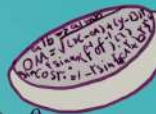


بخور جانم!
برات خوبه!

۱

سوالات
موضوعی
نهایی
(سمن)



$$\begin{aligned} a/b &= \frac{a}{b} \\ \sin 2x &= 2\sin x \cos x \\ a/b &= \frac{a}{b} \\ a &< \cos \\ 4x &= m \end{aligned}$$



۷

حسابان ۲

۷

۷

مجموعه سوالات نهایی حسابان ۲
پایه دوازدهم رشته ریاضی فیزیک

یاسخ
تشریحی

رقیه پيله ور - میکائيل صدقي

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است

www.math-pilevar.com

بِسْمِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

سوالات موضوعی نهایی (سمن)

حسابان ۲

(۲۳ دوره سوال نهایی حسابان ۲)

math-pilevar.ir

مؤلفین:

رقیه پیلهور نیار

میکائیل صدقی

سرشناسه	: پيله‌ور نيار، رقيه، ۱۳۶۰-
عنوان و نام پديدآور	: سوالات موضوعی نهایی حسابان (۲)/مولفین رقيه پيله‌ور نيار، ميكائيل صدقي.
مشخصات نشر	: اردبیل: گونش‌نگار، ۱۴۰۴.
مشخصات ظاهري	: ۱۳۶ ص: جدول، نمودار؛ ۲۲ × ۲۹ س.م.
شابک	: ۹۷۸-۶۲۲-۵۵۱۳-۴۴-۰ : ۳۶۰۰۰۰۰ ريال
وضعیت فهرست نویسی	: فیپای مختصر
شناسه افزوده	: صدقي، ميكائيل، ۱۳۵۳-
شماره کتابشناسی ملی	: ۹۳۶۳۲۶۳
اطلاعات رکورد کتابشناسی	: فیپا



- ◀ نام کتاب : سوالات موضوعی نهایی حسابان ۲
- ◀ مولفین : رقيه پيله‌ور و ميكائيل صدقي
- ◀ ناشر : انتشارات گونش‌نگار
- ◀ طراح روجلد : رباب حامدسلطانی
- ◀ رسم نمودارها : رقيه پيله‌ور
- ◀ نوبت چاپ : ویرایش سوم، ۱۴۰۴
- ◀ تیراژ : ۱۰۰۰ جلد
- ◀ قیمت : ۳۶۰۰۰۰۰ ريال
- ◀ شابک : ۹۷۸-۶۲۲-۵۵۱۳-۴۴-۰

آدرس: اردبیل، اول خیابان دانشگاه، روبروی اداره مخابرات، انتشارات گونش‌نگار

۰۹۱۴۳۵۸۵۶۲۸ — ۰۴۵ — ۳۳۵۲۳۳۵۹

www.gunashnegarpub.ir

کلیه حقوق قانونی، مادی و معنوی برای مولفین و ناشر محفوظ است هیچ شخص حقوقی یا حقیقی حق تکثیر تمام یا قسمتی از این مجموعه را ندارد، در صورت مشاهده تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است

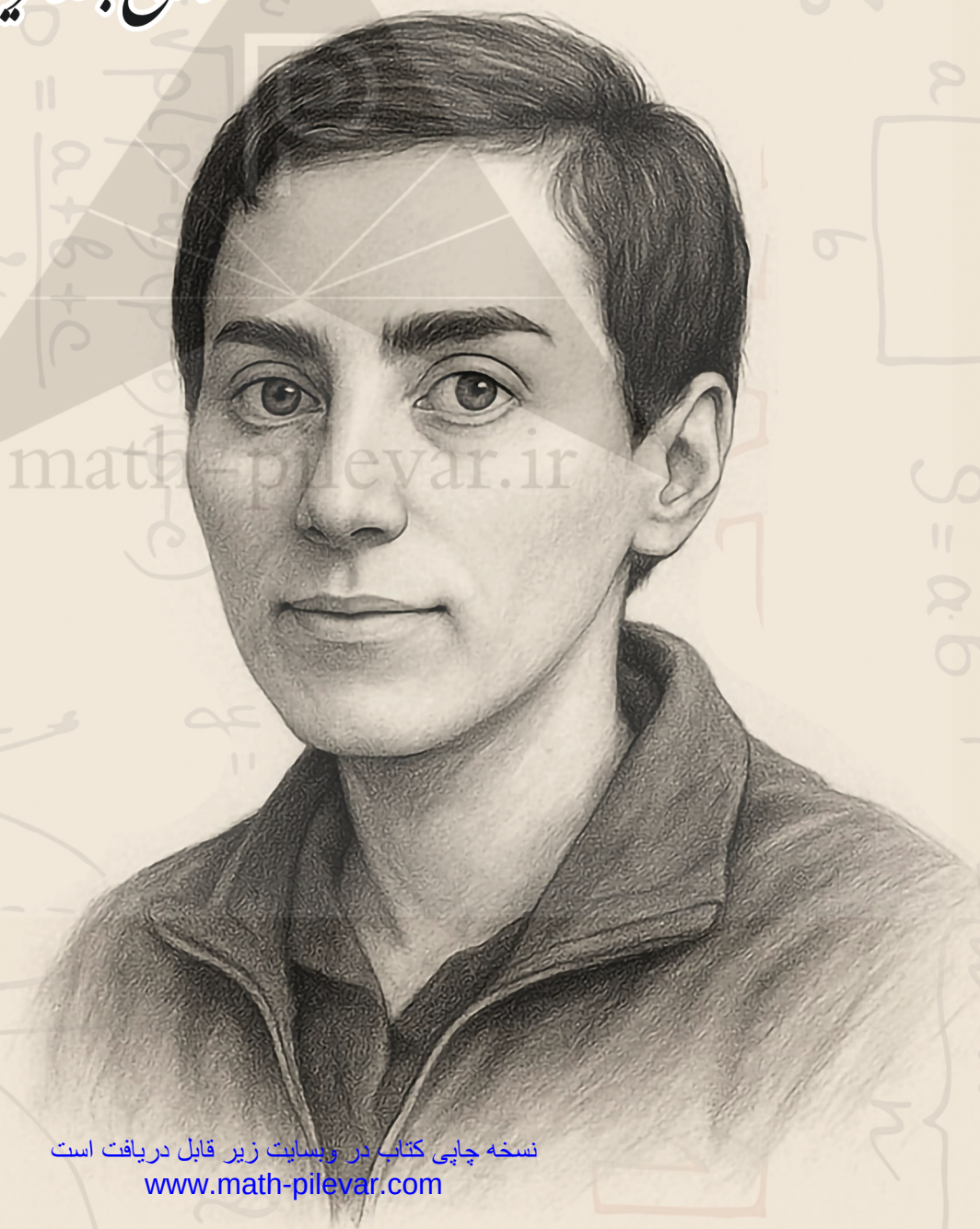
www.math-pilevar.com

تقدیم به

دیران فرهیخته‌ی ریاضی

ودانش آموزان برتر

و روح بلند مریم میرزاخانی



فهرست مطالب

۵	مقدمه
۸	۱ تابع
۹	تبدیل نمودار توابع
۱۷	تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم
۲۷	۲ مثلثات
۲۸	تناوب و تانژانت
۳۶	معادلات مثلثاتی
۴۲	۳ حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت
۴۳	حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت
۵۹	۴ مشتق
۶۰	آشنایی با مفهوم مشتق
۶۷	مشتق پذیری و پیوستگی
۸۵	آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر
۸۹	۵ کاربردهای مشتق
۹۰	اکسترم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی
۹۹	جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن
۱۰۴	رسم نمودار تابع

مقدمه

کتابی که اکنون در دست دارید، حاصل سال‌ها تدریس، تجربه، تلاش مستمر، و همراهی صمیمانه با دانش‌آموزانی است که در مسیر امتحانات نهایی گام برداشته‌اند. آنچه پیش رو دارید، جامع‌ترین مجموعه‌ی سوالات نهایی حسابان ۲ پایه دوازدهم است؛ مجموعه‌ای که تمام سوالات رسمی برگزارشده از نخستین آزمون تا آخرین دوره (دی ۹۷ تا شهریور ۱۴۰۴) را بدون حذف، به‌صورت منظم، دسته‌بندی‌شده و درس‌به‌درس گردآوری کرده‌ایم تا دانش‌آموز با یک منبع کامل و مطمئن روبه‌رو باشد.

این مجموعه، برخاسته از دل کلاس‌های درس است. سال‌ها سوالات را به‌صورت جزوه‌های کلاسی حل و بررسی می‌کردیم، و تجربه نشان داد که کار با سوالات واقعی نهایی، مؤثرترین راه برای کسب نمره‌ی عالی است. با پیشنهاد همکاران ارجمند، این جزوه‌ها شکل کتاب به خود گرفت و خوشبختانه، در دو سال گذشته، با استقبال کم‌نظیری از سوی دبیران و دانش‌آموزان در سراسر کشور همراه شد. همین همراهی ارزشمند، انگیزه‌ای شد تا کتاب را در چاپ‌های بعدی با چینش بهتر، درس‌نامه‌های خلاصه و کاربردی، و طبقه‌بندی دقیق‌تر بازنگری و کامل‌تر کنیم. در اینجا باید بر نکته‌ای کلیدی تأکید کنم:

به جرأت می‌توانم بگویم این مجموعه، تنها کتابی‌ست که تمام دانش‌آموزان، با هر سطح علمی و در هر نوع مدرسه‌ای، به آن نیاز دارند. تفاوتی ندارد که در مدرسه‌ای هیأت امنایی، نمونه دولتی، تیزهوشان یا عادی تحصیل می‌کنید؛ تأثیر نمرات نهایی در رتبه‌ی کنکور و تراز علمی برای همگان یکسان است. بنابراین، داشتن منبعی کامل از سوالات نهایی، نه یک انتخاب، بلکه یک ضرورت آموزشی برای همه دانش‌آموزان محسوب می‌شود. دانش‌آموز عزیز، این کتاب تنها یک مجموعه‌ی سوال نیست؛ نقشه‌ی راهی برای آمادگی کامل، مرور هدفمند، کاهش اضطراب امتحان و رسیدن به نتیجه‌ای مطلوب است. سوالات به ترتیب موضوعات کتاب درسی، همراه با نمره‌بندی، تاریخ برگزاری و نکات مهم جمع‌بندی شده‌اند تا مسیر یادگیری برایت هموارتر شود.

همکار محترم، این کتاب می‌تواند همراه آموزشی مؤثری در کلاس درس باشد. با توجه به ساختار منظم آن، می‌توانید از سوالات به‌عنوان تمرین، آزمون کلاسی، یا تکالیف هدفمند استفاده کنید. بی‌شک، حل این سوالات به‌صورت مستمر در طول سال تحصیلی، نقش مؤثری در ارتقای سطح علمی دانش‌آموزان دارد. در پایان، از همه‌ی همکاران فرهیخته‌ای که با انتخاب این مجموعه به‌عنوان مرجع کلاس خود، به ما اعتماد کردند، صمیمانه سپاس‌گزاریم. این همراهی ارزشمند، دلگرمی بزرگی در مسیر تألیف و ارتقای کیفیت این اثر بوده است.

در صورت مشاهده‌ی هرگونه اشکال، پیشنهاد یا اصلاح، لطفاً از طریق وبسایت math-pilevar.ir ما را در جریان بگذارید تا در چاپ‌های آینده بهبودهای لازم اعمال گردد.

با تشکر: پيله‌ور - صدقی

برای دریافت فایل pdf کتاب به سایت math-pilevar.ir مراجعه کنید.

هدیه ویژه برای خریداران مجموعه کتابهای سَمَن

از اینکه مجموعه کتابهای سَمَن را برای مطالعه و تمرین انتخاب کردید، صمیمانه سپاسگزاریم.
امسال برای همراهان مجموعه کتابهای سَمَن (سوالات موضوعی نهایی) یک سورپرایز خاص داریم!
خیلی از شما دوست دارید نسخه‌ی PDF کتاب همیشه همراهتان باشد؛ چه در مسیر، چه در زمان‌هایی که کتاب کاغذی در دسترس نیست. خبر خوب این است که ما این امکان را برایتان فراهم کردیم:

✓ **خیلی راحت به نسخه PDF کتاب‌ها دسترسی داشته باشید:**



- ۱- وارد سایت www.math-pilevar.com شوید.
 - ۲- اپلیکیشن Pimath را از نوار بالای سایت دانلود و روی گوشی اندرویدی خود نصب کنید.
 - ۳- یک حساب کاربری بسازید و وارد برنامه شوید.
 - ۴- در بخش «PDF کتاب‌ها» کد تخفیف ۱۰۰ درصدی زیر را وارد کنید
- و فایل PDF همین کتاب و سایر کتاب‌های ارزشمند مجموعه سَمَن را به‌طور رایگان دریافت کنید.

کد تخفیف: off90k



برای دسترسی سریعتر، کافی است تصویر QR را اسکن کنید. و مستقیم وارد دنیای کتاب‌های دیجیتال شوید.

نکات مهم:

اگر پس از وارد کردن کد، فایل PDF باز نشد، اپلیکیشن را یکبار کامل ببندید و دوباره اجرا کنید.
در صورت بروز هرگونه مشکل، از بخش «پشتیبانی» داخل اپلیکیشن برای ما پیام بفرستید تا تیم پشتیبانی در سریعترین زمان پاسخگو باشد.

با این هدیه، همیشه یک کتابخانه‌ی دیجیتال کوچک از کتاب‌های سَمَن در جیب شما خواهد بود؛
تا راحت‌تر تمرین کنید، بهتر مرور کنید و محتوای کتاب‌ها همیشه همراهتان باشد.



نمونه سوالات نهایی که در این کتاب به صورت موضوعی تفکیک شده است عبارتند از:

دی ۹۷	۱
خرداد ۹۸	۲
شهریور ۹۸	۳
دی ۹۸	۴
خرداد ۹۹	۵
خرداد ۹۹ خارج از کشور نوبت صبح	۶
خرداد ۹۹ خارج از کشور نوبت عصر	۷
شهریور ۹۹	۸
دی ۹۹	۹
خرداد ۱۴۰۰	۱۰
شهریور ۱۴۰۰	۱۱
دی ۱۴۰۰	۱۲
خرداد ۱۴۰۱	۱۳
شهریور ۱۴۰۱	۱۴
دی ۱۴۰۱	۱۵
خرداد ۱۴۰۲	۱۶
شهریور ۱۴۰۲	۱۷
دی ۱۴۰۲	۱۸
خرداد ۱۴۰۳	۱۹
شهریور ۱۴۰۳	۲۰
دی ۱۴۰۳	۲۱
خرداد ۱۴۰۴	۲۲
شهریور ۱۴۰۴	۲۳



تابع

تبدیل نمودار توابع ۹
تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم ۱۷

درس

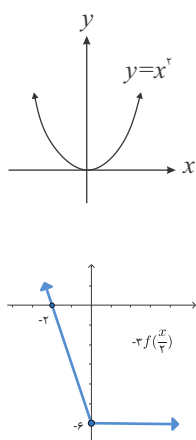
۱

تبدیل نمودار توابع

خلاصه درسنامه

برای رسم بسیاری از توابع، نیاز به روش‌های پیچیده نیست. اگر نمودار یک تابع را در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم به کمک برخی از تبدیل‌ها، نمودار توابع دیگری را رسم کنیم.

❖ رسم نمودار تابع‌های معروف



از معروف‌ترین توابع، تابع سهمی است. که سال‌های گذشته با آن آشنا شده‌اید.

در سوالات نهایی توابع زیادی مطرح می‌شوند که علاوه بر سهمی مهم‌ترین آن‌ها عبارت‌اند از:

$y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$	$y = x $	$y = \frac{1}{x}$	$y = \sqrt{x}$	$y = x^3$

$y = b^x$ $0 < b < 1$	$y = a^x$ $a > 1$	$y = \log_b x$ $0 < b < 1$	$y = \log_a x$ $a > 1$	$y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$



رسم تابع با کمک انتقال و ...، ساختن تابع های جدید

مثال	تأثیر بر نمودار (روش رسم)	تغییر انجام شده	
$y= x$ → $y= x +2$ تابع را به اضافه ی ۲ کن ۲ واحد به بالا منتقل کن	$a > 0$ است: نمودار تابع را به اندازه ی a واحد به بالا منتقل کنید. $a < 0$ است: نمودار تابع را به اندازه ی a واحد به پایین منتقل کنید.	کل تابع با عدد ثابت a جمع یا منها شده است.	$f(x) + a$
$y= x$ → $y= x-1$ x را منهای ۱ کن ۱ واحد به راست برو	$b > 0$ است: نمودار تابع را به اندازه ی b واحد به سمت چپ منتقل کنید. $b < 0$ است: نمودار تابع را به اندازه ی b واحد به سمت راست منتقل کنید.	در ضابطه تابع x شما با عدد ثابت b جمع یا منها شده است.	$f(x + b)$
$y= x-1$ → $y=2 x-1$ ضرب در ۲ کن	تابع بدون هیچ تغییری در x و البته بدون انتقال، کشیده می شود طوری که همه ی y های قبلی، k برابر می شوند.	تابع در عدد ثابت k ضرب شده است. ($k > 0$)	$kf(x)$

نکته:

- محل تلاقی نمودار تابع های f و kf با محور x ها یکسان است.
- (x_0, y_0) در تابع f تبدیل می شود به (x_0, ky_0) در تابع kf ...
- در نمودار $y = kf(x)$ ؛

- اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار تابع f در امتداد محور y ها با ضریب k فشرده می شود: انقباض عمودی

- اگر $k > 1$ باشد، نمودار تابع f در امتداد محور y ها با ضریب k کشیده می شود: انبساط عمودی

مثال	تأثیر بر نمودار (روش رسم)	تغییر انجام شده	
$y=\sqrt{x}$ → $y=-\sqrt{x}$ در منفی ضرب کن قرینه کن	تابع را نسبت به محور x ها قرینه کنید.	تابع در منفی ضرب شده است.	$-f(x)$
$y=x^2-1$ → $y= x^2-1$ قدر مطلق بگیر پایینی ها رو قرینه کن	بخشی از تابع که بالای محور x هاست، سر جای خودش می ماند و قسمتی که پایین محور x هاست، نسبت به محور x ها قرینه کنید.	کل تابع داخل قدر مطلق قرار گرفته است.	$ f(x) $

از آنجا که تبدیل شدن $y = f(x)$ به $y = f(kx)$ فقط روی دامنه تأثیر می گذارد ($kx \in D_f$) و هیچ ربطی به عرض نقاط نمودار ندارد، برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ از کلمات انقباض و انقباض در راستای محور x ها استفاده می کنیم.



تابع مطلوب	نحوه کشیدن نمودار از روی $y = f(x)$	مثال
۱ $y = f(kx)$ فرض $k > 0$	هر نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ را اینطوری می‌کشیم: x اش در $\frac{1}{k}$ ضرب شود و y اش تغییر نکند! $(a, b) \in f(x) \Rightarrow (\frac{a}{k}, b) \in f(kx)$	
۲ $y = f(x)$	$k > 1$ (انقباض افقی) انگار نمودار $f(x)$ راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود. $0 < k < 1$ (انبساط افقی) انگار منحنی $f(x)$ در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود.	

نکته: برای رسم $f(-x)$ اول نمودار $y = f(x)$ را رسم کن و بعد نمودار آن را نسبت به محور y ها قرینه کن.

❖ انتقال نمودار تابع در حالت کلی

۱ فرض کنید می‌خواهید از روی نمودار تابع $y = f(x)$ به نمودار $y = f(bx + c)$ برسید. ($b \neq 0$)

برای مثال: با داشتن تابع $y = f(x)$ بخواهیم نمودار تابع $y = f(2x + 3)$ را رسم کنیم...

ترتیب مراحل	اثر روی نقطه	مثال برای حالت $y = f(x) \rightarrow y = f(2x + 3)$
اول هر x را منهای c کرده و بعد هر x را در $\frac{1}{b}$ ضرب کنید.	$(x_0, y_0) \rightarrow (\frac{x_0 - c}{b}, y_0)$	$(7, 5) \rightarrow (2, 5)$ $2x + 3 = 7 \Rightarrow x = \frac{7-3}{2} = 2$

۲ فرض کنید می‌خواهید از روی نمودار تابع $y = f(x)$ به نمودار تابع $y = af(x) + d$ برسید. ($a \neq 0$)

برای مثال: با داشتن نمودار تابع $y = f(x)$ بخواهیم نمودار تابع $y = 2f(x) + 3$ را رسم کنیم...

ترتیب مراحل	اثر روی نقطه	مثال برای حالت $y = f(x) \rightarrow y = 2f(x) + 3$
اول هر y را در a ضرب کرده و بعد هر y را با d جمع کنید.	$(x_0, y_0) \rightarrow (x_0, ay_0 + d)$	$(7, 5) \rightarrow (7, 13)$ $(5 \times 2) + 3$

نکته: در تبدیل نمودار تابع $y = f(x)$ به $y = af(bx + c) + d$ ، ترتیب عملیات به صورت زیر است:

$$y=f(x) \rightarrow y=af(bx+c)+d$$

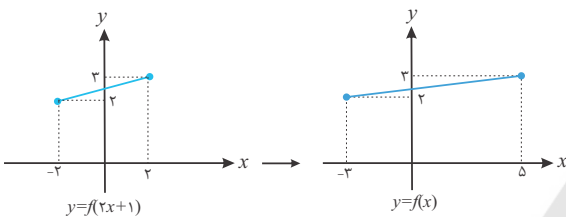
$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 ۴ ۳ ۲ ۱

برای مثال: در انتقال $y = f(x) \rightarrow y = 2f(3x + 4) + 5$ داریم:

۳) حالا فرض کنید می‌خواهید از روی نمودار انتقال یافته‌ی $y = f(x)$ به نمودار آن برسید؛ مثلاً نمودار تابع $y = f(2x + 1)$ را به شما داده‌اند و قرار است نمودار $y = f(x)$ را مشخص کنید ...

• رسیدن به نمودار $y = f(x)$ ؛ با داشتن نمودار تابع $y = f(2x + 1)$ برای رسیدن به نمودار تابع $y = f(x)$ ، اول هر x را در ۲ ضرب کنید و بعد هر x را به اضافی ۱ کنید ...

نکته: اگر خواستید با داشتن نمودار تابع $y = f(bx + c)$ ($b \neq 0$) به نمودار $y = f(x)$ برسید؛ دستور داخل پرانتز را عیناً اجرا کنید! یعنی هر x ضربدر b و بعد هر x به اضافه‌ی c

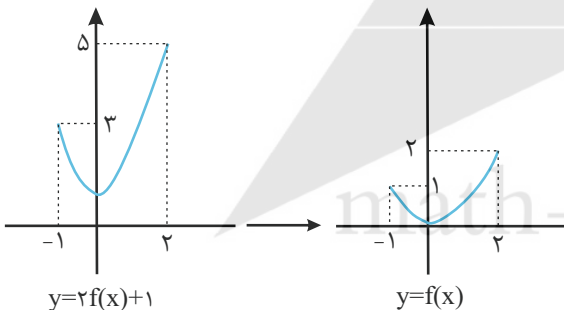


برای مثال:

در آخر فرض کنید با داشتن نمودار $y = 2f(x) + 1$ ، می‌خواهید به نمودار تابع $y = f(x)$ برسید؛ اول از هر y یک واحد کم می‌کنید و بعد هر y را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنی

نکته: اگر خواستید با داشتن نمودار $y = af(x) + d$ ($a \neq 0$) به نمودار $y = f(x)$ برسید؛ از راست به چپ و با عملیات مخالف حرکت کنید!

یعنی هر y منهای d و بعد هر y تقسیم بر a



برای مثال:

نکته: در تابع $y = mf(ax + b) + n$ ، مقادیر a و b روی دامنه و مقادیر m و n روی برد تأثیر دارند.

نکته: اگر $D_{f(x)} = [m, n]$ باشد، برای محاسبه $D_{f(ax+b)}$ ، کافی است نامعادله $m \leq ax + b \leq n$ را حل کرده، سپس محدوده x را به دست آوریم که همان دامنه $f(ax + b)$ می‌باشد.

نکته: اگر $Df(ax+b) = [m, n]$ باشد، برای محاسبه $Df(x)$ ، کافی است از نامساوی $m \leq x \leq n$ ، محدوده $ax+b$ را به دست آوریم.

مثال

اگر دامنه تابع $f(x)$ برابر $[-1, 7]$ باشد، دامنه تابع $-2f(3x+1)$ را بدست آورید.

حل. کافی است نامعادله $-1 \leq 3x + 1 \leq 7$ را حل کنیم:

$$-\mathfrak{I} \leq \mathfrak{R}x + \mathfrak{I} \leq \mathcal{V} \Rightarrow -\mathfrak{Y} \leq \mathfrak{R}x \leq \mathscr{C} \Rightarrow -\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{R}} \leq x \leq \mathfrak{Y} \Rightarrow D_{-\mathfrak{Y}f(\mathfrak{R}x + \mathfrak{I})} = \left[-\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{R}}, \mathfrak{Y} \right]$$



مثال

اگر دامنه تابع $y = f(2x - 3)$ برابر $[-1, 2]$ باشد، دامنه تابع $y = f(x)$ را بدست آورید.

$$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow -5 \leq 2x - 3 \leq 1 \Rightarrow D_{f(x)} = [-5, 1]$$

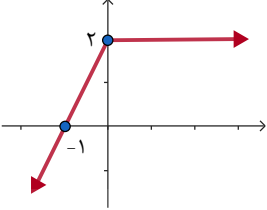
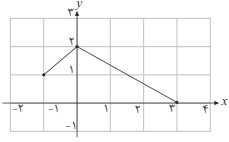
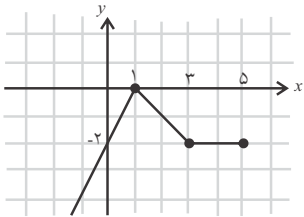
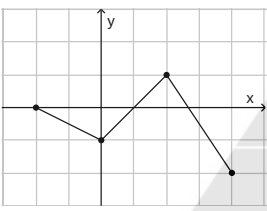
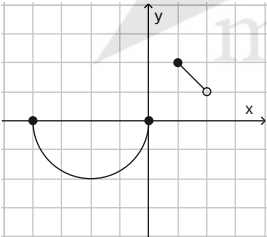
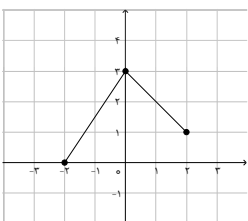
حل.

سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید. (۱) نقطه $(-8, 6)$ روی نمودار $y = f(x)$ با نقطه $(-8, 12)$ روی نمودار $y = \frac{1}{2}f(x)$ متناظر است. (دی ۱۴۰۱) (۲) نمودار تابع $y = -(x - 3)^3$ را می‌توان با ۳ واحد انتقال نمودار $y = -x^3$ به سمت راست رسم کرد. (دی ۱۴۰۱) (۳) نمودار تابع $y = (x + 2)^3$ را می‌توان با ۲ واحد انتقال نمودار تابع $y = x^3$ به سمت چپ، رسم کرد. (خرداد ۱۳۹۹ خارج) (۴) اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید. (خرداد ۱۳۹۸)	۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵	
۲	جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. (۱) اگر برد تابع $y = \sqrt{x}$ بازه $[0, 2]$ باشد، برد تابع $y = 2 + \sqrt{x - 2}$ برابر است. (شهریور ۱۴۰۲) (۲) اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید. (شهریور ۱۴۰۰) (۳) اگر بازه‌ی $[-2, 1]$ دامنه‌ی تابع $f(x)$ باشد، دامنه تابع $f(3x + 1)$ برابر است. (شهریور ۱۳۹۹) (۴) نقطه‌ی $(2, -1)$ در تابع $y = f(2x + 1) - 1$ متناظر با نقطه‌ی در تابع $y = f(x)$ است. (خرداد ۱۳۹۹ خارج)	۰/۵ ۰/۲۵ ۰/۵ ۰/۵	
۳	در شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = -2f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$ را رسم کنید.	۱	شهریور ۱۴۰۴
۴	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است، اگر تابع $g(x) = 3f\left(\frac{1}{3}x\right) + 1$ باشد، آنگاه: الف) دامنه و برد تابع g را به صورت بازه بنویسید. ب) اگر $A = (-2, 1)$ یک نقطه از نمودار تابع f باشد، آنگاه نقطه متناظر A ، روی نمودار تابع g را بنویسید.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۴



دی ۱۴۰۳	۱		۵ نمودار تابع $f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است. الف) نمودار تابع $g(x) = -3f\left(\frac{1}{3}x\right)$ را رسم کنید. ب) مقدار $g(5)$ را به دست آورید.
شهریور ۱۴۰۳	۱/۵		۶ الف) اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y = f(2x + 1)$ را به کمک آن رسم کنید. ب) اگر دامنه تابع g بازه $[-2, 4]$ باشد، آنگاه دامنه تابع $k(x) = 3g(-2x)$ را به دست آورید.
خرداد ۱۴۰۳	۱/۲۵		۷ نمودار تابع $f(x)$ در زیر رسم شده است، نمودار تابع $y = -f(2x - 1)$ را رسم کرده، سپس دامنه و برد تابع حاصل را به دست آورید.
دی ۱۴۰۲	۱		۸ نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = -3f\left(\frac{x}{2}\right) + 2$ را رسم کرده و سپس برد تابع $g(x)$ را تعیین کنید.
شهریور ۱۴۰۲	۱		۹ نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = f(1 - x) + 1$ را رسم کنید.
شهریور ۱۴۰۱	۱		۱۰ الف) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در بازه $[0, 4]$ رسم کنید. به کمک نمودار $f(x)$ نمودار تابع $g(x) = 2f(x - 1)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد g را تعیین کنید.
خرداد ۱۴۰۱	۱		۱۱ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(x - 1)$ را رسم کرده و دامنه تابع g را تعیین کنید.



دی ۱۴۰۰	۱		۱۲	نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = f(x - 1) + 2$ را رسم کرده و دامنه تابع $g(x)$ را تعیین کنید.
شهریور ۱۴۰۰	۱		۱۳	نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = 2f(x + 1)$ را رسم کرده و دامنه و برد تابع g را تعیین کنید.
خرداد ۱۴۰۰	۱		۱۴	نمودار تابع $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ را به کمک نمودار $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.
دی ۹۹	۱		۱۵	نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = f(2x - 1)$ را رسم، دامنه و برد آن را تعیین کنید.
شهریور ۹۹	۱	$y = \cos(2x) - 1$	۱۶	نمودار تابع زیر را به کمک نمودار $y = \cos x$ رسم کنید.
خرداد ۹۹ خ	۱		۱۷	اگر نمودار f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x) = f(x - 1) + 2$ زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را بنویسید.
خرداد ۹۹	۱		۱۸	با توجه به نمودار تابع f که در شکل زیر آمده است. نمودار تابع $g(x) = f(2x) - 1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.



دی ۹۸	۰/۲۵	۱۹	نمودار $f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(2x + 1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.	
شهریور ۹۸	۰/۵	۲۰	کوتاه پاسخ دهید. نمودار تابع $y = -f(x)$ ، قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به کدام محور است؟	
شهریور ۹۸	۱	۲۱	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(3 - x)$ را رسم کرده و دامنه‌ی آن را تعیین کنید.	
مهر ۹۸	۱/۲۵	۲۲	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(2x) - 1$ را رسم کنید. سپس دامنه تابع g را تعیین کنید.	
خرداد ۹۸	۱	۲۳	نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = 2f(x - 1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را بنویسید.	
دی ۹۷	۱/۵	۲۴	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = -f(2x)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد تابع g را تعیین کنید.	



درس

۲

تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

خلاصه درسنامه

تابع درجه سوم



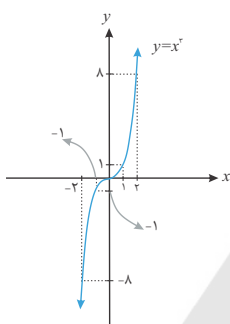
تابع چندجمله‌ای: هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را یک تابع چندجمله‌ای از درجه n می‌گوییم که در آن $a_0, a_1, \dots, a_n$ اعداد حقیقی، n عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ است.

۱ دامنه‌ی همه‌ی تابع‌های چندجمله‌ای، $\mathbb{R}$ است.

۲ اگر در یک تابع چندجمله‌ای، n بزرگ‌ترین توان موجود برای x باشد، تابع را چندجمله‌ای درجه‌ی n می‌گوییم.

برای مثال: $f(x) = x^3 + x + 4$ ، یک تابع چندجمله‌ای درجه‌ی سوم و $f(x) = x^2 + x^2 + 1$ هم تابعی چندجمله‌ای از درجه‌ی چهارم است....

۳ تابع‌های ثابت، همانی و خطی، تابع چندجمله‌ای محسوب می‌شوند.



تابع $y = x^3$: تابع $y = x^3$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه ۳ است که نمودار آن به صورت مقابل می‌باشد:

با توجه به نمودار، دامنه و برد این تابع برابر $\mathbb{R}$ است. همچنین این تابع، یک به یک و وارون‌پذیر می‌باشد. از دیگر ویژگی‌های این تابع آن است که نمودار آن نسبت به مبدأ مختصات متقارن می‌باشد.

مقایسه نمودارهای توابع $y = x^2$ و $y = x^3$



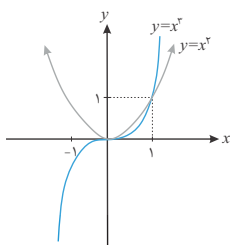
اعداد بین صفر و ۱، ویژگی جالبی دارند: هرچه توانشان را بیشتر کنید، حاصلشان کمتر می‌شود. مثال: $(0/1)^2 = 0/1$ ، $(0/1)^4 = 0/001$ ولی برای اعداد بزرگتر از ۱، روال معمولی است؛ توان بیشتر، حاصل بیشتر می‌دهد. مثال: $2^2 = 4$ ، $2^4 = 16$.

$$b > 1 \xrightarrow{m > n} b^m > b^n$$

و

$$0 < a < 1 \xrightarrow{m > n} a^m < a^n$$

نکته:



از آنجا که نمودار هر دو از نقطه‌ی $(1, 1)$ می‌گذرند، رفتار $y = x^3$ و $y = x^2$ را قبل از $x = 1$ و بعد از آن، با توجه به مطلب بالا بررسی می‌کنیم.

$y = x^3$ برای x های مثبت، حرکتش را از زیر $y = x^2$ شروع می‌کند و پس از رسیدن به نقطه‌ی $x = 1$ ، می‌رود بالای $y = x^2$.

توابع صعودی و توابع نزولی



در یک تقسیم‌بندی کلی همه‌ی تابع‌هایی که می‌شناسیم، از نظر رفتار، در یکی از پنج دسته‌ی زیر قرار می‌گیرند:

- ۱ صعودی ۲ نزولی ۳ اکیداً صعودی ۴ اکیداً نزولی ۵ غیریکنوا

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است

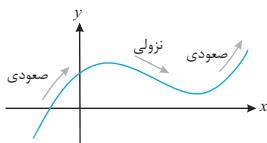
www.math-pilevar.com



تابع	به بیان فارسی	تشخیص از روی زوج مرتب‌ها	تعریف ریاضی: برای هر x_1 و x_2 عضو مجموعه‌ی I به طوری که $I \subseteq D_f$	وضعیت نمودار
۱ اکتبا صعودی	وقتی مقدار x ها زیاد می‌شود، مقدار y های نظیر آن‌ها هم زیاد می‌شود.	اگر زوج مرتب‌ها را طوری مرتب کنید که x ها از کوچک به بزرگ نوشته شده باشند، y ها هم باید از کوچک به بزرگ باشند. $\{(1, 10), (2, 11), (3, 15), (4, 19)\}$	در $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ مقایسه‌ی دو نقطه با طول نامساوی روی نمودار تابع، عرض بیشتر برای نقطه‌ای با طول بیشتر است...	اگر از سمت چپ، قلم را روی نمودار بگذاری و روی آن حرکت کنی، مدام در حال بالا رفتن هستی.
۲ اکتبا نزولی	وقتی مقدار x ها زیاد می‌شود، y های نظیر آن‌ها کم می‌شود.	اگر زوج مرتب‌ها را طوری مرتب کنید که x ها از کوچک به بزرگ نوشته شده باشند، y ها از بزرگ به کوچک قرار می‌گیرند. $\{(1, 20), (2, 14), (3, 9), (4, 8)\}$	در $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ مقایسه‌ی دو نقطه با طول نامساوی روی نمودار تابع، عرض بیشتر برای نقطه‌ای با طول کمتر است....	اگر از سمت چپ، قلم را روی نمودار بگذاری و روی آن حرکت کنی، مدام در حال پایین رفتن هستی.
۳ صعودی	وقتی مقدار x ها زیاد می‌شود، y های نظیر آن‌ها کم نمی‌شود؛ y ها یا زیاد می‌شوند یا درجا می‌زنند و مساوی قبلی می‌شوند ...	اگر زوج مرتب‌ها را طوری مرتب کنید که x ها از کوچک به بزرگ نوشته شده باشند، هر y ، یا از y قبلی خود بزرگ‌تر است یا با آن مساوی. $\{(1, 10), (2, 11), (3, 11), (4, 17)\}$	دو نقطه $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ با طول متفاوت روی نمودار تابع، یا عرض مساوی دارند یا نقطه‌ای که طول بیشتر دارد، عرض بیشتری هم خواهد داشت...	اگر از سمت چپ، قلم را روی نمودار بگذاری و روی آن حرکت کنی، یا بالا می‌روی یا روی خط صاف حرکت می‌کنی.
۴ نزولی	وقتی مقدار x ها زیاد می‌شود، y های نظیر آن‌ها زیاد نمی‌شود؛ y ها یا کم می‌شوند یا درجا می‌زنند و مساوی قبلی می‌شوند....	اگر زوج مرتب‌ها را طوری مرتب کنید که x ها از کوچک به بزرگ نوشته شده باشند، هر y ، یا از y قبلی خود کوچک‌تر است یا با آن مساوی. $\{(1, 20), (2, 20), (3, 16), (4, 11)\}$	دو نقطه $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ با طول متفاوت روی نمودار تابع، یا عرض مساوی دارند یا نقطه‌ای که طول بیشتر دارد، عرض کمتری خواهد داشت...	اگر از سمت چپ، قلم را روی نمودار بگذاری و روی آن حرکت کنی، یا پایین می‌روی یا روی خط صاف حرکت می‌کنی.



تعریف تابعی را که در دامنه‌ی خود، در محدوده‌هایی صعودی و در محدوده‌هایی دیگر نزولی باشد، غیریکنوا می‌گوییم. آهنگ رفتاری تابع غیریکنوا تغییر می‌کند: گاهی بالا می‌رود و گاهی هم پایین.



تعریف ۱ به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، می‌گوییم تابع اکیداً یکنوا.

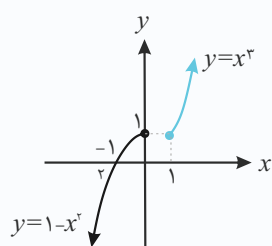
۲ به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم تابع یکنوا.

یکنوا		اکیداً یکنوا	
نزولی هست؛ ولی اکیداً نزولی نه!	صعودی هست؛ ولی اکیداً صعودی نه!	اکیداً نزولی و نزولی	اکیداً صعودی و صعودی

نکته:

- ۱ فرق تابع صعودی با اکیداً صعودی در این است که تابع صعودی غیراکید در محدوده‌ای از دامنه‌ی خود، ثابت می‌شود یا در دامنه‌ی خود نقطه‌های هم‌عرض دارد.
- ۲ فرق تابع نزولی با اکیداً نزولی در این است که تابع نزولی غیراکید در محدوده‌ای از دامنه‌ی خود، ثابت می‌شود یا در دامنه‌ی خود نقطه‌های هم‌عرض دارد.
- ۳ تابع ثابت، هم صعودی محسوب می‌شود، هم نزولی.

مثال



تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ 1-x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ روی دامنه‌اش چگونه است؟

پاسخ: اگر از چپ به راست قلم را حرکت دهید می‌فهمید که تابع صعودی است. به خاطر وجود دو نقطه‌ی هم‌عرض $(0, 1)$ و $(1, 1)$ اکیداً صعودی نیست!

رفتار تابع‌های f و f^{-1}

در آخر می‌خواهیم ببینیم رفتار f^{-1} چگونه از رفتار f دستور می‌گیرد...

- ۱ اگر f اکیداً صعودی باشد، f^{-1} هم اکیداً صعودی خواهد بود و برعکس.
- ۲ اگر f اکیداً نزولی باشد، f^{-1} هم اکیداً نزولی خواهد بود و برعکس.
- ۳ اگر f یک به یک باشد، f^{-1} هم یک به یک خواهد بود و برعکس.

قضیه تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها: با تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $g(x)$ خارج قسمت منحصر به فرد $Q(x)$ و باقی‌مانده منحصر به فرد $R(x)$ وجود دارند به طوری که می‌توان نوشت:

$$f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$$

باقی‌مانده + خارج قسمت $\times$ مقسوم علیه = مقسوم

توجه داشته باشید که همواره درجه باقی‌مانده $(R(x))$ از درجه مقسوم علیه $(g(x))$ کوچکتر است.

تعریف اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $g(x)$ برابر صفر شود، می‌گوییم $f(x)$ بر $g(x)$ بخش پذیر است. در این حالت $g(x)$ را یک فاکتور یا عامل $f(x)$ گویند.

محاسبه باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $ax + b$ بدون انجام عمل تقسیم

نکته: باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x - a$ برابر با $f(a)$ است.

اگر مقسوم علیه برابر $x - a$ باشد، باقی‌مانده باید عددی ثابت باشد. بنابراین اتحاد تقسیم به صورت مقابل است: $f(x) = (x - a)q(x) + r$

مثال

باقی‌مانده تقسیم عبارت $x^4 - 3x^3 + x + 9$ بر $x - 2$ برابر است با:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow r = f(2) = 2^4 - 3 \times 2^3 + 2 + 9 = 16 - 24 + 2 + 9 = 3$$

نکته: به طور مشابه، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ برابر با $f\left(-\frac{b}{a}\right)$ است.

مثال

مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x) = ax^4 + bx^3 - 3x^2 + x + 2$ بر $(x - 1)$ بخش پذیر بوده و باقی‌مانده تقسیم آن بر $(x + 1)$ برابر (-4) باشد.

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow p(1) = 0 \Rightarrow a(1)^4 + b(1)^3 - 3(1)^2 + (1) + 2 = 0 \Rightarrow a + b = 0$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow p(-1) = -4 \Rightarrow a(-1)^4 + b(-1)^3 - 3(-1)^2 + (-1) + 2 = -4 \Rightarrow a - b = -2$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = -1}, \boxed{b = 1}$$



مثال

اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x+1)$ و $(x-2)$ به ترتیب ۲ و ۳ باشد. باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - x - 2$ کدام است؟
پاسخ: با توجه به سوال $f(-1) = 2$ و $f(2) = 3$ است، بنابراین اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ را به صورت $R(x) = ax + b$ نشان دهیم، داریم:

$$f(x) = (x+1)(x-2)Q(x) + ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = -a + b = 2 \\ f(2) = 2a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = \frac{7}{3}$$

در نتیجه باقی‌مانده به صورت $\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ در می‌آید.

مثال

باقی‌مانده تقسیم $x^n \pm a^n$ را بر $x \pm a$ تعیین کنید. ($n \in \mathbb{N}$)

پاسخ: در چهار حالت مختلف به حل این مثال می‌پردازیم:

$$P(a) = a^n - a^n = 0$$

(۱) باقی‌مانده تقسیم $P(x) = x^n - a^n$ بر $x - a$

یعنی $P(x) = x^n - a^n$ همواره بر $x - a$ بخش‌پذیر است.

$$P(-a) = (-a)^n - a^n = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ -2a^n & n = 2k+1 \end{cases}$$

(۲) باقی‌مانده تقسیم $P(x) = x^n - a^n$ بر $x + a$

یعنی $P(x) = x^n - a^n$ زمانی بر $x + a$ بخش‌پذیر است که n زوج باشد.

$$P(-a) = (-a)^n + a^n = \begin{cases} 2a^n & n = 2k \\ 0 & n = 2k+1 \end{cases}$$

(۳) باقی‌مانده تقسیم $P(x) = x^n + a^n$ بر $x + a$

یعنی $P(x) = x^n + a^n$ زمانی بر $x + a$ بخش‌پذیر است که n فرد باشد.

$$P(a) = a^n + a^n = 2a^n$$

(۴) باقی‌مانده تقسیم $P(x) = x^n + a^n$ بر $x - a$

یعنی $P(x) = x^n + a^n$ هیچ‌گاه بر $x - a$ بخش‌پذیر نیست.

بررسی سه اتحاد مهم: حالت تعمیم‌یافته اتحادهای چاق و لاغر را در سه اتحاد زیر می‌توانید مشاهده کنید:



$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

$$x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \dots - xa^{n-2} + a^{n-1}); \text{ (فرد } n \text{)}$$

$$x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \dots + xa^{n-2} - a^{n-1}); \text{ (زوج } n \text{)}$$

مثال

چندجمله‌ای $x^6 - 6x^4 - 6x^2 + 6$ را بر حسب $(x+2)$ تجزیه کنید.

$$x^6 - 6x^4 - 6x^2 + 6 = (x+2)(x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x - 32)$$

پاسخ: با استفاده از اتحادهای گفته شده داریم:



سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۲۵	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. (۱) تابع $f(x) = (1-x)^3$ ، تابعی اکیداً نزولی است. (خرداد ۱۴۰۴) (۲) اگر n عدد طبیعی زوج و a عدد حقیقی باشد، آنگاه چند جمله‌ای $x^n + a^n$ بر $x + a$ بخش پذیر است. (شهریور ۱۴۰۳) (۳) اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً نزولی باشند، تابع $f + g$ نیز در آن فاصله اکیداً نزولی است. (خرداد ۱۴۰۳) (۴) عبارت $x^{16} + 1$ بر $x + 1$ بخش پذیر است. (شهریور ۱۴۰۲) (۵) تابع $f(x) = x^2 - 4x$ روی بازه $[2, +\infty)$ اکیداً صعودی است. (دی ۱۴۰۱) (۶) تابع $y = -\log_5 x + 1$ در دامنه خود، یک تابع اکیدا یکنوا است. (شهریور ۱۴۰۰) (۷) تابع $f(x)$ در بازه شامل a, b صعودی است. اگر $f(a) \leq f(b)$ آنگاه $a \leq b$ (دی ۱۳۹۹) (۸) چند جمله‌ای $P(x) = (2-x)^2(x+1)^3$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی ۵ است. (شهریور ۱۳۹۹) (۹) اگر تابع f در یک بازه نزولی اکیدا باشد، در این بازه نزولی نیز هست. (شهریور ۱۳۹۹) (۱۰) تابع $g(x) = 2^{-x}$ ، تابعی است که در تمام دامنه‌ی خود اکیداً یکنوا است. (خرداد ۱۳۹۹ خارج) (۱۱) در تقسیم $f(x) = x^3 + 2$ بر $p(x) = 2x - 1$ باقی مانده برابر صفر است. (خرداد ۱۳۹۹ خارج) (۱۲) تابع $y = -x^2 + 2x$ روی بازه‌ی $(-\infty, 2]$ اکیدا صعودی است. (خرداد ۱۳۹۹ خارج) (۱۳) نمودار تابع $y = x^3$ در بازه‌ی $[0, 1]$ پایین‌تر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد. (خرداد ۱۳۹۹) (۱۴) اگر تابع $f(x) = y$ در یک فاصله صعودی باشد، آنگاه در آن فاصله اکیدا صعودی نیز خواهد بود. (خرداد ۱۳۹۹) (۱۵) اگر تابع f در یک بازه نزولی باشد، آنگاه در این بازه اکیدا نزولی می‌باشد. (دی ۱۳۹۸)	۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵	
۲۶	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. (۱) اگر نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در راستای محور x ها، دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم و آن را $g(x)$ بنامیم. آنگاه نمودار تابع $g^{-1}(x)$ از ناحیه محورهای مختصات نمی‌گذرد. (شهریور ۱۴۰۳) (۲) تابع $f(x) = (x-2)^3 + 1$ را در نظر بگیرید. نمودار f^{-1} از ناحیه محورهای مختصات عبور نمی‌کند. (خرداد ۱۴۰۳) (۳) اگر مقدار a برابر باشد، تابع $f(x) = ax + b$ هم صعودی و هم نزولی است. (دی ۱۴۰۱) (۴) اگر تابعی در یک فاصله هم صعودی و هم نزولی باشد، تابع در آن فاصله است. (شهریور ۱۴۰۱) (۵) به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم. (خرداد ۱۴۰۰) (۶) برای آنکه تابع $y = ax + b$ در دامنه اش هم صعودی باشد هم نزولی، مقدار a باید برابر با باشد. (خرداد ۱۳۹۹ خ) (۷) اگر $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} \leq \frac{1}{64}$ باشد، حدود x برابر است. (دی ۱۳۹۸) (۸) باقی مانده تقسیم $f(x) = x^3 - 2x$ بر $x - 1$ برابر با است. (تیر ۱۳۹۸) (۹) اگر باقی مانده‌ی تقسیم $f(x) = x^2 + kx - 1$ بر $x + 1$ برابر ۲ باشد. مقدار k برابر است. (دی ۱۳۹۷)	۰/۷۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵	



شماره ۱۴۰۴	۱	۲۷	اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع $f + g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است.
شماره ۱۴۰۴	۱	۲۸	اگر باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $p(x) = 2x^3 + mx - 1$ بر $x + 2$ برابر با -1 باشد، مقدار m را به دست آورید.
شماره ۱۴۰۴ خرداد	۱/۲۵	۲۹	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $p(x) = 2x^3 + ax^2 - bx + 2$ بر $x + 2$ بخش‌پذیر و باقی‌مانده تقسیم آن بر $x - 1$ برابر با 2 باشد.
شماره ۱۴۰۳ دی	۱	۳۰	نمودار تابع $f(x) = -(x - 2)^3 + 1$ را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید و صعودی یا نزولی بودن تابع f را بررسی کنید.
شماره ۱۴۰۳ دی	۰/۵	۳۱	اگر $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$ باشد، حدود x را به دست آورید.
شماره ۱۴۰۳ دی	۱	۳۲	اگر چند جمله‌ای $p(x) = x^2 + a - 2$ بر $x - a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را بیابید.
شماره ۱۴۰۳ شهریور	۰/۷۵	۳۳	نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & x < 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$ را رسم کنید. بزرگترین بازه‌ای که این تابع در آن اکیداً صعودی است را بنویسید.
شماره ۱۴۰۳ شهریور	۰/۷۵	۳۴	اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + kx^2 + 2$ بر $x - k$ بخش‌پذیر باشد، مقدار k را بیابید.
شماره ۱۴۰۳ خرداد	۱/۲۵	۳۵	الف) اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + mx + 2$ بر $x - 2$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x + 1$ را به دست آورید. ب) چند جمله‌ای $x^5 - 1$ را طوری تجزیه کنید که $x - 1$ یک عامل آن باشد.
شماره ۱۴۰۲ دی	۱/۵	۳۶	ابتدا نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} (x - 2)^3 & x \geq 1 \\ -2 & 0 \leq x < 1 \\ x + 1 & x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.
شماره ۱۴۰۲ دی	۱	۳۷	اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = 3x^2 + mx + 2m + 1$ بر $x - 2$ برابر 3 باشد، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = mx^2 - mx + 3$ بر $x + 2$ را تعیین کنید.



۳۸	با توجه به نمودار تابع مقابل، تعیین کنید: الف) تابع f در چه بازه‌هایی اکیداً یکنوا است. ب) آیا تابع در کل دامنه خود اکیداً یکنوا است؟		شهریور ۱۴۰۲
۳۹	مقادیر a و b را چنان بیابید که عبارت $p(x) = x^3 - ax + b$ بر $(x - 2)$ بخش‌پذیر باشد و باقیمانده تقسیم آن بر $(x + 1)$ برابر ۳ باشد.	۱	شهریور ۱۴۰۲
۴۰	نمودار تابع $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ را به کمک انتقال نمودار $f(x) = x^3$ رسم کنید. سپس اکیداً یکنوایی تابع $g(x)$ را در تمام دامنه خود، بررسی کنید.	۱	خرداد ۱۴۰۲
۴۱	اگر $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} \leq \frac{1}{125}$ باشد، حدود x را بیابید.	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۲
۴۲	اگر چندجمله‌ای $x^2 + ax - 8$ بر $x - a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۲
۴۳	در چند جمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + b$ مقادیر a و b را چنان بیابید که باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x + 2$ برابر ۱- و $P(x)$ بر $x - 1$ بخش‌پذیر باشد.	۱/۵	دی ۱۴۰۱
۴۴	عبارت $\frac{x^5 + 1}{x + 1}$ را ساده کنید.	۱	دی ۱۴۰۱
۴۵	اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = x^4 + kx^2 - 3$ بر $x + 1$ برابر ۲ باشد، k را تعیین کنید.	۰/۷۵	شهریور ۱۴۰۱
۴۶	اگر $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{27}\right)$ باشد، حدود x را به دست آورید.	۱	شهریور ۱۴۰۱
۴۷	چندجمله‌ای $x^5 + 32$ را بر حسب عامل $x + 2$ تجزیه کنید. (تکرار شهریور ۱۴۰۰)	۰/۵	شهریور ۱۴۰۱
۴۸	ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x$ را رسم نمائید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.	۱	خرداد ۱۴۰۱



۴۹	باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = 8x^3 - 4x^2 + 2$ را بر $2x + 1$ به دست آورید.	۵/۵	خرداد ۱۴۰۱
۵۰	ابتدا نمودار تابع $f(x) = x - 1 $ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که تابع در چه بازه‌ای اکیدا صعودی و در چه بازه‌ای اکیدا نزولی است.	۱	دی ۱۴۰۰
۵۱	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ بر $(x + 2)$ و $(x - 1)$ بخش پذیر باشد.	۱/۵	دی ۱۴۰۰
۵۲	با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & -2 \leq x < -1 \\ -x - 1 & -1 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & 1 \leq x \end{cases}$ تعیین کنید، تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی می‌باشد.	۱	شهریور ۱۴۰۰
۵۳	در $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-2x} \leq \left(\frac{1}{81}\right)$ حدود x را بدست آورید.	۵/۵	شهریور ۱۴۰۰
۵۴	با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -3x & -1 < x < 0 \end{cases}$ تعیین کنید، تابع در چه بازه‌ای اکیدا صعودی و در چه بازه‌ای اکیدا نزولی می‌باشد؟	۵/۷۵	خرداد ۱۴۰۰
۵۵	باقیمانده تقسیم عبارت‌های $p(x) = x^3 + ax + 1$ و $q(x) = 2x^2 - x + 1$ یکسان می‌باشد. مقدار a را بیابید.	۵/۷۵	خرداد ۱۴۰۰
۵۶	با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$ تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی می‌باشد.	۱	دی ۹۹
۵۷	چند جمله‌ای $x^6 - 1$ را به عامل $x - 1$ تجزیه کنید.	۱	دی ۹۹
۵۸	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ بر $x - 2$ بخش پذیر بوده و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x + 1$ برابر ۳ باشد.	۱/۵	شهریور ۹۹
۵۹	در چند جمله‌ای $y = x^3 + ax^2 + x + b$ مقادیر a و b را چنان بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x - 1$ برابر ۴ باشد و بر $x + 2$ بخش پذیر باشد.	۱	خرداد ۹۹ خ



۶۰	چند جمله‌ای $x^5 + 1$ را بر حسب عامل $x + 1$ تجزیه کنید.	۰/۵	خرداد ۹۹ خ
۶۱	نمودار تابع $y = x^2 + 2$ را رسم کرده و مشخص کنید در چه بازه‌ای این تابع اکیدا صعودی و در چه بازه‌ای اکیدا نزولی است.	۱	خرداد ۹۹
۶۲	مقادیر a, b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش‌پذیر است.	۱	خرداد ۹۹
۶۳	در چند جمله‌ای $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ ، مقادیر a و b را چنان بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x - 1$ برابر ۴ باشد و بر $x + 2$ بخش پذیر باشد.	۱/۲۵	دی ۹۸
۶۴	کوتاه پاسخ دهید. الف) در فاصله‌ی $(0, 1)$ از بین دو تابع $g(x) = x^3$ و $f(x) = x^2$ ، نمودار کدام تابع پایین‌تر از دیگری قرار دارد؟ ب) درجه‌ی تابع $f(x) = x^2(1-x)^5$ را مشخص کنید. ج) تابع $h(x) = x + 2 $ در چه بازه‌ای اکیدا صعودی است؟	۰/۷۵	شهریور ۹۸
۶۵	اگر $\log(x + 1) \leq \log(2x - 3)$ ، حدود x را به دست آورید؟	۰/۵	شهریور ۹۸
۶۶	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x + 1$ و $x - 2$ بخش پذیر باشد.	۱	شهریور ۹۸
۶۷	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ بخش پذیر بوده و باقی مانده تقسیم آن بر $x + 1$ برابر ۳ باشد.	۱	تیر ۹۸
۶۸	اگر چند جمله‌ای $f(x) = x^2 + ax - 3$ بر $x + 1$ بخش‌پذیر باشد. باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x - 2$ را بدست آورید.	۰/۷۵	خرداد ۹۸
۶۹	چند جمله‌ای $x^6 - 1$ را بر حسب عامل $x + 1$ تجزیه کنید.	۰/۵	خرداد ۹۸
۷۰	نمودار تابع $f(x) = (x + 1)^3$ را رسم کنید. سپس تعیین کنید که این تابع در دامنه‌ی خود اکیدا صعودی است یا اکیدا نزولی؟	۰/۷۵	دی ۹۷
۷۱	هریک از چند جمله‌ای‌های زیر را بر حسب عامل خواسته شده، تجزیه کنید. الف) $x^5 + 1$ با عامل $x + 1$ ب) $x^6 - 1$ با عامل $x - 1$	۱	دی ۹۷

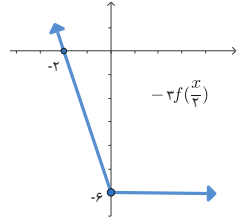
پاسخ سوالات موضوعی نهایی

حسابان ۲

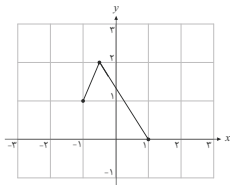
math-pilevar.ir

درس

تبدیل نمودار



(ا) اگر دانش آموز از هر روشی تنها شکل نهایی را درست ترسیم کرد، نمره کامل این بخش یعنی (۰/۷۵) نمره تعلق بگیرد.
ب) (۰/۲۵) $g(5) = -6$ (صفحه ۱۰)



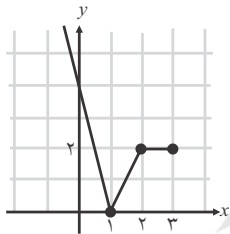
۶- الف) راجل اول

اگر نمودار نهایی، درست رسم شده باشد، نمره کامل تعلق بگیرد. (۱ نمره)

راجل دوم

اگر نمودار با انتقال به چپ و سپس انقباض افقی رسم شده باشد برای هر مرحله (۰/۵) تعلق بگیرد.

ب) $DK = \left[\underbrace{-2}_{0/25}, \underbrace{1}_{0/25} \right]$



۷- دامنه: $(-\infty, 3]$ (۰/۲۵)
برد: $[0, +\infty)$ (۰/۲۵)
رسم نمودار: (۰/۷۵)
(صفحه ۱۲)

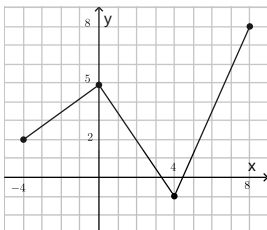
توضیحات جهت تصحیح: در رسم نمودار، هر قسمت که درست رسم شده است، (۰/۲۵) نمره تعلق بگیرد.

در صورتیکه دانش آموزی نمودار را اشتباه رسم کرده، اما مطابق آن نمودار اشتباه، دامنه یا برد را درست نوشته است، نمره دامنه یا برد منظور شود.

(۰/۵) $R = [-1, 8]$

۸- (صفحه ۱۲ کتاب)

(رسم شکل (۰/۵))



۹- صفحه ۱۲

(بارم هر قسمت رسم شکل (۰/۵) نمره)

۱-۱ نادرست (۰/۲۵) درست (۰/۲۵)
۲ درست (۰/۲۵) نادرست (۰/۲۵)

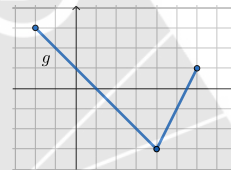
۱-۲ $[2, 4]$ (۰/۵) $[-1, 0]$ (۰/۵)
۲ انقباض افقی (۰/۲۵) $(5, 0)$ (۰/۵)

۳- رسم دقیق هر پاره خط نمودار تابع، هر کدام (۰/۵) نمره.

توضیحات نمره گذاری:

۱) اگر نمودار در چند مرحله رسم شود، به هر مرحله (۰/۲۵) تعلق گیرد.

۲) اگر نمودار دقیقاً به درستی رسم نشود ولی دامنه یا برد به درستی در شکل مشخص گردند، به هر کدام (۰/۲۵) تعلق گیرد.

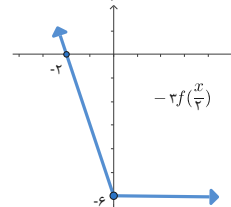
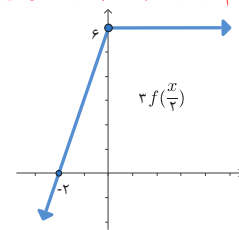
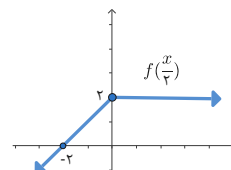


۴- الف) صفحه ۱۰ $Rg = [1, 7]$ (۰/۵) $Dg = [-6, 6]$ (۰/۵)
ب) $(-4, 4)$ (۰/۵)

توضیحات جهت نمره گذاری:

در صورتی که باز یا بسته بودن بازدها، به طور صحیح نوشته نشود. (۰/۲۵) کسر گردد.

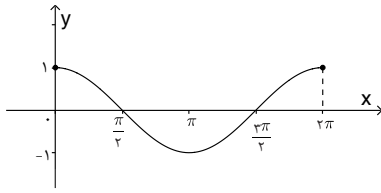
۵- روش اول: رسم هر مرحله (۰/۲۵) نمره تعلق گیرد.



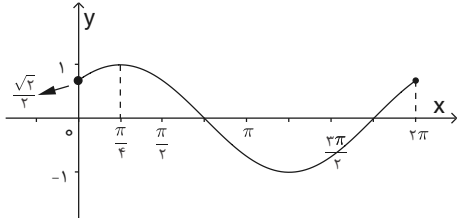
روش دوم: (انتقال نقاط)

$(-1, 0) \rightarrow (-2, 0)$
۰/۲۵

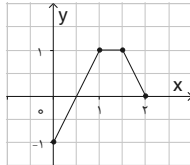
$(0, 2) \rightarrow (0, -6)$
۰/۲۵



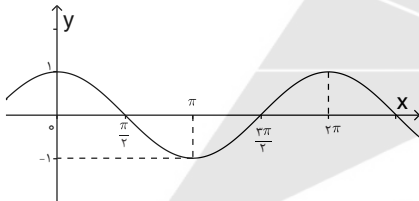
-۱۴



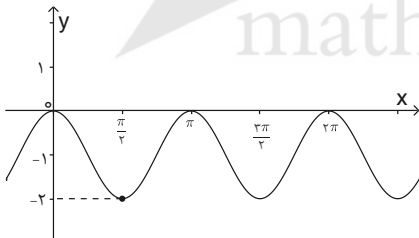
$$D = [0, 2], \quad R = [-1, 1]$$



-۱۵



-۱۶

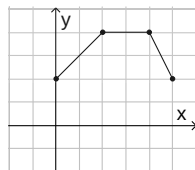


math-pilevar.ir

۱۷- کافی است نمودار تابع f را یک واحد به جلو و سپس دو واحد به سمت بالا منتقل کنید.

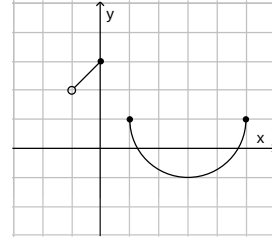
$$D_f = [-1, 4] \quad R_f = [0, 2]$$

$$D_g = [0, 5] \quad R_g = [2, 4]$$



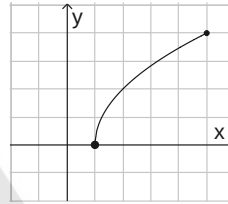
$$D_g = [-1, 2] \quad R_g = [-3, 1]$$

-۱۸

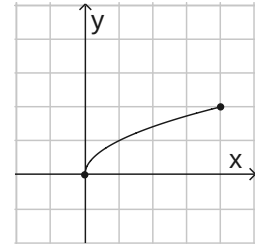


$$R_g = [0, 4], \quad D_g = [1, 5]$$

۱۰- مشابه کار در کلاس صفحه ۴



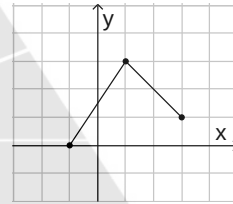
(ب)



(الف)

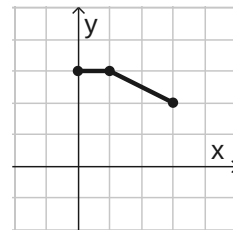
۱۱- (مشابه مثال صفحه ۵ کتاب)

$$D_g = [-1, 3]$$



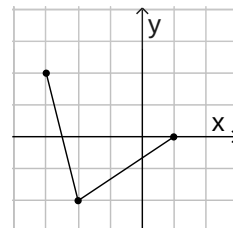
۱۲- (مشابه تمرین ۳ صفحه ۸ کتاب)

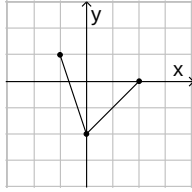
$$D_g = [0, 3]$$



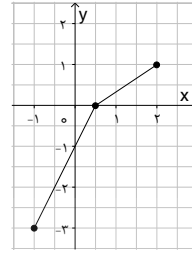
$$D_f = [-3, 1], \quad R_f = [-2, 2]$$

-۱۳



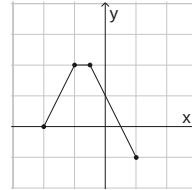


در راستای ضروری رانج آموز:



$$D = [-2, 1] \quad R = [-1, 2]$$

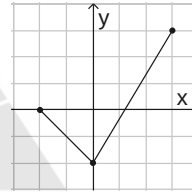
-۱۹



-۲۰ محور طولها

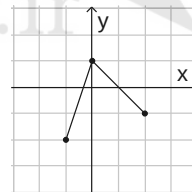
$$Dg = [-2, 3]$$

-۲۱



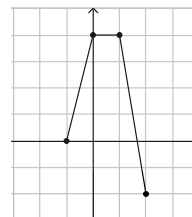
-۲۲ برای رسم نمودار تابع g ، ابتدا انقباض افقی برای $k = 2$ در راستای محور طولها

سپس انتقال یک واحد رو به پایین در راستای محور عرضها $Dg = [-1, 2]$



$$Df = [-1, 2] \quad Rf = [-2, 4]$$

-۲۳



$$Df = [-1, 2] \quad Rf = [-2, 1]$$

-۲۴



درس

۲

تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

۳۰- به رسم نمودار (انتقال افقی) (۰/۲۵)، انتقال

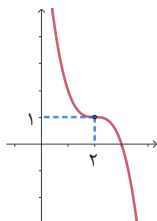
عمودی (۰/۲۵) و قرینه‌یابی (۰/۲۵) نمره تعلق

گیرد. (اگر دانش‌آموز، نمودار نهایی را با هر روشی،

به درستی ترسیم نمودار (۰/۷۵) نمره تعلق گیرد)

$f(x)$ اکیدا نزولی (یا نزولی) است.

(۰/۲۵) (صفحه ۲۱)



$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} \Rightarrow x+1 \geq 2x-3 \Rightarrow x \leq 4 \quad (۰/۲۵) \quad (۲۲ \text{ صفحه})$$

$$x-a=0 \Rightarrow x=a \quad (۰/۲۵)$$

۳۲- روش اول:

$$a^2+a-2=0 \Rightarrow a=1 \quad (۰/۲۵) \quad \text{یا} \quad a=-2 \quad (۰/۲۵)$$

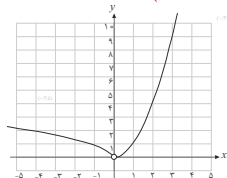
روش دوم: با تقسیم چند جمله‌ای x^2+a-2 بر $x-a$ داریم:

$$x^2+a-2=(x-a)(x+a)+a^2+a-2 \quad (۰/۲۵)$$

با توجه به اینکه باقی‌مانده صفر است، بنابراین:

$$a^2+a-2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 & (۰/۲۵) \\ a=-2 & (۰/۲۵) \end{cases} \quad (۱۹ \text{ صفحه})$$

۳۳- در بازه $(0, +\infty)$ اکیدا صعودی است. (۰/۲۵) (صفحه ۱۸)



رسم نمودار (۰/۵)

۳۴-

$$x-k=0 \Rightarrow x=k \Rightarrow p(k)=0 \Rightarrow k^3+k^2+2=0 \Rightarrow k^3=-1 \Rightarrow k=-1 \quad (۰/۲۵)$$

به پاسخ درست که از طریق تقسیم چند جمله‌ای بر دو جمله‌ای حاصل شود، به تناسب بارم،

نمره تعلق گیرد. (صفحه ۱۹)

۲۵- (۱) درست (۰/۲۵)

(۲) نادرست (۰/۲۵)

(۳) درست (۰/۲۵)

(۴) نادرست (۰/۲۵)

(۵) درست (۰/۲۵)

(۶) درست (۰/۲۵)

(۷) درست (۰/۲۵)

(۸) درست (۰/۲۵)

(۹) درست (۰/۲۵)

(۱۰) درست (۰/۲۵)

(۱۱) نادرست (۰/۲۵)

(۱۲) نادرست (۰/۲۵)

(۱۳) نادرست (در نقاط $x=0, x=1$)

دو تابع برابر هستند اگر بازه $(0, 1)$ در

نظر بگیریم نمودار $y=x^3$ پایین‌تر از

$y=x^2$ قرار می‌گیرد (۰/۲۵)

(۱۴) نادرست (۰/۲۵)

(۱۵) نادرست (۰/۲۵)

۲۶- (۱) دوم (۰/۷۵)

(۲) چهارم (۰/۲۵)

(۳) صفر (۰/۲۵)

(۴) ثابت (۰/۲۵)

(۵) یکنوا (۰/۲۵)

(۶) صفر (۰/۲۵)

(۷) $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$ (۰/۵)

(۸) -1 (۰/۲۵)

(۹) -2 (۰/۲۵)

۲۷- فرض کنید a و b دو عدد دلخواه در این فاصله باشند که $a < b$ (۰/۲۵). چون توابع f

و g اکیدا صعودی هستند، نتیجه می‌شود که $\begin{cases} f(a) < f(b) & (۰/۲۵) \\ g(a) < g(b) & (۰/۲۵) \end{cases}$ بنابراین،

$f(a) + g(a) < f(b) + g(b)$ از این رو، نتیجه می‌شود که

$(f+g)(a) < (f+g)(b)$ پس، $f+g$ روی این فاصله تابعی اکیدا صعودی

است.

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \quad (۰/۲۵) \quad -۲۸$$

$$p(-2)=-1 \Rightarrow -16-2m-1=-1 \Rightarrow m=-8 \quad (۰/۲۵)$$

توضیحات نمره‌گذاری: اگر با تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای مقدار m درستی به دست

آید، به تناسب نمره تعلق گیرد.

۲۹- (صفحه ۱۹)

$$\begin{cases} p(-2)=0 \\ p(1)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=7 \\ a-b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{5}{3} & (۰/۲۵) \\ b=\frac{11}{3} & (۰/۲۵) \end{cases}$$

توضیحات جهت نمره‌گذاری: اگر با استفاده از تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای، دستگاه

معادلات فوق حاصل شود و به درستی مقادیر a و b به دست آید، به تناسب نمره تعلق گیرد.

-۳۵

(الف) $p(2) = 0 \Rightarrow 8 + 2m + 2 = 0 \Rightarrow m = -5$ ، $p(-1) = 6$ (۰/۲۵)

(ب) $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ (۰/۵)

(صفحه ۲۰ و ۲۲)

توضیحات جهت تصحیح: اگر دانش آموزی از روش تقسیم معمولی مسئله را حل کند، نمره کامل تعلق گیرد.

اگر دانش آموزی مقدار m را اشتباه به دست آورد و قسمت دوم (الف) را بر اساس آن مقدار، درست حل کند، به قسمت دوم نمره تعلق گیرد.

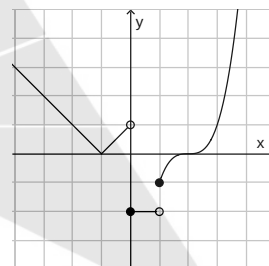
در قسمت (ب)، اگر علامت قسمت دوم تجزیه، یکی در میان مثبت و منفی گذاشته شده باشد، ۰/۲۵ نمره تعلق گیرد.

-۳۶ (صفحه ۲۱ کتاب)

اکیداً صعودی $(-1, 0)$ و $[1, +\infty)$ (۰/۵)

اکیداً نزولی $(-\infty, -1]$ (۰/۲۵)

رسم شکل (۰/۲۵)



درس ۲

توابع یکنوا

-۳۷ (صفحه ۲۲ کتاب)

$p(2) = 3 \Rightarrow 12 + 2m + 2m + 1 = 3 \Rightarrow 4m = -10$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow m = -\frac{5}{2}$ (۰/۵)

$f(-2) = -\frac{5}{2}(-2)^2 - \left(-\frac{5}{2}\right)(-2) + 3 = -12$ (۰/۲۵)

-۳۸ صفحه ۲۱

(الف) اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی) $(0, +\infty)$ و $(-\infty, 0)$ (۰/۲۵)

اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی) $(-\infty, 0)$ (۰/۲۵)

(ب) خیر، در کل دامنه اکیداً یکنوا نیست. (۰/۲۵)

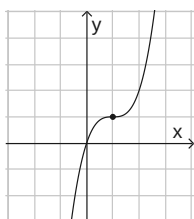
-۳۹ صفحه ۲۲

$p(2) = 0 \Rightarrow 8 - 2a + b = 0$ (۰/۲۵)
 $p(-1) = 3 \Rightarrow a + b = 4$ (۰/۲۵)
 $\Rightarrow \begin{cases} -2a + b = -8 \\ a + b = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow a = 4$ (۰/۲۵)
 $b = 0$ (۰/۲۵)

-۴۰ (صفحه‌های ۱۴ و ۱۷ کتاب)

$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 = (x-1)^3 + 1$



اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی)

-۴۱ (صفحه ۲۲ کتاب)

$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Rightarrow 2x+1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 1$

-۴۲ (صفحه ۱۹ کتاب)

$x = a \Rightarrow 2a^2 - 8 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$

$\begin{cases} p(-2) = -1 \\ p(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b = 7 \\ a + b = -1 \end{cases}$ -۴۳
 $\Rightarrow a = \frac{8}{3}, b = \frac{-11}{3}$

$\frac{x^5 + 1}{x + 1} = \frac{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}{x + 1}$ -۴۴
 $= x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow p(-1) = 2$ -۴۵
 $\Rightarrow (-1)^4 + k(-1)^2 - 3 = 2 \Rightarrow k = 4$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow 2x+1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 1$ -۴۶

$x^5 + 32 = (x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$ -۴۷

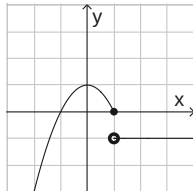


$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \quad -55$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(-2) = -2a-7 \\ q(-2) = 11 \end{cases} \Rightarrow p(-2) = q(-2) \Rightarrow a = -9$$

$$(-\infty, 0] \cup (1, +\infty) \quad \text{صعودی}$$

$$[0, +\infty) \quad \text{نزولی}$$



$$x^6 - 1 = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \quad -56$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \quad -58$$

$$p(2) = 8 + 4a + 2b - 2 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -6 \Rightarrow 2a + b = -3$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$p(-1) = -1 + a - b - 2 = 3 \Rightarrow a - b = 6$$

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ a - b = 6 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -5$$

درس ۲

توابع یکنوا

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \quad -59$$

$$\Rightarrow 1^3 + a(1)^2 + 1 + b = 4 \Rightarrow a + b = 2$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

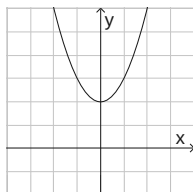
$$\Rightarrow (-2)^3 + a(-2)^2 + (-2) + b = 0 \Rightarrow 4a + b = 10$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 4a + b = 10 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{8}{3}, b = -\frac{2}{3}$$

$$x^5 + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) \quad -60$$

$$\text{اکیداً نزولی} \quad (-\infty, 0)$$

$$\text{اکیداً صعودی} \quad (0, +\infty)$$



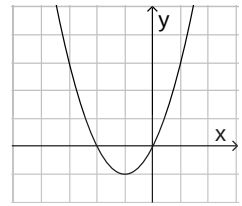
$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 \quad -62$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$\Rightarrow P(2) = 2^3 + a(2)^2 + b(2) + 1$$

$$[-1, +\infty) \quad \text{اکیداً صعودی}$$

$$(-\infty, -1] \quad \text{اکیداً نزولی}$$

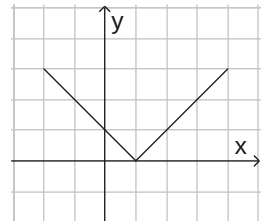


$$2x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow p\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow r = 0$$

$$[1, +\infty) \quad \text{اکیداً صعودی}$$

$$(-\infty, 1] \quad \text{اکیداً نزولی}$$

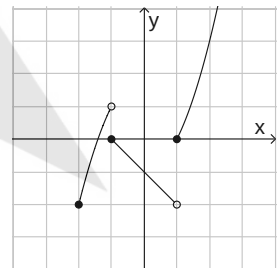


$$\begin{cases} -8 + 4a - 2b + 2 = 0 \Rightarrow 4a - 2b = 6 \\ 1 + a + b + 2 = 0 \Rightarrow a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = -3$$

$$\text{صعودی} \quad [-2, -1]$$

$$\text{صعودی} \quad [1, +\infty)$$

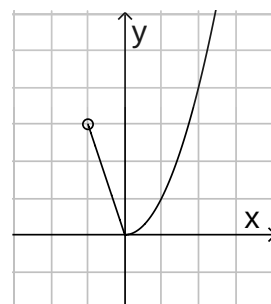
$$\text{نزولی} \quad [-1, 1]$$

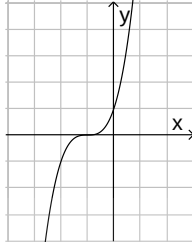


$$3^{2x-10} \leq 3^{-4} \Rightarrow 2x-10 \leq -4 \Rightarrow x \leq 3 \quad -53$$

$$\text{اکیداً صعودی} \quad (-1, 0]$$

$$\text{اکیداً صعودی} \quad [0, +\infty)$$





$$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) \quad -71$$

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

در داشت ضرورتی دانش آموز:

$$= 9 + 4a + 2b = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -9$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow P(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 1$$

$$= a - b = 0 \Rightarrow a - b = 0$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = -9 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{9}{2}, b = \frac{9}{2}$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow P(1) = 4 \Rightarrow a + b = 3 \quad -63$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow P(-2) = 0 \Rightarrow 4a + b = 8$$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 4a + b = 8 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{5}{3}, b = \frac{4}{3}$$

$$\text{الف) } g(x) = x^3 \quad -64$$

$$\text{ب) } 7$$

$$\text{پ) } (-2, +\infty)$$

$$x + 1 \leq 2x - 3 \Rightarrow x \geq 4 \quad -65$$

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 \quad -66$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow P(2) = 2^3 + a(2)^2 + b(2) + 1$$

$$= 9 + 4a + 2b = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -9$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow P(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 1$$

$$= a - b = 0 \Rightarrow a - b = 0$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = -9 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{9}{2}, b = \frac{9}{2}$$

$$P(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -9 \quad -67$$

$$P(-1) = 3 \Rightarrow a - b = 3$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = -9 \\ a - b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{7}{2}$$

$$f(-1) = 0 \Rightarrow 1 - a - 3 = 0 \Rightarrow a = -2 \quad -68$$

$$f(2) = 4 - 4 - 3 = -3$$

$$x^6 - 1 = (x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1) \quad -69$$

۷۰- اکیدا صعودی

«مجموعه کتاب‌های سمن»



math-pilevar.ir



انتشارات گونش نگار



math-pilevar.ir

@plv.math



نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com