

بخور جانم!
برات خوبه!

۶

سوالات
موضوعی
نهایی
(سمن)



۷

ریاضی ۳

۶

۶

مجموعه سوالات نهایی ریاضی ۳
پایه دوازدهم رشته علوم تجربی

پاسخ
تشریحی

رقیه پيله ور - میکائیل صدقی

بِسْمِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

سوالات موضوعی نهایی (سمن)

ریاضی ۳

(۲۳ دوره سوال نهایی)

مؤلفین:

رقیه پیلهور نیار

میکائیل صدقی

سرشناسه	: پيله‌ور نيار، رقيه، ۱۳۶۰-
عنوان و نام پديدآور	: سوالات موضوعی نهایی ریاضی ۳/مولفین رقيه پيله‌ور نيار، ميكائيل صدقي.
مشخصات نشر	: اردبیل: گونش‌نگار، ۱۴۰۴.
مشخصات ظاهري	: ۱۶۱ ص.: جدول، نمودار؛ ۲۲ × ۲۹ س.م.
شابک	: ۷-۴۵-۵۵۱۳-۶۲۲-۹۷۸: ۳۶۰۰۰۰۰ ريال
وضعیت فهرست نویسی	: فیپای مختصر
شناسه افزوده	: صدقي، ميكائيل، ۱۳۵۳-
شماره کتابشناسی ملی	: ۹۳۹۱۸۰۷
اطلاعات رکورد کتابشناسی	: فیپا



- ◀ نام کتاب : سوالات موضوعی نهایی ریاضی ۳
- ◀ مولفین : رقيه پيله‌ور و ميكائيل صدقي
- ◀ ناشر : انتشارات گونش‌نگار
- ◀ طراح روجلد : رباب حامدسلطانی
- ◀ رسم نمودارها : رقيه پيله‌ور
- ◀ نوبت چاپ : ویرایش سوم، ۱۴۰۴
- ◀ تیراژ : ۱۰۰۰ جلد
- ◀ قیمت : ۳۶۰۰۰۰۰ ريال
- ◀ شابک : ۷-۴۵-۵۵۱۳-۶۲۲-۹۷۸

آدرس: اردبیل، اول خیابان دانشگاه، روبروی اداره مخابرات، انتشارات گونش‌نگار

۰۹۱۴۳۵۸۵۶۲۸ — ۰۴۵ -۳۳۵۲۳۳۵۹

www.gunashnegarpub.ir

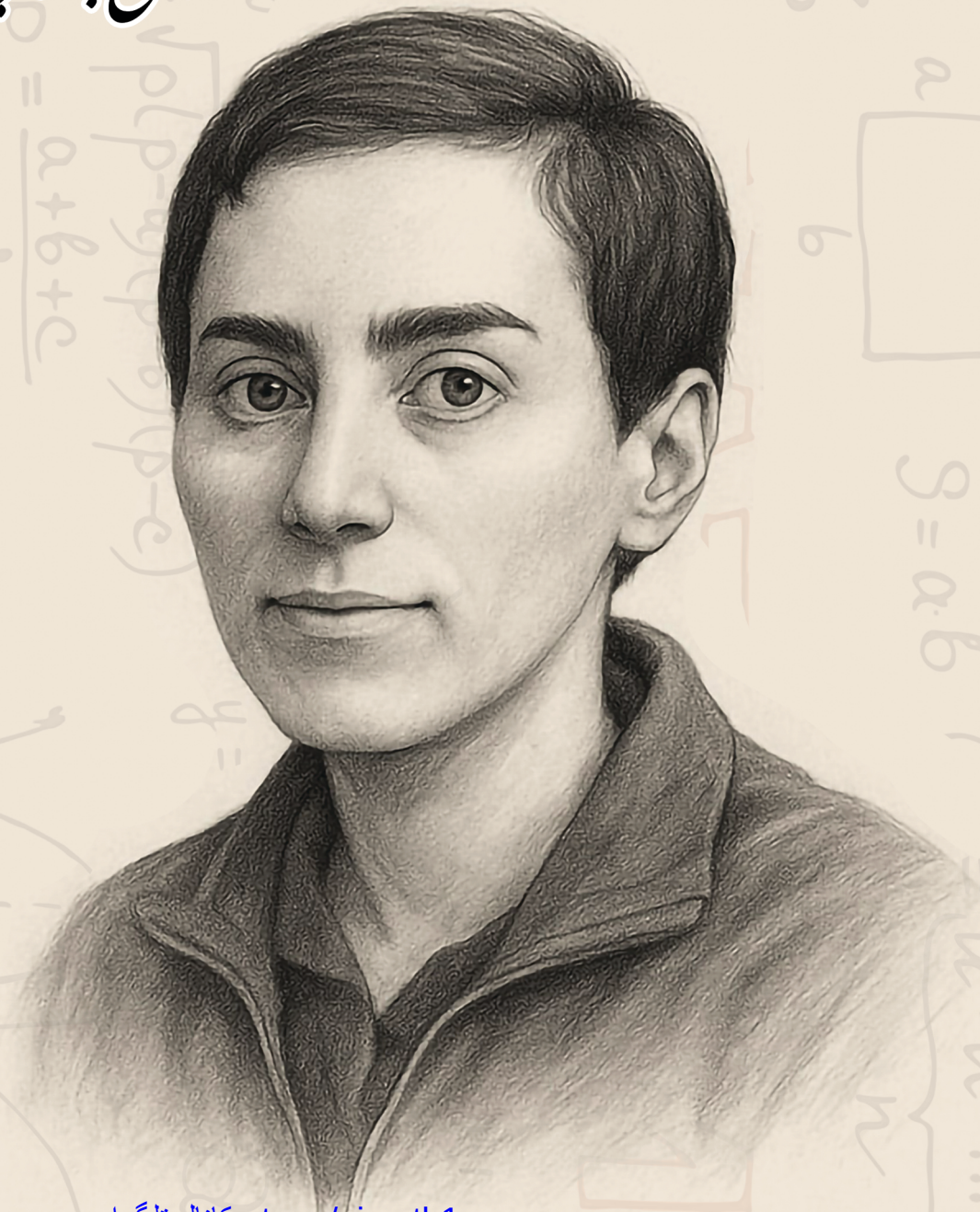
کلیه حقوق قانونی، مادی و معنوی برای مولفین و ناشر محفوظ است هیچ شخص حقوقی یا حقیقی حق تکثیر تمام یا قسمتی از این مجموعه را ندارد، در صورت مشاهده تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

تقدیم به

دیران فرهیخته‌ی ریاضی

ودانش آموزان برتر

و روح بلند مریم میرزاخانی



فهرست مطالب

۶	مقدمه
۱۰	۱ تابع
۱۱	توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی
۱۷	ترکیب توابع
۲۸	تابع وارون
۳۳	۲ مثلثات
۳۴	تناوب و تانژانت
۴۲	معادلات مثلثاتی
۴۹	۳ حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت
۵۰	حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت
۶۵	۴ مشتق
۶۶	آشنایی با مفهوم مشتق
۷۲	مشتق‌پذیری و پیوستگی
۸۷	آهنگ تغییر
۹۱	۵ کاربرد مشتق
۹۲	اکسترم‌های تابع
۹۹	بهینه‌سازی
۱۰۳	۶ هندسه
۱۰۴	تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی
۱۱۳	دایره



۱۲۲

۷ احتمال

۱۲۳

قانون احتمال کل

مقدمه

کتابی که اکنون در دست دارید، حاصل سال‌ها تدریس، تجربه، تلاش مستمر، و همراهی صمیمانه با دانش‌آموزانی است که در مسیر امتحانات نهایی گام برداشته‌اند. آنچه پیش رو دارید، جامع‌ترین مجموعه‌ی سوالات نهایی ریاضی ۳ پایه دوازدهم است؛ مجموعه‌ای که تمام سوالات رسمی برگزارشده از نخستین آزمون تا آخرین دوره (دی ۹۷ تا شهریور ۱۴۰۴) را بدون حذف، به‌صورت منظم، دسته‌بندی‌شده و درس‌به‌درس گردآوری کرده‌ایم تا دانش‌آموز با یک منبع کامل و مطمئن روبه‌رو باشد.

این مجموعه، برخاسته از دل کلاس‌های درس است. سال‌ها سوالات را به‌صورت جزوه‌های کلاسی حل و بررسی می‌کردیم، و تجربه نشان داد که کار با سوالات واقعی نهایی، مؤثرترین راه برای کسب نمره‌ی عالی است. با پیشنهاد همکاران ارجمند، این جزوه‌ها شکل کتاب به خود گرفت و خوشبختانه، در دو سال گذشته، با استقبال کم‌نظیری از سوی دبیران و دانش‌آموزان در سراسر کشور همراه شد. همین همراهی ارزشمند، انگیزه‌ای شد تا کتاب را در چاپ‌های بعدی با چینه‌بندی بهتر، درس‌نامه‌های خلاصه و کاربردی، و طبقه‌بندی دقیق‌تر بازنگری و کامل‌تر کنیم.

در اینجا باید بر نکته‌ای کلیدی تأکید کنم:

به جرأت می‌توانم بگویم این مجموعه، تنها کتابی است که تمام دانش‌آموزان، با هر سطح علمی و در هر نوع مدرسه‌ای، به آن نیاز دارند. تفاوتی ندارد که در مدرسه‌ای هیأت امنایی، نمونه دولتی، تیزهوشان یا عادی تحصیل می‌کنید؛ تأثیر نمرات نهایی در رتبه‌ی کنکور و تراز علمی برای همگان یکسان است. بنابراین، داشتن منبعی کامل از سوالات نهایی، نه یک انتخاب، بلکه یک ضرورت آموزشی برای همه دانش‌آموزان محسوب می‌شود. دانش‌آموز عزیز، این کتاب تنها یک مجموعه‌ی سوال نیست؛ نقشه‌ی راهی برای آمادگی کامل، مرور هدفمند، کاهش اضطراب امتحان و رسیدن به نتیجه‌ای مطلوب است. سوالات به ترتیب موضوعات کتاب درسی، همراه با نمره‌بندی، تاریخ برگزاری و نکات مهم جمع‌بندی شده‌اند تا مسیر یادگیری برای شما هموارتر شود.

همکار محترم، این کتاب می‌تواند همراه آموزشی مؤثری در کلاس درس باشد. با توجه به ساختار منظم آن، می‌توانید از سوالات به‌عنوان تمرین، آزمون کلاسی، یا تکالیف هدفمند استفاده کنید. بی‌شک، حل این سوالات به‌صورت مستمر در طول سال تحصیلی، نقش مؤثری در ارتقای سطح علمی دانش‌آموزان دارد. در پایان، از همه‌ی همکاران فرهیخته‌ای که با انتخاب این مجموعه به‌عنوان مرجع کلاس خود، به ما اعتماد کردند، صمیمانه سپاس‌گزاریم. این همراهی ارزشمند، دلگرمی بزرگی در مسیر تألیف و ارتقای کیفیت این اثر بوده است. در صورت مشاهده‌ی هرگونه اشکال، پیشنهاد یا اصلاح، لطفاً از طریق وبسایت math-pilevar.ir ما را در جریان بگذارید تا در چاپ‌های آینده بهبودهای لازم اعمال گردد.

با تشکر: پيله‌ور - صدقی

برای دریافت فایل pdf کتاب به سایت math-pilevar.ir مراجعه کنید.





هدیه ویژه برای خریداران مجموعه کتابهای سَمَن

از اینکه مجموعه کتابهای سَمَن را برای مطالعه و تمرین انتخاب کردید، صمیمانه سپاسگزاریم.
امسال برای همراهان مجموعه کتابهای سَمَن (سوالات موضوعی نهایی) یک سورپرایز خاص داریم!

هدیه ۱: نسخه دیجیتالی PDF کتابها

خیلی از شما دوست دارید نسخه‌ی PDF کتاب همیشه همراهتان باشد؛ چه در مسیر، چه در زمان‌هایی که کتاب کاغذی در دسترس نیست.
خبر خوب این است که ما این امکان را برایتان فراهم کردیم:



۱- وارد سایت www.math-pilevar.com شوید.

۲- اپلیکیشن Pimath را از نوار بالای سایت دانلود و روی گوشی اندرویدی خود نصب کنید.

۳- یک حساب کاربری بسازید و وارد برنامه شوید.

۴- در بخش «PDF کتابها» کد تخفیف ۱۰۰ درصدی زیر را وارد کنید

و فایل PDF همین کتاب و سایر کتابهای ارزشمند

مجموعه سَمَن را به‌طور رایگان دریافت کنید.

کد تخفیف: off90k



برای دسترسی سریعتر، کافی است
تصویر QR را اسکن کنید. و مستقیم
وارد دنیای کتابهای دیجیتال شوید.

⚠ اگر فایل باز نشد، اپلیکیشن را یکبار ببندید و دوباره اجرا کنید. در صورت مشکل، از بخش «پشتیبانی»
داخل اپلیکیشن با ما در ارتباط باشید.

هدیه ۲: ویدیوهای رایگان تدریس فصل ۶ و ۷ کتاب درسی

تدریس قدم به قدم کل فصل ۶ و ۷ به صورت رایگان در اختیار شما قرار می‌گیرد.
تمامی کاردر کلاس‌ها و فعالیت‌ها حل شده است، همچنین تمامی تمرینات این دو فصل به طور کامل حل
و تشریح شده است.



برای مشاهده کافیسیت کد QR را اسکن کنید و مستقیم وارد بخش آموزش‌ها شوید.



کانال تلگرامی



@RIAZI3_12TAJROBI



فصل ۷ کتاب



فصل ۶ کتاب



هدیه ۳: پکیج جامع و کامل نهایی ریاضی ۳



بهترین و کامل‌ترین منبع برای امتحانات نهایی:

اگر می‌خواهید در امتحانات نهایی ریاضی ۳ بهترین نتیجه را بگیرید، این پکیج دقیقاً برای شما ساخته شده است. آموزش‌ها ساده، روان و قابل فهم هستند؛ حتی اگر پایه ضعیفی داشته باشید، با این پکیج می‌توانید به راحتی یاد بگیرید و بهترین نمره را کسب کنید.

ویژگی‌های اصلی پکیج:

- ✓ آموزش کامل و قدم به قدم تمام مباحث کتاب درسی
- ✓ حل کامل و تشریحی تمام کاردر کلاس‌ها و فعالیت‌ها و تمرینات کتاب درسی
- ✓ آموزش روان و بدون مطالب سنگین اضافه
- ✓ حل نمونه سوال نهایی و سوال کنکور سال‌های اخیر در هر درس
- ✓ جلسه اول رایگان برای شروع سریع یادگیری
- ✓ مناسب حتی برای دانش‌آموزان با پایه ضعیف برای کسب بهترین نمره

دسترسی به جزوه‌ها و جمع‌بندی فصل‌ها



برای اطلاعات بیشتر درباره این پکیج، همین حالا کافیسیت کد QR زیر را اسکن کنید.



شما می‌توانید این پکیج فوق‌العاده را با ۵۰ درصد

تخفیف ویژه تهیه کنید. (این تخفیف مختص خریداران کتاب می‌باشد.)

کد تخفیف: rs2050



با این سه هدیه، شما همیشه:

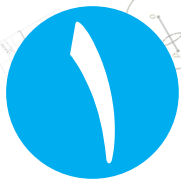
- ✓ نسخه دیجیتال کتاب
- ✓ ویدیوهای رایگان آموزشی
- ✓ پکیج کامل نهایی

را در کنار خود خواهید داشت؛ یک مجموعه کامل برای موفقیت در امتحانات نهایی!



نمونه سوالات نهایی که در این کتاب به صورت موضوعی تفکیک شده است عبارتند از:

دی ۹۷	۱
خرداد ۹۸	۲
شهریور ۹۸	۳
دی ۹۸	۴
خرداد ۹۹	۵
خرداد ۹۹ خارج از کشور نوبت صبح	۶
خرداد ۹۹ خارج از کشور نوبت عصر	۷
شهریور ۹۹	۸
دی ۹۹	۹
خرداد ۱۴۰۰	۱۰
شهریور ۱۴۰۰	۱۱
دی ۱۴۰۰	۱۲
خرداد ۱۴۰۱	۱۳
شهریور ۱۴۰۱	۱۴
دی ۱۴۰۱	۱۵
خرداد ۱۴۰۲	۱۶
شهریور ۱۴۰۲	۱۷
دی ۱۴۰۲	۱۸
خرداد ۱۴۰۳	۱۹
شهریور ۱۴۰۳	۲۰
دی ۱۴۰۳	۲۱
خرداد ۱۴۰۴	۲۲
شهریور ۱۴۰۴	۲۳



تابع

توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی ۱۱
ترکیب توابع ۱۷
تابع وارون ۲۸



درس

۱

توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

خلاصه درسنامه

تابع درجه سوم



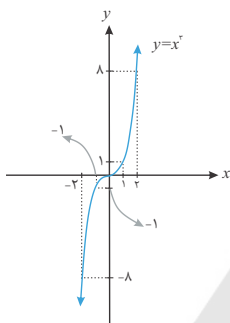
تابع چند جمله‌ای: هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را یک تابع چند جمله‌ای از درجه n می‌گوییم که در آن $a_0, a_1, \dots, a_n$ اعداد حقیقی، n عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ است.

۱ دامنه‌ی همه‌ی تابع‌های چند جمله‌ای، $\mathbb{R}$ است.

۲ اگر در یک تابع چند جمله‌ای، n بزرگ‌ترین توان موجود برای x باشد، تابع را چند جمله‌ای درجه‌ی n می‌گوییم.

برای مثال: $f(x) = x^3 + x + 4$ ، یک تابع چند جمله‌ای درجه‌ی سوم و $f(x) = x^2 + x^4 + 1$ هم تابعی چند جمله‌ای از درجه‌ی چهارم است....

۳ تابع‌های ثابت، همانی و خطی، تابع چند جمله‌ای محسوب می‌شوند.



تابع $y = x^3$: تابع $y = x^3$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه ۳ است که نمودار آن به صورت مقابل می‌باشد: با توجه به نمودار، دامنه و برد این تابع برابر $\mathbb{R}$ است. همچنین این تابع، یک به یک و وارون‌پذیر می‌باشد. از دیگر ویژگی‌های این تابع آن است که نمودار آن نسبت به مبدأ مختصات متقارن می‌باشد.

مقایسه نمودارهای توابع $y = x^2$ و $y = x^3$ 

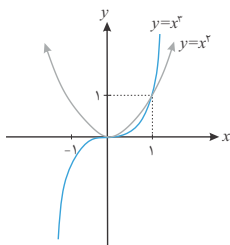
اعداد بین صفر و ۱، ویژگی جالبی دارند: هرچه توانشان را بیشتر کنید، حاصلشان کمتر می‌شود. مثال: $(0.1)^2 = 0.01$ ، $(0.1)^4 = 0.0001$ ولی برای اعداد بزرگتر از ۱، روال معمولی است؛ توان بیشتر، حاصل بیشتر می‌دهد. مثال: $2^2 = 4$ ، $2^4 = 16$

$$b > 1 \xrightarrow{m > n} b^m > b^n$$

و

$$0 < a < 1 \xrightarrow{m > n} a^m < a^n$$

نکته:



از آنجا که نمودار هر دو از نقطه‌ی $(1, 1)$ می‌گذرند، رفتار $y = x^3$ و $y = x^2$ را قبل از $x = 1$ و بعد از آن، با توجه به مطلب بالا بررسی می‌کنیم.
 برای x های مثبت، حرکتش را از زیر $y = x^2$ شروع می‌کند و پس از رسیدن به نقطه‌ی $x = 1$ ، می‌رود بالای $y = x^2$.

توابع صعودی و توابع نزولی



در یک تقسیم‌بندی کلی همه‌ی تابع‌هایی که می‌شناسیم، از نظر رفتار، در یکی از پنج دسته‌ی زیر قرار می‌گیرند:

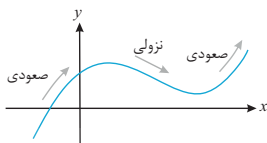
۱ صعودی ۲ نزولی ۳ اکیداً صعودی ۴ اکیداً نزولی ۵ غیریکنوا



تابع	به بیان فارسی	تشخیص از روی زوج مرتب‌ها	تعریف ریاضی: برای هر x_1 و x_2 عضو مجموعه‌ی I به طوری که $I \subseteq D_f$	وضعیت نمودار
۱ اکتبا صعودی	وقتی مقدار x ها زیاد می‌شود، مقدار y های نظیر آن‌ها هم زیاد می‌شود.	اگر زوج مرتب‌ها را طوری مرتب کنید که x ها از کوچک به بزرگ نوشته شده باشند، y ها هم باید از کوچک به بزرگ باشند. $\{(1, 10), (2, 11), (3, 15), (4, 19)\}$	در $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ مقایسه‌ی دو نقطه با طول نامساوی روی نمودار تابع، عرض بیشتر برای نقطه‌ای با طول بیشتر است...	اگر از سمت چپ، قلم را روی نمودار بگذاری و روی آن حرکت کنی، مدام در حال بالا رفتن هستی.
۲ اکتبا نزولی	وقتی مقدار x ها زیاد می‌شود، y های نظیر آن‌ها کم می‌شود.	اگر زوج مرتب‌ها را طوری مرتب کنید که x ها از کوچک به بزرگ نوشته شده باشند، y ها از بزرگ به کوچک قرار می‌گیرند. $\{(1, 20), (2, 14), (3, 9), (4, 8)\}$	در $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ مقایسه‌ی دو نقطه با طول نامساوی روی نمودار تابع، عرض بیشتر برای نقطه‌ای با طول کمتر است....	اگر از سمت چپ، قلم را روی نمودار بگذاری و روی آن حرکت کنی، مدام در حال پایین رفتن هستی.
۳ صعودی	وقتی مقدار x ها زیاد می‌شود، y های نظیر آن‌ها کم نمی‌شود؛ y ها یا زیاد می‌شوند یا درجا می‌زنند و مساوی قبلی می‌شوند ...	اگر زوج مرتب‌ها را طوری مرتب کنید که x ها از کوچک به بزرگ نوشته شده باشند، هر y ، یا از y قبلی خود بزرگ‌تر است یا با آن مساوی. $\{(1, 10), (2, 11), (3, 11), (4, 17)\}$	دو نقطه $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ با طول متفاوت روی نمودار تابع، یا عرض مساوی دارند یا نقطه‌ای که طول بیشتر دارد، عرض بیشتری هم خواهد داشت...	اگر از سمت چپ، قلم را روی نمودار بگذاری و روی آن حرکت کنی، یا بالا می‌روی یا روی خط صاف حرکت می‌کنی.
۴ نزولی	وقتی مقدار x ها زیاد می‌شود، y های نظیر آن‌ها زیاد نمی‌شود؛ y ها یا کم می‌شوند یا درجا می‌زنند و مساوی قبلی می‌شوند....	اگر زوج مرتب‌ها را طوری مرتب کنید که x ها از کوچک به بزرگ نوشته شده باشند، هر y ، یا از y قبلی خود کوچک‌تر است یا با آن مساوی. $\{(1, 20), (2, 20), (3, 16), (4, 11)\}$	دو نقطه $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ با طول متفاوت روی نمودار تابع، یا عرض مساوی دارند یا نقطه‌ای که طول بیشتر دارد، عرض کمتری خواهد داشت...	اگر از سمت چپ، قلم را روی نمودار بگذاری و روی آن حرکت کنی، یا پایین می‌روی یا روی خط صاف حرکت می‌کنی.



تعریف تابعی را که در دامنه‌ی خود، در محدوده‌هایی صعودی و در محدوده‌هایی دیگر نزولی باشد، غیریکنوا می‌گوییم. آهنگ رفتاری تابع غیریکنوا تغییر می‌کند: گاهی بالا می‌رود و گاهی هم پایین.



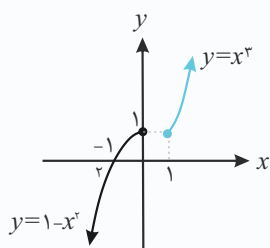
تعریف ۱ به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، می‌گوییم تابع اکیداً یکنوا.
۲ به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم تابع یکنوا.

یکنوا		اکیداً یکنوا	
نزولی هست؛ ولی اکیداً نزولی نه!	صعودی هست؛ ولی اکیداً صعودی نه!	اکیداً نزولی و نزولی	اکیداً صعودی و صعودی

نکته:

- ۱ فرق تابع صعودی با اکیداً صعودی در این است که تابع غیراکید در محدوده‌ای از دامنه‌ی خود، ثابت می‌شود یا در دامنه‌ی خود نقطه‌های هم‌عرض دارد.
- ۲ فرق تابع نزولی یا اکیداً نزولی در این است که تابع غیراکید در محدوده‌ای از دامنه‌ی خود، ثابت می‌شود یا در دامنه‌ی خود نقطه‌های هم‌عرض دارد.
- ۳ تابع ثابت، هم صعودی محسوب می‌شود، هم نزولی.

مثال



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ 1 - x^2 & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{تابع}$$

پاسخ: اگر از چپ به راست قلم را حرکت دهید می‌فهمید که تابع صعودی است. به خاطر وجود دو نقطه‌ی هم‌عرض $(0, 1)$ و $(1, 1)$ اکیداً صعودی نیست!

رفتار تابع‌های f و f^{-1}

در آخر می‌خواهیم ببینیم رفتار f^{-1} چگونه از رفتار f دستور می‌گیرد...

- ۱ اگر f اکیداً صعودی باشد، f^{-1} هم اکیداً صعودی خواهد بود و برعکس.
- ۲ اگر f اکیداً نزولی باشد، f^{-1} هم اکیداً نزولی خواهد بود و برعکس.
- ۳ اگر f یک به یک باشد، f^{-1} هم یک به یک خواهد بود و برعکس.



توابع صعودی و نزولی



صعودی و نزولی بودن برخی از توابع معروف

ضابطه	$y = \cos x$	$y = \frac{1}{x}$	$f(x) = c$
نمودار			
تابع	نزولی اکید $(0, \pi)$ صعودی اکید $(\pi, 2\pi)$	در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است اما در حالت کلی در $\mathbb{R}$ غیریکنواست.	هم صعودی و هم نزولی است اما صعودی یا نزولی اکید نیست.
ضابطه	$y = \sin x$	$y = 2^x$, $y = \log_2 x$	$y = (\frac{1}{2})^x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$
نمودار			
تابع	صعودی اکید $(0, \frac{\pi}{2})$ نزولی اکید $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ صعودی اکید $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$	اکیداً صعودی و اکیداً یکنوا	اکیداً نزولی و اکیداً یکنوا
		$y = a^x$ و $y = \log_a x$	

نکته: در توابع نمایی و لگاریتمی اگر $a > 1$ باشد توابع صعودی و اگر $0 < a < 1$ باشد توابع نزولی‌اند.

مثال

تابع $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$ در بازه $[k, +\infty)$ یکنوا است. حدود k کدام است؟



$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow k \geq \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

مثال

به ازای کدام مقدار a هر دو تابع $y = (-2a+7)x + 1$ و $y = (\frac{a-1}{2})^x$ اکیداً صعودی‌اند؟

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a-1}{2} > 1 \Rightarrow a-1 > 2 \Rightarrow a > 3 \\ -2a+7 > 0 \Rightarrow -2a > -7 \Rightarrow a < \frac{7}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 3 < a < \frac{7}{2}$$

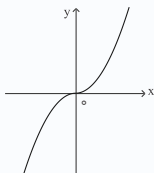


مثال

مشخص کنید کدام تابع اکیداً یکنوا نیست؟

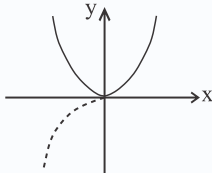
۴) $f(x) = x|x|$

اکیداً یکنوا است.



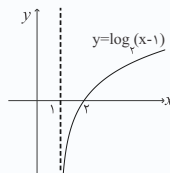
۳) $f(x) = x^2|x|$

غیریکنوا است.



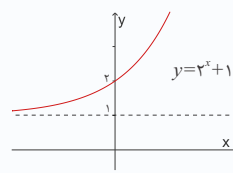
۲) $f(x) = \log_2(x-1)$

اکیداً یکنوا است.



۱) $f(x) = 2^x + 1$

اکیداً یکنوا است.



نکته: ۱) اگر توابع f, g هر دو صعودی باشند، $f + g$ نیز صعودی است.

۲) اگر توابع f, g هر دو نزولی باشند، $f + g$ نیز نزولی است.

۳) اگر تابع f صعودی و g نزولی باشد، $f - g$ صعودی است.

۴) اگر تابع f اکیداً صعودی و g صعودی باشد، $f + g$ نیز اکیداً صعودی است.

سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (۱) تابع $y = 7$ در دامنه‌اش هم صعودی و هم نزولی است. (شهریور ۱۴۰۴) (۲) اگر تابعی یک به یک باشد، آنگاه اکیداً یکنوا است. (دی ۱۴۰۳) (۳) تابع $y = \sqrt{3}x^3 - \pi x + 1$ یک تابع چندجمله‌ای است. (شهریور ۱۴۰۲) (۴) تابع $y = \frac{1}{x}$ در دامنه‌اش یکنواست. (شهریور ۱۴۰۲) (۵) بی‌شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است. (خرداد ۱۴۰۲) (۶) تابع $y = 2x(1 - 3x^2) + 1$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه سوم است. (دی ۱۴۰۱) (۷) نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $(0, 1)$ پایین‌تر از، نمودار تابع $y = x^3$ است. (دی ۱۴۰۱) (۸) تابع $f(x) = \sqrt{2}x - x^2$ یک تابع درجه دوم است. (خرداد ۱۴۰۱) (۹) تابع $f(x) = x^3$ ، تابعی اکیداً صعودی است. (خرداد ۱۴۰۱) (۱۰) تابع $y = \sqrt{2}x^3 - \frac{3}{4}x$ یک چندجمله‌ای از درجه ۳ است. (دی ۱۴۰۰) (۱۱) دامنه توابع چند جمله‌ای برابر R است. (شهریور ۱۴۰۰) (۱۲) تابع با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است. (شهریور ۱۴۰۰) (۱۳) تابع ثابت در یک بازه هم صعودی هم نزولی است. (خرداد ۱۳۹۹ - دی ۱۳۹۷). (۱۴) تابع $y = x $ در تمام دامنه‌اش صعودی است. (خرداد ۱۳۹۹ خارج) (۱۵) تابع $y = 2x^5 - 4x^3 + \sqrt{2}x^2$ یک تابع چند جمله‌ای نیست. (خرداد ۱۳۹۹ خارج) (۱۶) تابع $y = -x^3 + 2$ در دامنه تعریفش صعودی است. (شهریور ۱۳۹۸)	۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵	درس ۱ توابع چندجمله‌ای



۲	جمله زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. (۱) تابع هم صعودی و هم نزولی است. (شهریور ۱۴۰۳) (۲) تابع $g(x) = x^2 - 4x + 5$ در بازه $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a برابر است. (خرداد ۱۴۰۳) (۳) نمودار تابع $f(x) = x^3$ در بازه $(0, 1)$ ، از نمودار تابع $g(x) = x^2$ قرار دارد. (بالا تر - پایین تر) (دی ۱۴۰۰) (۴) در بازه $(0, 1)$ ، نمودار تابع $y = x^3$ نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد. (دی ۱۳۹۹) (۵) تابع اکیدا یکنوا، همواره هستند. (شهریور ۱۳۹۹) (۶) تابع $y = (x + 3)^3$ در دامنه خود (صعودی-نزولی) است. (خرداد ۱۳۹۸) (۷) تابعی که در یک بازه هم صعودی هم نزولی محسوب می‌شود، تابع نامیده می‌شود. (دی ۱۳۹۸، خرداد ۱۳۹۹ خارج)	۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵
۳	با توجه به نمودار تابع f ، در جدول زیر برای هر یک از قسمت‌های ستون «A» قسمت صحیح ستون «B» را انتخاب کنید (یکی از قسمت‌های ستون «B» اضافه است). 	۰/۷۵ خرداد ۱۴۰۴
۴	نمودار تابع $y = -x^3 + 2$ را رسم کنید و صعودی یا نزولی بودن آن را مشخص کنید.	۰/۷۵ شهریور ۱۴۰۳
۵	به کمک انتقال نمودار تابع $y = x^3$ نمودار تابع $f(x) = (x - 2)^3 + 1$ را رسم کنید.	۰/۵ خرداد ۱۴۰۳

یادداشت ضروری دانش‌آموز:



درس

۲

ترکیب توابع

خلاصه درسنامه

ترکیب دو تابع



اگر f و g دو تابع باشند به طوری که برد تابع f و دامنه تابع g اشتراک ناتهی داشته باشند. تابع $g(f(x))$ را با نماد $(g \circ f)(x)$ نمایش می‌دهیم و تابع $g \circ f$ را تابع مرکب می‌نامیم، به عبارت دیگر: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

دامنه تابع مرکب:

دامنه تابع مرکب $g \circ f$ مجموعه x هایی است که هم زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱- x در دامنه f قرار داشته باشد.

۲- $f(x)$ در دامنه g قرار داشته باشد.

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

بنابراین دامنه تابع $g \circ f$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

به صورت مشابه دامنه تابع $f \circ g$ به صورت زیر است:

و همچنین:

مثال

اگر $f = \{(0, -1), (5, 2), (3, 5), (-2, 4)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, -1), (2, 0), (-1, 4), (5, -7)\}$ تابع $g \circ f$ را در صورت امکان بنویسید.

$$\left. \begin{aligned} (g \circ f)(0) &= g(f(0)) = g(-1) = 4 \\ (g \circ f)(5) &= g(f(5)) = g(2) = 0 \\ (g \circ f)(3) &= g(f(3)) = g(5) = -7 \\ (g \circ f)(-2) &= g(f(-2)) = g(4) \text{ تعریف نشده} \end{aligned} \right\} \rightarrow g \circ f = \{(0, 4), (5, 0), (3, -7)\}$$

مثال

دو تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ مفروضند در صورت وجود دامنه $f \circ g$ را بدون تشکیل ضابطه تعیین کرده و ضابطه $g \circ f$ را مشخص کنید.

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} \quad D_g = [1, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x-1} \neq 2\} = \{x \geq 1 \mid x-1 \neq 4\} = \{x \geq 1 \mid x \neq 5\} = [1, 5) \cup (5, +\infty)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2} - 1} = \sqrt{\frac{x+1-x+2}{x-2}} = \sqrt{\frac{3}{x-2}}$$

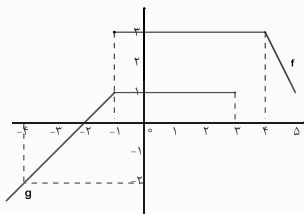
نکته: ترکیب ۲ تابع خاصیت جابجایی ندارد و $f \circ g$ در حالت کلی با $g \circ f$ مساوی نیست.

$$f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$$



مثال

نمودار روبرو توابع f و g را نشان می‌دهد. مقادیر زیر را در صورت وجود پیدا کنید.



الف) $(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(0) = 3$

ب) $(f \circ g)(-4) = f(g(-4)) = f(-4) = -4$ (تعریف نشده)

ج) $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(0) = 0$

د) $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(0) = 0$

برای مثال: با توجه به ضابطه‌های f و g معادله داده شده را حل کنید.

الف) $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = x^2 - 1$, $(g \circ f)(x) = 8$

حل:

$$(g \circ f)(x) = 8 \Rightarrow g(f(x)) = 8 \Rightarrow (x^2 + 2x)^2 - 1 = 8 \Rightarrow (x^2 + 2x)^2 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases} \\ x^2 + 2x = -3 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = -8 < 0 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

مثال

اگر $f(x) = x^3 + 3$ و $(f \circ g)(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ باشد ضابطه تابع $g(x)$ را پیدا کنید.

$$\left. \begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = (g(x))^3 + 3 \\ (f \circ g)(x) &= x^3 - 3x^2 + 3x + 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (g(x))^3 + 3 = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$$

$$(g(x))^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \Rightarrow (g(x))^3 = (x-1)^3 \Rightarrow g(x) = x-1$$

برای مثال: تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید.

روش ۱: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$g(x) = x^2 + 1$

$(f \circ g)(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

روش ۲: $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

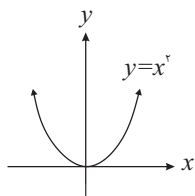
$g(x) = x^2$

$(f \circ g)(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

تبدیل نمودار تابع



برای رسم بسیاری از توابع نیاز به روش‌های پیچیده نیست. اگر نمودار یک تابع را در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم به کمک برخی از تبدیل‌ها، نمودار توابع دیگری را رسم کنیم.



رسم نمودار تابع‌های معروف

از معروف‌ترین توابع، تابع سهمی است. که سال‌های گذشته با آن آشنا شده‌اید.

در سوالات نهایی توابع زیادی مطرح می‌شوند که علاوه بر سهمی مهم‌ترین آن‌ها عبارت‌اند از:

$y = \sin x$	$y = x $	$y = \frac{1}{x}$	$y = \sqrt{x}$	$y = x^3$
در بازه‌ی $[0, 2\pi]$				

$y = b^x$	$y = a^x$	$y = \log_b x$	$y = \log_a x$	$y = \cos x$
$0 < b < 1$	$a > 1$	$0 < b < 1$	$a > 1$	در بازه‌ی $[0, 2\pi]$

رسم تابع با کمک انتقال و ...، ساختن تابع‌های جدید

مثال	تأثیر بر نمودار (روش رسم)	تغییر انجام شده
 $y = x $	$a > 0$ است: نمودار تابع را به اندازه‌ی a واحد به بالا منتقل کنید. $a < 0$ است: نمودار تابع را به اندازه‌ی a واحد به پایین منتقل کنید.	$f(x) + a$ کل تابع با عدد ثابت a جمع یا منها شده است.
 $y = x $	$b > 0$ است: نمودار تابع را به اندازه‌ی b واحد به سمت چپ منتقل کنید. $b < 0$ است: نمودار تابع را به اندازه‌ی b واحد به سمت راست منتقل کنید.	$f(x + b)$ در ضابطه تابع x شما با عدد ثابت b جمع یا منها شده است.
 $y = x $	تابع بدون هیچ تغییری در x و البته بدون انتقال، کشیده می‌شود طوری که همه‌ی y های قبلی، k برابر می‌شوند.	$kf(x)$ تابع در عدد ثابت k ضرب شده است. ($k > 0$)



نکته: ۱ محل تلاقی نمودار تابع‌های f و kf با محور x ها یکسان است.

۲ در (x_0, y_0) در تابع f تبدیل می‌شود به (x_0, ky_0) در تابع kf ...

۳ در نمودار $y = kf(x)$ ؛

اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار تابع f در امتداد محور y ها با ضریب k فشرده می‌شود: انقباض عمودی

- اگر $k > 1$ باشد، نمودار تابع f در امتداد محور y ها با ضریب k کشیده می‌شود: انبساط عمودی

تغییر انجام شده	تأثیر بر نمودار (روش رسم)	مثال
$-f(x)$ تابع در منفی ضرب شده است.	تابع را نسبت به محور x ها قرینه کنید.	
$ f(x) $ کل تابع داخل قدرمطلق قرار گرفته است.	بخشی از تابع که بالای محور x هاست، سر جای خودش می‌ماند و قسمتی که پایین محور x هاست، نسبت به محور x ها قرینه کنید.	

از آنجا که تبدیل شدن $y = f(x)$ به $y = f(kx)$ فقط روی دامنه تأثیر می‌گذارد ($kx \in D_f$) و هیچ ربطی به عرض نقاط نمودار ندارد، برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ از کلمات انبساط و انقباض در راستای محور x ها استفاده می‌کنیم.

تابع مطلوب	نحوه کشیدن نمودار از روی $y = f(x)$	مثال
۱ $y = f(kx)$ با فرض $k > 0$	هر نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ را اینطوری می‌کشیم: x اش در $\frac{1}{k}$ ضرب شود و y اش تغییر نکند! $(a, b) \in f(x) \Rightarrow (\frac{a}{k}, b) \in f(kx)$	
	$k > 1$ (انقباض افقی) انگار نمودار $f(x)$ در راستای محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود. $0 < k < 1$ (انبساط افقی) انگار نمودار $f(x)$ در راستای محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود.	
۲ $y = f(x)$	هر بخشی از نمودار تابع را که سمت چپ محور y هاست، حذف می‌کنیم و بخشی که در سمت راست محور y ها باقی مانده نگه می‌داریم قرینه‌اش را هم نسبت به محور y ها رسم می‌کنیم.	

نکته: برای رسم $f(-x)$ اول نمودار $y = f(x)$ را رسم کن و بعد نمودار آن را نسبت به محور y ها قرینه کن.



❖ انتقال نمودار تابع در حالت کلی

۱) فرض کنید می‌خواهید از روی نمودار تابع $y = f(x)$ به نمودار $y = f(bx + c)$ برسید. ($b \neq 0$)

برای مثال: با داشتن تابع $y = f(x)$ بخواهیم نمودار تابع $y = f(2x + 3)$ را رسم کنیم...

ترتیب مراحل	اثر روی نقطه	مثال برای حالت $y = f(x) \rightarrow y = f(2x + 3)$
اول هر x را منهای c کرده و بعد هر x را در $\frac{1}{b}$ ضرب کنید.	$(x_0, y_0) \rightarrow (\frac{x_0 - c}{b}, y_0)$	$(7, 5) \rightarrow (2, 5)$ $2x + 3 = 7 \Rightarrow x = \frac{7-3}{2} = 2$

۲) فرض کنید می‌خواهید از روی نمودار تابع $y = f(x)$ به نمودار تابع $y = af(x) + d$ برسید. ($a \neq 0$)

برای مثال: با داشتن نمودار تابع $y = f(x)$ بخواهیم نمودار تابع $y = 2f(x) + 3$ را رسم کنیم...

ترتیب مراحل	اثر روی نقطه	مثال برای حالت $y = f(x) \rightarrow y = 2f(x) + 3$
اول هر y را در a ضرب کرده و بعد هر y را با d جمع کنید.	$(x_0, y_0) \rightarrow (x_0, ay_0 + d)$	$(7, 5) \rightarrow (7, 13)$ $(5 \times 2) + 3$

نکته: در تبدیل نمودار تابع $y = f(x)$ به $y = af(bx + c) + d$ ، ترتیب عملیات به صورت زیر است:

$$y=f(x) \rightarrow y=af(bx+c)+d$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 ۴ ۳ ۲ ۱

درس ۲

ترکیب توابع

برای مثال: در انتقال $y = f(x) \rightarrow y = 2f(3x + 4) + 5$ داریم:

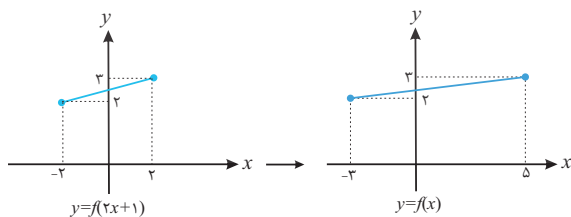
۳) حالا فرض کنید می‌خواهید از روی نمودار انتقال یافته‌ی $y = f(x)$ به نمودار آن برسید؛ مثلاً نمودار تابع $y = f(2x + 1)$ را به شما داده‌اند و قرار است نمودار $y = f(x)$ را مشخص کنید...

• رسیدن به نمودار $y = f(x)$ ؛ با داشتن نمودار تابع $y = f(2x + 1)$ برای رسیدن به نمودار تابع $y = f(x)$ ، اول هر x را در ۲ ضرب کنید و بعد هر x را به اضافه‌ی ۱ کنید...

نکته: اگر خواستید با داشتن نمودار تابع $y = f(bx + c)$ به نمودار $y = f(x)$ برسید؛ دستور داخل پرانتز را عیناً اجرا کنید! یعنی هر

x ضربدر b و بعد هر x به اضافه‌ی c

برای مثال:



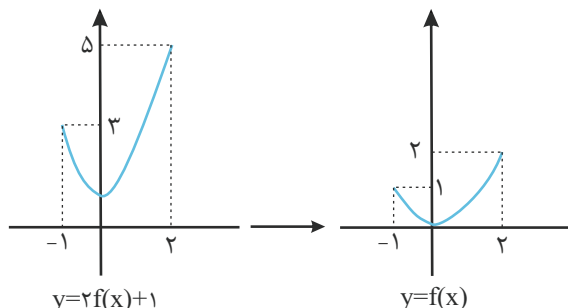
در آخر فرض کنید با داشتن نمودار $y = 2f(x) + 1$ ، می‌خواهید به نمودار تابع $y = f(x)$ برسید؛ اول از هر y یک واحد کم می‌کنید و بعد هر y را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنی....



نکته: اگر خواستید با داشتن نمودار $y = af(x) + d$ ($a \neq 0$) به نمودار $y = f(x)$ برسید؛ از راست به چپ و با عملیات مخالف حرکت کنید!

یعنی هر y منهای d و بعد هر y تقسیم بر a

برای مثال:



نکته: در تابع $y = mf(ax+b) + n$ ، مقادیر a و b روی دامنه و مقادیر m و n روی برد تأثیر دارند.

نکته: اگر $D_{f(x)} = [m, n]$ باشد، برای محاسبه $D_{f(ax+b)}$ ، کافی است نامعادله $m \leq ax+b \leq n$ را حل کرده، سپس محدوده x را به دست آوریم که همان دامنه $f(ax+b)$ می باشد.

نکته: اگر $D_{f(ax+b)} = [m, n]$ باشد، برای محاسبه $D_{f(x)}$ ، کافی است از نامساوی $m \leq x \leq n$ ، محدوده $ax+b$ را به دست آوریم.

مثال

اگر دامنه تابع $f(x)$ برابر $[-1, 7]$ باشد، دامنه تابع $-2f(3x+1)$ را بدست آورید.

حل. کافی است نامعادله $-1 \leq 3x+1 \leq 7$ را حل کنیم:

$$-1 \leq 3x+1 \leq 7 \Rightarrow -2 \leq 3x \leq 6 \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq x \leq 2 \Rightarrow D_{-2f(3x+1)} = \left[-\frac{2}{3}, 2\right]$$

مثال

اگر دامنه تابع $y = f(2x-3)$ برابر $[-1, 2]$ باشد، دامنه تابع $y = f(x)$ را بدست آورید.

$$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow -5 \leq 2x-3 \leq 1 \Rightarrow D_{f(x)} = [-5, 1]$$

حل.

سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (۱) نمودار تابع $y = 3f(x)$ با انبساط نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور y ها به دست می آید. (خرداد ۱۴۰۴) (۲) دامنه تابع های $y = -2f(x) + 4$ و $y = \frac{1}{5}f(x)$ با یکدیگر برابر است. (دی ۱۴۰۳)	۰/۲۵ ۰/۲۵	



۰/۲۵	۳	تابع $y = f(x)$ با دامنه $\mathbb{R}$ مفروض است. برد تابع‌های $y = f(3x)$ و $y = f(5x)$ یکسان است. (شهریور ۱۴۰۳)
۰/۲۵	۴	نمودار تابع $y = f(\frac{x}{3})$ از انقباض افقی نمودار تابع $y = f(x)$ به دست می‌آید. (دی ۱۴۰۲)
۰/۲۵	۵	اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آنگاه $(f \circ g)(4) = 5$ (دی ۱۴۰۰)
۰/۲۵	۶	دامنه تابع با ضابطه $y = kf(x)$ همان دامنه تابع $y = f(x)$ است. (دی ۱۳۹۹ - شهریور ۱۳۹۹)
۰/۲۵	۷	دامنه تابع با ضابطه $y = -kf(\frac{x}{3})$ همان دامنه تابع $y = -kf(x)$ می‌باشد. (خرداد ۱۳۹۹ خارج)
۰/۲۵	۸	اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin x$ باشند، آنگاه $g \circ f(x) = \sqrt{\sin x}$ خواهد بود. (خرداد ۱۳۹۹ خارج)
۰/۲۵	۹	برد تابع با ضابطه $y = kf(x)$ همان برد تابع $y = f(x)$ است. (دی ۱۳۹۸)
۰/۲۵	۷	جای خالی را با عدد مناسب پر کنید. ۱) اگر $f(x) = \frac{ x }{1+ x }$ مقدار $f \circ f(1)$ برابر است. (دی ۱۴۰۲) ۲) نقطه $(-2, 4)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ می‌باشد. نقطه متناظر آن روی نمودار تابع $y = f(2x)$ برابر است. (خرداد ۱۴۰۲) ۳) اگر برد تابع f برابر $[-1, 4]$ باشد آنگاه برد تابع $y = 2f(x)$ برابر با است. (خرداد ۱۳۹۹ خارج) ۴) اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ باشد، آنگاه $(f \circ g)(4) = \dots\dots\dots$ (خرداد ۱۳۹۹ خارج)
شهریور ۱۴۰۴ ۰/۵	۸	نقطه $A(-3, 2)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار دارد. مختصات نقطه متناظر آن روی نمودار $y = f(3x) + 1$ را بیابید.
شهریور ۱۴۰۴ ۱	۹	اگر $f = \{(-2, 4), (0, -1)\}$ و $g(x) = \sqrt{x+5}$ ، تابع $g \circ f$ را به صورت زوج مرتب بنویسید.
خرداد ۱۴۰۴ ۱	۱۰	اگر $f(x) = 3\sqrt{x} + 2$ و $f(g(x)) = 3x^2 - 4$ ، آنگاه ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.
دی ۱۴۰۳ ۰/۷۵	۱۱	نمودار تابع f به صورت زیر است. نمودار تابع $y = -f(3x) + 1$ را رسم کنید.
دی ۱۴۰۳ ۱/۷۵	۱۲	تابع‌های $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{x-2}$ را در نظر بگیرید. الف) دامنه تابع $(f \circ g)(x)$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب) مقدار $(g \circ f^{-1})(2)$ را محاسبه کنید.



شماره ۱۴۰۳	۱	۱۳	اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ باشند آنگاه $D_{f \circ g}$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.
شماره ۱۴۰۳	۰/۷۵	۱۴	در شکل روبه‌رو تابع f رسم شده است. الف) نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = f(2x)$ را رسم کنید. ب) مقدار $g \circ f(0)$ را بدست آورید.
شماره ۱۴۰۲	۱	۱۵	نمودار تابع f به صورت مقابل است. دامنه و برد تابع $g(x) = 2f(-x)$ را بنویسید.
شماره ۱۴۰۲	۰/۵	۱۶	نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را ابتدا سه واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم، ضابطه تابع جدید را بنویسید.
شماره ۱۴۰۲	۰/۷۵	۱۷	اگر $f(g(x)) = 4x^2 + 1$ و $f(x) = \frac{x}{4} - 1$ ، آنگاه ضابطه تابع $g(x)$ را بیابید.
شماره ۱۴۰۲	۱/۲۵	۱۸	اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = x-1$ ، آنگاه: الف) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب) ضابطه تابع $f \circ g$ را بنویسید.
شماره ۱۴۰۱	۱/۲۵	۱۹	اگر $g(x) = \sqrt{x+3}$ و $f(x) = 7 - 4x^2$ باشد: الف: دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب: مقدار $(g \circ f)(1)$ را محاسبه کنید.
شماره ۱۴۰۱	۰/۷۵	۲۰	اگر دامنه تابع $y = f(x)$ برابر $[-1, 3]$ و برد آن $(0, 2]$ باشد دامنه و برد تابع $y = f(\frac{x}{4})$ را بیابید.

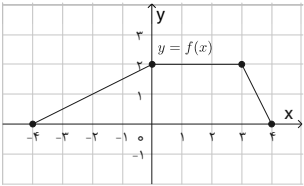
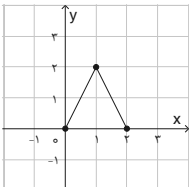
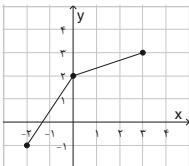


شماره ۱۴۰۱	۲		۲۱ نمودار تابع f به صورت روبه‌رو است: الف) نمودار تابع $g(x) = 2f(x - 1)$ را رسم کنید. ب) دامنه تابع g را به دست آورید.															
شماره ۱۴۰۱	۰/۷۵		۲۲ اگر $f = \{(0, -1), (5, 9), (3, 7), (-2, 4)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, -1), (9, 0), (-1, 4), (7, 7)\}$ تابع $g \circ f$ را در صورت وجود بنویسید.															
شماره ۱۴۰۱	۰/۵		۲۳ برد تابع f بازه $[-3, 1]$ است. برد تابع $y = -2f(3x - 1) + 3$ کدامیک از موارد زیر است؟ الف) $[-8, 0]$ ب) $[-12, 0]$ پ) $[1, 9]$ ت) $[-10, 2]$															
شماره ۱۴۰۱	۰/۷۵		۲۴ اگر ورودی ماشین مقابل ۳ باشد، مقدار خروجی آن چقدر است؟ خروجی $x \rightarrow 2x - 2 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x} + 1} \rightarrow$ ورودی															
شماره ۱۴۰۰	۰/۷۵		۲۵ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x + 1$ را ابتدا دو واحد به سمت پایین سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحله آخر نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. ضابطه y نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید.															
شماره ۱۴۰۰	۱/۵	الف: $g \circ f(1)$ ب: $(f \circ (f + g))(0)$ <table><tr><td>x</td><td>-۱</td><td>۰</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>۰</td><td>-۱</td><td>۲</td><td>-۵</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>-۲</td></tr></table>	x	-۱	۰	۱	۲	$f(x)$	۰	-۱	۲	-۵	$g(x)$	۲	۳	۴	-۲	۲۶ با توجه به جدول زیر، مقادیر خواسته شده را به دست آورید.
x	-۱	۰	۱	۲														
$f(x)$	۰	-۱	۲	-۵														
$g(x)$	۲	۳	۴	-۲														
شماره ۱۴۰۰	۰/۷۵		۲۷ با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار تابع $y = f(-x) + 2$ را رسم کنید.															
شماره ۱۴۰۰	۱/۲۵		۲۸ اگر $f(x) = \sqrt{x - 1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد، الف: دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب: مقدار $g \circ f(2)$ را تعیین کنید.															



۲۹	با توجه به نمودارهای تابع f, g به سوالات زیر پاسخ دهید. الف: مقدار $f \circ g(-1)$ را محاسبه کنید. ب: اگر $g(3t-1) = 0$ باشد مقدار t را بدست آورید. پ: با محدود کردن دامنه f ، بازه‌ای را مشخص کنید که تابع f یک به یک شود.		۱/۵	دی ۹۹
۳۰	نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. الف: نمودار تابع $y = 3f(\frac{1}{3}x)$ را رسم کنید. ب: دامنه تابع $y = 3f(\frac{1}{3}x)$ را تعیین کنید.		۰/۷۵	خرداد ۹۹
۳۱	اگر $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(x) = 3x - 4$ ضابطه تابع $g(x)$ را بدست آورید.		۱	خرداد ۹۹ و خرداد ۹۹ خ
۳۲	اگر $f(x) = \sqrt{4-2x}$ و $g(x) = x^2 + 2x - 1$ باشد. الف: دامنه تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب: مقدار $g \circ f(2) - \frac{f}{g}(0)$ را تعیین کنید.		۲	خرداد ۹۹
۳۳	اگر $f(x) = x^2 - 5$ و $g(x) = \sqrt{x+6}$ باشد، دامنه $f \circ g$ را بدست آورید.		۰/۷۵	خرداد ۹۹ خ
۳۴	اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد. الف: دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب: ضابطه $f \circ g$ را بنویسید.		۲	شهریور ۹۹
۳۵	نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = \frac{1}{3}f(2x)$ را رسم کنید.		۰/۵	شهریور ۹۹



۳۶	دو تابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید. دامنه ی تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.	۱	۹۹ خرداد
۳۷	با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار $y = \frac{1}{4}f(4x)$ را رسم کنید.	۰/۵	۹۸ خرداد
			
۳۸	اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد، دامنه ی تابع $f \circ g(x)$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.	۱/۲۵	۹۸ شهریور
۳۹	نمودار $y = f(x)$ به صورت زیر است. با استفاده از آن نمودار $y = -2f(\frac{1}{3}x)$ را رسم کنید.	۰/۵	۹۸ شهریور
			
۴۰	اگر $f(x) = x^2 - 5$ و $g(x) = \sqrt{x+6}$ باشد، الف: دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب: با محدود کردن دامنه تابع f ، تابعی وارون پذیر بسازید.	۱/۵	۹۸ دی
۴۱	در جای خالی عبارت مناسب بنویسید. تابع $h(x) = (2x^2 - 5x + 1)^3$ به صورت ترکیب دو تابع $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ و $g(x) = \dots$ است.	۰/۵	۹۷ دی
۴۲	توابع $f(x) = \frac{x+3}{2x}$ و $g(x) = 3x - 1$ را در نظر بگیرید. دامنه $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.	۰/۵	۹۷ دی
۴۳	با استفاده از نمودار تابع f نمودار تابع $y = f(\frac{x}{4}) - 2$ را رسم کنید.	۰/۷۵	۹۷ دی
			

یادداشت ضروری دانش آموز:



درس

۳

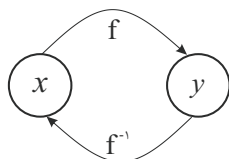
تابع وارون

خلاصه درسنامه

تابع وارون



تابع وارون: اگر f تابعی یک به یک باشد، معکوس پذیر و معکوس تابع f به صورت زیر است:



$$f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\} \quad D_{f^{-1}} = R_f \quad D_f = R_{f^{-1}}$$

$$\forall x \in D_{f^{-1}} \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = x$$

$$\forall x \in D_f \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = x$$

ترکیب هر تابع با تابع معکوس خود حتماً تابع همانی است. و اگر $f(a) = b$ آن گاه $f^{-1}(b) = a$.

نکته: ۱ نمودار توابع f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ متقارن اند.

۲ نمودار f و f^{-1} در صورت تقاطع عموماً یکدیگر را روی خط $y = x$ قطع می کنند. (نه همیشه)

۳ ممکن است نمودار f و f^{-1} برهم منطبق باشند. مانند: $y = \frac{1}{x}$ و یا یکدیگر را قطع نکنند. مانند:

$$f^{-1}(x) = \log_2 x, \quad f(x) = 2^x$$

برای مثال: آیا تابع $f = \{(1, 5), (3, 7), (2, 5)\}$ وارون پذیر است؟

حل: خیر زیرا یک به یک نیست (دو مولفه دوم مساوی دارد)

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$



پیدا کردن ضابطه تابع وارون



شرط اینکه تابعی وارون پذیر باشد آن است که یک به یک باشد و برعکس. برای بدست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع مانند f ابتدا طبق فرمول $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ یک به یک بودن را بررسی می کنیم سپس در معادله $y = f(x)$ ابتدا x را بر حسب y محاسبه کرده سپس با تبدیل y به x و برعکس، ضابطه تابع $y = f^{-1}(x)$ را بدست می آوریم.

مثال

ثابت کنید تابع $y = f(x) = \sqrt{2x+3}$ وارون پذیر است سپس ضابطه تابع وارون آن را بیابید.

حل: ابتدا ثابت می کنیم یک به یک است.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{2x_1+3} = \sqrt{2x_2+3} \Rightarrow 2x_1+3 = 2x_2+3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

یک به یک است.

$$y = \sqrt{2x+3} \Rightarrow y^2 = 2x+3 \Rightarrow y^2 - 3 = 2x \Rightarrow x = \frac{y^2 - 3}{2} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 3}{2}$$

مثال

ثابت کنید تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ در دامنه اش وارون پذیر است سپس ضابطه تابع وارون آن را بیابید.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 \Rightarrow f(x) = (x-1)^3 + 1$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 - 1)^3 + 1 = (x_2 - 1)^3 + 1 \Rightarrow (x_1 - 1)^3 = (x_2 - 1)^3 \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \text{یک به یک است}$$

$$y = (x-1)^3 + 1 \Rightarrow y-1 = (x-1)^3 \Rightarrow x-1 = \sqrt[3]{y-1} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1} + 1 \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1$$

مثال

اگر $f(x) = 3ax - 5$ و نقطه $(4, 3)$ روی نمودار تابع f^{-1} باشد: اولاً مقدار a را بدست آورید. ثانیاً: ضابطه تابع وارون f را پیدا کنید.

$$(4, 3) \in f^{-1} \Rightarrow (3, 4) \in f \Rightarrow f(3) = 4 \Rightarrow 3a(3) - 5 = 4 \Rightarrow 9a = 9 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

$$\Rightarrow f(x) = 3x - 5 \Rightarrow y = 3x - 5 \Rightarrow y + 5 = 3x \Rightarrow x = \frac{y+5}{3} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$$

۱) $(f \circ f)^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x$

۲) $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$

تذکر مهم: ۱) ترکیب هر تابع با وارون خودش برابر تابع همانی است یعنی:



درس ۳

تابع وارون

برای مثال: $f(x) = -\sqrt{x-8}$ و $g(x) = x^2 + 8$ ($x < 0$) وارون یکدیگرند زیرا:

$$f(g(x)) = -\sqrt{x^2 + 8 - 8} = -\sqrt{x^2} = -|x| = -(-x) = x \quad \text{به همین ترتیب } g(f(x)) = x$$

۲) دامنه توابع $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ همان دامنه تابع درونی است

۱) $D_{f^{-1} \circ f} = D_f = R_{f^{-1}}$

۲) $D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f$

۳) اگر f و g دو تابع وارون پذیر باشند آن گاه:

۱) $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

۲) $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

مثال

اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = x^3 + 1$ باشد مقادیر زیر را پیدا کنید.

الف) $(f^{-1} \circ g^{-1})(1)$ ب) $(f \circ g)^{-1}(7)$ ج) $(f \circ f)^{-1}(9)$

حل) ابتدا ضابطه f^{-1} و g^{-1} را پیدا می کنیم:

$$f(x) = 2x + 3 \Rightarrow y = 2x + 3 \Rightarrow y - 3 = 2x \Rightarrow x = \frac{y-3}{2} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

$$g(x) = x^3 + 1 \Rightarrow y = x^3 + 1 \Rightarrow y - 1 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1} \Rightarrow y = g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

الف) $(f^{-1} \circ g^{-1})(1) = f^{-1}(g^{-1}(1)) = f^{-1}(0) = -\frac{3}{2}$

ب) $(f \circ g)^{-1}(7) = (g^{-1} \circ f^{-1})(7) = g^{-1}(f^{-1}(7)) = g^{-1}(4) = \sqrt[3]{4-1} = 1$

ج) $(f \circ f)^{-1}(9) = (f^{-1} \circ f^{-1})(9) = f^{-1}(f^{-1}(9)) = f^{-1}(3) = \frac{3-3}{2} = 0$



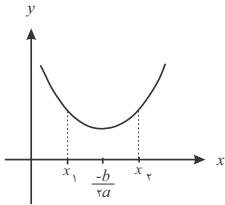
وارون تابع‌هایی که یک به یک نیستند...!



تابعی که یک به یک نباشد، وارون‌پذیر هم نخواهد بود، اما می‌توانیم محدوده‌ای برای x بگذاریم تا در این محدوده، تابع یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر

شود. یکی از مهم‌ترین تابع‌های این فرمی، تابع درجه‌ی دوم است: $y = ax^2 + bx + c$

$y = ax^2 + bx + c$ برای x های بزرگ‌تر یا مساوی $-\frac{b}{2a}$ یا برای x های کوچک‌تر یا مساوی $-\frac{b}{2a}$ وارون‌پذیر است.



برای مثال: بزرگترین بازه‌ای که تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ در آن وارون‌پذیر بدست آورید.

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 5 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2(2)} = 2, \quad (-\infty, 2] \text{ یا } [2, +\infty)$$

نکته: برای محاسبه ضابطه وارون توابع درجه ۲ از مربع کامل کردن استفاده می‌کنیم.

مثال

برای تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ، $x < \frac{3}{2}$ ضابطه‌ی تابع وارون را بدست آورید.

$$y = (x^2 - 3x + \frac{9}{4}) - \frac{9}{4} + 1 = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4} \Rightarrow y + \frac{5}{4} = (x - \frac{3}{2})^2 \xrightarrow{\text{جذر}}$$

$$\sqrt{y + \frac{5}{4}} = |x - \frac{3}{2}| \xrightarrow{x < \frac{3}{2}} \sqrt{y + \frac{5}{4}} = \frac{3}{2} - x \Rightarrow x = \frac{3}{2} - \sqrt{y + \frac{5}{4}} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{3}{2} - \sqrt{x + \frac{5}{4}}$$

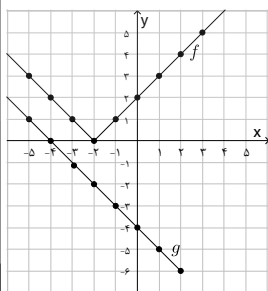
سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۴۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (۱) در تابع $f(x) = 4 + \sqrt{x-1}$ دامنه تابع $y = (f^{-1} \circ f)(x)$ برابر $[1, +\infty)$ است. (خرداد ۱۴۰۳) (۲) هر تابع یکنوا، یک به یک است. (دی ۱۴۰۱) (۳) دو تابع $f(x) = -\frac{7}{4}x - 3$ و $g(x) = -\frac{2x+7}{6}$ وارون یکدیگرند. (دی ۱۴۰۰) (۴) دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^3$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}$ وارون یکدیگرند. (شهریور ۱۴۰۰) (۵) دو تابع $f(x) = -\frac{2x+6}{7}$ و $g(x) = \frac{-7}{4}x - 3$ وارون یکدیگرند. (خرداد ۱۳۹۸)	۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵	



۴۵	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید	۰/۲۵	۱) اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x-1}$ باشد، مقدار $(f \circ f^{-1})(5)$ برابر با است. (خرداد ۱۴۰۲)
۰/۲۵	۲) اگر $f(x) = 2x^3 - 1$ باشد، حاصل $f^{-1}(15)$ برابر است. (دی ۱۴۰۱)	۰/۲۵	۳) ضابطه تابع وارون $y = x^3$ برابر است. (شهریور ۱۴۰۱)
۰/۲۵	۴) اگر $f = \{(2, 3), (3, 5)\}$ باشد، حاصل $f^{-1}(3)$ برابر است. (خرداد ۱۴۰۱)	۰/۲۵	
۴۶	تابع $f(x) = x^2 - 6x$ ، با دامنه $(-\infty, 3]$ را در نظر بگیرید و ضابطه تابع وارون f را به دست آورید.	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۴
۴۷	اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ باشد، آنگاه: الف) دامنه تابع $f^{-1} \circ f$ را به دست آورید. ب) مقدار $f^{-1}(5)$ را محاسبه کنید.	۱	خرداد ۱۴۰۴
۴۸	فرض کنید $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ و $g(x) = x^3 - 1$ باشند. در این صورت $(g \circ f)^{-1}(7)$ را بیابید.	۰/۷۵	شهریور ۱۴۰۳
۴۹	تابع $f(x) = \sqrt{x+4} - 1$ را در نظر بگیرید. دامنه و ضابطه تابع وارون آن را بیابید.	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۵۰	ضابطه و دامنه تابع وارون تابع زیر را به دست آورید. $f(x) = -x^2 - 2; x \geq 0$	۱/۵	دی ۱۴۰۲
۵۱	اگر دامنه تابع $f(x) = x^2 + 4x + 3$ برابر $[-2, +\infty)$ باشد، ضابطه و دامنه تابع وارون را به دست آورید.	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۲
۵۲	الف) با توجه به نمودار توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید. $1) (g \circ f)(-1)$ $2) (g^{-1} \circ f^{-1})(2)$ ب) نمودار تابع $f(x-2) - 3$ را رسم کنید.	۲	دی ۱۴۰۰





۵۳	ضابطه وارون تابع $g(x) = -5 - \sqrt{3x+1}$ را به دست آورید.	۱	دی ۹۹
۵۴	الف: وارون تابع $y = \sqrt{x+2}$ را بدست آورید. ب: با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ یک تابع یک به یک به دست آورید.	۱/۲۵	خرداد ۹۹ خ
۵۵	نشان دهید توابع $f(x) = \frac{-8x+3}{2}$ و $g(x) = \frac{3-2x}{8}$ وارون یکدیگرند.	۱/۲۵	خرداد ۹۹ خ
۵۶	ضابطه وارون تابع $f(x) = -\frac{7}{4}x - 3$ را بدست آورید.	۱	شهریور ۹۹
۵۷	اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ باشد، مقدار $g^{-1} \circ f^{-1}(5)$ را بدست آورید.	۱	شهریور ۹۸
۵۸	نشان دهید توابع $f(x) = 3x - 4$ و $g(x) = \frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند.	۱	دی ۹۸
۵۹	اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ باشد. مقدار $g^{-1} \circ f^{-1}(5)$ را بدست آورید.	۰/۵	دی ۹۸

یادداشت ضروری دانش آموز:

تابع وارون

درس ۳

math-pilevar.ir

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

ریاضی ۳

math-pilevar.ir



درس

۱

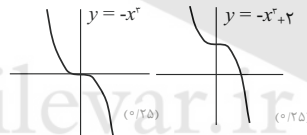
توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

- ۱-۱) درست (۰/۲۵)
 ۲) نادرست (۰/۲۵)
 ۳) درست (۰/۲۵)
 ۴) نادرست (۰/۲۵)
 ۵) درست (۰/۲۵)
 ۶) درست (۰/۲۵)
 ۷) نادرست (۰/۲۵)
 ۸) درست (۰/۲۵)
 ۹) درست (۰/۲۵)
 ۱۰) درست (۰/۲۵)
 ۱۱) درست (۰/۲۵)
 ۱۲) نادرست (۰/۲۵)
 ۱۳) درست (۰/۲۵)
 ۱۴) نادرست (۰/۲۵)
 ۱۵) نادرست (۰/۲۵)
 ۱۶) نادرست (۰/۲۵)

- ۱-۲) ثابت (صفحه ۶)
 ۲) ۲ (۰/۲۵)
 ۳) پایین‌تر (۰/۲۵)
 ۴) پایین (۰/۲۵)
 ۵) یکنوا (۰/۲۵)
 ۶) صعودی (۰/۲۵)
 ۷) ثابت (۰/۲۵)

- ۳- الف) ۲ یا $(2, +\infty)$ (۰/۲۵) ب) ۱ یا $(-\infty, -4)$ (۰/۲۵)
 پ) ۴ یا $[-4, 2]$ (۰/۲۵) صفحه ۱۰

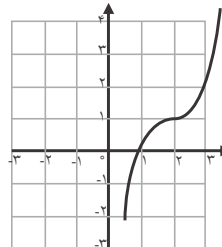
- ۴- تابع اکیداً نزولی است. (۰/۲۵)



توجه ۱: در صورتی که دانش آموز از کلمه «نزولی» استفاده کند، نمره تعلق گیرد.

توجه ۲: با رسم شکل نهایی نمره کامل شکل لحاظ شود.

- ۵- (صفحه ۵)

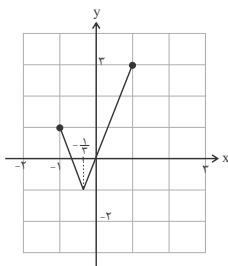


برداشت ضروری دانش‌آموز:

درس

۲

ترکیب توابع



(۰/۲۵)

به روش نقطه‌یابی نمره تعلق می‌گیرد.

$$\begin{aligned} (-3, 0) &\rightarrow (-1, 1) & (0, 1) &\rightarrow (0, 0) \\ (-1, 2) &\rightarrow \left(-\frac{1}{3}, -1\right) & (3, -2) &\rightarrow (1, 3) \end{aligned}$$

(صفحه ۲۳)

$$D_g = [2, +\infty) \quad (۰/۲۵) \quad D_f = \mathbb{R} - \{2\} \quad (۰/۲۵) \quad -۱۲$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [2, +\infty) \mid \sqrt{x-2} \neq 2\}$$

$$= \{x \in [2, +\infty) \mid x \neq 6\} = [2, +\infty) - \{6\}$$

$$\text{ب) } (g \circ f^{-1})(2) = g(5) = \sqrt{3}$$

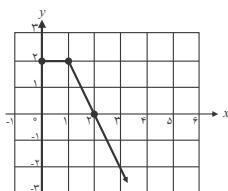
(صفحه ۲۲)

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq -1 \mid \sqrt{x+1} \in \mathbb{R} - \{1\}\} \quad -۱۳$$

$$\sqrt{x+1} \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$$

$$D_{f \circ g} = [-1, 0) \cup (0, +\infty) \quad \text{یا} \quad [-1, +\infty) - \{0\} \quad (۰/۲۵)$$

الف)



(۰/۵) -۱۴

$$\text{ب) } g(f(0)) = g(2) = 0 \quad (۰/۲۵)$$

(صفحه ۲۳)

$$D_g = [0, 5] \quad , \quad R_g = [-4, 6] \quad -۱۵$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{x-3}}$$

-۱۶

ص ۱۵

- | | |
|-----------------|-----------------|
| ۱-۶ درست (۰/۲۵) | ۶ درست (۰/۲۵) |
| ۲ درست (۰/۲۵) | ۷ نادرست (۰/۲۵) |
| ۳ درست (۰/۲۵) | ۸ نادرست (۰/۲۵) |
| ۴ نادرست (۰/۲۵) | ۹ نادرست (۰/۲۵) |
| ۵ درست (۰/۲۵) | |

- | | |
|-------------------------------|-------------------------|
| ۱-۷ $\frac{1}{3}$ درست (۰/۲۵) | ۳ $[-2, 8]$ درست (۰/۲۵) |
| ۲ $(-1, 4)$ درست (۰/۲۵) | ۴ 5 درست (۰/۲۵) |

$(-1, 3) - 8$

توجه: برای ابتدا و انتهای بازه هر مورد (۰/۲۵) تعلق گیرد.

$$g \circ f(-2) = g(f(-2)) = g(4) = 3 \quad (۰/۲۵) \quad -۹$$

$$g \circ f(0) = g(f(0)) = g(-1) = 2 \quad (۰/۲۵)$$

$$g \circ f = \{(-2, 3), (0, 2)\}$$

اگر دانش‌آموزی دو مرحله اول را ننوشت ولی $g \circ f$ را درست نوشته باشد نمره کامل تعلق گیرد.

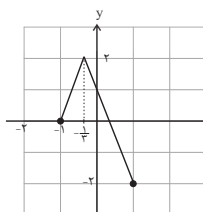
$$f(g(x)) = 3\sqrt{g(x)+2} \quad -۱۰$$

$$3x^2 - 4 = 3\sqrt{g(x)+2} \Rightarrow \sqrt{g(x)+2} = x^2 - 2$$

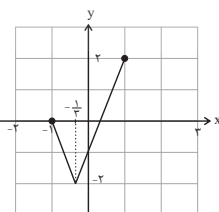
$$\Rightarrow g(x) = (x^2 - 2)^2, |x| \geq \sqrt{2}$$

توجه: به روش‌های درست دیگر به تناسب نمره داده شود. صفحه ۲۲

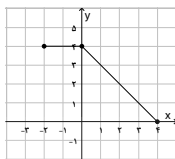
۱۱- (در صورتی که شکل نهایی درست رسم شود، نمره کامل تعلق گیرد.)



(۰/۲۵)



(۰/۲۵)



-۲۷

$$D_f = [1, +\infty), \quad D_g = \mathbb{R}$$

-۲۸

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\} \\ &= (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{aligned}$$

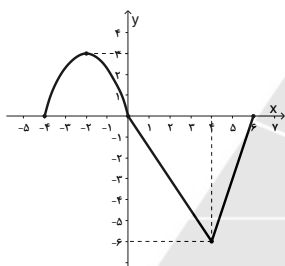
$$\text{ب)} \quad g \circ f(2) = 1$$

$$\text{الف)} \quad f \circ g(-1) = f(g(-1)) = f(-3) = 1$$

-۲۹

$$\text{ب)} \quad 3t - 1 = -4 \Rightarrow t = -1$$

$$\text{پ)} \quad [-2, +\infty)$$



-۳۰ الف)

$$\text{ب)} \quad D = [-4, 6]$$

$$f(g(x)) = 3g(x) - 4 = 3x^2 - 6x + 14$$

-۳۱

$$\Rightarrow g(x) = x^2 - 2x + 6$$

$$\text{الف)} \quad D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

-۳۲

$$= \{x \in (-\infty, 2] \mid \sqrt{4-2x} \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 2]$$

$$\text{ب)} \quad g \circ f(2) - \frac{f}{g}(0) = -1 - (-2) = 1$$

$$\text{الف)} \quad D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

-۳۳

$$= \{x \in [-6, +\infty) \mid \sqrt{x+6} \in \mathbb{R}\} = [-6, +\infty)$$

$$\text{الف)} \quad D_f = [1, +\infty), \quad D_g = \mathbb{R}$$

-۳۴

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\} \Rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$\text{ب)} \quad f(g(x)) = \sqrt{2x^2 - 2}$$

$$f(g(x)) = \frac{g(x)}{2} - 1 \rightarrow \frac{g(x)}{2} - 1 = 2x^2 + 1$$

-۱۷

$$g(x) = 4x^2 + 4$$

ص ۲۲

$$\text{الف)} \quad D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \geq -1\} = [0, +\infty)$$

-۱۸

$$\text{ب)} \quad f(g(x)) = \sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{x}$$

$$\text{الف)} \quad D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

-۱۹

$$= \{x \in [-3, +\infty) \mid \sqrt{x+3} \in \mathbb{R}\} = [-3, +\infty)$$

$$\text{ب)} \quad (g \circ f)(1) = g(3) = \sqrt{6}$$

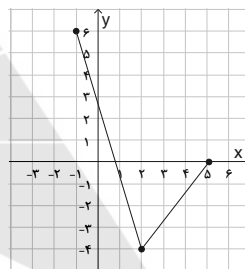
$$D_{f(\frac{x}{3})} \Rightarrow -1 < \frac{x}{3} \leq 3 \Rightarrow D_{f(\frac{x}{3})} = (-2, 6]$$

-۲۰

برد تغییر نمی‌کند.

-۲۱ الف) رسم دقیق نمودار

ب) $[-1, 5]$



$$g \circ f(x) = \{(0, 4), (3, 7), (5, 0)\}$$

-۲۲

-۲۳ پ

$$x = 3 \Rightarrow 2(3) - 2 = 4 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{4} + 1} = \frac{4}{3}$$

-۲۴

مرحله ۱
$f(x) - 2 = (x-1)^2 - 2$
مرحله ۲
$f(x+1) - 2 = x^2 - 2$
مرحله ۳
$-f(x+1) + 2 = -x^2 + 2$

-۲۵

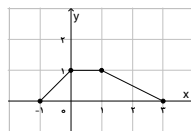
$$\text{الف)} \quad g(f(1)) = g(2) = -2$$

-۲۶

$$\text{ب)} \quad (f+g)(0) = -1 + 3 = 2$$

$$\Rightarrow (f((f+g)(0))) = f(2) = -5$$

بدراشت ضروری دانش آموز:

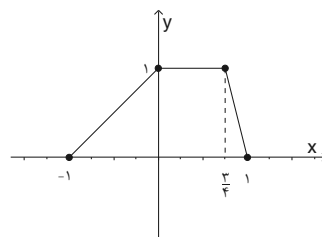


-۳۵

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

-۳۶

$$= \{x \geq 4 \mid \sqrt{x-4} \neq \pm 1\} = [4, 5) \cup (5, +\infty)$$



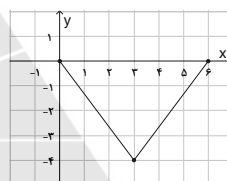
-۳۷

$$\text{الف) } D_f = [1, +\infty), \quad D_g \in \mathbb{R}$$

-۳۸

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\} \Rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$



-۳۹

$$\text{الف) } D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

-۴۰

$$= \{x \in [-6, +\infty) \mid \sqrt{x+6} \in \mathbb{R}\} = [-6, +\infty)$$

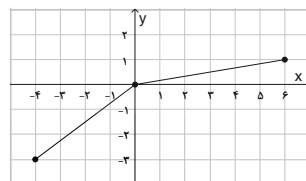
$$\text{ب) } f(x) = x^2 - 5 \quad x \geq 0 \quad \text{یا} \quad (-\infty, 0]$$

$$\text{۴۱- اگر } h(x) = (g \circ f)(x) \text{ باشد آنگاه } g(x) = x^3$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

-۴۲

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$$



-۴۳



درس

۳

تابع وارون

روش چهارم:

$$(g \circ f)^{-1}(x) = \underbrace{(f^{-1} \circ g^{-1})(x)}_{(0.25)} = \underbrace{(\sqrt[3]{x+1}-1)^2+2}_{(0.25)} \xrightarrow{x=7} \underbrace{3}_{(0.25)}$$

$$y = \sqrt{x+4}-1 \Rightarrow y+1 = \sqrt{x+4} \Rightarrow (y+1)^2 = x+4 \quad -49$$

$$\Rightarrow (y+1)^2 - 4 = x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x+1)^2 - 4 \quad (0.75)$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = [-1, +\infty) \quad (0.5)$$

(صفحه ۲۹)

$$y = -x^2 - 2 \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{-y-2} \quad -50$$

$$\Rightarrow \underbrace{f^{-1}(x) = \sqrt{-x-2}}_{(0.25)}, \quad \underbrace{D_{f^{-1}} = (-\infty, -2]}_{(0.5)}$$

$$f(x) = \underbrace{(x+2)^2-1}_{(0.25)} \rightarrow \underbrace{y+1 = (x+2)^2}_{(0.25)} \xrightarrow{x \geq -2} \quad -51$$

$$\sqrt{y+1} = x+2 \rightarrow \underbrace{f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}-2}_{(0.25)}$$

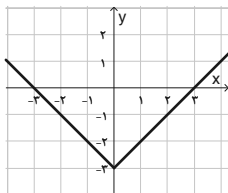
$$\rightarrow \underbrace{D_{f^{-1}} = [-1, +\infty)}_{(0.25)}$$

(صفحه ۲۹)

$$1) (g \circ f)(-1) = g(1) = -5$$

-52 الف)

$$2) (g^{-1} \circ f^{-1})(2) = g^{-1}(5) = -4$$



$$-5 - \sqrt{3x+1} = y \Rightarrow 3x+1 = (y+5)^2 \quad -53$$

$$\Rightarrow x = \frac{(y+5)^2 - 1}{3} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{(x+5)^2 - 1}{3}$$

$$D_{g^{-1}} = (-\infty, -5)$$

$$\text{الف) } y = \sqrt{x+2} \Rightarrow y^2 = x+2 \quad -54$$

$$44-1) \text{ درست } (0.25) \quad 4) \text{ درست } (0.25)$$

$$2) \text{ نادرست } (0.25) \quad 5) \text{ درست } (0.25)$$

$$3) \text{ نادرست } (0.25)$$

$$45-1) \quad 5 \quad (0.25) \quad 3) \quad \sqrt[3]{x} \quad (0.25)$$

$$2) \quad 2 \quad (0.25) \quad 4) \quad 2 \quad (0.25)$$

$$46- \quad y = \underbrace{(x-3)^2-9}_{(0.25)} \Rightarrow \sqrt{y-9} = -(x-3) \quad -46$$

$$\underbrace{x = 3 - \sqrt{y+9}}_{(0.25)} \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+9}}_{(0.25)}$$

توجه: اگر دانش آموز مرحله دوم را ننوشت ولی دو مرحله آخر را کامل نوشت نمره کامل تعلق گیرد.

$$47- \text{ الف) روش اول: } D_{f^{-1} \circ f} - D_f = \underbrace{[2, +\infty)}_{(0.25)} \quad -47$$

$$D_{f^{-1} \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_{f^{-1}}\}$$

$$= \{x \in D_f \mid f(x) \in R_f\} = D_f = [2, +\infty) \quad (0.25)$$

روش دوم:

توجه: در صورتی که دانش آموز فقط به بازه $[2, \infty)$ اشاره کند، نمره کامل و به نوشتن بازه به صورت $(2, +\infty)$ ، (0.25) نمره تعلق گیرد.

$$\text{ب) روش اول: } \underbrace{f^{-1}(x) = x^2+2}_{(0.25)} \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(5) = 27}_{(0.25)} \quad -47$$

$$\text{روش دوم: } f^{-1}(5) = x \Rightarrow f(x) = 5 \Rightarrow \underbrace{\sqrt{x-2} = 5}_{(0.25)} \Rightarrow \underbrace{x = 27}_{(0.25)}$$

(صفحات ۲۵ و ۲۹)

$$48- \text{ روش اول: } (g \circ f)^{-1}(7) = \underbrace{(f^{-1} \circ g^{-1})(7)}_{(0.25)} = \underbrace{f^{-1}(2)}_{(0.25)} = \underbrace{3}_{(0.25)}$$

$$(g \circ f)(x) = 7 \Rightarrow \underbrace{((1 + \sqrt{x-2})^2 - 1)}_{(0.5)} = 7 \Rightarrow \underbrace{x = 3}_{(0.25)}$$

روش دوم:

$$(g \circ f)(x) = \underbrace{(1 + \sqrt{x-2})^2 - 1}_{(0.25)}$$

روش سوم:

$$\Rightarrow \underbrace{(g \circ f)^{-1}(x) = (\sqrt[3]{x+1}-1)^2+2}_{(0.25)} \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(7) = 3$$



$$\Rightarrow x = y^2 - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 2$$

ب) $D_{f^{-1}} = [2, +\infty)$

$$f(x) = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow y-1 = (x-2)^2$$

$$x-2 = \pm\sqrt{y-1} \Rightarrow x = \sqrt{y-1} + 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2$$

$$f \circ g(x) = \frac{-8 \times \left(\frac{3-2x}{8}\right) + 3}{2} = \frac{-3+2x+3}{2} = x \quad -55$$

$$g \circ f(x) = \frac{3-2\left(\frac{-8x+3}{2}\right)}{8} = \frac{3+8x-3}{8} = x$$

$$f(x) = -\frac{y}{3}x - 3 = y \Rightarrow -\frac{y}{3}x = 3+y \quad -56$$

$$\Rightarrow x = -\frac{3y+9}{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{3x+9}{x}$$

$$f^{-1}(x) = 8x + 24 \Rightarrow f^{-1}(5) = 64 \quad -57$$

$$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$g^{-1} \circ f^{-1}(x) = g^{-1}(64) = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$f \circ g(x) = f\left(\frac{x+4}{3}\right) = 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 = x \quad -58$$

$$g \circ f(x) = g(3x-4) = \left(\frac{3x-4+4}{3}\right) = x$$

$$g^{-1} \circ f^{-1}(5) = g^{-1}(64) = 4 \quad -59$$

بدراشت ضرورتی داشت آموز:

«مجموعه کتاب‌های سمن»



math-pilevar.ir



@plv.math



978-622-5513-45-7