightarrow f''(x) = 30x + 12$

برای مثال:



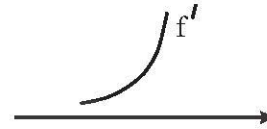
ارتباط نمودارهای f و f' با یکدیگر

نمودار f در بازه I اکیداً صعودی



$\Leftrightarrow$

نمودار f' در بازه I بالای محور x ها

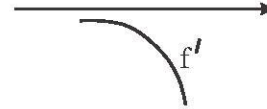


نمودار f در بازه I اکیداً نزولی



$\Leftrightarrow$

نمودار f' در بازه I زیر محور x ها



جهت تعقر f در بازه I رو به بالا



$\Leftrightarrow$

نمودار f' در بازه I اکیداً صعودی

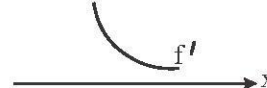


جهت تعقر f در بازه I رو به پایین

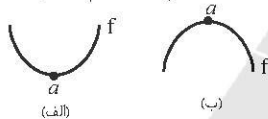


$\Leftrightarrow$

نمودار f' در بازه I اکیداً نزولی

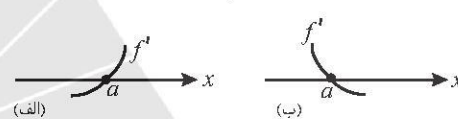


نقطه به طول a نقطه‌ی اکسترم نسبی مشتق‌پذیر f

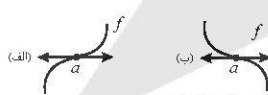


$\Leftrightarrow$

نقطه به طول a محل تلاقی نمودار f' با محور x ها

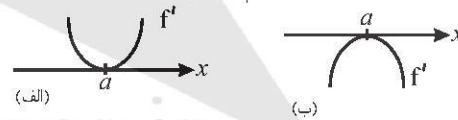


نقطه به طول a عطف افقی نمودار f

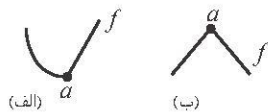


$\Leftrightarrow$

نقطه به طول a اکسترم نسبی f' روی محور x ها

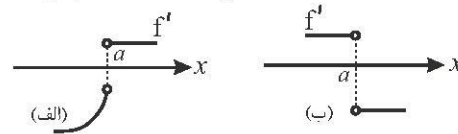


نقطه به طول a نقطه‌ی اکسترم نسبی زاویه‌دار f



$\Leftrightarrow$

f' در نقطه به طول a توخالی و از محور x ها پرش دارد



سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۲۲۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. خط $x = 2$ مماس قائم بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ در نقطه $(2, 0)$ است.	۵/۲۵	شهریور ۱۴۰۳



شهریور ۱۴۰۲	۰/۲۵	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. اگر $1 - 4x^2 + x^3 = f(x)$ باشد، حاصل $f'(-1)$ برابر است.	۲۲۳
شهریور ۱۴۰۲	۱	اگر $f(x) = x (x - 2)$ باشد. به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع f را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.	۲۲۴
شهریور ۱۴۰۲	۲/۲۵	مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^3 - 6x + 1}$ ب) $g(x) = 2 \tan x + \cos^5(2x^3)$	۲۲۵
خرداد ۱۴۰۳	۱/۵	مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نقطه $x = 0$ به کمک تعریف مشتق بررسی کنید.	۲۲۶
خرداد ۱۴۰۳	۰/۷۵	اگر $f'(1) = 5$ ، $g'(1) = 1$ و $f(1) = 1$ ، مقدار مشتق $(f+g) \circ f$ در $x = 1$ را به دست آورید.	۲۲۷
خرداد ۱۴۰۳	۲	مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = (x^3 + 1)^2(\sqrt{3x+2})$ ب) $g(x) = \sin^3 3x + \tan(x^2)$	۲۲۸
دی ۱۴۰۲	۰/۲۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابعی وجود ندارد که برای آن شرایط $f(a) = 0$ و $f'(a) = 0$ برقرار باشد.	۲۲۹
دی ۱۴۰۲	۱/۲۵	تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \leq 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. مشتق پذیری تابع را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.	۲۳۰
دی ۱۴۰۲	۲/۲۵	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = \frac{5 \tan x}{1 - \sin x}$ ب) $g(x) = \cos^5(x^2)$ پ) $h(x) = (3x + 5)^6$	۲۳۱
دی ۱۴۰۲	۱/۵	اگر $f(x) = 2x^3 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشند، حاصل $(f+g)'(4) + (f \times g)'(1)$ را به دست آورید.	۲۳۲



شماره ۱۴۰۲	۰/۲۵	۲۳۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.
شماره ۱۴۰۲	۱	۲۳۴	با استفاده از تعریف مشتق تابع، مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ را در نقطه $x=2$ بررسی نمایید.
شماره ۱۴۰۲	۲	۲۳۵	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = (x^4 + 2x)(\sqrt{x})$ ب) $g(x) = 3 \tan x - \sin^3(2x)$
شماره ۱۴۰۲	۰/۲۵	۲۳۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. تابع $f(x) = [x]$ در نقطه $x=1$ مشتق پذیر است.
شماره ۱۴۰۲	۱/۵	۲۳۷	مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 3x-4 & x < 1 \\ 2x^2-3 & x \geq 1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.
شماره ۱۴۰۲	۰/۷۵	۲۳۸	اگر $f(x) = \cos 2x$ باشد، مقدار $f''\left(\frac{\pi}{8}\right)$ را به دست آورید.
شماره ۱۴۰۲	۲	۲۳۹	مشتق توابع زیر را به دست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $f(x) = (5x^3 - x)^9(\sqrt{2x+1})$ ب) $g(x) = \frac{4 \tan x}{3x^2 - 1}$
شماره ۱۴۰۲	۱/۲۵	۲۴۰	با استفاده از تعریف مشتق نشان دهید اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $x > 0$ آنگاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
شماره ۱۴۰۱	۰/۲۵	۲۴۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر $f'(1) = 2$ و $g'(1) = -3$ باشد، حاصل $(3f+g)'(1)$ برابر ۹ است.
شماره ۱۴۰۱	۰/۲۵	۲۴۲	جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. اگر تابع f در $x=a$ پیوسته، آنگاه f در $x=a$ مشتق پذیر نیست.
شماره ۱۴۰۱	۱	۲۴۳	معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نقطه‌ای به طول $x=0$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

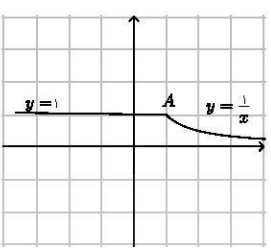


دی ۱۴۰۱	۲/۲۵	۲۴۴	مشتق توابع زیر را به دست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست).	الف) $f(x) = \sqrt{yx}(3x^2 + 2)$ ب) $g(x) = \cos^3(2x) - \frac{1}{x}$
دی ۱۴۰۱	۰/۷۵	۲۴۵	با توجه به نمودار تابع f ، نمودار f' را با ذکر دلیل مشخص کنید.	
شهریور ۱۴۰۱	۱/۵	۲۴۶	مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases}$ را در $x = 1$ بررسی کنید.	
شهریور ۱۴۰۱	۲/۷۵	۲۴۷	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)	الف) $f(x) = (4x^2 - 5x)^3(\sqrt{x} + 1)$ ب) $g(x) = \frac{9x + 1}{x - x^2}$ پ) $h(x) = \sin(3x^2)$
خرداد ۱۴۰۱	۱/۵	۲۴۸	برای تابع $f(x) = x^3 - 8$ در نقطه تقاطع آن با محور x ها معادله خط مماس را بنویسید.	
خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵	۲۴۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و در این نقطه، مشتق چپ و راست نامتناهی باشد آنگاه $f'(a)$ وجود ندارد.	
خرداد ۱۴۰۱	۱/۵	۲۵۰	مشتق پذیری تابع $f(x) = 2x - 4 $ را در $x = 2$ بررسی کنید.	
خرداد ۱۴۰۱	۲/۵	۲۵۱	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)	الف) $f(x) = (-3x^2 + x)^5(2x)$ ب) $g(x) = 5 \tan x + \sin x^2$ پ) $h(x) = \frac{2}{x}$

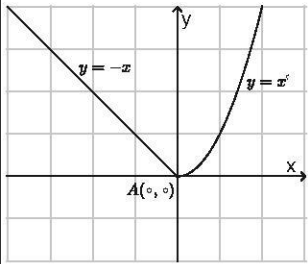


۲۵۲	جای خالی را با کلمه مناسب کامل کنید $f'(5) = -1$ و $g'(5) = 2$ در این صورت $(2f - g)'(5)$ برابر با است.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۰
۲۵۳	در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ x+2 & x \geq -1 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(-1)$ و $f'_-(-1)$ موجودند ولی $f'(-1)$ موجود نیست.	۱/۲۵	دی ۱۴۰۰
۲۵۴	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست.) الف) $f(x) = (x^2 - 6)^3 \left(\frac{1}{4}x + 1\right)$ ب) $g(x) = \sin^3(5x)$ پ) $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3 - 2x + 1}$	۲/۲۵	دی ۱۴۰۰
۲۵۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. تابع $f(x) = [x]$ در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر است.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۰
۲۵۶	جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. شیب خط مماس بر منحنی $y = 1 - 5x^2 - 2x$ در نقطه‌ای به طول ۲- واقع بر آن برابر است.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۰
۲۵۷	مشتق پذیری تابع $f(x) = 4x(1 - x)$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.	۱/۵	شهریور ۱۴۰۰
۲۵۸	مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x) = \frac{4 \sin \frac{x}{4}}{x^2 + \sqrt{x}}$ ب) $g(x) = 3x(x^2 - 6x)^3 + \cos 2x$	۲/۵	شهریور ۱۴۰۰
۲۵۹	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه f در a است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۰
۲۶۰	معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^3 - 2x$ را در نقطه $A(1, f(1))$ بدست آورید.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۰

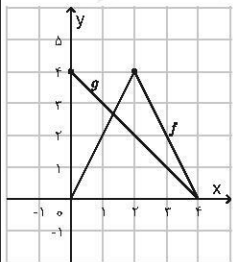


۱۴۰۰ خرداد	۱		۲۶۱	با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع رسم شده مقابل: مشتق پذیری تابع را در نقطه $A(1, 1)$ بررسی کنید.
۱۴۰۰ خرداد	۲/۵	الف) $f(x) = (\sqrt{3x} + 1)(2x^3 - 1)$ ب) $g(x) = 3\tan^2 x + \cos x^2$ پ) $h(x) = \frac{x^2 - 3x}{5x}$	۲۶۲	مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).
۹۹ دی	۰/۲۵		۲۶۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر خط $x = a$ مماس قائم بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه $(a, f(a))$ باشد آنگاه $f'(a)$ موجود است.
۹۹ دی	۱/۵		۲۶۴	مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.
۹۹ دی	۲	الف) $f(x) = (4x^3 - 7)(2x - 1)^4$ ب) $g(x) = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$	۲۶۵	مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)
۹۹ شهریور	۰/۲۵		۲۶۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. خط $x = 1$ مماس قائم منحنی $f(x) = \sqrt[3]{x}$ است.
۹۹ شهریور	۲	الف) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3 + 1)$ ب) $g(x) = (x^2 + 3x + 1)^4$ پ) $h(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{-2x + 9}$	۲۶۷	مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)
۹۹ شهریور	۱		۲۶۸	اگر $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$ مقدار $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)$ را حساب کنید.

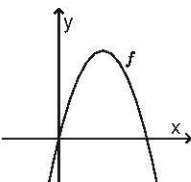
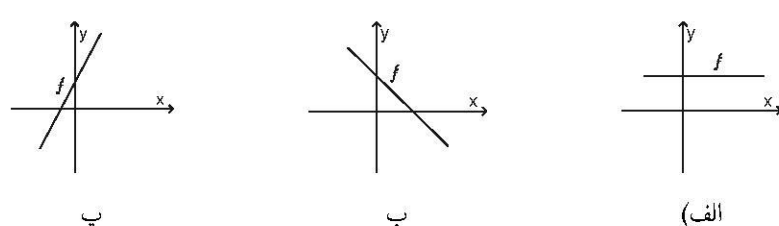
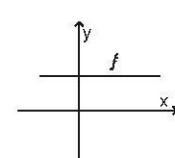
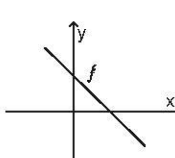
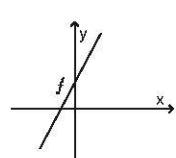


شهریور ۹۹	۲	۲۶۹	مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ را در $x = 0$ بررسی کنید.
خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵	۲۷۰	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. تابع $f(x) = x $ در نقطه‌ی $x = 0$ مشتق پذیر نیست.
خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵	۲۷۱	جای خالی را کامل کنید. خط $x = 1$ بر منحنی $f(x) = \sqrt{x-1}$ است.
خرداد ۹۹ خ	۱/۵	۲۷۲	با محاسبه مشتق چپ و راست در نقطه‌ی A نشان دهید که تابع در نقطه‌ی A مشتق پذیر نیست. 
خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵	۲۷۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد، آنگاه در این نقطه مشتق پذیر است.
خرداد ۹۹ خ	۱	۲۷۴	تابع $f(x) = \begin{cases} ax+b & x > 1 \\ x^3-2x & x \leq 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق پذیر است. حاصل a, b را به دست آورید.
خرداد ۹۹ خ	۱	۲۷۵	اگر توابع f و g مشتق پذیر باشند و $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مقادیر $(3f+2g)'(1)$ را به دست آورید.
خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵	۲۷۶	مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $f(x) = (x^2+1)^3(5x-1)$ ب) $f(x) = \frac{5 \cos x}{1 - \sin x}$
خرداد ۹۹ خ	۲	۲۷۷	مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $f(x) = 2\sqrt{x}(5x^2-3x)$ ب) $g(x) = \sin 3x + \cos^2(4x^3-2)$



۲۷۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر تابع f در $x = a$ پیوسته نباشد، آنگاه f در a مشتق پذیر هم نیست.	۰/۲۵	۹۹ خرداد
۲۷۹	مشتق پذیری تابع $f(x) = x^2 - 1 $ را در $x = 1$ بررسی کنید.	۲	۹۹ خرداد
۲۸۰	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ در این صورت $(3f + 2g)'(1)$ برابر با است.	۰/۲۵	۹۹ خرداد
۲۸۱	مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $f(x) = \frac{(x^2 - 3x + 1)}{(-3x + 2)}$ ب) $g(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 5)$ پ) $h(x) = \sin^3 x + \cos^2 x$	۳	۹۹ خرداد
۲۸۲	مشتق پذیری تابع مقابل را در نقطه‌ی $x = 1$ بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 3x + 1 & x < 1 \end{cases}$	۱/۲۵	۹۸ دی
۲۸۳	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. اگر $f'(2) = -1$ و $g'(2) = 3$ در این صورت $(2f + 3g)'(2)$ برابر با است.	۰/۵	۹۸ دی
۲۸۴	نمودار توابع f و g را در شکل مقابل در نظر بگیرید. اگر $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ باشد، $h'(1)$ را بیابید. 	۱	۹۸ دی
۲۸۵	مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $y = \frac{(2x + 3)}{(x^3 - 2x^2)}$ ب) $f(x) = \sin^3(2x + 1)$	۱/۷۵	۹۸ دی



شماره ۹۸	۲	مشتق پذیری تابع $f(x) = x^2 - 4 $ را در $x = 2$ بررسی کنید.	۲۸۶
شماره ۹۸	۲/۲۵	مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $y = (2x^3 + \sqrt[3]{x} - 1)^4$ ب) $g(x) = \cos\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)$	۲۸۷
شماره ۹۸	۰/۲۵	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. مشتق تابع $f(x) = \frac{x}{x+1}$ در نقطه‌ای به طول ۲ روی منحنی تابع، عدد است.	۲۸۸
شماره ۹۸	۰/۷۵	نشان دهید $x = 0$ مماس قائم برای تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ است.	۲۸۹
شماره ۹۸	۲	مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $y = \frac{x^2 - 1}{5x^3 - 3x + 1}$ ب) $g(x) = \sin^3(2x + 1)$	۲۹۰
شماره ۹۸	۱/۲۵	نمودار تابع زیر را رسم کرده و مشتق‌پذیری f را روی بازه‌ی $[-2, 0]$ بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & x < -1 \\ x + 1 & -1 \leq x < 2 \end{cases}$	۲۹۱
شماره ۹۸	خرداد	نمودار تابع f در شکل روبرو آمده است.  با بیان دلیل، مشخص کنید کدام یک از نمودارهای زیر، نمودار مشتق تابع f است.  الف)  ب)  پ) 	۲۹۲



۲۹۳	نشان دهید، نقطه‌ای به طول $x = -1$ ، نقطه‌ای گوشه‌ای برای تابع $f(x) = x^2 + x $ می‌باشد.	۱/۷۵	خرداد ۹۸
۲۹۴	قضیه: ثابت کنید اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه f در $x = a$ پیوسته است.	۱/۷۵	خرداد ۹۸
۲۹۵	مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $y = \frac{(x^2 - 1)}{(x^3 + 2x + 1)}$ ب) $y = \cos^3(2x)$	۱/۷۵	خرداد ۹۸
۲۹۶	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. مشتق تابع $f(x) = \sqrt{2x-1}$ در نقطه‌ای به طول یک روی منحنی تابع، عدد است.	۰/۷۵	دی ۹۷
۲۹۷	مشتق پذیری تابع $f(x) = x-2 $ را در $x = 2$ بررسی کنید.	۱	دی ۹۷
۲۹۸	اگر توابع f و g مشتق پذیر باشند و $f'(2) = 1, f(2) = 3, g'(2) = 2, g(2) = -3$ مقادیر $(f+g)'(2)$ و $(fg)'(2)$ را به دست آورید.	۱/۷۵	دی ۹۷
۲۹۹	مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $y = \frac{(x^2 + 1)}{(x^3 + 2x - 5)}$ ب) $y = \cos^2(-3x + 1)$	۲	دی ۹۷

یادداشت ضروری دانش آموز:



درس

۳

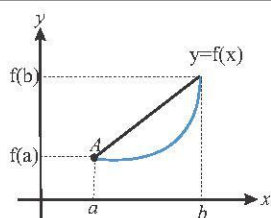
آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

خلاصه درسنامه

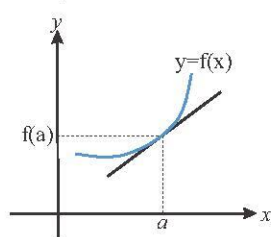
نسبت تغییرات دو کمیت را آهنگ تغییر یکی نسبت به دیگری می‌گویند. دو نوع آهنگ تغییر وجود دارد، آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر.

تعریف آهنگ متوسط تغییر: آهنگ متوسط تغییر f در فاصله $[a, b]$ را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



مفهوم هندسی آهنگ متوسط تغییر: در نمودار تابع $y = f(x)$ ، آهنگ متوسط در فاصله a تا b همان شیب خط قاطع AB است.



تعریف آهنگ لحظه‌ای (آنی) تغییر: آهنگ لحظه‌ای تغییر f نسبت به x در $x = a$ برابر است با

مشتق تابع f در $x = a$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر} = f'(a)$$

مفهوم هندسی آهنگ لحظه‌ای تغییر: از نظر هندسی شیب خط مماس بر تابع f در $x = a$ برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x = a$ می‌باشد.

نوع آهنگ	سوال	نحوی محاسبه	توضیح
آهنگ تغییر متوسط	حتماً آهنگ متوسط را در یک بازه می‌خواهند؛ مثل $[a, b]$	$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$	انتها و ابتدای بازه را به تابع بدهید و مقادیر به دست آمده را به ترتیب در صورت از هم کم کنید، در مخرج هم طول بازه را بگذارید...
آهنگ تغییر لحظه‌ای	حتماً آهنگ تغییر لحظه‌ای را در یک نقطه می‌خواهند؛ مثل $x = c$	$f'(c)$	از تابع مشتق بگیرید و بعد از ساده کردن آن، نقطه‌ی c را جای‌گذاری کنید...

مثال

یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = 2\sqrt{t} + 2t^3$ گرم است. آهنگ متوسط رشد این توده در بازه زمانی $[1, 4]$ چقدر است؟

$$\frac{m(4) - m(1)}{4 - 1} = \frac{(2\sqrt{4} + 2(4^3)) - (2\sqrt{1} + 2(1)^3)}{3} = \frac{128}{3}$$

حل:



مثال

معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - t$ برحسب متر داده شده است. درجه زمانی سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی

$$\left. \begin{aligned} \text{آهنگ لحظه‌ای} &= f'(t) = 4t - 1 \\ \text{آهنگ متوسط} &= \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{28 - 0}{4} = 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4t - 1 = 7 \Rightarrow t = 2$$

[۰, ۴] با هم برابرند؟

سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۳۰۰	تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. الف) آهنگ متوسط رشد در بازه $[0, 25]$ را بدست آورید. ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک در ۴۹ ماهگی را بدست آورید.	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۳
۳۰۱	زچسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. فرض کنیم ارتفاع این جسم (برحسب متر) از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید. t (برحسب ثانیه) الف) سرعت متوسط جسم در بازه زمانی $[3, 4]$ را به دست آورید. ب) لحظه‌ای را معلوم کنید که سرعت جسم برابر 20 m/s است.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۳
۳۰۲	آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x+5}$ را وقتی متغیر از $x = -1$ به $x = 4$ تغییر می‌کند، به دست آورید.	۰/۷۵	دی ۱۴۰۲
۳۰۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن همواره صعودی است.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۲
۳۰۴	تابعی با ضابطه $f(x) = \frac{3x-6}{x^2+2}$ را در نظر بگیرید. الف) آهنگ تغییر متوسط در بازه $[-2, 0]$ را به دست آورید. ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x = -1$ را به دست آورید.	۱/۵	شهریور ۱۴۰۲
۳۰۵	در تابعی با ضابطه $f(t) = \frac{120}{t} + 5$ مجموع آهنگ لحظه‌ای تغییر در لحظه $t = 2$ و آهنگ متوسط تغییر تابع $f(t)$ در بازه $[4, 6]$ را بیابید.	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۲

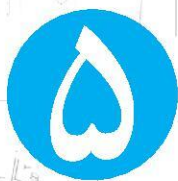


۳۰۶	یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t$ گرم است. در چه لحظه‌ای، آهنگ رشد جرم توده باکتری برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه زمانی $0 \leq t \leq 4$ می‌شود؟	۱/۵	دی ۱۴۰۱
۳۰۷	معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - t + 3$ بر حسب متر است. (t بر حسب ثانیه است) الف) سرعت متوسط تابع در بازه $[0, 3]$ را به دست آورید. ب) سرعت لحظه‌ای تابع را در $t = 4$ به دست آورید.	۱	شهریور ۱۴۰۱
۳۰۸	اگر سرعت متوسط یک متحرک در یک بازه برابر ۲ متر بر ثانیه باشد و معادله حرکت متحرک به صورت $f(t) = t^3 - t$ بر حسب متر باشد. در کدام لحظه، سرعت لحظه‌ای متحرک برابر سرعت متوسط آن است.	۱	خرداد ۱۴۰۱
۳۰۹	دوچرخه سواری طبق معادله $d(t) = \frac{1}{3}t^3 + 10t$ حرکت می‌کند. که در آن $0 \leq t \leq 6$ بر حسب ثانیه است. سرعت لحظه‌ای در $t = 2$ چقدر است؟	۱	دی ۱۴۰۰
۳۱۰	تابعی با ضابطه $f(t) = \frac{240}{t}$ مفروض است. آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در لحظه $t = 4$ از آهنگ متوسط تغییر تابع f از لحظه $t = 3$ تا $t = 5$ چه مقدار بیشتر است؟	۱/۵	شهریور ۱۴۰۰
۳۱۱	جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنید ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید. مطلوبست: الف) سرعت متوسط در بازه $[1, 2]$ ب) سرعت لحظه‌ای در زمان $t = 3$	۱	خرداد ۱۴۰۰
۳۱۲	جسمی از سطح زمین به طور عمودی پرتاب شده است، که معادله ارتفاع آن از سطح زمین به صورت $f(t) = -2t^2 + 10t$ می‌باشد، سرعت لحظه‌ای این جسم را در $t = 2$ به دست آورید.	۱	دی ۹۹
۳۱۳	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. سرعت لحظه‌ای در $t = 9$ برای متحرک با معادله حرکت $f(t) = \sqrt{t}$ برابر است.	۰/۵	شهریور ۹۹
۳۱۴	یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + t^2$ گرم است. الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3 \leq t \leq 4$ به چه سرعتی افزایش می‌یابد؟ ب) آهنگ رشد جرم توده‌ی باکتری در لحظه‌ی $t = 9$ چقدر است؟	۱/۲۵	خرداد ۹۹ خ



۳۱۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. آهنگ متوسط تغییر با شیب قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.	۰/۲۵	خرداد ۹۹
۳۱۶	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $g(x) = 2 \sin^2 x$ نسبت به x در $x = \frac{\pi}{4}$ برابر است.	۰/۲۵	خرداد ۹۹
۳۱۷	معادله متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه‌ی زمانی $[0, 5]$ بر حسب ثانیه داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $[0, 5]$ برابر است؟	۱/۵	خرداد ۹۹
۳۱۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. سرعت لحظه‌ای در $t = 2$ برای متحرکی با معادله‌ی حرکت $f(t) = t^2 + 3t$ برابر ۷ است.	۰/۵	دی ۹۸
۳۱۹	آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$ در نقطه‌ی $x = 2$ چند برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = -1$ است؟	۱	شهریور ۹۸
۳۲۰	یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^2$ گرم است. آهنگ رشد جرم توده‌ی باکتری در لحظه‌ی $t = 4$ چقدر است؟	۰/۷۵	تیر ۹۸
۳۲۱	آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = x^3 - 2x$ را در بازه‌ی $[0, 2]$ و آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را در $x = 1$ محاسبه کنید.	۱	خرداد ۹۸
۳۲۲	یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + t^2$ گرم است. آهنگ رشد جرم توده‌ی باکتری در لحظه‌ی $t = 9$ چقدر است؟	۰/۷۵	دی ۹۷

یادداشت ضروری دانش آموز:



کاربردهای مشتق

اکسترم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی ۹۰
جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن ۹۹
رسم نمودار تابع ۱۰۴



درس

۱

اکسترم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

خلاصه درسنامه

تابع کجاها صعودی و کجاها نزولی است؟



اکثر تابع‌ها در یک قسمت‌هایی از دامنه‌شان صعودی و در یک قسمت‌هایی نزولی هستند، اگر تابع f در کل دامنه‌اش پیوسته باشد، با تعیین علامت مشتق می‌توان جاهایی که صعودی یا نزولی است را به راحتی تعیین کرد. مراحل کار:

- ۱) از f مشتق می‌گیریم.
- ۲) جدول تعیین علامت f' را رسم می‌کنیم.
- ۳) جاهایی که f' مثبت است، تابع اکیداً صعودی ($\nearrow$) و جاهایی که f' منفی است، تابع اکیداً نزولی ($\searrow$) خواهد بود.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

مثلاً در تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ داریم:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'		+	-	+
f	یکنواپی	اکیداً صعودی $\nearrow$	اکیداً نزولی $\searrow$	اکیداً صعودی $\nearrow$

ارتباط بین مشتق و رفتار تابع

درس ۱

اکسترم‌های تابع

برای تابع پیوسته f و به ازای تمام x های بازه $I \subseteq D_f$ ، همواره داریم:

- ۱) $f' > 0 \Leftrightarrow f$ اکیداً صعودی
- ۲) $f' < 0 \Leftrightarrow f$ اکیداً نزولی
- ۳) $f' \geq 0 \Leftrightarrow f$ صعودی
- ۴) $f' \leq 0 \Leftrightarrow f$ نزولی

آشنایی با مفهوم و انواع اکسترم



تعریف کلمه‌ی اکسترم همان ماکزیم یا مینیم است.

ما دو نوع اکسترم داریم:

- ۱) اکسترم نسبی
- ۲) اکسترم مطلق و از آنجا که خود اکسترم، دو منظور ماکزیم یا مینیم را می‌رساند، به چهار دسته‌بندی زیر می‌رسیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{الف) ماکزیم نسبی} \\ \text{ب) مینیم نسبی} \end{array} \right\} \leftrightarrow \text{اکسترم نسبی} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{پ) ماکزیم مطلق} \\ \text{ت) مینیم مطلق} \end{array} \right\} \leftrightarrow \text{اکسترم مطلق}$$

تعریف ماکزیم نسبی: اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطه c (بازه باز شامل نقطه c) که به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم

$$f(c) \geq f(x)$$

تعریف مینیم نسبی: اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطه c (بازه باز شامل نقطه c) باشد که به ازای هر x متعلق به I داشته

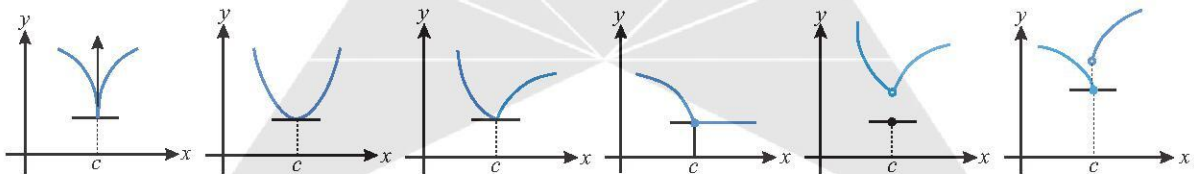
$$f(c) \leq f(x)$$

								max نسبی
								min نسبی
f ناپیوسته است. $f'(c)$ وجود ندارد.	f ناپیوسته است. $f'(c)$ وجود ندارد.	f ناپیوسته است. $f'(c)$ وجود ندارد.	$f'(c) = 0$	f پیوسته است. $f'(c)$ وجود ندارد.	f پیوسته است. $f'(c)$ وجود ندارد.	f پیوسته است. ولی $f'(c)$ وجود ندارد.	$f'(c) = 0$	وضعیت مشتق و پیوستگی

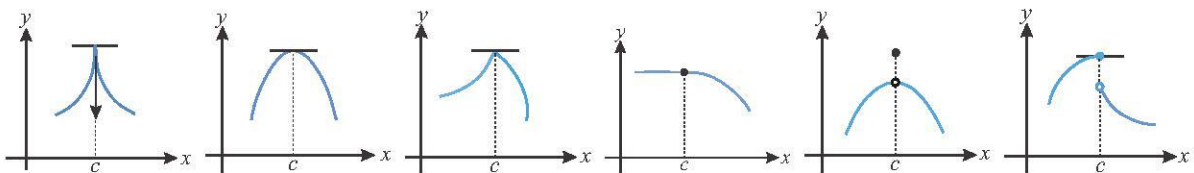
از تعریف نقاط اکسترم نسبی می‌توان این‌ها را نتیجه گرفت:

- نقطه‌ای که در دامنه‌ی تابع نباشد، حتماً اکسترم نسبی هم نیست.
- نقطه‌ای که طول آن اول یا آخر دامنه‌ی تابع f باشد، حتماً اکسترم نسبی نمی‌تواند باشد.

یک راه حل آسان: اگر خواستید بفهمید نقطه‌ای به طول c ، مینیم نسبی تابع هست یا نه، در نقطه‌ای به طول c یک خط افقی کوچک رسم کنید، حالا اگر نقطه‌های اطراف c ، بالای این خط یا روی آن افتادند، این نقطه را مینیم نسبی اعلام کنید؛



در مورد ماکزیم نسبی هم، همین طور است، فقط این دفعه بعد از کشیدن خط افقی کوچک، می‌بینید که نمودار تابع، اطراف این نقطه، کاملاً پایین یا روی این خط می‌افتد.



تعریف ماکزیم مطلق: اگر برای هر x متعلق به یک بازه مانند I داشته باشیم $f(a) \geq f(x)$ ، آنگاه $f(a)$ را مقدار ماکزیم مطلق و نقطه $(a, f(a))$ را نقطه ماکزیم مطلق تابع در بازه مورد نظر می‌نامند.

تعریف مینیم مطلق: اگر برای هر x متعلق به یک بازه مانند I داشته باشیم $f(a) \leq f(x)$ ، آنگاه $f(a)$ را مقدار مینیم مطلق و نقطه $(a, f(a))$ را نقطه مینیم مطلق تابع در بازه مورد نظر می‌نامند.

به عبارت ساده‌تر، به نقطه‌ای که از کلیه نقاط روی دامنه تعریف تابع، عرض بیشتر یا مساوی داشته باشد، ماکزیم مطلق و اگر عرض کمتر یا مساوی داشته باشد، مینیم مطلق تابع گویند.



توجه! وقتی می‌گوییم مقدار ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق، منظورمان عرض بالاترین یا پایین‌ترین نقطه است، نه طول آن!

تفاوت‌های اکسترمم نسبی و اکسترمم مطلق

- برای اینکه نقطه‌ای را اکسترمم نسبی اعلام کنیم، فقط باید به نقطه‌های اطرافش نگاه کنیم، ولی برای اعلام نظر در مورد اکسترمم مطلق، باید به کل دامنه توجه کنیم...
- اگر تابع f روی بازه‌ی $[a, b]$ تعریف شود، نقطه‌های $x = a$ و $x = b$ حتماً اکسترمم‌های نسبی نیستند، اما شاید اکسترمم مطلق باشند...

آزمون مشتق اول در تعیین اکسترمم‌های نسبی تابع

پیدا کردن اکسترمم نسبی در تابع‌های پیوسته و بی‌قدرمطلق:

- از تابع مشتق می‌گیریم و مساوی صفر می‌گذاریم تا ریشه‌های آن به دست آید...
- در یک جدول سه سطری، شامل x ، f' و f مشتق را تعیین علامت کرده و فلش‌های $\nearrow$ و $\searrow$ مربوط به f را کامل می‌کنیم.
- هر نقطه‌ای که در آن تغییر علامت f' داریم (یا تغییر جهش فلش f)، اکسترمم نسبی است، می‌خواهد مشتق در آن نقطه صفر شده باشد یا نشده باشد. حالا از سمت چپ به راست جدول،

X	$-\infty$	x_1	$+\infty$
f'		+	-
f		$\nearrow$	$\searrow$

نسبی max

X	$-\infty$	x_0	$+\infty$
f'		-	+
f		$\searrow$	$\nearrow$

نسبی min

الف) اگر f' از $-$ به $+$ تغییر علامت داده باشد، آن نقطه min نسبی است.
ب) اگر f' از $+$ به $-$ تغییر علامت داده باشد، آن نقطه max نسبی است.

در max نسبی فلش‌ها شکلی شبیه قله و در min نسبی شکلی شبیه دره تشکیل می‌دهند ...

مثال

اکسترمم‌های نسبی تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 - 12x + 1$ را بدست آورید.

$$f(x) = x^3 - 12x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

پاسخ:

X	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x) = 3(x^2 - 4)$		+	-	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

نسبی max نسبی min

$$\left. \begin{array}{l} \text{تعداد} \\ \text{اکسترم‌ها} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow \text{نسبی min} \\ x = -2 \Rightarrow \text{نسبی max} \end{array}$$

مفهوم نقطه‌ی بحرانی

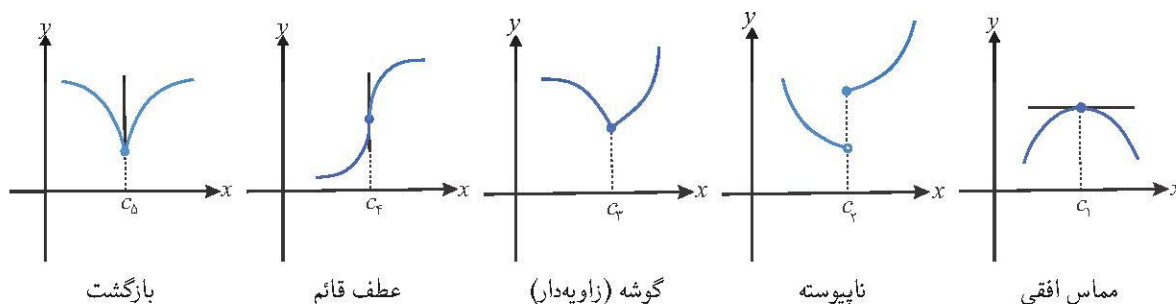
تعریف نقطه‌ای به طول c را که عضو دامنه‌ی تابع f باشد، نقطه‌ی بحرانی این تابع می‌گوییم.

هرگاه ① $f'(c)$ صفر شود و یا ② $f'(c)$ وجود نداشته باشد.

اگر تابع f روی بازه‌ی $[a, b]$ تعریف شده باشد، $x = a$ و $x = b$ نقطه‌ی بحرانی هستند.



مهم‌ترین حالت‌هایی که برای نقاط بحرانی می‌توان در نظر گرفت عبارت است از: ریشه‌های مشتق، نقاط ناپیوسته، گوشه، نقاط دارای مماس قائم (عطف قائم) و نقاط بازگشت. در نمودارهای زیر، نقاط مشخص شده همگی بحرانی هستند.



نکته: هر نقطه اکسترم نسبی و مطلق، نقطه بحرانی است، در صورتی که یک نقطه بحرانی ممکن است نقطه اکسترم نسبی یا مطلق نباشد. (مانند $x=0$ برای تابع $f(x)=x^3$ ، که این نقطه بحرانی است ولی اکسترم نسبی یا مطلق نمی‌باشد).

روش به دست آوردن نقاط بحرانی

ابتدا دامنه تابع را تعیین می‌کنیم، سپس از تابع مشتق گرفته و نقاطی از دامنه که مشتق در آن‌ها صفر است و یا وجود ندارد را به دست می‌آوریم. توجه داشته باشید که نقاط ابتدایی و انتهایی بازه نیز بحرانی محسوب می‌شوند.

- ۱) طول تمامی نقطه‌های بحرانی تابع را پیدا کنید.
- ۲) یک جدول صلیبی تشکیل دهید که در سطر اول آن x تمامی نقطه‌های بحرانی را نوشته‌اید (a و b را از قلم نیندازید!)، حالا تک تک این x ها را به خود تابع f بدهید و y حاصل را از آن‌ها را زیر هر کدام بنویسید؛
- ۳) به عددی سطر پایین نگاه کنید و کمترین عدد موجود را به عنوان مقدار $\min$ مطلق و بزرگ‌ترین عدد موجود را به عنوان مقدار $\max$ مطلق اعلام کنید...

طول تمام نقطه‌های بحرانی	x	a	b	x_1	x_2	x_3	...
با جای‌گذاری هر x در ضابطه‌ی تابع اصلی به دست می‌آید	y	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	...

پیدا کردن بیشترین و کمترین عدد ...

مثال

بیشترین مقدار تابع $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ در بازه‌ی $[-2, 2]$ کدام است؟
پاسخ:

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -1, 3$$

بررسی بازه $[-2, 2]$ است $x = -1$ بحرانی است

x	-2	2	-1
y	3	-17	10
		min مطلق	max مطلق



بهینه‌سازی



اغلب در زندگی وقتی با مسأله‌ای روبه‌رو می‌شویم، تلاش می‌کنیم بهترین راه حل را برای آن مسأله پیدا کنیم. برای مثال بیشترین سود، بیشترین تولید، کمترین هزینه، کمترین فاصله و ... در مسائل بهینه‌سازی نیز هدف پیدا کردن ماکزیم یا مینیم یک کمیت است. در این نوع مسائل ابتدا کمیت‌هایی مانند حجم، فاصله، مساحت و ... را که باید کمترین یا بیشترین باشند، به صورت تابعی از متغیرهای دیگر به دست می‌آوریم، اگر معادله بیشتر از یک متغیر داشت به کمک فرضیات مسأله و روابطی که بین متغیرها برقرار است، تابع را فقط برحسب یک متغیر می‌نویسیم. سپس نقاط بحرانی آن را به کمک مشتق تعیین کرده و ماکزیم یا مینیم مطلق آن را به دست می‌آوریم.

گاهی اوقات رسم نمودار برای درک بهتر مسأله و حل مسائل بهینه‌سازی به ما کمک می‌کند.

برای حل مسائل بهینه‌سازی معمولاً از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

۱) مساحت مثلث به ارتفاع h و قاعده a برابر است با: $S = \frac{1}{2}ah$

۲) مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با: $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

۳) مساحت و محیط دایره به شعاع r برابر است با: $P = 2\pi r$ و $S = \pi r^2$

۴) مساحت جانبی و حجم کره به شعاع r برابر است با: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ و $S = 4\pi r^2$

۵) حجم مکعب مستطیل به طول x ، عرض y و ارتفاع h برابر است با: $V = xyh$

۶) مساحت جانبی و حجم استوانه به شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر است با: $V = \pi r^2 h$ و $S = 2\pi r h$

بنابراین مساحت کل استوانه برابر است با حاصل جمع مساحت دو قاعده و مساحت جانبی: $S_{\text{کل}} = 2\pi r h + 2\pi r^2$

۷) حجم مخروط به شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر است با: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

مثال

دو عدد مثبت چنان بیابید که حاصل ضربشان ۸ و حاصل جمع آن‌ها مینیم باشد.

پاسخ) دو عدد مثبت را x و y در نظر می‌گیریم، پس $xy = 8$ است، بنابراین داریم:

$$S = x + y \Rightarrow S = x + \frac{8}{x} \Rightarrow S'(x) = 1 - \frac{8}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{8}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 8 \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{8} \xrightarrow{xy=8} y = \sqrt{8}$$

مثال

ورق فلزی مربعی شکل به طول ضلع 30 سانتی‌متر در دست است. از چهار گوشه‌ی آن مربع‌هایی به کدام ضلع را ببریم تا پس از تازدن آن‌ها یک جعبه فلزی دربار با حجم ماکزیم داشته باشیم؟

پاسخ:
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{حجم: } P = x\ell^2 \\ \text{ساختن جعبه!} \end{array} \right\} \Rightarrow P(x) = x(30 - 2x)^2$$

$$\Rightarrow P(x) = x(900 - 120x + 4x^2) \Rightarrow P(x) = 900x - 120x^2 + 4x^3 \Rightarrow P'(x) = 900 - 240x + 12x^2$$

$$\Rightarrow P'(x) = 12(75 - 20x + x^2) \Rightarrow x^2 - 20x + 75 = 0 \Rightarrow (x - 15)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ یا } 15 \xrightarrow[\text{مقدار قابل قبول } 0 < x < 15]{}$$

برای اینکه بفهمید $x = 15$ قابل قبول نیست، دوتا راه دارید، اول اینکه

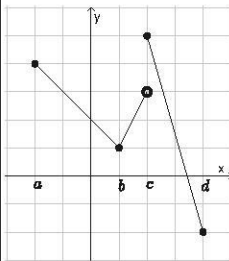
و دوم اینکه مشتق را تعیین علامت کنید و بفهمید در $x = 5$ ، ماکزیم اتفاق می‌افتد...



سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۳۲۳	نقاط اکسترم نسبی و مطلق تابع $f(x) = x^3 - 6x^2$ را در بازه $[-1, 3]$ در صورت وجود بیابید.	۱/۵	شهریور ۱۴۰۳
۳۲۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر $x = c$ طول یک نقطه اکسترم نسبی تابع f باشد، آنگاه $f'(c) = 0$.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۳۲۵	مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 12x$ در بازه $[-1, 3]$ را به دست آورید.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۳
۳۲۶	مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 6x^2$ را روی بازه $[-2, 3]$ بیابید.	۲۵-۱	دی ۱۴۰۲
۳۲۷	اکسترمهای مطلق تابع $f(x) = x^5 - 5x$ را در بازه $[0, 2]$ به دست آورید.	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۲
۳۲۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $f'(c) = 0$ باشد، آنگاه $x = c$ یک نقطه اکسترم نسبی است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۲
۳۲۹	در شکل نمودار رسم شده است طول نقاط اکسترمهای نسبی و مطلق را مشخص کنید.	۱	خرداد ۱۴۰۲
۳۳۰	یک مستطیل در یک نیم دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۴ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.	۱/۲۵	دی ۱۴۰۱



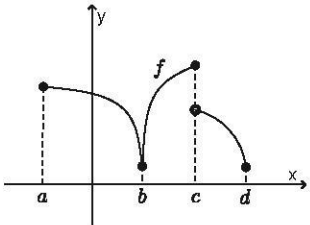


۳۳۱	جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطه c باشد که به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$ ، در این صورت $f(c)$ را یک تابع f می‌نامیم.	۰/۲۵	تیرمور ۱۴۰۱
۳۳۲	ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^3 + ax - b$ طوری پیدا کنید که نقطه $(1, 2)$ اکسترم نسبی تابع باشد.	۱	تیرمور ۱۴۰۱
۳۳۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. هر نقطه بحرانی تابع $f(x)$ ، یک نقطه اکسترم تابع $f(x)$ است.	۰/۵	خرداد ۱۴۰۱
۳۳۴	جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. اگر برای هر x در بازه I ، $f''(x) > 0$ ، آنگاه نمودار $f(x)$ در این بازه تقریباً به دارد.	۰/۵	خرداد ۱۴۰۱
۳۳۵	با توجه به نمودار داده شده، به سؤالات زیر پاسخ دهید. (الف) مقدار ماکزیمم مطلق را بنویسید. (ب) مقدار مینیمم مطلق را بنویسید. (پ) طول نقطه ماکزیمم نسبی را بنویسید. (ت) طول نقطه مینیمم نسبی را بنویسید.	۱	خرداد ۱۴۰۱
۳۳۶	مقادیر اکسترم مطلق تابع $g(x) = x^3 + 2x - 5$ را در بازه $[-2, 1]$ در صورت وجود تعیین کنید.	۱	دی ۱۴۰۰
۳۳۷	ورق فلزی مستطیل شکل، به طول ۱۶ سانتی متر و عرض ۶ سانتی متر در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس لبه جعبه را به اندازه x برمی‌گردانیم تا یک جعبه سر باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد.	۱/۲۵	تیرمور ۱۴۰۰
۳۳۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر تابع f در هر نقطه اکسترم نسبی مشتق‌پذیر باشد، آنگاه مشتق تابع f در این نقاط صفر می‌شود.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۰
۳۳۹	اکسترم‌های مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ را در بازه $[-1, 1]$ تعیین کنید.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۰



شهریور ۹۹	۱/۵	۳۴۰	مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x + 1$ را در بازه‌ی $[-1, 2]$ تعیین کنید.
شهریور ۹۹	۲	۳۴۱	اکسترم‌های مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه‌ی $[-1, 3]$ مشخص کنید.
خرداد ۹۹	۱/۲۵	۳۴۲	اگر نقطه‌ی $(2, 1)$ نقطه‌ی اکسترم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را بدست آورید.
خرداد ۹۹	۱/۷۵	۳۴۳	مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^2 + x + 1 $ را در بازه‌ی $[-2, 2]$ بیابید.
خرداد ۹۹	۱	۳۴۴	نقاط بحرانی تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ را مشخص کنید.
خرداد ۹۹	۲	۳۴۵	تابع $f(x) = x^2 - 1 $ در بازه‌ی $[-2, 3]$ در نمودار زیر رسم شده است. الف) نقاط اکسترم‌های نسبی تابع را در صورت وجود بیابید. ب) نقاط اکسترم مطلق تابع را در صورت وجود بیابید. پ) آیا تابع f در بازه‌ی $[0, 3]$ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟
خرداد ۹۹	۰/۲۵	۳۴۶	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. بزرگترین بازه‌ای از R که تابع $h(x) = x^3 - 12x + 4$ در آن نزولی اکید باشد، بازه‌ی است.
خرداد ۹۹	۰/۲۵	۳۴۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a) = 0$ و هم $f(a) = 0$
شهریور ۹۸	۱/۲۵	۳۴۸	اکسترم‌های مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه‌ی $[-1, 2]$ مشخص کنید.
شهریور ۹۸	۱/۷۵	۳۴۹	مقادیر اکسترم نسبی و مطلق تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$ را در بازه‌ی $[-2, 3]$ به دست آورید.
تیر ۹۸	۱	۳۵۰	ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^3 + ax + b$ طوری تعیین کنید که در نقطه‌ی $(1, 2)$ ماکزیمم نسبی داشته باشد.



۳۵۱	مقادیر اکسترم‌های مطلق تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ را در بازه‌ی $[0, 2]$ بیابید.	۱/۷۵	تیر ۹۸
۳۵۲	درست یا نادرست بودن جملات زیر را با توجه به نمودار تابع f که در ذیل آورده شده، مشخص کنید. الف) نقطه‌ای به طول b مینیمم نسبی تابع f نیست. ب) نقطه‌ای به طول c یک نقطه بحرانی برای تابع f است.	۰/۵	تیر ۹۸
			
۳۵۳	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. اگر تابع $y = f(x)$ در بازه‌ی (a, b) صعودی باشد، علامت مشتق تابع f در این بازه است.	۰/۲۵	تیر ۹۸
۳۵۴	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. نقطه‌ای از دامنه تابع که مشتق در آن وجود ندارد و یا وجود دارد و برابر صفر است، نقطه نام دارد.	۰/۲۵	خرداد ۹۸
۳۵۵	تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است؟ راه حل خود را بنویسید.	۱/۲۵	خرداد ۹۸
۳۵۶	مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ را در بازه‌ی $[0, 2]$ تعیین کنید.	۱/۵	خرداد ۹۸
۳۵۷	ضرایب a و b را در تابع $f(x) = -x^4 + ax + b$ طوری تعیین کنید که در نقطه‌ی $(1, 2)$ ماکزیمم نسبی داشته باشد.	۱/۵	دی ۹۷
۳۵۸	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. اگر تابع $y = f(x)$ در بازه‌ی $[a, b]$ صعودی باشد، علامت مشتق تابع f در این بازه است.	۰/۲۵	دی ۹۷

یادداشت ضروری دانش‌آموز:

درس

۲

جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن

خلاصه درسنامه

جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن

تقعر:

فرض کنید تابع f در بازه (a, b) مشتق مرتبه اول و دوم داشته باشد، در این صورت با توجه به علامت f'' ، دو حالت داریم:

	خطوط مماس پایین نمودار	صعودی	رو به بالا	مثبت
	خطوط مماس بالای نمودار	نزولی	رو به پایین	منفی

■ قضیه: فرض کنیم $f''(x)$ به ازای هر نقطه x از بازه باز I موجود باشد.

الف) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x) > 0$ ، آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به بالا دارد.

ب) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x) < 0$ ، آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به پایین دارد.

پ) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x) = 0$ ، آزمون بی نتیجه است.

مثال

در کدام بازه، تابع با ضابطه $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2$ تقعر نمودار آن رو به بالا است؟

پاسخ:

$$f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2 \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 24x^2 - 36x$$

$$\Rightarrow f''(x) = -12x^2 + 48x - 36 \Rightarrow f''(x) = -12(x^2 - 4x + 3) = -12(x-1)(x-3)$$

		۱		۳	
f''	-	•	+	•	-
f	∩		∪		∩

تقعر رو به بالا



نقطه عطف

نقطه $x_0 \in D_f$ را نقطه عطف تابع f می‌نامند، اگر هر سه شرط زیر را داشته باشد:

- ۱) تابع در x_0 پیوسته باشد.
- ۲) f'' در x_0 تغییر علامت دهد. (یا نمودار f در x_0 تغییر تعقر دهد).
- ۳) تابع f در x_0 دارای خط مماس واحد باشد. (نقطه گوشه نباشد).

شرایط عطف بودن	خط مماس	خط مماس قائم			
عضو D_f باشد	✓	✓	✓	✓	✗
پیوسته باشد	✓	✓	✓	✓	✗
تغییر تعقر بدهد	✓	✓	✓	✓	✓
خط مماس واحد داشته باشد	✓	✓	✗	✗	✗
عطف است	عطف است	عطف است	عطف نیست	عطف نیست	عطف نیست

مثال

جهت تعقر و طول نقطه عطف تابع $y = x^3 - 6x^2 - 3x$ را در صورت وجود بدست آورید.

$$y' = 3x^2 - 12x - 3 \Rightarrow y'' = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$y'' = 6x - 12$	-	0	+
y	$-\infty$	-22	$+\infty$

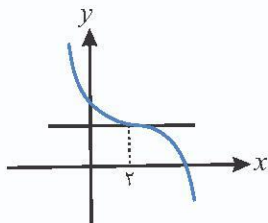
نقطه عطف: $(2, -22)$

تعقر رو به بالا: $(2, +\infty)$

تعقر رو به پایین: $(-\infty, 2)$

مثال

شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + c$ است، a, b را بدست آورید.



پاسخ: با توجه به نمودار، $x = 2$ طول نقطه عطف است و شیب خط مماس در نقطه عطف صفر می‌باشد، پس $f'(2) = f''(2) = 0$ است.

$$f'(x) = -x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(2) = -4 + 4a + b = 0 \Rightarrow 4a + b = 4$$

$$f''(x) = -2x + 2a \Rightarrow f''(2) = -4 + 2a = 0 \Rightarrow a = 2 \xrightarrow{4a+b=4} b = -4 \Rightarrow ab = -8$$



سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۳۵۹	اگر $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 1$ باشد، مقدار a را طوری بیابید که $x = \frac{1}{4}$ طول نقطه عطف نمودار تابع باشد.	۱	شهریور ۱۴۰۳
۳۶۰	مقادیر a, b, c در تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ طوری بدست آورید که در نقطه $(3, -1)$ اکسترم نسبی داشته باشد و $x = 1$ طول نقطه عطف آن باشد.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۳
۳۶۱	نقطه عطف تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ نقطه $(1, -1)$ می باشد، مقدار a و b را بیابید.	۱/۵	دی ۱۴۰۲
۳۶۲	ابتدا جهت تعقر تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ را در دامنه آن بررسی نمایید و سپس نقطه عطف آن را در صورت وجود، به دست آورید.	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۲
۳۶۳	مقادیر a, b, c را در تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند. $f(0) = 1$ و $f(2) = -3$ و $x = 1$ طول نقطه عطف نمودار تابع f باشد.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۲
۳۶۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر برای تابع f داشته باشید $f'(c) = 0$ آن گاه همواره نقطه $(c, f(c))$ نقطه عطف تابع است.	۰/۲۵	شهریور ۱۴۰۱
۳۶۵	جهت تعقر و مختصات نقطه عطف تابع $f(x) = x(x^2 - 3) + 1$ را تعیین کنید.	۱	شهریور ۱۴۰۱
۳۶۶	جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. اگر برای هر x در بازه I ، $f''(x) > 0$ ، آنگاه نمودار $f(x)$ در این بازه تعقر رو به دارد.	۰/۵	خرداد ۱۴۰۱
۳۶۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. هر نقطه بحرانی تابع $f(x)$ ، یک نقطه اکسترم تابع $f(x)$ است.	۰/۵	خرداد ۱۴۰۱
۳۶۸	اگر نقطه $A(-1, 1)$ نقطه عطف تابع با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2$ باشد. مقادیر a و b را به دست آورید.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۱



دی ۱۴۰۰	۱/۵	۳۶۹	مقادیر a و b و c را در تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند. $f(1) = 2$ و $f(0) = 1$ و $x = \frac{1}{4}$ طول نقطه عطف نمودار تابع f باشد.
شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵	۳۷۰	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. هر نقطه‌ای که در آن مقدار $f''(x)$ برابر صفر شود، یک نقطه عطف تابع $f(x)$ است.
شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵	۳۷۱	جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. در نقطه از نمودار مقابل، مقادیر f' و f'' هر دو مثبت است.
شهریور ۱۴۰۰	۱/۲۵	۳۷۲	جهت تقعر تابع $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ را در دامنه‌اش بررسی کرده و نقطه عطف آن را در صورت وجود به دست آورید.
خرداد ۱۴۰۰	۰/۷۵	۳۷۳	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) تابع صعودی اکید، نقطه عطف ندارد. ب) اگر علامت f' بر بازه‌ای منفی باشد، آنگاه تابع f بر آن بازه اکیدا نزولی است. پ) در نقطه عطف علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند.
خرداد ۱۴۰۰	۱	۳۷۴	اگر نقطه $A(-1, 1)$ نقطه عطف منحنی $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.
دی ۹۹	۱	۳۷۵	درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید. الف) در هر نقطه‌ای که جهت تقعر منحنی تابع عوض شود آن نقطه‌ی عطف تابع است. ب) اگر $x = c$ طول نقطه اکسترم نسبی تابع $f(x)$ و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = 0$.
خرداد ۹۹	۱/۲۵	۳۷۶	جهت تقعر و نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$ را بدست آورید.
خرداد ۹۹	۰/۵	۳۷۷	مقادیر a و b در تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ به ترتیب کدام یک از موارد زیر است. اگر $f(1) = 2$ و $x = \frac{1}{4}$ طول نقطه‌ی عطف آن باشد. الف) $a = 1, b = -2$ ب) $a = 4, b = -4$ ج) $a = 4, b = 4$ د) $a = -2, b = 3$



۳۷۸	جهت تقعر و نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ را بدست آورید.	۲	خرداد ۹۹
۳۷۹	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. طول نقطه عطف تابع $f(x) = x^3 - 6x^2$ برابر است.	۰/۵	دی ۹۸
۳۸۰	شکل زیر را در نظر بگیرید. تعیین کنید که در کدام یک از پنج نقطه‌ی مشخص شده در نمودار: الف) $f'(x)$ و $f''(x)$ هر دو منفی اند. ب) $f'(x)$ منفی و $f''(x)$ مثبت است.	۱	دی ۹۸
۳۸۱	ابتدا جهت تقعر تابع $y = \frac{x+1}{x-1}$ را مشخص کرده، سپس وجود نقطه‌ی عطف آن را بررسی کنید.	۱/۵	شهریور ۹۸
۳۸۲	جهت تقعر و نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x) = x^3 + 3x + 1$ را به دست آورید.	۱	تیر ۹۸
۳۸۳	مقادیر a و b را در تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 - 1$ چنان بیابید که $A(1, 1)$ نقطه‌ی عطف منحنی باشد.	۱/۲۵	خرداد ۹۸
۳۸۴	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. اگر تابع $y = f(x)$ در بازه $[a, b]$ صعودی باشد، علامت مشتق تابع f در این بازه است.	۰/۲۵	دی ۹۷
۳۸۵	جهت تقعر و نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$ را به دست آورید.	۱	دی ۹۷

یادداشت ضروری دانش‌آموز:



درس

۳

رسم نمودار تابع

خلاصه درسنامه

مراحل رسم نمودار در حالت کلی به صورت زیر است:

- ۱ تعیین دامنه
- ۲ به دست آوردن مجانب‌ها (در صورت وجود). اگر مجانب افقی نداشت، حد تابع در $\pm\infty$ را حساب می‌کنیم.
- ۳ محاسبه f' و رسم جدول تغییرات (پیدا کردن بازه‌های صعودی و نزولی و نقاط اکسترمم)
- ۴ محاسبه f'' و نقطه عطف (در صورت نیاز!)
- ۵ نقاط کمکی (بهترین نقاط کمکی، نقاط برخورد تابع با محورها هستند)
- ۶ رسم

مثال

جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ را رسم کنید.

$$D_f = \mathbb{R} \quad y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

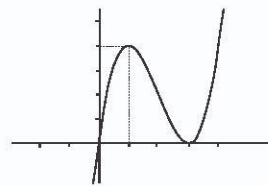
$$y'' = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$y = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

طول نقاط برخورد با محور x ها

x	$-\infty$	۱	۲	۳	$+\infty$
y'	+	+	-	-	+
y''	-	-	-	+	+
y	$-\infty$	۴	۲	۰	$+\infty$

max عطف min



تابع هموگرافیک



ضابطه تابع هموگرافیک به صورت $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط‌های $c \neq 0$ و $ad - bc \neq 0$ است. نکات زیر را در مورد این تابع باید بدانید.

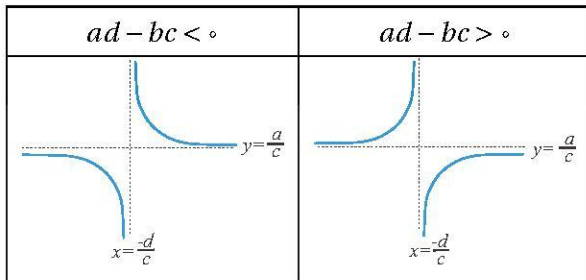
- ۱ معادله مجانب قائم $x = \frac{-d}{c}$ (ریشه مخرب) است.
- ۲ معادله مجانب افقی $y = \frac{a}{c}$ (نسبت ضریب x صورت به ضریب x مخرب) است.
- ۳ محل برخورد مجانب‌ها، مرکز تقارن است: $W = \left(\frac{-d}{c}, \frac{a}{c} \right)$

۴ دو محور تقارن با شیب‌های ± 1 دارد که از مرکز تقارن می‌گذرند.

۵ ضابطه وارونش به صورت $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

۶ مشتق آن به صورت $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ است.

۷ نمودارش با توجه به علامت $ad-bc$ ، به یکی از دو صورت مقابل است:



مثال

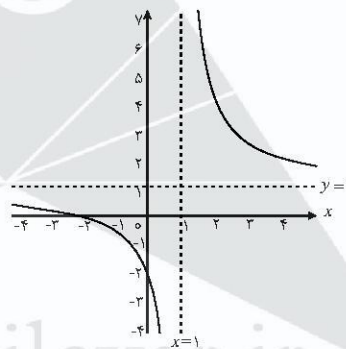
جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ را رسم کنید.

مجاانب افقی $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$

مجاانب قائم $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 1$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}, x \neq 1 \quad f''(x) = \frac{6(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{6}{(x-1)^3}, x \neq 1$$

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'	-	-	-	-	-
y''	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cup$	$\cup$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$



مثال

مقادیر a , b و c را در تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ طوری بدست آورید که در شرایط زیر صدق کند:

$$f(0) = 1 \text{ و } f(1) = 2 \text{ و } x = \frac{1}{2} \text{ طول نقطه عطف}$$

$$\left. \begin{aligned} f(0) = 1 &\Rightarrow c = 1 \\ f(1) = 2 &\Rightarrow a + b + 1 = 2 \Rightarrow a + b = 1 \\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx &\Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -2, b = 3$$



سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۳۸۶	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ را رسم کنید.	۲	شهریور ۱۴۰۳
۳۸۷	جدول رفتار و نمودار تابع $y = (x+2)(x-4)^2$ را رسم کنید.	۱/۷۵	خرداد ۱۴۰۳
۳۸۸	جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{2x-1}{x+3}$ را رسم کنید.	۱/۷۵	دی ۱۴۰۲
۳۸۹	جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2$ را رسم کنید.	۲	شهریور ۱۴۰۲
۳۹۰	با رسم جدول تغییرات نشان دهید که تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$ در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۲
۳۹۱	جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{-x}{x+1}$ را رسم کنید.	۱/۷۵	خرداد ۱۴۰۲
۳۹۲	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ را رسم کنید.	۲/۲۵	دی ۱۴۰۱
۳۹۳	فرض کنید $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، محل تقاطع مجانب‌های آن، نقطه $(2, 1)$ است. اگر این تابع از نقطه $(-1, 0)$ بگذرد، ضابطه تابع را به دست آورید.	۱	دی ۱۴۰۱
۳۹۴	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x+3}{1-x}$ را رسم کنید.	۲	شهریور ۱۴۰۱
۳۹۵	جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{2x-1}{x-2}$ را رسم کنید.	۲/۵	خرداد ۱۴۰۱

درس ۳

رسم نمودار



دی ۱۴۰۰	۲	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ را رسم کنید.	۳۹۶
شهریور ۱۴۰۰	۱/۵	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9$ را رسم کنید.	۳۹۷
خرداد ۱۴۰۰	۲/۵	جدول رفتار و نمودار $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ را رسم کنید.	۳۹۸
دی ۹۹	۲	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x-2}$ را رسم کنید.	۳۹۹
شهریور ۹۹	۲	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = x^3 - 3x + 1$ را رسم کنید.	۴۰۰
خرداد ۹۹ خ	۱/۷۵	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ را رسم کنید.	۴۰۱
خرداد ۹۹ خ	۱/۷۵	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ را رسم کنید.	۴۰۲
خرداد ۹۹	۲	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ را رسم کنید.	۴۰۳
دی ۹۸	۱/۷۵	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ را رسم کنید.	۴۰۴
شهریور ۹۸	۱/۲۵	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ را رسم کنید.	۴۰۵
تیر ۹۸	۱/۵	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ را رسم کنید.	۴۰۶
خرداد ۹۸	۱/۷۵	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ را رسم کنید.	۴۰۷
دی ۹۷	۱/۷۵	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ را رسم کنید.	۴۰۸

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

حسابان ۲

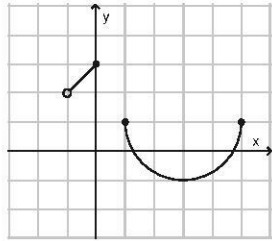
math-pilevar.ir



درس

۱

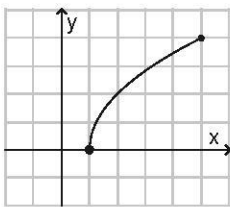
تبدیل نمودار



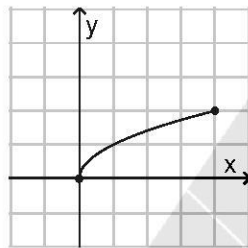
۶- الف) نادرست (ص ۱۰) (ب) درست (ص ۱۴)

$$Rg = [0, 4], \quad Dg = [1, 5]$$

۷- مشابه کار در کلاس صفحه ۴



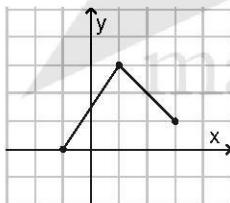
(ب)



(الف)

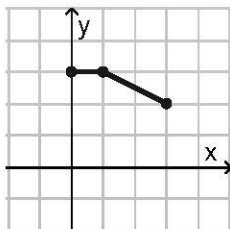
۸- (مشابه مثال صفحه ۵ کتاب)

$$Dg = [-1, 3]$$



۹- (مشابه تمرین ۳ صفحه ۸ کتاب)

$$Dg = [0, 3]$$

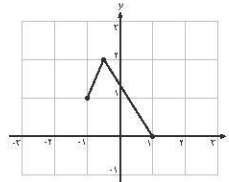


$$Df = [-3, 1], \quad Rf = [-2, 2]$$

۱۰-

۱- الف) راه حل اول

اگر نمودار نهایی، درست رسم شده باشد،
نمره کامل تعلق گیرد. (۱ نمره)



راه حل دوم

اگر نمودار با انتقال به چپ و سپس انقباض افقی رسم شده باشد برای هر مرحله (۵/۵) تعلق
گیرد.

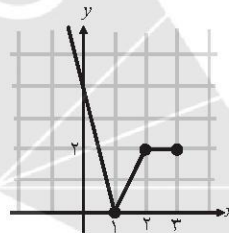
$$D_K = \left[\underbrace{-2}_{\circ/25}, \underbrace{1}_{\circ/25} \right]$$

۲- دامنه: $(-\infty, 3]$ (۵/۲۵)

برد: $[0, +\infty)$ (۵/۲۵)

رسم نمودار: (۵/۷۵)

(صفحه ۱۲)



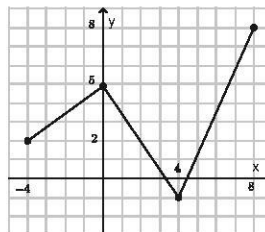
توضیحات جهت تصحیح: در رسم نمودار، هر قسمت که درست رسم شده است، (۵/۲۵) نمره
تعلق گیرد.

در صورتیکه دانش آموزی نمودار را اشتباه رسم کرده، اما مطابق آن نمودار اشتباه دامنه یا
برد را درست نوشته است، نمره دامنه یا برد منظور شود.

$$(-5)R = [-1, 8]$$

۳- (صفحه ۱۲ کتاب)

(رسم شکل (۵/۱))



۴- $[2, 4]$

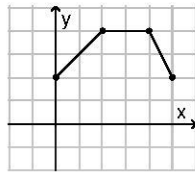
۵- صفحه ۱۲

(بارم هر قسمت رسم شکل (۵/۵) نمره)

کنید.

$$D_f = [-1, 4] \quad R_f = [0, 2]$$

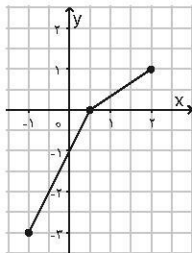
$$D_g = [0, 6] \quad R_g = [2, 4]$$



۱۸- درست

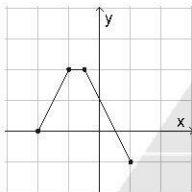
$$D_g = [-1, 2] \quad R_g = [-3, 1]$$

۱۹-



$$D = [-2, 1] \quad R = [-1, 2]$$

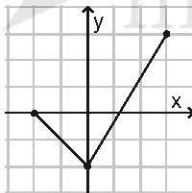
۲۰-



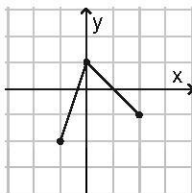
۲۱- محور طول‌ها

$$D_g = [-2, 3]$$

۲۲-



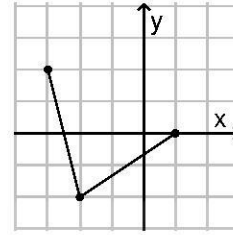
۲۳- برای رسم نمودار تابع g ، ابتدا انقباض افقی برای $k=2$ در راستای محور طول‌ها سپس انتقال یک واحد رو به پایین در راستای محور عرض‌ها $D_g = [-1, 2]$



۲۴- نادرست

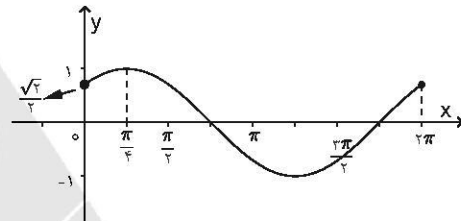
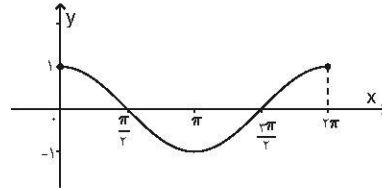
$$D_f = [-1, 2] \quad R_f = [-2, 4]$$

۲۵-



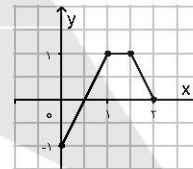
۱۱- انقباض افقی

۱۲-



$$D = [0, 2], \quad R = [-1, 1]$$

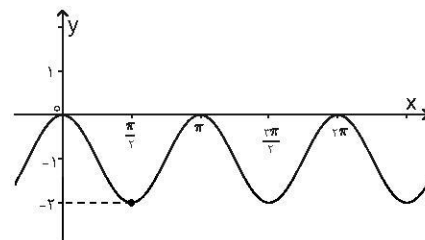
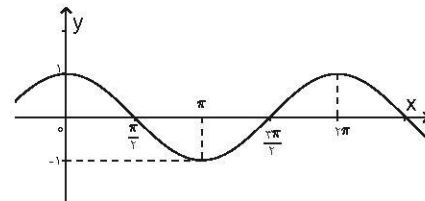
۱۳-



$$[-1, 0]$$

۱۴-

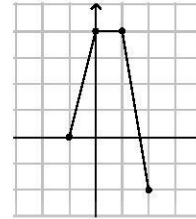
۱۵-



$$(5, 0)$$

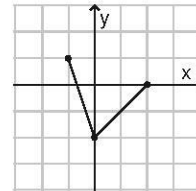
۱۶-

۱۷- کافی است نمودار تابع f را یک واحد به جلو و سپس دو واحد به سمت بالا منتقل



$$D_f = [-1, 2] \quad R_f = [-2, 1]$$

-۲۶



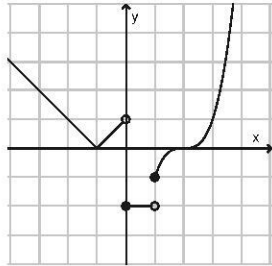
یادداشت ضروری دانش آموز:



درس

۲

تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم



۳۵- (صفحه ۲۲ کتاب)

$$p(2) = 3 \Rightarrow 12 + 2m + 2m + 1 = 3 \Rightarrow 4m = -10$$

$$\Rightarrow m = -\frac{5}{2}$$

$$f(-2) = -\frac{5}{2}(-2)^2 - \left(-\frac{5}{2}\right)(-2) + 3 = -12$$

۳۶- صفحه ۲۱

الف) اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی) $(0, +\infty)$ و
 اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی) $(-\infty, 0)$
 ب) خیر، در کل دامنه اکیداً یکنوا نیست.

۳۷- صفحه ۲۲

$$p(2) = 0 \Rightarrow 8 - 2a + b = 0$$

$$p(-1) = 3 \Rightarrow a + b = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a + b = -8 \\ a + b = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \end{cases}$$

۳۸- نادرست

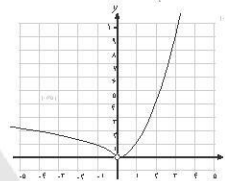
۳۹- (صفحه‌های ۱۴ و ۱۷ کتاب)

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 = (x-1)^3 + 1$$

۲۷- نادرست $(0/25)$

۲۸- دوم $(0/25)$

۲۹- در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است. $(0/25)$ (صفحه ۱۸)



رسم نمودار $(0/5)$

۳۰-

$$x - k = 0 \Rightarrow x = k \Rightarrow p(k) = 0 \Rightarrow k^3 + k^3 + 2 = 0 \Rightarrow k^3 = -1 \Rightarrow k = -1$$

به پاسخ درست که از طریق تقسیم چند جمله‌ای بر دو جمله‌ای حاصل شود، به تناسب بارم،
 نمره تعلق گیرد. (صفحه ۱۹)

۳۱- درست (صفحه ۲۲) $(0/25)$

۳۲- چهارم (صفحه ۲۱) $(0/25)$

۳۳-

$$p(2) = 0 \Rightarrow 8 + 2m + 2 = 0 \Rightarrow m = -5, \quad p(-1) = 6$$

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \quad (0/5)$$

(صفحه ۴ و ۲۲)

توضیحات جهت تصحیح: اگر دانش آموزی از روش تقسیم معمولی مسئله را حل کند، نمره کامل تعلق گیرد.

اگر دانش آموزی مقدار m را اشتباه به دست آورد و قسمت دوم (الف) را بر اساس آن مقدار، درست حل کند، به قسمت دوم نمره تعلق گیرد.

در قسمت (ب)، اگر علامت قسمت دوم تجزیه، یکی در میان مثبت و منفی گذاشته شده باشد، $0/25$ نمره تعلق گیرد.

۳۴- (صفحه ۲۱ کتاب)

اکیداً صعودی $[1, +\infty)$ و $(-\infty, 0)$

اکیداً نزولی $(-\infty, -1]$

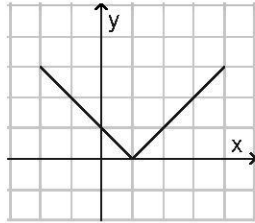
رسم شکل $(0/25)$

$$2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow p\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow r=0$$

-۵۱

اکیداً صعودی $[1, +\infty)$
اکیداً نزولی $(-\infty, 1]$



-۵۲

$$\begin{cases} -\lambda + 4a - 2b + 2 = 0 \Rightarrow 4a - 2b = \lambda \\ 1 + a + b + 2 = 0 \Rightarrow a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow a=0, b=-3$$

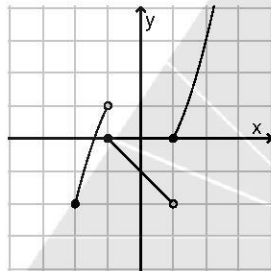
-۵۳

-۵۴ درست

صعودی $[-2, -1)$

صعودی $[1, +\infty)$

نزولی $[-1, 1)$



-۵۵

درس ۲

توابع یکنوا

$$x^5 + 32 = x^5 + 2^5$$

$$= (x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

-۵۶

$$3^{2x-10} \leq 3^{-4} \Rightarrow 2x-10 \leq -4 \Rightarrow x \leq 3$$

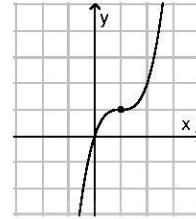
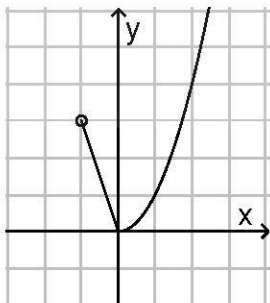
-۵۷

-۵۸ یکنوا

اکیداً صعودی $(-1, 0]$

اکیداً صعودی $[0, +\infty)$

-۵۹



اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی)

-۴۰ (صفحه ۲۲ کتاب)

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Rightarrow 2x+1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 1$$

-۴۱ (صفحه ۱۹ کتاب)

$$x=a \Rightarrow 2a^2 - \lambda = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$$

-۴۲ درست

-۴۳ صفر

$$\begin{cases} p(-2) = -1 \\ p(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+b=7 \\ a+b=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\lambda}{3}, b = \frac{-11}{3}$$

-۴۴

$$\frac{x^5+1}{x+1} = \frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}{x+1}$$

$$= x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

-۴۵

-۴۶ ثابت

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow p(-1)=2$$

-۴۷

$$\Rightarrow (-1)^4 + k(-1)^2 - 3 = 2 \Rightarrow k = 4$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow 2x+1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 1$$

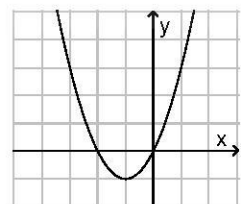
-۴۸

$$x^5 + 32 = (x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

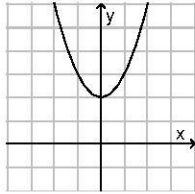
-۴۹

اکیداً صعودی $[-1, +\infty)$

اکیداً نزولی $(-\infty, -1]$



-۵۰



$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$$

-۷۳

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow P(2) = 2^3 + a(2)^2 + b(2) + 1$$

$$= 9 + 4a + 2b = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -9$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow P(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 1$$

$$= a - b = 0 \Rightarrow a - b = 0$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = -9 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{9}{6}, b = -\frac{9}{6}$$

-۷۴ نادرست

$$\left[\frac{8}{3}, +\infty \right)$$

-۷۵

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow P(1) = 4 \Rightarrow a + b = 3$$

-۷۶

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow P(-2) = 0 \Rightarrow 4a + b = 8$$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 4a + b = 8 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{5}{3}, b = \frac{4}{3}$$

$$\text{الف) } g(x) = x^3$$

-۷۷

$$\text{ب) } 7$$

$$\text{پ) } (-2, +\infty)$$

$$x + 1 \leq 2x - 3 \Rightarrow x \geq 4$$

-۷۸

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$$

-۷۹

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow P(2) = 2^3 + a(2)^2 + b(2) + 1$$

$$= 9 + 4a + 2b = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -9$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow P(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 1$$

$$= a - b = 0 \Rightarrow a - b = 0$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

-۶۰

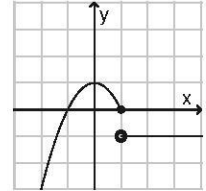
$$\Rightarrow \begin{cases} p(-2) = -2a - 7 \\ q(-2) = 11 \end{cases} \Rightarrow p(-2) = q(-2) \Rightarrow a = -9$$

$$(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$$

صعودی

$$[0, +\infty)$$

نزولی



-۶۱

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

-۶۲

-۶۳ درست

-۶۴ الف) درست ب) درست

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

-۶۵

$$p(2) = 8 + 4a + 2b - 2 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -6 \Rightarrow 2a + b = -3$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$p(-1) = -1 + a - b - 2 = 3 \Rightarrow a - b = 6$$

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ a - b = 6 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -5$$

-۶۶ الف) درست ب) نادرست

-۶۷ نادرست

-۶۸ صفر

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

-۶۹

$$\Rightarrow 1^3 + a(1)^2 + 1 + b = 4 \Rightarrow a + b = 2$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\Rightarrow (-2)^3 + a(-2)^2 + (-2) + b = 0 \Rightarrow 4a + b = 10$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 4a + b = 10 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{8}{3}, b = -\frac{2}{3}$$

$$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

-۷۰

-۷۱ الف) درست ب) نادرست

$$(-\infty, 0)$$

$$(0, +\infty)$$

-۷۲

اکیداً نزولی

اکیداً صعودی



$$\begin{cases} 4a + 2b = -9 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{9}{5}, b = -\frac{9}{5}$$

-۱ -۸۰

$$P(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -9$$

-۸۱

$$P(-1) = 3 \Rightarrow a - b = 3$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = -9 \\ a - b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{5}, b = -\frac{6}{5}$$

$$f(-1) = 0 \Rightarrow 1 - a - 3 = 0 \Rightarrow a = -2$$

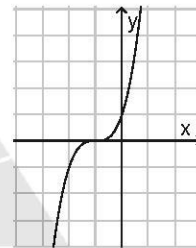
-۸۲

$$f(2) = 4 - 4 - 3 = -3$$

$$x^6 - 1 = (x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$$

-۸۳

۸۴- اکیدا صعودی



-۲ -۸۵

$$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

-۸۶

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

بردار است ضریبی داشته‌اند:



درس

۱

تناوب و تانژانت

۹۲- صفحه ۳۴

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \pi$$

$$|a| = 2, \quad c = 1$$

$$\Rightarrow y = -2 \cos(\pi x) + 1 \quad \text{یا} \quad y = 2 \cos(\pi x) + 1$$

تنها نوشتن یکی از ضابطه‌های بالا کافی است.

الف) $b = \pm \pi$

ب) $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

۹۴- π و ۳ (ص ۲۷)

۹۵- صفحه ۳۴

$$T = 2\pi \quad b = 1 \quad a = 3 \quad a + b = 4$$

۹۶- درست

۹۷- مشابه تمرین ۴ صفحه ۳۴

$$\begin{cases} |a| + c = 5 \\ -|a| + c = -1 \end{cases} \Rightarrow c = 2 \quad a = \pm 3$$

$$4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = 3 \sin \frac{x}{2} + 2 \quad \text{یا} \quad y = -\sin\left(-\frac{x}{2}\right) + 2$$

در صورت نوشتن فقط یکی از ضابطه‌ها نمره داده شود.

۹۸- ۴

۹۹- (مشابه تمرین ۳ صفحه ۳۴ کتاب)

$$\begin{cases} |a| + c = 4 \\ -|a| + c = -2 \end{cases} \Rightarrow c = 1, a = \pm 3$$

$$2 = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \pi \Rightarrow b = \pm \pi$$

$$y = -3 \cos(\pi x) + 1 \quad \text{هریک از توابع}$$

۸۷- نادرست (۰/۲۵)

۸۸- روش اول:

$$\begin{cases} |a| + c = 3 \\ |a| + c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2 \end{cases}$$

$$T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \xrightarrow{b < 0} b = -\frac{1}{2}$$

روش دوم:

$$\begin{cases} c = \frac{\max + \min}{2} \Rightarrow c = 1 \\ |a| = \frac{\max - \min}{2} \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2 \end{cases}$$

$$T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \xrightarrow{b < 0} b = -\frac{1}{2}$$

۸۹-

درس ۱

تناوب و تانژانت

$$\begin{cases} c = 1 \\ |a| = 2 \xrightarrow{a > 0} a = 2 \end{cases}$$

$$T = \pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2 \xrightarrow{b < 0} b = -2$$

۹۰- الف) درست ب) نادرست

۹۱- (صفحه ۳۳ کتاب)

$$T = 6 \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 6 \rightarrow |b| = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} \max = 6 \\ \min = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = 6 \\ -|a| + c = -2 \end{cases}$$

$$\rightarrow 2c = 4 \rightarrow c = 2 \Rightarrow |a| = 4$$

$$y = a \sin bx + c \rightarrow y = -4 \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 2$$

$$y = +4 \sin\left(-\frac{\pi}{3}x\right) + 2$$

یا



خواهد شد. $y = 2 \sin(2x)$

۱۱۰- الف)

$$T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{2}|} = 4$$

$$\min(y) = -|a| + c = -2 + (-1) = -3$$

ب) π

۱۱۱- 16π

$$\min(y) = -|a| + c = -2 + 1 = -1$$

۱۱۲-

$$\max(y) = |a| + c = 2 + 1 = 3$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow b = \pm 2$$

۱۱۳-

$$\max(y) = |a| + c = 6$$

$$\min(y) = -|a| + c = -2 \Rightarrow |a| = 4, \quad c = 2$$

هر یک از توابع

$$y = 4 \sin(2x) + 2, \quad y = 4 \sin(-2x) + 2$$

$$y = -4 \sin(2x) + 2, \quad y = -4 \sin(-2x) + 2$$

درس ۱

تناوب و تانژانت

می‌توانند باشند.

$$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

۱۱۴-

$$\max(y) = |-3| + 1 = 4$$

$$\min(y) = -|-3| + 1 = -2$$

۱۱۵- الف) درست ب) نادرست

۲-۱۱۶

$$\max(f) = 3, \quad \min(f) = -1$$

۱۱۷-

$$T = \frac{2\pi}{|-\frac{\pi}{4}|} = \frac{8\pi}{\pi} = 8$$

۱۱۸-

۱۱۹- درست

۱۲۰- الف) نادرست ب) نادرست

۱۲۱- π

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow b = \pm 2$$

۱۲۲-

یا $y = 3 \cos(\pi x) + 1$ و یا $y = 3 \cos(-\pi x) + 1$ یا $y = -3 \cos(-\pi x) + 1$

نوشته شود مورد قبول است.

۱۰۰- درست

۱۰۱- π

$$T = \frac{2\pi}{|\frac{1}{3}|} = 6\pi$$

۱۰۲-

$$y_{\max} = |-2\pi| + 9 = 2\pi + 9$$

$$y_{\min} = -|-2\pi| + 9 = -2\pi + 9$$

۱۰۳- R

$$|b| = \frac{2\pi}{3}, \quad |a| = 1, \quad c = 4$$

۱۰۴-

$$\Rightarrow y = \sin \frac{2\pi}{3}x + 4 \quad \text{یا} \quad y = -\sin \frac{2\pi}{3}x + 4$$

$$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۱۰۵-

۱۰۶- با توجه به نمودار ضابطه به صورت

$$T = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow b = 3, \quad a = -\frac{1}{2}, \quad y = a \sin bx + c$$

می‌شود.

$$y_{\max} = \frac{1}{2}, \quad y_{\min} = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2} \sin 3x$$

$$T = \frac{2\pi}{|\frac{1}{4}|} = 8\pi$$

۱۰۷-

$$y_{\max} = |- \pi| + \sqrt{5} = \pi + \sqrt{5}$$

$$y_{\min} = -|- \pi| + \sqrt{5} = -\pi + \sqrt{5}$$

۱۰۸- نادرست

$$y = a \sin(bx), \quad T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$$

۱۰۹-

$$\Rightarrow b = \pm 2 \Rightarrow y = \pm a \sin(2x)$$

نمودار از نقطه‌ی $(\frac{\pi}{4}, 2)$ می‌گذرد داریم:

$$y = \pm a \sin(2x) \Rightarrow 2 = \pm a \sin(2(\frac{\pi}{4}))$$

$$\Rightarrow 2 = \pm a \sin(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow a = \pm 2$$

با توجه به نمودار مقدار $a = -2$ قابل قبول نیست. لذا معادله تابع در نهایت به شکل زیر



$$\max(y) = |a| + c = 3$$

$$\min(y) = -|a| + c = -3 \Rightarrow |a| = 3, \quad c = 0$$

هر یک از توابع $y = 3\sin(-2x)$ ، $y = -3\sin(2x)$ ، $y = 3\sin(2x)$ می‌توانند جواب باشند.

بدراشته ضروری دانش آموز:



درس ۱

تناوب و تانژانت

درس

۲

معادلات مثلثاتی

$$\frac{6}{x} - \frac{6}{x^2} \tan \beta = \frac{1}{x} + \tan \beta \Rightarrow \tan \beta = \frac{5x}{x^2 + 6}$$

(صفحه ۴۳)

۱۲۶- (صفحه ۴۴ کتاب)

$$\tan 3x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{6},$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, k \in \mathbb{Z}$$

۱۲۷- صفحه ۳۹

$$3 \sin x + 2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\left[0, 2\pi\right] \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{3} \\ x = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

$$3 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۱۲۹- صفحه ۴۴

$$3 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cos x (3 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۱۳۰- مشابه تمرین صفحه ۴۴

$$\cos x (3 \cos x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 3 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۱۲۳-

$$5x = k\pi + x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \quad (0/25)$$

(جواب‌هایی که قابل قبول هستند که باقی مانده عدد صحیح k بر ۴ برابر ۲ نباشد.) (0/25)

$$k = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad (0/25)$$

۱۲۴-

$$\text{روش اول: } \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \end{cases} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (2 \cos x - 1) = 0 \quad (0/25)$$

(صفحه ۳۹)

$$\text{روش دوم: } \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad (0/25)$$

در روش دوم، اگر دانش آموز جواب، $\sin x = 0$ را به صورت $2k\pi$ و $2k\pi + \pi$ نوشته باشد، نمره تعلق گیرد.

۱۲۵-

$$\text{روش اول: } \tan \beta = \tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha}$$

$$= \frac{\frac{6}{x} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{6}{x^2}} = \frac{\frac{5}{x}}{\frac{x^2 + 6}{x^2}} = \frac{5x}{x^2 + 6}$$

(اگر دانش آموز از مفهوم شیب و رابطه $\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$ در حل مسئله استفاده کند، (0/25) بارم این قسمت تعلق گیرد.)

$$\text{روش دوم: } \tan \theta = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{\frac{1}{x} + \tan \beta}{1 - \frac{1}{x} \tan \beta}$$



$$\Delta = 11 + 40 = 51 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{-9+11}{-4} = -\frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{-9-11}{-4} = +5 \end{cases}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{3} \quad -139$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{2\pi}{9} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos 3x = \cos \frac{\pi}{6} \quad -140$$

$$\Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{18}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 3x = \sin 2x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \\ 3x = 2k\pi + \pi - 2x \end{cases} \quad -141$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2k+1}{3}\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\sin 2x - \cos x = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x - \cos x = 0 \quad -142$$

$$\Rightarrow \cos x (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$2 \cos^2 x - 1 + \cos x + 1 = 0 \quad -143$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \cos x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos x = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

-144

$$\cos 3x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \\ 3x = 2k\pi - x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi \\ 4x = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

بدانسته ضروری دانش آموز:

-131 (مشابه تمرین 1 صفحه 44 کتاب)

$$2 \sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

-132 (تمرین 1 صفحه 44 کتاب)

$$2 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

یا

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x (2 \sin x + 3) = 0 \quad -133$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{قابل قبول نیست}$$

$$-2 \sin^2 x - \sin x + 3 = 0 \quad -134$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{قابل قبول نیست}$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \quad -135$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{8} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 3x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \\ 3x = 2k\pi - x \end{cases} \quad -136$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi \\ 4x = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

-137 فرض می‌کنیم چنین مثلی وجود داشته باشد. داریم:

$$S = \lambda \sqrt{2} \xrightarrow{0 < \theta < \pi} \frac{1}{2} \times 4 \times \lambda \sin \theta = \lambda \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{4} \\ \theta = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

پس دو مثلث وجود دارد.

$$2(1 - \cos^2 x) + 9 \cos x + 3 = 0 \Rightarrow -2 \cos^2 x + 9 \cos x + 5 = 0 \quad -138$$



درس

۱ و ۲

حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

۱۴۵- صفر (یا ۰)

۱۴۶- (۰/۲۵)

رسم شکل (۰/۲۵)

(صفحه ۵۷)

توضیحات: اگر دانش آموزی محاسبات حد را برای مجانب قائم ننویسته است اما مجانب قائم و افقی را تعیین کرده و شکل را درست رسم کرده باشد، فقط (۰/۲۵) از نمره کل کسر شود.

۱۵۱- درست

۱۵۲- (صفحه ۵۳)

$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{x \rightarrow (-5)^-} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 10x + 25} &= \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x+5)(x-3)}{(x+5)(x+5)} \\ &= \frac{-8}{0} = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 4}{-2x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{-2x^2} = -\frac{1}{2}$$

(صفحه ۵۸ کتاب)

۱۵۳- (صفحه ۶۹)

$$\begin{aligned} -x^2 - 3x + 4 = 0 \rightarrow x = 1, x = -4 \\ x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{-x^2 - 3x + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(-x-4)} = -\frac{2}{5} = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

پس قائم نیست
(۰/۲۵)

$$x = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 1}{-x^2 - 3x + 4} = \frac{15}{0} = \infty$$

پس $x = -4$ مجانب قائم است
(۰/۲۵)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{-x^2 - 3x + 4} = -1 \Rightarrow y = -1 \text{ مجانب افقی}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

۱۵۴

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{(x-3)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{-x^3(-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^4} = 0$$

۱۴۷- در تابع $f(x) = \frac{(x-3)}{(x-3)(x+3)}$ خط $x = 3$ شرایط مجانب قائم را ندارد.
 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{1}{6}$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x = -3$ مجانب قائم منحنی تابع f است. (۰/۲۵)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ مجانب افقی}$$

رسم نمودار (۰/۵)

۱۴۸- $-\infty$ (صفحه ۵۰) (۰/۲۵)

۱۴۹

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[2x] - 1}{x - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{-x^2} = -2$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3 = +\infty$$

۱۵۰

$$f(x) = \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 0 \text{ مجانب قائم}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 1}{x^2 + 2x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ مجانب افقی}$$



۱۵۵- صفحه ۵۸

(به پاسخ‌های صحیح از روش رسم نمودار نمره تعلق گیرد)

$$f(x) = \frac{1}{x-|x|} = \begin{cases} \text{تعریف نشده} & x > 0 \\ \frac{1}{2x} & x < 0 \end{cases} \quad (0/5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2x} = -\infty \Rightarrow x = 0 \text{ مجانب قائم} \quad (0/5)$$

$$y = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$$

$$m = 14$$

(صفحه ۶۶ کتاب)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad (الف)$$

$$ب) \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{(x+3)}{(x+3)^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x^2} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ مجانب افقی}$$

$$x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \text{ فاقد مجانب قائم}$$

۱۶۰- صفر (ص ۵۳)

۱۶۱- صفحه ۵۳ و ۶۹

$$الف) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax-3}{(2-x)^2} = \frac{2a-3}{0^-} = +\infty$$

$$\Rightarrow 2a-3 < 0 \Rightarrow a < \frac{3}{2}$$

$$ب) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-4x^3}{x^3+5} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4x^3}{x^3} = -4$$

$$\Rightarrow y = -4$$

۱۶۲- صفحه ۵۷

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2[x]}{4-x} = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2[x]}{4-x} = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

گزینه پ صحیح است.

۱۶۳- مشابه صفحه ۵۳

$$الف) \frac{1-2}{2-2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$ب) \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

مشابه تمرین صفحه ۶۹

$$ب) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{4} = +\infty$$

۱۶۴- مشابه تمرین صفحه ۶۹

$$ب) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \end{cases} \quad ۲ (الف)$$

۱۶۵- مشابه کار در کلاس صفحه ۶۶

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2+1}{2x^2-3x} = 2 \Rightarrow \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4$$

۱۶۶- (مشابه کار در کلاس صفحه ۵۳ کتاب)

$$الف) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{+4}{0^+} = +\infty$$

(مشابه کار در کلاس صفحه ۶۶ کتاب)

$$ب) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{2} = -\infty$$

۱۶۷- (مشابه تمرین ۴ صفحه ۶۹ کتاب)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 \Rightarrow y = -1 \text{ مجانب افقی}$$

$$x^2 + x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{مجانب قائم نیست} \\ x = 0 & \text{مجانب قائم} \end{cases}$$

۱۶۸- $+\infty$ (صفحه ۴۸ کتاب)

۱۶۹- (مشابه تمرین ۴ صفحه ۶۹ کتاب)

$$y = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2-9} = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\Rightarrow y = 0 \text{ مجانب افقی}$$

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \text{ مجانب‌های قائم}$$

$$۱۷۰- (مشابه کار در کلاس صفحه ۵۳ کتاب) \quad \frac{-2}{0^+} = -\infty \quad (0/5) \quad (الف)$$

$$ب) -4 \quad (0/5) \quad (\text{مشابه مثال صفحه ۵۴ کتاب})$$

$$۱۷۱- \quad \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad (الف)$$

$$ب) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x} = +\infty$$

$$۱۷۲- \quad 2x+b=0 \Rightarrow -2+b=0 \Rightarrow b=2$$

$$\frac{a+1}{2} = 2 \Rightarrow a=3, \quad a+b=5$$

$$۱۷۳- \quad x^2+3=0 \Rightarrow x^2=-3 \text{ مجانب قائم ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2+3} = 0 \Rightarrow y=0 \text{ مجانب افقی}$$



الف) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{-2x}{f(x)} = \frac{-2a}{0^-} = +\infty$ -۱۸۴

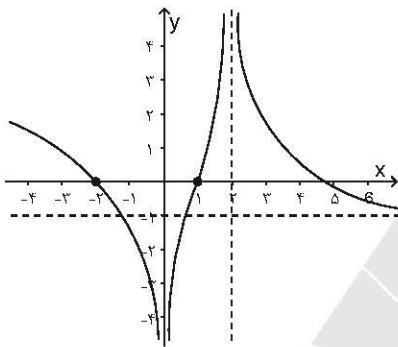
ب) $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{-2x}{f(x)} = \frac{-2a}{0^+} = -\infty$

تابع $y = \frac{-2x}{f(x)}$ در اطراف نقطه‌ای $x = a$ حد ندارد و رفتار بی کران دارد.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 2}{3 - x} = \frac{3 - 2}{3 - 3^+} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ -۱۸۵

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2x^2}{4x^3 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2x} = \frac{-1}{+\infty} = 0$

-۱۸۶ نمودارهای متفاوتی می‌توان رسم کرد. برای مثال:



$Df = R - \{+1, -1\}$ -۱۸۷

مجاانب‌های قائم $|x| - 1 = 0 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5}{|x| - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$

$\Rightarrow y = 2$ مجانب افقی

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 5}{|x| - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 5}{-x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x} = -2$

$\Rightarrow y = -2$ مجانب افقی

-۱۸۸

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{+\infty} = 0$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$, -۱۸۹

مجاانب‌های قائم: $Df = R - \{+2, -2\} \Rightarrow x = \pm 2$

مجاانب افقی: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$

+∞ -۱۷۴

الف) $\frac{3}{0^+} = +\infty$ -۱۷۵

ب) $\frac{3+0}{0-2} = -\frac{3}{2}$

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ -۱۷۶
مجاانب قائم:

مجاانب افقی: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+2x^2}{x^2-1} = 2 \Rightarrow y = 2$

-۱۷۷ $\frac{-1}{0^-} = +\infty$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{3} = +\infty$

-۱۷۸ $2x^2 + x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ مجاانب‌های قائم

$y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2 + 1}{2x^2 + x} = 2 \Rightarrow y = 2$ مجاانب افقی

-۱۷۹ ب) $-\infty$ الف) $+\infty$

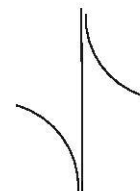
-۱۸۰ $\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{x+1}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\frac{\pi}{2}+1}{-\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{x+1}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\frac{\pi}{2}+1}{+\infty} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\tan x} = 0$ الف)

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

-۱۸۱ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+2x^2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{-x^2} = -2 \Rightarrow y = -2$ مجاانب افقی

مجاانب‌های قائم: $1 - x^2 = 0 \Rightarrow -x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm 1$

-۱۸۲ $x^3 - x = 0 \Rightarrow x = 0, \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x^3+x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x^3+x} = -\infty \end{cases}$



-۱۸۳ $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2} = -1 \Rightarrow b = 2$

$(-1)^2 + -2 + c = 0 \Rightarrow c = 1$



$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \infty \quad -201$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)} = \frac{1}{2}$$

طبق تعریف خط $x = -1$ مجانب قائم منحنی f است ولی خط $x = 3$ مجانب قائم تابع نمی‌باشد.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x+1}{4-x^2} = \frac{9}{0^-} = -\infty \quad -202$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5 + 3x^2 + 1}{-3x^5 + 3x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5}{-3x^5} = -\frac{4}{3}$$

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{مجانب قائم} \quad -203$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x^3} = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{مجانب افقی}$$

یادداشت ضروری دانش آموز:

$$-\infty - 190$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 2}{3 - x} = \frac{[3^+] - 2}{3 - 3^+} = \frac{3 - 2}{0^-} = -\infty \quad -191$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-1}{x-5} - \frac{2}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{x-5} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 3 - 0 = 3 \end{aligned}$$

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 0 \quad -192$$

خط $x = 1$ مجانب قائم ولی ریشه $x = 0$ ریشه‌ی صورت است لذا نمی‌تواند مجانب قائم باشد.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow y = 1 \quad \text{مجانب افقی}$$

$$+ \infty \text{ (الف) } \quad \text{ب) } 1 \quad -193$$

$$-194$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)}{x-1} = +\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{2x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+3}{2-x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{-x} = -1 \Rightarrow y = -1 \quad \text{مجانب افقی} \quad -195$$

$$\text{مجانب قائم: } 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x(x+1)}{(x+1)^2} \quad -196$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 2x - 1}{-2x^3 + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3}{-2x^3} = -\frac{5}{2}$$

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1 \quad \text{مجانب‌های قائم} \quad -197$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + 2x^2}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{-x^2} = -2 \Rightarrow y = -2 \quad \text{مجانب افقی}$$

$$-198 \quad \text{درست}$$

$$-199 \quad 3$$

$$-200 \quad y = 1, y = -2$$



درس

۱

آشنایی با مفهوم مشتق

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)-1}{x-3} \times \frac{1}{\sqrt{x-2}+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x-3} \times \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} = \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{1}{2} \quad \text{شیب خط مماس}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad \text{معادله خط مماس}$$

شیب	-۲	-۱	۰.۵	۲
نقطه	D	B	A	C

-۲۱۴

$$\text{الف)} A(2, 3) \Rightarrow m = f'(2) = \frac{3-1}{2-0} = 1$$

-۲۱۵

$$\text{ب)} y - 3 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x + 1$$

-۲۱۶ (I) ب (II) الف (III) ب

شیب	نقطه
۰	D
۲	C
۰.۵	B
-۰.۵	A

-۲۱۷

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 3x + 2) - (0)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = -1 \end{aligned}$$

-۲۱۸

-۲۱۹ نادرست

A -۲۲۰

-۲۲۱ الف) a ب) d ب) b

یادداشت ضروری دانش آموز:

-۲۰۴

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{1}{2} f'(2) = 0 \Rightarrow f'(2) = 0 \quad (0/25)$$

$$g'(x) = 1 \times f(x) + x \times f'(x) \Rightarrow g'(2) = 1 \times 2 + 2 \times 10 = 22$$

-۲۰۵ -۹ (صفحه ۸۳) (0/25)

-۲۰۶ الف) E (0/25) ب) B (0/25)

پ) C (0/25) ت) $m_D > m_A$ (0/25)

-۲۰۷ مشابه تمرین صفحه ۸۲

الف) b ب) d پ) e

-۲۰۸ (تمرین ۸ صفحه ۸۳ کتاب)

$$A(4, 25) \Rightarrow 1/5 = \frac{y_B - 25}{5 - 4} \Rightarrow y_B = 26.5 \Rightarrow B(5, 26.5)$$

$$1/5 = \frac{25 - y_C}{4 - 3} \Rightarrow y_C = 23.5 \Rightarrow C(3, 23.5)$$

-۲۰۹ الف) x = b

ب) x = d

پ) x = c

$$m_A < m_{AB} = 0 < m_B \quad -210$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \quad -211$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = -1$$

$$f'(x) = -2x + 10, \quad f'(2) = 6, \quad f(2) = 16 \quad -212$$

$$y - 16 = 6(x - 2) \Rightarrow y = 6x + 4$$

$$f(3) = \sqrt{3-2} = 1 \quad -213$$

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x - 3} \times \frac{\sqrt{x-2} + 1}{\sqrt{x-2} + 1} \end{aligned}$$



درس

۲

مشتق پذیری و پیوستگی

$$\begin{aligned} \text{روش دوم: } ((f+g) \circ f)'(1) &= \underbrace{(f \circ f)'(1) + (g \circ f)'(1)}_{(0/25)} \\ &= \underbrace{f'(1) \times f'(f(1)) + f'(1) \times g'(f(1))}_{(0/25)} \\ &= \underbrace{3 \times 3 + 3 \times 5}_{(0/25)} = 24 \end{aligned}$$

(صفحه ۹۵ و ۹۶)

-۲۲۸

$$\begin{aligned} \text{الف) } f'(x) &= \underbrace{2 \times 3x^2(x^3+1)}_{(0/25)} + \underbrace{(\sqrt{3x+2})}_{(0/25)} + \underbrace{\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x^3+1)^2}_{(0/25)} \\ \text{ب) } g'(x) &= \underbrace{2 \times 3 \times \cos 3x \sin 3x}_{(0/5)} + \underbrace{2x(1+\tan^2(x^2))}_{(0/5)} \end{aligned}$$

(اگر دانش آموزی به صورت $3 \sin^2 x$ بنویسد، (۵/۰) نمره بارم این قسمت تعلق گیرد.)

-۲۲۹ نادرست

-۲۳۰ (صفحه ۸۹ کتاب)

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1-2}{x-1} = 1 \quad (0/5)$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+x-2}{x-1} = 3 \quad (0/5)$$

$f'_+(1) \neq f'_-(1)$ در نتیجه تابع در $x=1$ مشتق پذیر نیست (۵/۰).

-۲۳۱ (صفحه ۱۰۱)

$$\text{الف) } f'(x) = \frac{\overbrace{\Delta(1+\tan^2 x)(1-\sin x) - (-\cos x)(\Delta \tan x)}^{(1)}}{(1-\sin x)^2} \quad (0/25)$$

$$\text{ب) } g'(x) = \underbrace{-7 \cos^6(x^2) \times 2x \times \sin(x^2)}_{(0/5)} \quad \text{صفحه ۹۶}$$

$$\text{پ) } h'(x) = \underbrace{6 \times 3 \times (3x+5)^5}_{(0/5)}$$

-۲۳۲ (صفحه ۱۰۱ کتاب)

$$(f+g)'(4) = f'(4) + g'(4) = \underbrace{(6(4)^2)}_{(0/25)} + \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{4}}}_{(0/25)} = 96 + \frac{1}{4}$$

-۲۲۲ درست (۵/۰)

-۲۲۳ ۲ (۵/۰)

-۲۲۴

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|(x-2) - f(0)}{x-0} \quad (0/25)$$

$$= \begin{cases} f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x(x-2) - 0}{x-0} = +2 & (0/25) \\ f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-2) - 0}{x-0} = -2 & (0/25) \end{cases}$$

چون $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ ، لذا تابع f در $x=0$ مشتق پذیر نیست. (۵/۰)

(اگر با استفاده از فرمول دیگر تعریف مشتق حل شده باشد، به تناسب بارم، نمره تعلق گیرد.)

-۲۲۵

$$\text{الف) } f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}(x^3-6x+1) - \underbrace{(3x^2-6)\sqrt{x+1}}_{(0/25)}}{(x^3-6x+1)^2} \quad (0/25)$$

$$\text{ب) } g'(x) = \underbrace{2(1+\tan^2 x)}_{(0/25)} + \underbrace{(\Delta)(6x^2)}_{(0/25)} - \underbrace{\sin(2x^3)}_{(0/25)} \cos^2(2x^3) \quad (0/25)$$

-۲۲۶ روش اول:

$$\left. \begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|-0}{x} = -1 & (0/5) \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-0}{x} = 0 & (0/5) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow f'_-(0) \neq f'_+(0) \quad \text{مشتق ناپذیر (۵/۰)}$$

روش دوم:

$$\left. \begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|-0}{h} = -1 & (0/5) \\ f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2-0}{h} = 0 & (0/5) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow f'_-(0) \neq f'_+(0) \quad \text{مشتق ناپذیر (۵/۰)}$$

(صفحه ۱۰۱)

-۲۲۷

$$\begin{aligned} \text{روش اول: } ((f+g) \circ f)'(1) &= \underbrace{f'(1) \times (f+g)'(f(1))}_{(0/25)} \\ &= \underbrace{f'(1) \times (f'(1) + g'(1))}_{(0/5)} = 3 \times (3+5) = 24 \end{aligned}$$



۲۴۰- صفحه ۹۳ کتاب

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

در صورت استفاده از فرمول‌های دیگر مشتق، بایم به تناسب تقسیم می‌شود.

۲۴۱- نادرست

۲۴۲- نباشد

$$\begin{aligned} f'(0) &= m = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty \\ A(0, 0) \end{aligned}$$

معادله مماس قائم: $x = 0$

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} (3x^2 + 2) + \sqrt{x} (6x) \\ \text{ب)} \quad g'(x) &= 3(-2 \sin 2x)(\cos^2 2x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

درس ۲

مشتق پذیری

۲۴۵- گزینه ت صحیح است. مشتق سهمی، تابع خطی (غیر ثابت) است. چون طول نقطه مینیمم، منفی است پس f' محور x را در ناحیه $x < 0$ قطع می‌کند.

۲۴۶- (مشابه تمرین ۶ صفحه ۱۰۰)

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1 - 2}{x-1} = 2 \\ f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 1 - 2}{x-1} = 3 \end{aligned}$$

$f'_+(1) \neq f'_-(1)$ پس تابع در $x = 1$ مشتق پذیر نمی‌باشد.

۲۴۷- مشابه تمرین صفحه ۱۰۱

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad f'(x) &= 3(4x^2 - 5x)^2 (\lambda x - 5)(\sqrt{x} + 1) + \frac{1}{2\sqrt{x}} (4x^2 - 5x)^3 \\ \text{ب)} \quad g'(x) &= \frac{9(x - x^2) - (1 - 2x)(9x + 1)}{(x - x^2)^2} \\ \text{پ)} \quad h'(x) &= 6x \cos(3x^2) \end{aligned}$$

۲۴۸- (مشابه تمرین ۱ صفحه ۸۱ کتاب)

$$\begin{aligned} x^3 - 8 = 0 &\Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 0) \\ f'(x) = 3x^2 &\Rightarrow m = f'(2) = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1)g(1) + g'(1)f(1) &= (6)(1) + \left(\frac{1}{2}\right)(3) = 6 + \frac{3}{2} \\ (f+g)'(4) + (f \times g)'(1) &= 96 + \frac{1}{4} \times 6 + \frac{3}{2} \times 6 = \frac{415}{4} \end{aligned}$$

۲۳۳- درست

۲۳۴- صفحه ۸۸

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = +\infty$$

تابع در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر نیست. (۰/۲۵)

۲۳۵- صفحه ۱۰۱

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad f'(x) &= (4x^3 + 2)(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} (x^2 + 2x) \\ \text{ب)} \quad g'(x) &= 3(1 + \tan^2 x) - 6 \sin^2 x \cos 2x \end{aligned}$$

۲۳۶- نادرست

۲۳۷- تابع پیوسته است.

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 3 + 1}{x-1} = 4$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 4 + 1}{x-1} = 3$$

در نقطه $x = 1$ مشتق ناپذیر است $\Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1)$

در صورت استفاده از فرمول‌های دیگر مشتق، برای محاسبه مشتق چپ و راست، بایم به تناسب تقسیم شود.

$$f'(x) = -2 \sin 2x \Rightarrow f''(x) = -2 \cos 2x \quad -238$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad f'(x) &= 9(15x^2 - 1)(5x^3 - x)^4 (\sqrt{2x+1}) \\ &\quad + \left(\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}\right) (5x^3 - x)^4 \end{aligned}$$

$$\text{ب)} \quad g'(x) = \frac{4(1 + \tan^2 x)(3x^2 - 1) - (6x) \times (4 \tan x)}{(3x^2 - 1)^2}$$

$$\text{ب) } f'(x) = \frac{-\Delta \sin x(1 - \sin x) - (-\cos x)(\Delta \cos x)}{(1 - \sin x)^2}$$

$$\text{الف) } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(\Delta x^2 - 3x) + 2\sqrt{x}(1 - 3) \quad -277$$

$$\text{ب) } g'(x) = 3 \cos 3x - 2(12x^2) \sin(4x^3 - 2) \cos(4x^3 - 2)$$

-278 درست

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad -279$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+1) = -2$$

چون مشتق چپ با مشتق راست برابر نیست پس مشتق پذیر نمی باشد.

۱۹ -280

$$\text{الف) } f'(x) = \frac{(2x-3)(-3x+2) - (-3)(x^2-3x+1)}{(-3x+2)^2} \quad -281$$

$$\text{ب) } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^2 + 5) + (6x)\sqrt{x}$$

$$\text{پ) } h'(x) = 3 \cos \sin^2 x - 2 \sin x \cos x$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 + 3) - 4}{x - 1} \quad -282$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(3x+1) - 4}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x-1)}{x-1} = 3$$

چون مشتق چپ و راست تابع برابر نیستند پس تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست.

۷ -283

$$A(2, 4), B(0, 0) \quad m = f'(1) = \frac{4-0}{2-0} = 2 \quad -284$$

$$C(0, 4), D(4, 0) \quad m = g'(1) = \frac{4-0}{0-4} = -1$$

$$h'(1) = \frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{g^2(1)} = \frac{2 \times 3 - 2(-1)}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\text{الف) } y' = \frac{2(x^3 - 2x^2) - (3x^2 - 4x)(2x+3)}{(x^3 - 2x^2)^2} \quad -285$$

$$\text{الف) } f'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \right) (x^3 + 1) + (3x^2)(\sqrt{3x+2})$$

$$\text{ب) } g'(x) = 7(2x+3)(x^2+3x+1)^6$$

$$\text{پ) } h'(x) = \frac{(2x-5)(-2x+9) - (-2)(x^2-5x+7)}{(-2x+9)^2}$$

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \sin 2x = \sin 2x + 2 \sin 2x = 3 \sin 2x \quad -288$$

$$f''(x) = 6 \cos 2x$$

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6 \cos 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

-289 تابع در $x=0$ پیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\left. \begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1 \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2-0}{x-0} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

$f'(0)$ موجود نیست.

-290 درست

-291 مماس قائم

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \quad -292$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1$$

چون مشتق چپ و راست تابع برابر نیستند پس تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست.

-293 نادرست

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x > 1 \\ x^3-2x & x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} a & x > 1 \\ 3x^2-2 & x \leq 1 \end{cases} \quad -294$$

$$\left. \begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = a \\ f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 - 2) = 1 \end{aligned} \right\} f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow a = 1$$

$$a+b = 1^3 - 2(1) = -1 \Rightarrow a+b = -1 \Rightarrow b = -2 \quad \text{پیوستگی تابع:}$$

$$(3f+2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1) = 3 \times 3 + 2 \times 5 = 19 \quad -295$$

$$\text{الف) } f'(x) = 3(2x)(x^2+1)^2(\Delta x-1) + \Delta(x^2+1)^3 \quad -296$$



$$= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{|x^3 + x| - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{-x(x+1)}{x+1} = 1$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{|x^3 - x| - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x(x+1)}{x+1} = -1$$

چون مشتق چپ و راست تابع برابر نیستند پس تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ کافی نشان دهیم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \times \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$$

$$= 0 \times f'(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

پس f در $x = a$ پیوسته است

$$\text{الف) } y' = \frac{2x(x^3 + 2x + 1) - (x^3 - 1)(3x^2 + 2)}{(x^3 + 2x + 1)^2} \quad -295$$

$$\text{ب) } y' = -6 \sin 2x \cos^3 2x$$

$$-296$$

$$-297$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x - 2| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)}{x - 2} = 1$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)}{x - 2} = -1$$

چون مشتق چپ و راست تابع برابر نیستند پس تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست.

$$(f + g)'(2) = f'(2) + g'(2) = 1 + 2 = 3 \quad -298$$

$$(fg)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = 1 \times (-3) + 3 \times 2 = -3 + 6 = 3$$

$$\text{الف) } y' = \frac{2x(x^3 + 2x - 5) - (x^3 + 1)(3x^2 + 2)}{(x^3 + 2x - 5)^2} \quad -299$$

$$\text{ب) } y' = -3 \times 2 \cos(-3x + 1) (-\sin(-3x + 1))$$

یادداشت ضروری دانش آموز:

$$\text{ب) } y' = 3 \times 2 \cos(2x + 1) \sin^2(2x + 1)$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^3 - 4| - 0}{x - 2} \quad -286$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 4$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^3 - 4| - 0}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^3 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = -4$$

چون مشتق چپ و راست تابع برابر نیستند پس تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست.

$$\text{الف) } f'(x) = 4 \left(6x^2 + \frac{1}{3\sqrt{x^3}} \right) (2x^3 + \sqrt{x} - 1)^3 \quad -287$$

$$\text{ب) } f'(x) = -\frac{1 \times (x^3 + 1) - 2x(x)}{(x + 1)^2} \times \sin\left(\frac{x}{x^3 + 1}\right)$$

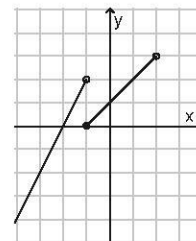
$$\frac{1}{9} \quad -288$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3}} = +\infty \quad -289$$

$$\text{الف) } y' = \frac{2x(5x^3 - 3x + 1) - (x^3 - 1)(15x^2 - 3)}{(5x^3 - 3x + 1)^2} \quad -290$$

$$\text{ب) } g'(x) = 3 \times 2 \cos(2x + 1) \sin^2(2x + 1)$$

-291 تابع f در $x = -1$ پیوسته نیست، پس در این نقطه مشتق پذیر نیست. در نتیجه در بازه $[-2, 0]$ مشتق پذیر نیست.



-292 نمودار (ب)، سهمی نمودار داده شده رو به پایین است. پس ضریب x^2 منفی است.

پس در مشتق تابع ضریب x منفی خواهد بود. در نتیجه نمودار مشتق، خطی با شیب منفی است.

-293 تابع f در $x = -1$ پیوسته است.

$$f(-1) = |(-1)^2 + (-1)| = 1 - 1 = 0$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$$



درس

۳

آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

۳۰۷- مشابه تمرین صفحه ۱۱۰

$$\text{الف) } \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{18 - 3}{3} = 5$$

$$\text{ب) } f'(t) = 4t - 1 \Rightarrow f'(4) = 15$$

۳۰۸- (مشابه تمرین ۴ صفحه ۱۰۹ کتاب)

$$f'(t) = 3t^2 - 1 = 2 \Rightarrow 3t^2 = 3 \Rightarrow t = \pm 1 \Rightarrow t = 1$$

۳۰۹- (مشابه تمرین صفحه ۱۱۰ کتاب)

$$d'(t) = t^2 + 10 \Rightarrow d'(2) = 14$$

$$-310- \Rightarrow f'(t) = \frac{-240}{t^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{-240}{16} = -15$$

$$\text{آهنگ متوسط} \Rightarrow \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{48 - 80}{2} = -16$$

$$-15 - (-16) = 1$$

درس ۳

آهنگ تغییر

$$-311- \text{سرعت متوسط} \Rightarrow \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = 25$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای} \Rightarrow h'(t) = -10t + 40 \Rightarrow h'(3) = 10$$

$$-312- f'(t) = -4t + 10 \Rightarrow f'(2) = -8 + 10 = 2$$

$$-313- \frac{1}{6}$$

$$-314- \text{الف) } m(t) = \sqrt{t} + t^2 \Rightarrow \begin{cases} m(3) = \sqrt{3} + 3^2 = 9 + \sqrt{3} \\ m(4) = \sqrt{4} + 4^2 = 2 + 16 = 18 \end{cases}$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{m(4) - m(3)}{4 - 3} = 18 - (9 + \sqrt{3}) = 9 - \sqrt{3}$$

$$\text{ب) } m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2t \Rightarrow m'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} + 2 \times 9 = \frac{1}{6} + 18 = \frac{109}{6}$$

۳۱۵- درست

۳۱۶- ۴-

$$-317- f(5) = 5^2 - 5 + 10 = 30$$

۳۰۰-

$$\text{الف) } \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{35}{25} = \frac{7}{5} \quad \text{ب) } f'(x) = 7 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=49} f'(49) = \frac{1}{2}$$

۳۰۱-

$$\text{الف) } \frac{h(4) - h(3)}{4 - 3} = \frac{80 - 75}{1} = 5$$

$$\text{روش دوم: } h'(3/5) = -10(3/5) + 40 = 5$$

$$\text{ب) } h'(t) = -10t + 40 \Rightarrow -10t + 40 = 20 \Rightarrow t = 2$$

(صفحه ۱۰۷)

۳۰۲- (صفحه ۱۱۰ کتاب)

$$\frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5}$$

۳۰۳- نادرست

۳۰۴- صفحه ۱۱۰

$$\text{الف) } \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ب) } f'(x) = \frac{-3x^2 + 12x + 6}{(x^2 + 2)^2} \Rightarrow f'(-1) = -1$$

۳۰۵- (صفحه ۱۱۰ کتاب)

$$f'(t) = \frac{-120}{t^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{-120}{4} = -30$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \left(\frac{120}{6} + 5 \right) - \left(\frac{120}{4} + 5 \right)$$

$$= \frac{25 - 35}{2} = -5 \Rightarrow -30 - 5 = -35$$

۳۰۶- صفحه ۱۰۹

$$\left. \begin{aligned} \text{آهنگ متوسط: } \frac{10 - 0}{4 - 0} &= \frac{5}{4} \\ \text{آهنگ لحظه‌ای: } m'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 = \frac{5}{4} \Rightarrow \sqrt{t} = t = 1$$



$$f(0) = 0^2 - 0 + 1 = 1$$

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{3 - 1}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای} = f'(t) = 2t - 1 = 2 \Rightarrow t = \frac{5}{2}$$

۳۱۸- درست

$$f'(t) = 4x + 5 \Rightarrow f'(-1) = 1$$

۳۱۹-

$$f'(2) = 13 \quad \text{برابر } 13$$

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 4t \Rightarrow m'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} + 4 \times 4 = \frac{65}{4}$$

۳۲۰-

$$f(x) = x^3 - 2x$$

۳۲۱-

$$f(2) = 2^3 - 2 \times 2 = 4$$

$$f(0) = 0^3 - 2 \times 0 = 0$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 0}{2} = 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \Rightarrow f'(1) = 3 \times 1^2 - 2 = 1$$

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2t \Rightarrow m'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} + 2 \times 9 = \frac{109}{6}$$

۳۲۲-

درس ۳

آهنگ تغییر

در داشته ضروری دانش آموز:

math-pilevar.ir



درس

۱

اکسترم های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

۳۲۹- (صفحه ۱۱۴ کتاب)

d مینیمم مطلق

c ماکزیمم مطلق

c ماکزیمم نسبی

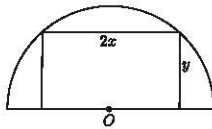
b مینیمم نسبی

۳۳۰- صفحه ۱۲۶

$$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow S(x) = 2x(\sqrt{16 - x^2})$$

$$S'(x) = \frac{32 - 4x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \quad x = \sqrt{4}, y = \sqrt{4}$$

طول $2\sqrt{4}$ و عرض $\sqrt{4}$



۳۳۱- ماکزیمم نسبی (تعریف صفحه ۱۱۲)

۳۳۲- تمرین ۷ صفحه ۱۲۶

$$f(1) = 2 \Rightarrow a - b = 1$$

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + a \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3, b = -4$$

۳۳۳- نادرست (صفحه ۱۲۴ کتاب)

۳۳۴- بالا (قضیه صفحه ۱۲۹ کتاب)

۳۳۵- (مشابه فعالیت صفحه ۱۱۵ کتاب)

الف) ۸ ب) -۴ پ) ۴ ت) ۲

۳۳۶- (مشابه تمرین ۶ صفحه ۱۲۵ کتاب)

$$g'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0$$

$$g(-2) = -8 - 4 - 5 = -17 \text{ min}$$

$$g(1) = 1 + 2 - 5 = -2 \text{ max}$$

$$\text{طول جعبه} = 16 - 2x, x \in [0, 8]$$

$$\text{عرض جعبه} = 6 - 2x, x \in [0, 3]$$

۳۳۷

۳۲۳-

$$f'(x) = 3x^2 - 12x \xrightarrow{f'=0} 3x(x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \in [-1, 3] \end{cases} \quad (0/25)$$

x	-1	0	3
f'	+	0	-
f''	-7	0	-27

رسم جدول (0/25)

(0, 0) نقطه ماکزیمم نسبی (0/25)، (0, 0) نقطه ماکزیمم مطلق (0/25) و (3, -27) نقطه مینیمم مطلق (0/25) این تابع در بازه [-1, 3] است.

۳۲۴- نادرست (صفحه ۱۱۶) (0/25)

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \quad (0/25)$$

$$\begin{cases} f(-1) = 11 \\ f(2) = -16 \\ f(3) = -9 \end{cases} \Rightarrow \text{max مطلق} = 11 \quad (0/25)$$

۳۲۵-

(صفحه ۱۲۵)

۳۲۶- (صفحه ۱۲۶ کتاب)

$$y' = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4 \notin [-2, 3] \quad (0/25)$$

$$f(-2) = -32, f(0) = 0, f(3) = -27 \quad (0/25)$$

$$\text{مینیمم مطلق} = -32 \quad (0/25)$$

$$\text{ماکزیمم مطلق} = 0 \quad (0/25)$$

۳۲۷- صفحه ۱۲۳

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = +1 \\ x = -1 \end{cases} \quad (0/25)$$

$$f(1) = -4 \text{ مینیمم مطلق} \quad (0/25)$$

$$f(0) = 0 \quad (0/25)$$

$$f(2) = 22 \text{ ماکزیمم مطلق} \quad (0/25)$$

۳۲۸- نادرست (صفحه ۱۱۶ کتاب)



$$f'(x) = \frac{1(x^2-1) - 2x(x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow -x^2-1=0$$

$\Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow$ معادله ریشه ندارد

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (1)^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (1)^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$$

تابع در $x = \pm 1$ مشتق ناپذیر و نقاط بحرانی تابع است.

۳۴۵- الف) $(0, 1), (1, 0), (-1, 0)$

ب) $(3, 8), (1, 0), (-1, 0)$

پ) خیر، زیرا در نقطه $(1, 0)$ از این فاصله مشتق پذیر نیست.

۳۴۶- $[-2, 2]$

۳۴۷- نادرست

۳۴۸- غ ق ق $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2$

$f(-1) = 13, f(2) = 4, f(1) = -7$

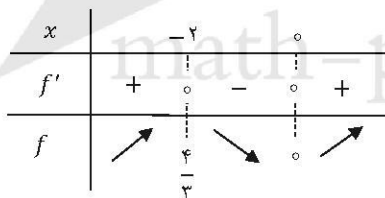
$\Rightarrow \min: (1, -7), \max: (-1, 13)$

۳۴۹- $f'(x) = x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2$

مینیم نسبی و مینیم مطلق $f(0) = 0$

$f(-2) = \frac{4}{3}$

ماکزیم مطلق $f(2) = 18$



۳۵۰- $f'(x) = 3x^2 + a, f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3$

$f(1) = 2 \Rightarrow 1 + a + b = 2 \xrightarrow{a=-3} b = 4$

۳۵۱- $f'(x) = x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

مینیم مطلق $f(0) = 0, f(1) = -\frac{2}{3}$

ماکزیم مطلق $f(-1) = f(2) = \frac{2}{3}$

۳۵۲- الف: نادرست ب: درست

۳۵۳- مثبت

$\Rightarrow v(x) = x(16-2x)(6-2x) = 4x^3 - 44x^2 + 96x, 0 \leq x \leq 3$

$\Rightarrow v'(x) = 12x^2 - 88x + 96 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \notin [0, 3] \\ x = \frac{4}{3} \in [0, 3] \end{cases}$

چون $v(0) = v(3) = 0$ پس به ازای $x = \frac{4}{3}$ بیشترین مقدار حجم حاصل می شود.

۳۳۸- درست

۳۳۹- $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \notin [-1, 1] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = -1 \\ f(0) = 1 \\ f(-1) = -3 \end{cases} \begin{matrix} \text{max مطلق} \\ \text{min مطلق} \end{matrix}$

۳۴۰- $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

$f(1) = -1, f(-1) = 3, f(2) = 3$

$\max f(x) = 3, \min f(x) = -1$

۳۴۱- $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2$

$f(-1) = 13, f(1) = -7, f(2) = 45$

$\min: (1, -7), \max: (2, 45)$

$f(2) = 1 \Rightarrow 1 = 8 + 4b + d \Rightarrow 4b + d = -7$

$f'(x) = 3x^2 + 2bx$

$f'(2) = 0 \Rightarrow 0 = 12 + 4b \Rightarrow b = -3$

$4b + d = -7 \xrightarrow{b=-3} -12 + d = -7 \Rightarrow d = 5$

۳۴۳- $-2 \leq x < -1 \Rightarrow f(x) = x^2 - x - 1$

$\Rightarrow f'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ غیر قابل قبول

$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + x + 1$

$\Rightarrow f'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$f(-2) = (-2)^2 + |-2 + 1| = 5$

$f(2) = (2)^2 + |2 + 1| = 7$ ماکزیم مطلق

مینیم مطلق $f(-\frac{1}{2}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left|-\frac{1}{2} + 1\right| = \frac{3}{4}$

$f(-1) = (-1)^2 + |-1 + 1| = 1$

۳۴۴- $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$ مجانب های قائم



۳۵۴- بحرانی

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad -355$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\swarrow$	0	$\nearrow$

تابع در بازه‌ی $(-\infty, 0)$ نزولی و در بازه $(0, +\infty)$ صعودی است.

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+4}} = 0 \Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow x=1 \quad -356$$

ماکزیمم مطلق $f(2) = 2$

مینیمم مطلق $f(1) = \sqrt{3}$

$$f'(x) = -4x^3 + a \quad -357$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow -4 + a = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow -1 + 4 + b = 2 \Rightarrow b = -1$$

۳۵۸- مثبت

برداشت ضروری راشت آموز:

math-pilevar.ir



درس

۲

جهت ثقلر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن

نقطه (۰, ۱) نقطه عطف تابع است.

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
f''	-	۰	+
f			

۳۶۶- بالا (قضیه صفحه ۱۲۹ کتاب)

۳۶۷- نادرست (صفحه ۱۲۴ کتاب)

۳۶۸- (مشابه تمرین ۴ صفحه ۱۳۶ کتاب)

$$\begin{cases} f(-1) = -a + b + 2 = 1 & \Rightarrow -a + b = -1 \\ f''(-1) = 0 & \Rightarrow -6a + 2b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{-1}{2}, b = \frac{1}{2}$$

۳۶۹- (تمرین صفحه ۱۳۶ کتاب)

$$f(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow a + b + 1 = 2 \Rightarrow a + b = 1$$

$$f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 0$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -2, b = 3$$

۳۷۰- نادرست

۳۷۱- C

۳۷۲- $D_f = R$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}$$

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
f''	+	۰	-
f			

ت. ن

$f'(1) = +\infty$ پس تابع در $x = 1$ مماس قائم دارد و $x = 1$ نقطه عطف است.

۳۷۳- الف) نادرست

ب) درست

پ) درست

۳۵۹- $f'(x) = 3ax^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = 6ax + 6$ (۰/۲۵)

$x = \frac{1}{2} \rightarrow 3a + 6 = 0 \Rightarrow a = -2$ (۰/۲۵)

۳۶۰-

$f(3) = -1 \Rightarrow 27 + 9a + 3b + c = -1$ (۰/۲۵)

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(3) = 0 \Rightarrow 27 + 6a + b = 0$ (۰/۲۵)

$f''(x) = 6x + 2a \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow a = -3, b = -9, c = 26$

(صفحه ۱۲۶ و ۱۳۶)

۳۶۱- (صفحه ۱۳۶ کتاب)

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$

$f(1) = -11 \Rightarrow 1 + a + b = -11$ (۰/۵)

$f''(1) = 0 \Rightarrow 6(1) + 2a = 0 \Rightarrow a = -3$ (۰/۲۵) $\Rightarrow b = -9$ (۰/۲۵)

$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{6}{(x-1)^3}$

۳۶۲-

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
f''	-	۰	+
f			

جدول (۰/۵)

نقطه عطف وجود ندارد (۰/۲۵)

۳۶۳- (صفحه ۱۳۶ کتاب)

$f(0) = 1 \Rightarrow c = 1$

$f(2) = -3 \Rightarrow 8a + 4b + 1 = -3 \Rightarrow 8a + 4b = -4$ (۱)

$f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0$ (۲)

$(1), (2) \Rightarrow a = 1, b = -3$

۳۶۴- نادرست (صفحه ۱۳۲)

۳۶۵- تمرین ۲ صفحه ۱۳۶

$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$



x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$-$	$+$	
f	$\searrow$	$\nearrow$	

۳۸۲- $f'(x) = 3x^2 + 3 \Rightarrow f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$
نقطه عطف $(0, 1)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	$+$	
f	$\searrow$	$\nearrow$	

نقطه عطف

۳۸۳- $f(1) = 1 \Rightarrow a + b - 1 = 1 \Rightarrow a + b = 2$
 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$
 $f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0$
$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 6a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 3$$

۳۸۴- مثبت

۳۸۵- $f'(x) = -3x^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = -6x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1$
نقطه عطف $(1, 3)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$+$	$-$	
f	$\searrow$	$\nearrow$	

یادداشت ضروری دانش آموز:

۳۷۴- $f(-1) = 1 \Rightarrow a - b = 3$

$f''(-1) = 0 \Rightarrow -6 + 2a = 0 \Rightarrow a = 3, b = 0$

۳۷۵- الف: نادرست ب: درست

۳۷۶- $f'(x) = -3x^2 + 6x \Rightarrow$

$f''(x) = -6x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

نقطه عطف $(1, 3)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$+$	$-$	
f	$\searrow$	$\nearrow$	

۳۷۷- د صیح است.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$

$x = \frac{1}{3} \Rightarrow 6a(\frac{1}{3}) + 2b = 0 \Rightarrow 2a + 2b = 0$

$f(1) = 2 \Rightarrow a(1)^3 + b(1)^2 + 1 = 2 \Rightarrow a + b = 1$

$$\begin{cases} 2a + 2b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 3$$

۳۷۸- $f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$

$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 1 = 3$

نقطه عطف $(-1, 3)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	$-$	$+$	
f	$\searrow$	$\nearrow$	

تغیر تابع در $(-1, +\infty)$ روبه بالا و در $(-\infty, -1)$ روبه پایین است.

۳۷۹- ۲

۳۸۰- الف: نقطه‌ی C ب: نقطه‌ی D

۳۸۱- $y' = \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow y'' = \frac{4}{(x-1)^3}, x-1=0 \Rightarrow x=1$

در بازه‌ی $(1, +\infty)$ تغییر روبه بالا و در بازه‌ی $(-\infty, 1)$ تغییر رو به پایین است. تابع نقطه عطف ندارد.

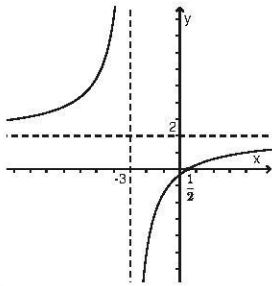
درس

۳

رسم نمودار تابع

مجاانب قائم $x = -3$ (۰/۲۵)
مجاانب افقی $y = 2$ (۰/۲۵)

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f'	+		+
f	2	$+\infty$	2



رسم شکل (۰/۵)

جدول (۰/۵)

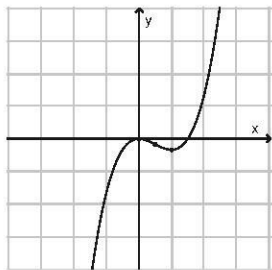
$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (۰/۲۵) \\ x = 1 & (۰/۲۵) \end{cases}$$

$$f''(x) = 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad (۰/۲۵)$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
f'	+	+	-	-	+
f''	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)
f	$+\infty$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$+\infty$

Max نسبی نقطه عطف Min نسبی



رسم نمودار (۰/۵)

جدول (۰/۵)

۳۹۰- (صفحه ۱۲۶ کتاب)

$$f'(x) = 2x^3 + 2x = 0 \Rightarrow 2x(x^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = -1 \text{ , غیر قابل قبول } x = 0$$

$$\text{اکیداً صعودی } [0, +\infty) \text{ , اکیداً نزولی } (-\infty, 0]$$

۳۸۶-

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{-1\}, \quad f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}, \quad x \neq -1 \quad (۰/۲۵)$$

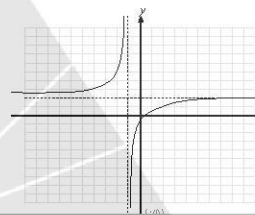
$$f''(x) = \frac{-6}{(x+1)^3}, \quad x \neq -1 \quad (۰/۲۵)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ مجاانب افقی } (۰/۲۵)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

مجاانب قائم $x = -1$ (۰/۲۵)



x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f''(x)$	(-)	(+)	(-)
f	2	$+\infty$	2

۳۸۷-

$$y' = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0, 4 \quad (۰/۲۵)$$

(اگر دانش آموزی مشتق را به صورت $(x-4)(3x) = (x-4)(x+2)(x-4) = (x-4)^2(x+2)$ بنویسد، (۰/۲۵) بارم این قسمت تعلق گیرد.)

$$y'' = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad (۰/۲۵)$$

رسم شکل (۰/۵) رسم جدول (۰/۵)

(صفحه ۱۳۹)



x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
y'	+	+	-	-	+
y''	(-)	(-)	(+)	(+)	(-)
y	$-\infty$	0	-16	0	$+\infty$

max عطف min

۳۸۸- (صفحه ۱۴۴)

$$y' = \frac{2(x+3) - 1(2x-1)}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2} > 0 \text{ اکیداً صعودی } (۰/۲۵)$$

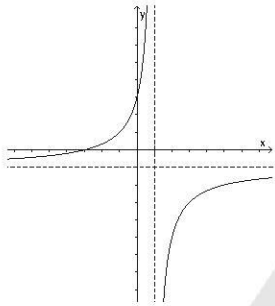


۳۹۴- مشابه تمرین ۱ صفحه ۱۴۴

مجانِب قائم $x=1$, مجانب افقی $y=-1$

نقطه بحرانی ندارد
 $f'(x) = \frac{4}{(1-x)^2}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+	+	+
f''	(+)	(+)	(-)
f	-1 ↗	$+\infty$	-1 ↘



درس ۳

رسم نمودار

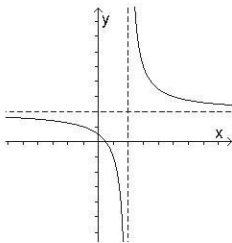
۳۹۵- (تمرین ۱ صفحه ۱۴۴)

مجانِب قائم $x=2$

مجانِب افقی $y=2$

$$y' = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	-	-	-
f''	(-)	(-)	(+)
f	2 ↗	$+\infty$	2 ↘



۳۹۶- (مشابه تمرین ۱ صفحه ۱۴۴)

مجانِب قائم $x=-2$

مجانِب افقی $y=1$

$$y' = \frac{4}{(x+2)^2} > 0$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f'	+	+	+
f''	(+)	(+)	(-)
f	1 ↗	$+\infty$	1 ↘

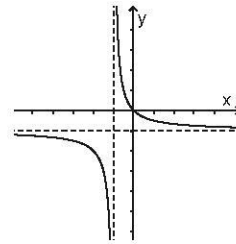
x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f	↘	1	↗

مجانِب قائم $x=-1$

مجانِب افقی $y=-1$

$$y' = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$$

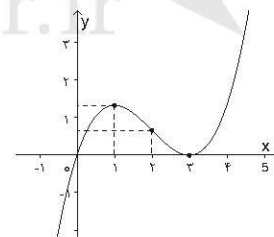
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	-	-	-
f''	(-)	(-)	(+)
f	-1 ↗	$+\infty$	-1 ↘



$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x=1, x=3$$

$$f''(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x=2$$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
f'	+	0	-	-	0	+
f''	(-)	(-)	0	(+)	(+)	(+)
f	$-\infty$ ↗	$\frac{4}{3}$ ↘	$\frac{2}{3}$ ↗	$\frac{2}{3}$ ↘	$+\infty$ ↗	
		Max نسبي	نقطه عطف		Min نسبي	



$$cx + d = 0 \Rightarrow d = -2c$$

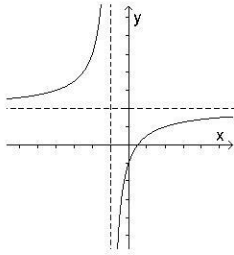
$$(-1, 0) \Rightarrow \frac{-a+b}{-c+d} = 0 \Rightarrow a=b$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{cx} = 1 \Rightarrow a=c$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

جواب منحصر بفرد نیست جواب های ساده نشده درست نیز نمره کامل تعلق می گیرد مثل:

$$a=b=c=-\frac{1}{2}d, f(x) = \frac{2x+2}{2x-4}$$

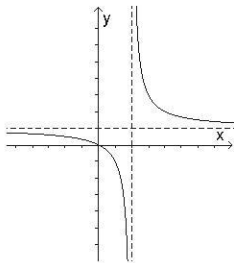


مجاوب قائم $x=2$

$$y' = \frac{-2}{(x-2)^2} < 0$$

مجاوب افقی $y=1$

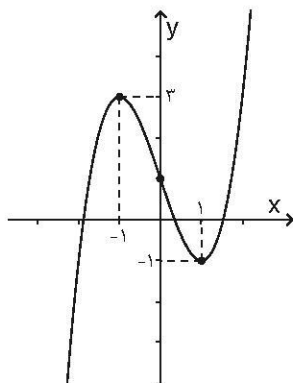
x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	-	-	-
f''	(-)	(+)	(-)
f	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$



$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

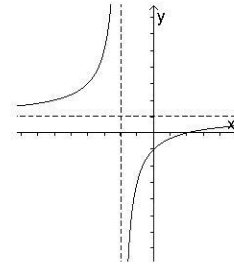
$$y'' = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
f'	+	0	-	-	0	+
f''	(-)	(-)	0	(+)	(+)	(+)
f	$-\infty$	↗	↘	↗	↘	$+\infty$
		Max نسبی	نقطه عطف	Min نسبی		



$$D_f = R, \quad y' = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2$$

$$y'' = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$$

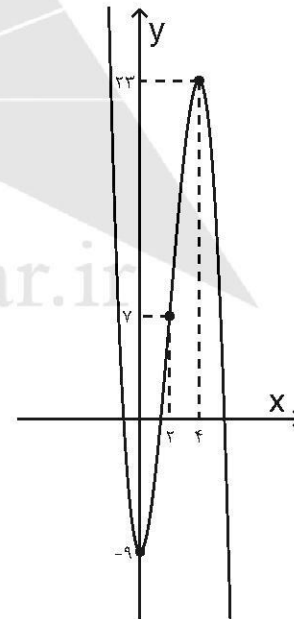


$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x, \quad D_f = R$$

$$f'(x) = -3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$f''(x) = -6x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
f'	-	0	+	+	0	-
f''	(+)	(+)	0	(-)	(-)	(-)
f	$+\infty$	-9	7	23	$-\infty$	
		Min نسبی	نقطه عطف	Max نسبی		



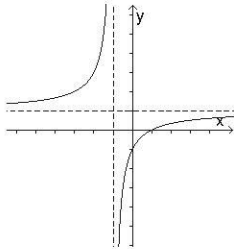
$$x = -1$$

$$y = 2$$

$$y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	+	+	+
f''	(+)	(-)	(-)
f	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	$+$		$+$
f''	$\cup$		$\cap$
f	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$



$$\Rightarrow y = 3 \Rightarrow (-1, 3) \text{ نقطه عطف}$$

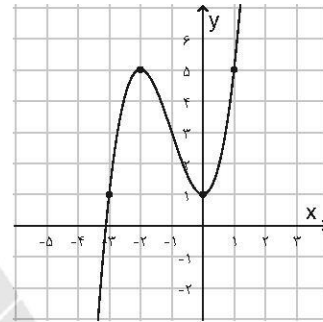
$$x = -3 \Rightarrow y = -27 + 27 + 1 = 1$$

$$\Rightarrow A(-3, 1) \text{ نقطه کمکی}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1 + 3 + 1 = 5 \Rightarrow B(1, 5) \text{ کمکی}$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	$-$	$+$
f''	$\cap$	$\cap$	$\cup$	$\cup$	$\cup$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

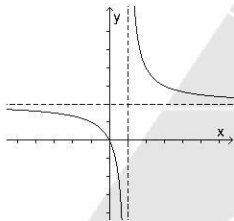
Max نسبی نقطه عطف Min نسبی



$$y = 2 \text{ مجانب افقی} \quad x = 1 \text{ مجانب قائم}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$-$		$-$
f''	$\cap$		$\cup$
f	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$



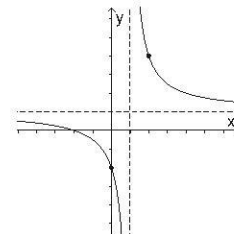
$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ مجانب قائم} \quad D_f = R - \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ مجانب افقی}$$

$$f'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$$

$$\text{نقاط کمکی } (0, -2), (2, 4)$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$-$		$-$
f''	$\cap$		$\cup$
f	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$

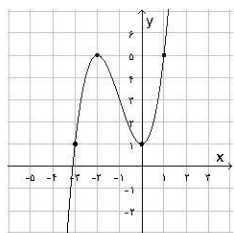


$$y' = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = -2$$

$$y'' = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	$-$	$+$
f''	$\cap$	$\cap$	$\cup$	$\cup$	$\cup$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Max نسبی نقطه عطف Min نسبی



$$y = 1 \text{ مجانب افقی} \quad x = -1 \text{ مجانب قائم}$$

$$f'(x) = \frac{1(x+1) - 1(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$$

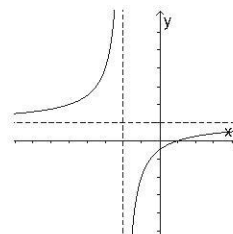
$$y = 1 \text{ مجانب افقی}, \quad x = -2 \text{ مجانب قائم}$$



یادداشت ضروری دانش آموز:

$$f'(x) = \frac{3}{(x-2)^2} > 0$$

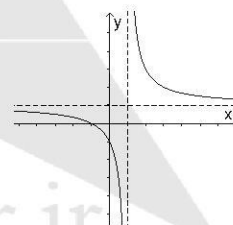
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f'	+		+
f''	(+)		(-)
f	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$



مجاانب قائم $x = 1$ مجاانب افقی $y = 1$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$$

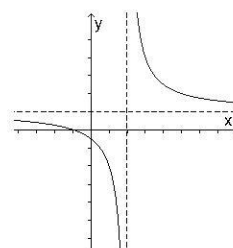
x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-		-
f''	(-)		(+)
f	$\searrow$	$+\infty$	$\nearrow$



مجاانب قائم $x = 2$ مجاانب افقی $y = 1$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	-		-
f''	(-)		(+)
f	$\searrow$	$+\infty$	$\nearrow$



-۴۰۷

-۴۰۸

درس ۳

رسم نمودار



درس

۱

اکسترم های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

۴۱۵- (صفحه ۱۱۴ کتاب)

d مینیمم مطلق

c ماکزیمم مطلق

c ماکزیمم نسبی

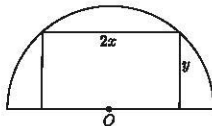
b مینیمم نسبی

۴۱۶- صفحه ۱۲۶

$$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow S(x) = 2x(\sqrt{16 - x^2})$$

$$S'(x) = \frac{32 - 4x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \quad x = \sqrt{4}, y = \sqrt{4}$$

طول $2\sqrt{4}$ و عرض $\sqrt{4}$



۴۱۷- ماکزیمم نسبی (تعریف صفحه ۱۱۲)

۴۱۸- تمرین ۷ صفحه ۱۲۶

$$f(1) = 2 \Rightarrow a - b = 1$$

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + a \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3, b = -4$$

۴۱۹- نادرست (صفحه ۱۲۴ کتاب)

۴۲۰- بالا (قضیه صفحه ۱۲۹ کتاب)

۴۲۱- (مشابه فعالیت صفحه ۱۱۵ کتاب)

الف) ۸ ب) -۴ پ) ۴ ت) ۲

۴۲۲- (مشابه تمرین ۶ صفحه ۱۲۵ کتاب)

$$g'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0$$

$$g(-2) = -8 - 4 - 5 = -17 \text{ min}$$

$$g(1) = 1 + 2 - 5 = -2 \text{ max}$$

$$\text{طول جعبه} = 16 - 2x, x \in [0, 8]$$

$$\text{عرض جعبه} = 6 - 2x, x \in [0, 3]$$

۴۲۳

۴۰۹

$$f'(x) = 3x^2 - 12x \xrightarrow{f'=0} 3x(x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \in [-1, 3] \end{cases} \quad (0/25)$$

x	-1	0	3
f'	+	0	-
f''	-7	0	-27

رسم جدول (0/25)

(0, 0) نقطه ماکزیمم نسبی (0/25)، (0, 0) نقطه ماکزیمم مطلق (0/25) و (3, -27) نقطه مینیمم مطلق (0/25) این تابع در بازه [-1, 3] است.

۴۱۰- نادرست (صفحه ۱۱۶) (0/25)

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \quad (0/25)$$

$$\begin{cases} f(-1) = 11 \\ f(2) = -16 \\ f(3) = -9 \end{cases} \Rightarrow \text{max مطلق} = 11 \quad (0/25)$$

۴۱۱

(صفحه ۱۲۵)

۴۱۲- (صفحه ۱۲۶ کتاب)

$$y' = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x=0, x=4 \notin [-2, 3] \quad (0/25)$$

$$f(-2) = -32, f(0) = 0, f(3) = -27 \quad (0/25)$$

$$\text{مینیمم مطلق} = -32 \quad (0/25)$$

$$\text{ماکزیمم مطلق} = 0 \quad (0/25)$$

۴۱۳- صفحه ۱۲۳

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=+1 \\ x=-1 \end{cases} \quad (0/25)$$

$$f(1) = -4 \text{ مینیمم مطلق} \quad (0/25)$$

$$f(0) = 0 \quad (0/25)$$

$$f(2) = 22 \text{ ماکزیمم مطلق} \quad (0/25)$$

۴۱۴- نادرست (صفحه ۱۱۶ کتاب)



$$f'(x) = \frac{1(x^2-1) - 2x(x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow -x^2-1=0$$

$\Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow$ معادله ریشه ندارد

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (1)^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (1)^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$$

تابع در $x = \pm 1$ مشتق‌ناپذیر و نقاط بحرانی تابع است.

(الف) $(0, 1), (1, 0), (-1, 0)$

(ب) $(3, 8), (1, 0), (-1, 0)$

(پ) خیر، زیرا در نقطه‌ی $(1, 0)$ از این فاصله مشتق‌پذیر نیست.

۴۳۲- $[-2, 2]$

۴۳۳- نادرست

۴۳۴- غ ق ق $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2$

$f(-1) = 13, f(2) = 4, f(1) = -7$

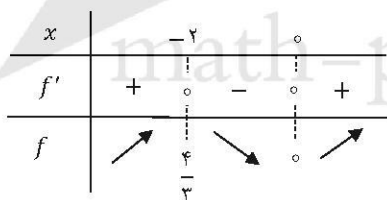
$\Rightarrow \min: (1, -7), \max: (-1, 13)$

۴۳۵- $f'(x) = x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2$

مینیم نسبی و مینیم مطلق $f(0) = 0$

$f(-2) = \frac{4}{3}$

ماکزیم مطلق $f(2) = 18$



۴۳۶- $f'(x) = 3x^2 + a, f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3$

$f(1) = 2 \Rightarrow 1 + a + b = 2 \xrightarrow{a=-3} b = 4$

۴۳۷- $f'(x) = x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

مینیم مطلق $f(0) = 0, f(1) = -\frac{2}{3}$

ماکزیم مطلق $f(-1) = f(2) = \frac{2}{3}$

۴۳۸- الف: نادرست ب: درست

۴۳۹- مثبت

$\Rightarrow v(x) = x(16-2x)(6-2x) = 4x^3 - 44x^2 + 96x, 0 \leq x \leq 3$

$\Rightarrow v'(x) = 12x^2 - 88x + 96 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \notin [0, 3] \\ x = \frac{4}{3} \in [0, 3] \end{cases}$

چون $v(0) = v(3) = 0$ پس به ازای $x = \frac{4}{3}$ بیشترین مقدار حجم حاصل می‌شود.

۴۲۴- درست

۴۲۵- $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \notin [-1, 1] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = -1 \\ f(0) = 1 \\ f(-1) = -3 \end{cases} \begin{matrix} \text{max مطلق} \\ \text{min مطلق} \end{matrix}$

۴۲۶- $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

$f(1) = -1, f(-1) = 3, f(2) = 3$

$\max f(x) = 3, \min f(x) = -1$

۴۲۷- $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2$

$f(-1) = 13, f(1) = -7, f(2) = 45$

$\min: (1, -7), \max: (2, 45)$

۴۲۸- $f(2) = 1 \Rightarrow 1 = 8 + 4b + d \Rightarrow 4b + d = -7$

$f'(x) = 3x^2 + 2bx$

$f'(2) = 0 \Rightarrow 0 = 12 + 4b \Rightarrow b = -3$

$4b + d = -7 \xrightarrow{b=-3} -12 + d = -7 \Rightarrow d = 5$

۴۲۹- $-2 \leq x < -1 \Rightarrow f(x) = x^2 - x - 1$

$\Rightarrow f'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ غیرقابل قبول

$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + x + 1$

$\Rightarrow f'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$f(-2) = (-2)^2 + |-2 + 1| = 5$

$f(2) = (2)^2 + |2 + 1| = 7$ ماکزیم مطلق

مینیم مطلق $f(-\frac{1}{2}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left|-\frac{1}{2} + 1\right| = \frac{3}{4}$

$f(-1) = (-1)^2 + |-1 + 1| = 1$

۴۳۰- $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$ مجانب‌های قائم



۴۴۰- بحرانی

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

۴۴۱-

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\swarrow$	0	$\nearrow$

تابع در بازه‌ی $(-\infty, 0)$ نزولی و در بازه $(0, +\infty)$ صعودی است.

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+4}} = 0 \Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow x=1$$

۴۴۲-

$$f(0) = f(2) = 2 \text{ ماکزیمم مطلق}$$

$$f(1) = \sqrt{3} \text{ مینیمم مطلق}$$

$$f'(x) = -4x^3 + a$$

۴۴۳-

$$f'(1) = 0 \Rightarrow -4 + a = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow -1 + 4 + b = 2 \Rightarrow b = -1$$

۴۴۴- مثبت

یادداشت ضروری دانش آموز:

math-pilevar.ir



درس

۲

جهت ثقلر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن

نقطه (۰, ۱) نقطه عطف تابع است.

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
f''	-	۰	+
f			

۴۵۲- بالا (قضیه صفحه ۱۲۹ کتاب)

۴۵۳- نادرست (صفحه ۱۲۴ کتاب)

۴۵۴- (مشابه تمرین ۴ صفحه ۱۳۶ کتاب)

$$\begin{cases} f(-1) = -a + b + 2 = 1 & \Rightarrow -a + b = -1 \\ f''(-1) = 0 & \Rightarrow -6a + 2b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{-1}{2}, b = \frac{-3}{2}$$

۴۵۵- (تمرین صفحه ۱۳۶ کتاب)

$$f(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow a + b + 1 = 2 \Rightarrow a + b = 1$$

$$f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 0$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -2, b = 3$$

۴۵۶- نادرست

۴۵۷- C

۴۵۸- $D_f = R$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}$$

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
f''			
f		ت. ن	

$f'(1) = +\infty$ پس تابع در $x = 1$ مماس قائم دارد و $x = 1$ نقطه عطف است.

۴۵۹- الف) نادرست

ب) درست

پ) درست

۴۴۵- $f'(x) = 3ax^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = 6ax + 6$ (۰/۲۵)

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow 3a + 6 = 0 \Rightarrow a = -2$ (۰/۲۵)

۴۴۶-

$f(3) = -1 \Rightarrow 27 + 9a + 3b + c = -1$ (۰/۲۵)

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(3) = 0 \Rightarrow 27 + 6a + b = 0$ (۰/۲۵)

$f''(x) = 6x + 2a \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow a = -3, b = -9, c = 26$

(صفحه ۱۲۶ و ۱۳۶)

۴۴۷- (صفحه ۱۳۶ کتاب)

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$

$f(1) = -11 \Rightarrow 1 + a + b = -11$ (۰/۵)

$f''(1) = 0 \Rightarrow 6(1) + 2a = 0 \Rightarrow a = -3$ (۰/۲۵) $\Rightarrow b = -9$ (۰/۲۵)

۴۴۸- $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{6}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
f''	-		+
f			

جدول (۰/۵)

نقطه عطف وجود ندارد (۰/۲۵)

۴۴۹- (صفحه ۱۳۶ کتاب)

$f(0) = 1 \Rightarrow c = 1$

$f(2) = -3 \Rightarrow 8a + 4b + 1 = -3 \Rightarrow 8a + 4b = -4$ (۱)

$f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0$ (۲)

$(1), (2) \Rightarrow a = 1, b = -3$

۴۵۰- نادرست (صفحه ۱۳۲)

۴۵۱- تمرین ۲ صفحه ۱۳۶

$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$



x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$-$	$+$	
f	$\searrow$	$\nearrow$	

-۴۶۸
 $f'(x) = 3x^2 + 3 \Rightarrow f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$
 نقطه عطف $(0, 1)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	$+$	
f	$\searrow$	$\nearrow$	

نقطه عطف

-۴۶۹
 $f(1) = 1 \Rightarrow a + b - 1 = 1 \Rightarrow a + b = 2$
 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$
 $f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 6a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 3$$

-۴۷۰ مثبت

-۴۷۱
 $f'(x) = -3x^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = -6x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1$
 نقطه عطف $(1, 3)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$+$	$-$	
f	$\searrow$	$\nearrow$	

یادداشت ضروری دانش آموز:

-۴۶۰
 $f(-1) = 1 \Rightarrow a - b = 3$
 $f''(-1) = 0 \Rightarrow -6 + 2a = 0 \Rightarrow a = 3, b = 0$

-۴۶۱ الف: نادرست ب: درست

-۴۶۲
 $f'(x) = -3x^2 + 6x \Rightarrow$
 $f''(x) = -6x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

نقطه عطف $(1, 3)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$+$	$-$	
f	$\searrow$	$\nearrow$	

-۴۶۳ د صیح است.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$
 $x = \frac{1}{3} \Rightarrow 6a(\frac{1}{3}) + 2b = 0 \Rightarrow 2a + 2b = 0$
 $f(1) = 2 \Rightarrow a(1)^3 + b(1)^2 + 1 = 2 \Rightarrow a + b = 1$

$$\begin{cases} 2a + 2b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 3$$

-۴۶۴
 $f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$
 $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 1 = 3$

نقطه عطف $(-1, 3)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	$-$	$+$	
f	$\searrow$	$\nearrow$	

تغیر تابع در $(-1, +\infty)$ روبه بالا و در $(-\infty, -1)$ روبه پایین است.

-۴۶۵ ۲

-۴۶۶ الف: نقطه‌ی C ب: نقطه‌ی D

-۴۶۷
 $y' = \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow y'' = \frac{4}{(x-1)^3}, x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$

در بازه‌ی $(1, +\infty)$ تغییر روبه بالا و در بازه‌ی $(-\infty, 1)$ تغییر رو به پایین است. تابع نقطه عطف ندارد.

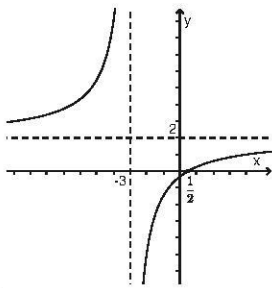
درس

۳

رسم نمودار تابع

مجاانب قائم $x = -3$ (۰/۲۵)
مجاانب افقی $y = 2$ (۰/۲۵)

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f'	+	+	+
f	2	$+\infty$	2



رسم شکل (۰/۵)

جدول (۰/۵)

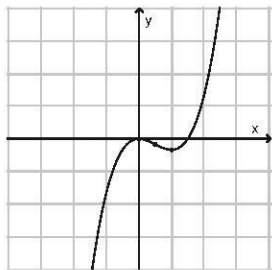
$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (۰/۲۵) \\ x = 1 & (۰/۲۵) \end{cases}$$

$$f''(x) = 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad (۰/۲۵)$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
f'	+	+	-	-	+
f''	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)
f	$+\infty$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$+\infty$

Max نسبی نقطه عطف Min نسبی



رسم نمودار (۰/۵)

جدول (۰/۵)

۴۷۶- (صفحه ۱۲۶ کتاب)

$$f'(x) = 2x^3 + 2x = 0 \Rightarrow 2x(x^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = -1 \quad , \quad x = 0 \quad \text{غیر قابل قبول}$$

$$\text{اکیداً صعودی } [0, +\infty) \quad , \quad \text{اکیداً نزولی } (-\infty, 0]$$

۴۷۲-

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{-1\}, \quad f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}, \quad x \neq -1 \quad (۰/۲۵)$$

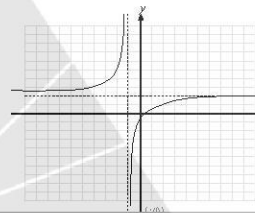
$$f''(x) = \frac{-6}{(x+1)^3}, \quad x \neq -1 \quad (۰/۲۵)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ مجاانب افقی} \quad (۰/۲۵)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

مجاانب قائم $x = -1$ (۰/۲۵)



x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+
$f''(x)$	(-)	(-)	(-)
f	2	$+\infty$	2

۴۷۳-

درس ۳

رسم نمودار

$$y' = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0, 4 \quad (۰/۲۵)$$

(اگر دانش آموزی مشتق را به صورت $(x-4)(3x) = (x-4)(x+2)(x-4) = (x-4)^2(x+2)$ بنویسد، (۰/۲۵) بارم این قسمت تعلق گیرد.)

$$y'' = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad (۰/۲۵)$$

رسم شکل (۰/۵) رسم جدول (۰/۵)

(صفحه ۱۳۹)



x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
y'	+	+	-	-	+
y''	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)
y	$-\infty$	0	-16	0	$+\infty$

max عطف min

۴۷۴- (صفحه ۱۴۴)

$$y' = \frac{2(x+3) - 1(2x-1)}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2} > 0 \quad \text{اکیداً صعودی} \quad (۰/۲۵)$$

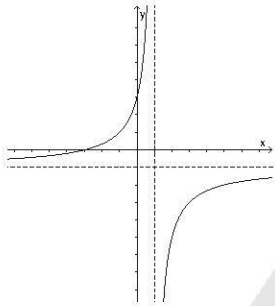


۴۸۰- مشابه تمرین ۱ صفحه ۱۴۴

مجانِب قائم $x=1$, مجانب افقی $y=-1$

نقطه بحرانی ندارد $f'(x) = \frac{4}{(1-x)^2}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+		+
f''	(+)		(-)
f	-1 ↗		↘ -1



درس ۳

رسم نمودار

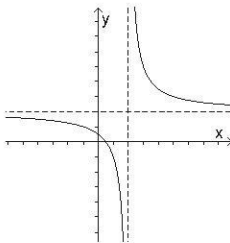
۴۸۱- (تمرین ۱ صفحه ۱۴۴)

مجانِب قائم $x=2$

مجانِب افقی $y=2$

$y' = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	-		-
f''	(-)		(+)
f	↘ 2		↗ 2



۴۸۲- (مشابه تمرین ۱ صفحه ۱۴۴)

مجانِب قائم $x=-2$

مجانِب افقی $y=1$

$y' = \frac{4}{(x+2)^2} > 0$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f'	+		+
f''	(+)		(-)
f	↗ 1		↘ 1

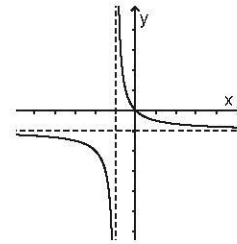
x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-		+
f	↘		↗

مجانِب قائم $x=-1$

مجانِب افقی $y=-1$

$y' = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$

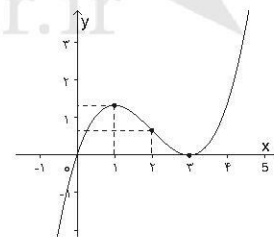
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	-		-
f''	(-)		(+)
f	↘ -1		↗ -1



$f'(x) = x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x=1, x=3$

$f''(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
f'	+	0	-	-	0	+
f''	(-)	(-)	0	(+)	(+)	(+)
f	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$+\infty$	
		Max نسبی	نقطه عطاف	Min نسبی		



$cx + d = 0 \Rightarrow d = -2c$

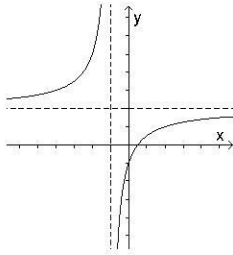
$(-1, 0) \Rightarrow \frac{-a+b}{-c+d} = 0 \Rightarrow a=b$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{cx} = 1 \Rightarrow a=c$

$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

جواب منحصر بفرد نیست جواب های ساده نشده درست نیز نمره کامل تعلق می گیرد مثل:

$a=b=c=-\frac{1}{2}d, f(x) = \frac{2x+2}{2x-4}$

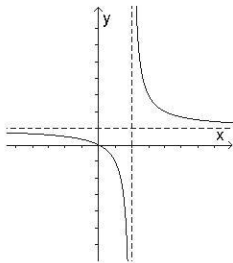


مجاوب قائم $x=2$

$$y' = \frac{-2}{(x-2)^2} < 0$$

مجاوب افقی $y=1$

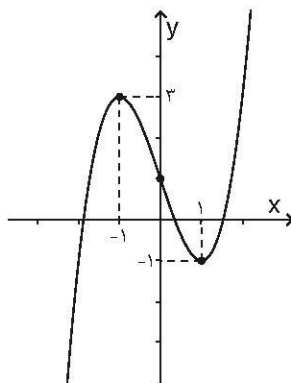
x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	-	-	-
f''	(-)	(+)	(-)
f	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$



$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

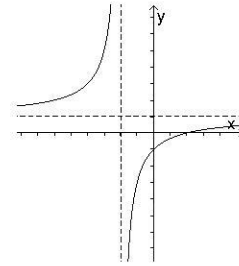
$$y'' = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
f'	+	0	-	-	0	+
f''	(-)	(-)	0	(+)	(+)	(+)
f	$-\infty$	↗	↘	↗	↘	$+\infty$
		Max نسبی	نقطه عطف	Min نسبی		



$$D_f = R, \quad y' = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2$$

$$y'' = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$$

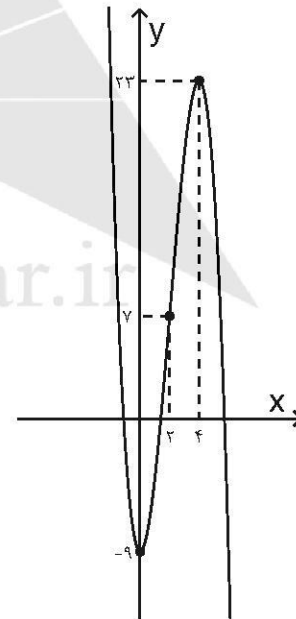


$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x, \quad D_f = R$$

$$f'(x) = -3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$f''(x) = -6x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
f'	-	0	+	+	0	-
f''	(+)	(+)	0	(-)	(-)	(-)
f	$+\infty$	-9	7	23	$-\infty$	
		Min	نقطه	Max		
		نسبی	عطف	نسبی		



$$x = -1$$

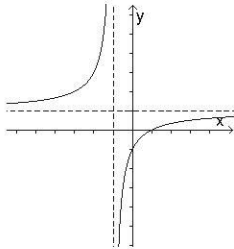
$$y = 2$$

$$y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	+	+	+
f''	(+)	(-)	(-)
f	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$



x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	$+$		$+$
f''	$\cup$		$\cap$
f	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$



$$\Rightarrow y = 3 \Rightarrow (-1, 3) \text{ نقطه عطف}$$

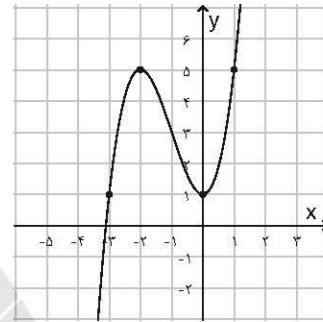
$$x = -3 \Rightarrow y = -27 + 27 + 1 = 1$$

$$\Rightarrow A(-3, 1) \text{ نقطه کمکی}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1 + 3 + 1 = 5 \Rightarrow B(1, 5) \text{ کمکی}$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	$-$	$+$
f''	$\cap$	$\cap$	$\cup$	$\cup$	$\cup$
f	$\nearrow$	5	$\searrow$	3	$\nearrow$

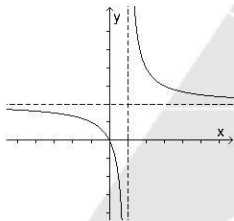
نسبی Max نقطه عطف نسبی Min



$$y = 2 \text{ مجانب افقی} \quad x = 1 \text{ مجانب قائم}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$-$		$-$
f''	$\cap$		$\cup$
f	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$



-۴۹۰

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ مجانب قائم} \quad Df = R - \{1\}$$

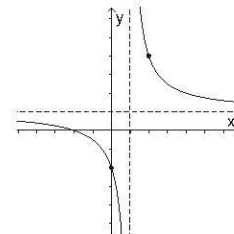
-۴۸۸

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ مجانب افقی}$$

$$f'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$$

نقاط کمکی $(0, -2), (2, 4)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$-$		$-$
f''	$\cap$		$\cup$
f	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$

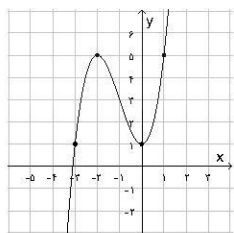


$$y' = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = -2$$

$$y'' = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	$-$	$+$
f''	$\cap$	$\cap$	$\cup$	$\cup$	$\cup$
f	$\nearrow$	5	$\searrow$	3	$\nearrow$

نسبی Max نقطه عطف نسبی Min



$$y = 1 \text{ مجانب افقی}, \quad x = -2 \text{ مجانب قائم}$$

-۴۹۲

$$y = 1 \text{ مجانب افقی} \quad x = -1 \text{ مجانب قائم}$$

-۴۸۹

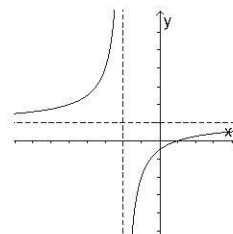
$$f'(x) = \frac{1(x+1) - 1(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$$



یادداشت ضروری دانش آموز:

$$f'(x) = \frac{3}{(x-2)^2} > 0$$

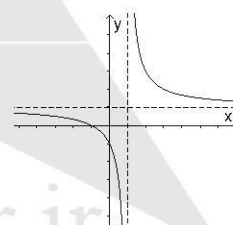
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f'	+		+
f''	(+)		(-)
f	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$



مجاانب قائم $x = 1$ مجاانب افقی $y = 1$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$$

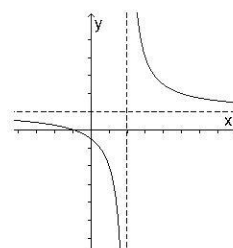
x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-		-
f''	(-)		(+)
f	$\searrow$	$+\infty$	$\nearrow$



مجاانب قائم $x = 2$ مجاانب افقی $y = 1$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	-		-
f''	(-)		(+)
f	$\searrow$	$+\infty$	$\nearrow$



-۴۹۳

درس ۳

رسم نمودار



یادداشت ضروری دانش آموز

یادداشت ضروری دانش آموز:

یادداشت
دانش آموز

math-pilevar.ir



«مجموعه کتاب‌های سمن»



math-pilevar.ir

@plv.math



978-622-5513-44-0