

بخور جانم!
برات خوبه!

سوالات
موضوعی
نهایی
(سمن)



$$\frac{a}{x} = \frac{b}{x}$$
$$\sin 2x = b$$
$$a < \cos x$$
$$4x = \frac{m}{x}$$



گسسته ریاضیات

مجموعه سوالات نهایی ریاضیات گسسته
پایه دوازدهم رشته ریاضی فیزیک

یاسخ
تشریحی

رقیه پيله ور - میکائیل صدقی

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است

www.math-pilevar.com

بِسْمِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

سوالات موضوعی نهایی (سمن)

ریاضیات گسسته

(۲۵ دوره سوال نهایی)

مؤلفین:

رقیه پیلهور نیار

میکائیل صدقی

math-pilevar.ir

سرشناسه	: پيله‌ور نيار، رقيه، ۱۳۶۰-
عنوان و نام پديدآور	: سوالات موضوعی نهایی ریاضیات گسسته/مولفین رقيه پيله‌ور نيار، ميكائيل صدقي.
مشخصات نشر	: اردبیل: گونش‌نگار، ۱۴۰۴.
مشخصات ظاهري	: ۱۱۷ ص: جدول، نمودار؛ ۲۲ × ۲۹ س.م.
شابک	: ۹۷۸-۶۲۲-۵۵۱۳-۴۷-۱ : ۳۳۵۰۰۰۰ ريال
وضعیت فهرست نویسی	: فیپای مختصر
شناسه افزوده	: صدقي، ميكائيل، ۱۳۵۳-
شماره کتابشناسی ملی	: ۹۳۶۳۲۹۶
اطلاعات رکورد کتابشناسی	: فیپا

◀ نام کتاب : سوالات موضوعی نهایی ریاضیات گسسته

◀ مولفین : رقيه پيله‌ور و ميكائيل صدقي

◀ ناشر : انتشارات گونش‌نگار

◀ طراح روجلد : رباب حامدسلطانی

◀ رسم نمودارها : رقيه پيله‌ور و سحر طالبي

◀ نوبت چاپ : ویرایش سوم، ۱۴۰۴

◀ تیراژ : ۱۰۰۰ جلد

◀ قیمت : ۳۳۵۰۰۰۰ ريال

◀ شابک : ۹۷۸-۶۲۲-۵۵۱۳-۴۷-۱



آدرس: اردبیل، اول خیابان دانشگاه، روبروی اداره مخابرات، انتشارات گونش‌نگار

۰۹۱۴۳۵۸۵۶۲۸ — ۰۴۵ - ۳۳۵۲۳۳۵۹

www.gunashnegarpub.ir

کلیه حقوق قانونی، مادی و معنوی برای مولفین و ناشر محفوظ است هیچ شخص حقوقی یا حقیقی حق تکثیر تمام یا قسمتی از این مجموعه را ندارد، در صورت مشاهده تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است

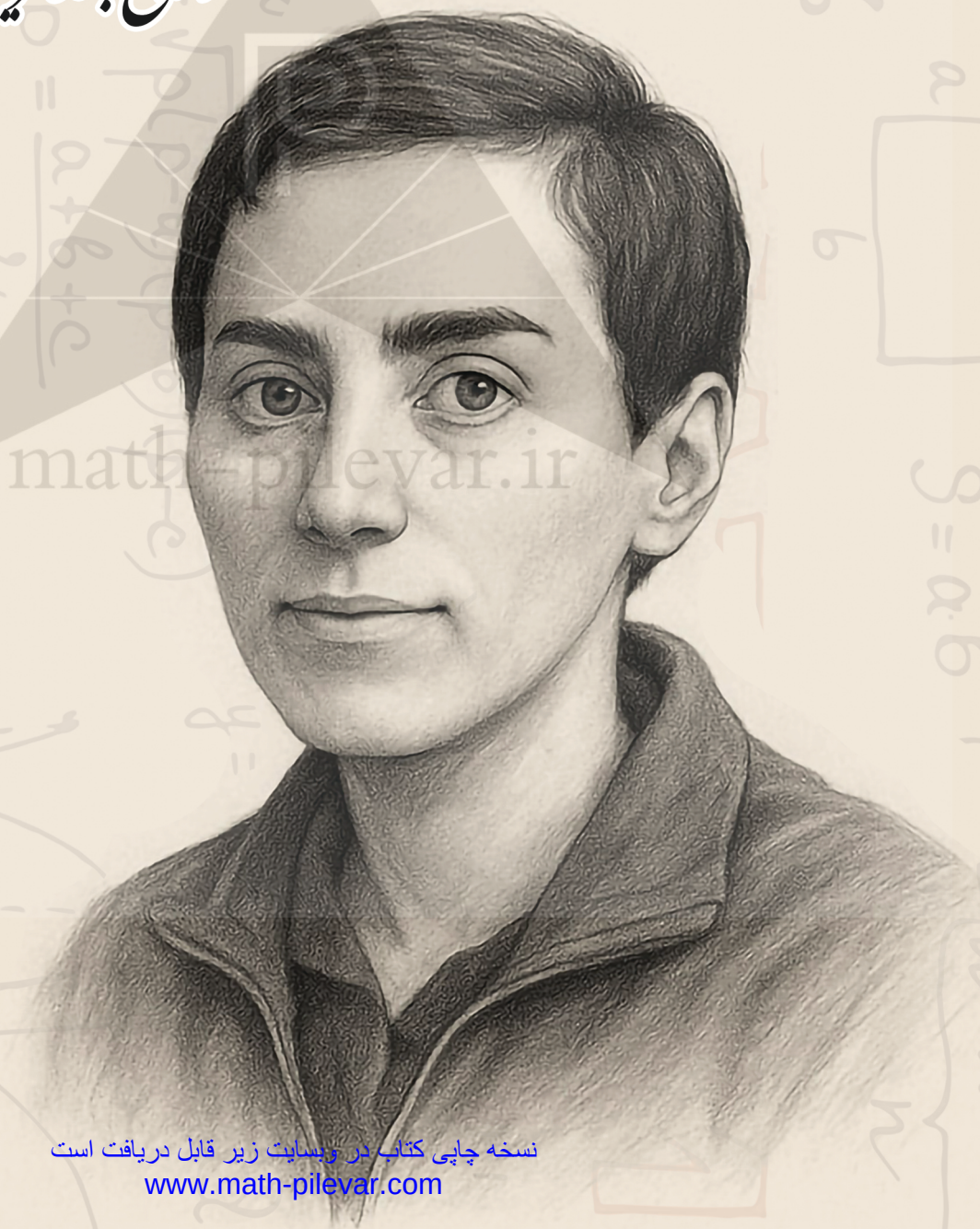
www.math-pilevar.com

تقدیم به

دیران فرهیخته‌ی ریاضی

ودانش آموزان برتر

و روح بلند مریم میرزاخانی



فهرست مطالب

۵	مقدمه
۸	۱ آشنایی با نظریه اعداد
۹	استدلال ریاضی
۱۵	بخش پذیری در اعداد صحیح
۲۷	هم نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها
۴۱	۲ گراف و مدل سازی
۴۲	معرفی گراف
۵۹	مدل سازی با گراف
۷۰	۳ ترکیبیات (شمارش)
۷۱	مباحثی در ترکیبیات
۸۶	روش هایی برای شمارش

مقدمه

کتابی که اکنون در دست دارید، حاصل سال‌ها تدریس، تجربه، تلاش مستمر، و همراهی صمیمانه با دانش‌آموزانی است که در مسیر امتحانات نهایی گام برداشته‌اند. آنچه پیش رو دارید، جامع‌ترین مجموعه‌ی سوالات نهایی ریاضیات گسسته پایه دوازدهم است؛ مجموعه‌ای که تمام سوالات رسمی برگزارشده از نخستین آزمون تا آخرین دوره (دی ۱۳۹۷ تا شهریور ۱۴۰۴) را بدون حذف، به‌صورت منظم، دسته‌بندی‌شده و درس‌به‌درس گردآوری کرده‌ایم تا دانش‌آموز با یک منبع کامل و مطمئن روبه‌رو باشد.

این مجموعه، برخاسته از دل کلاس‌های درس است. سال‌ها سوالات را به‌صورت جزوه‌های کلاسی حل و بررسی می‌کردیم، و تجربه نشان داد که کار با سوالات واقعی نهایی، مؤثرترین راه برای کسب نمره‌ی عالی است. با پیشنهاد همکاران ارجمند، این جزوه‌ها شکل کتاب به خود گرفت و خوشبختانه، در دو سال گذشته، با استقبال کم‌نظیری از سوی دبیران و دانش‌آموزان در سراسر کشور همراه شد. همین همراهی ارزشمند، انگیزه‌ای شد تا کتاب را در چاپ‌های بعدی با چینش بهتر، درس‌نامه‌های خلاصه و کاربردی، و طبقه‌بندی دقیق‌تر بازنگری و کامل‌تر کنیم. در اینجا باید بر نکته‌ای کلیدی تأکید کنم:

به جرأت می‌توانم بگویم این مجموعه، تنها کتابی‌ست که تمام دانش‌آموزان، با هر سطح علمی و در هر نوع مدرسه‌ای، به آن نیاز دارند. تفاوتی ندارد که در مدرسه‌ای هیأت امنایی، نمونه دولتی، تیزهوشان یا عادی تحصیل می‌کنید؛ تأثیر نمرات نهایی در رتبه‌ی کنکور و تراز علمی برای همگان یکسان است. بنابراین، داشتن منبعی کامل از سوالات نهایی، نه یک انتخاب، بلکه یک ضرورت آموزشی برای همه دانش‌آموزان محسوب می‌شود. دانش‌آموز عزیز، این کتاب تنها یک مجموعه‌ی سوال نیست؛ نقشه‌ی راهی برای آمادگی کامل، مرور هدفمند، کاهش اضطراب امتحان و رسیدن به نتیجه‌ای مطلوب است. سوالات به ترتیب موضوعات کتاب درسی، همراه با نمره‌بندی، تاریخ برگزاری و نکات مهم جمع‌بندی شده‌اند تا مسیر یادگیری برایت هموارتر شود.

همکار محترم، این کتاب می‌تواند همراه آموزشی مؤثری در کلاس درس باشد. با توجه به ساختار منظم آن، می‌توانید از سوالات به‌عنوان تمرین، آزمون کلاسی، یا تکالیف هدفمند استفاده کنید. بی‌شک، حل این سوالات به‌صورت مستمر در طول سال تحصیلی، نقش مؤثری در ارتقای سطح علمی دانش‌آموزان دارد. در پایان، از همه‌ی همکاران فرهیخته‌ای که با انتخاب این مجموعه به‌عنوان مرجع کلاس خود، به ما اعتماد کردند، صمیمانه سپاس‌گزاریم. این همراهی ارزشمند، دلگرمی بزرگی در مسیر تألیف و ارتقای کیفیت این اثر بوده است.

در صورت مشاهده‌ی هرگونه اشکال، پیشنهاد یا اصلاح، لطفاً از طریق وبسایت math-pilevar.ir ما را در جریان بگذارید تا در چاپ‌های آینده بهبودهای لازم اعمال گردد.

با تشکر: پيله‌ور - صدقی

برای دریافت فایل pdf کتاب به سایت math-pilevar.ir مراجعه کنید.

هدیه ویژه برای خریداران مجموعه کتابهای سَمَن

از اینکه مجموعه کتابهای سَمَن را برای مطالعه و تمرین انتخاب کردید، صمیمانه سپاسگزاریم.
امسال برای همراهان مجموعه کتابهای سَمَن (سوالات موضوعی نهایی) یک سورپرایز خاص داریم!
خیلی از شما دوست دارید نسخه‌ی PDF کتاب همیشه همراهتان باشد؛ چه در مسیر، چه در زمان‌هایی که کتاب کاغذی در دسترس نیست. خبر خوب این است که ما این امکان را برایتان فراهم کردیم:

✓ **خیلی راحت به نسخه PDF کتاب‌ها دسترسی داشته باشید:**



- ۱- وارد سایت www.math-pilevar.com شوید.
 - ۲- اپلیکیشن Pimath را از نوار بالای سایت دانلود و روی گوشی اندرویدی خود نصب کنید.
 - ۳- یک حساب کاربری بسازید و وارد برنامه شوید.
 - ۴- در بخش «PDF کتاب‌ها» کد تخفیف ۱۰۰ درصدی زیر را وارد کنید
- و فایل PDF همین کتاب و سایر کتاب‌های ارزشمند مجموعه سَمَن را به‌طور رایگان دریافت کنید.

کد تخفیف: off90k



برای دسترسی سریعتر، کافی است تصویر QR را اسکن کنید. و مستقیم وارد دنیای کتاب‌های دیجیتال شوید.

نکات مهم:

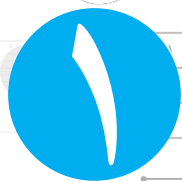
اگر پس از وارد کردن کد، فایل PDF باز نشد، اپلیکیشن را یکبار کامل ببندید و دوباره اجرا کنید.
در صورت بروز هرگونه مشکل، از بخش «پشتیبانی» داخل اپلیکیشن برای ما پیام بفرستید تا تیم پشتیبانی در سریعترین زمان پاسخگو باشد.

با این هدیه، همیشه یک کتابخانه‌ی دیجیتال کوچک از کتاب‌های سَمَن در جیب شما خواهد بود؛
تا راحت‌تر تمرین کنید، بهتر مرور کنید و محتوای کتاب‌ها همیشه همراهتان باشد.



نمونه سوالات نهایی که در این کتاب به صورت موضوعی تفکیک شده است عبارتند از:

دی ۹۷	۱
خرداد ۹۸	۲
خرداد ۹۸ خارج از کشور	۳
تیر ۹۸	۴
شهریور ۹۸	۵
دی ۹۸	۶
خرداد ۹۹	۷
خرداد ۹۹ خارج از کشور	۸
شهریور ۹۹	۹
دی ۹۹	۱۰
خرداد ۱۴۰۰	۱۱
شهریور ۱۴۰۰	۱۲
دی ۱۴۰۰	۱۳
خرداد ۱۴۰۱	۱۴
خرداد ۱۴۰۱ خارج از کشور	۱۵
شهریور ۱۴۰۱	۱۶
دی ۱۴۰۱	۱۷
خرداد ۱۴۰۲	۱۸
شهریور ۱۴۰۲	۱۹
دی ۱۴۰۲	۲۰
خرداد ۱۴۰۳	۲۱
شهریور ۱۴۰۳	۲۲
دی ۱۴۰۳	۲۳
خرداد ۱۴۰۴	۲۴
شهریور ۱۴۰۴	۲۵



آشنایی با نظریه اعداد

- ۹ استدلال ریاضی
۱۵ بخش پذیری در اعداد صحیح
۲۷ هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها



درس

۱

استدلال ریاضی

خلاصه درسنامه

استدلال ریاضی:



- ۱ اثبات مستقیم
- ۲ اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها
- ۳ برهان خلف
- ۴ مثال نقض
- ۵ اثبات بازگشتی

۱- اثبات مستقیم: اثبات‌هایی که در آنها بطور مستقیم از فرض شروع کنیم و با توجه به اطلاعات قبلی به حکم برسیم اثبات‌های مستقیم نامیده می‌شوند.

مثال

ثابت کنید مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

۲- اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها: گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همه موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم این نوع اثبات را اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها می‌گویند.

مثال

ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.

حالت اول: فرض می‌کنیم n زوج است پس $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$n^2 - 5n + 7 = (2k)^2 - 5(2k) + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1 = 2(\underbrace{2k^2 - 5k + 3}_{k'}) + 1 = 2k' + 1$$

حالت دوم: فرض می‌کنیم n فرد است پس $n = 2k - 1$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$n^2 - 5n + 7 = (2k - 1)^2 - 5(2k - 1) + 7 = 4k^2 - 4k + 1 - 10k + 5 + 7 = 4k^2 - 14k + 13 = 2(\underbrace{2k^2 - 7k + 6}_{k''}) + 1 = 2k'' + 1$$

که باز هم حاصل یک عدد فرد است.

۳- برهان خلف (اثبات غیرمستقیم): گاهی برای اثبات یک گزاره، فرض می‌کنیم حکم نادرست است و به یک نتیجه غیرممکن و یا یک نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم پس فرض نادرست بودن حکم باطل بوده و درستی حکم ثابت می‌شود. این نوع اثبات را اثبات به روش برهان خلف یا غیرمستقیم می‌گویند.



مثال

ثابت کنید برای هر عدد صحیح n ، اگر n^2 زوج باشد n نیز زوج است.

حل: فرض می‌کنیم n زوج نباشد (فرض خلف) پس فرد است در این صورت $n = 2k + 1$

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{k'}) + 1 = 2k' + 1 \quad \text{فرد}$$

و این متناقض با فرض مسئله است زیرا طبق فرض n^2 زوج است پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۴- مثال نقض: به مثالی که برای رد کردن یک حکم کلی به کار می‌رود، مثال نقض می‌گویند. (به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است.)

مثال

برای حکم کلی زیر یک مثال نقض بیاورید.

«همه اعداد اول فرد هستند».

مثال نقض: عدد ۲ اول و زوج است.

۵- اثبات بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز): گاهی برای اثبات بعضی قضیه‌ها از حکم استفاده می‌کنیم و به یک نتیجه مطلق و درست می‌رسیم و برای تکمیل اثبات باید نشان دهیم که تمام مراحل انجام شده بازگشت‌پذیر هستند این نوع اثبات را اثبات بازگشتی می‌گویم.

مثال

اگر $a > 0$ ثابت کنید: $a + \frac{1}{a} \geq 2$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + 1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 \geq 0$$

یک عبارت همیشه درست

سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. (۱) برای هر دو عدد حقیقی a و b ، اگر $a^2 + b^2 = 0$ باشد، آن‌گاه $a = 0$ و $b = 0$. (شهریور ۱۴۰۴) (۲) حاصل ضرب هر عدد گویا در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (خرداد ۱۴۰۴) (۳) اگر α, β دو عدد گنگ غیر مساوی باشند، حاصل $\frac{\alpha + \beta}{2\beta}$ عددی گنگ است. (دی ۱۴۰۳) (۴) میانگین پنج عدد طبیعی همان عدد وسطی است. (خرداد ۱۴۰۳) (۵) حاصل ضرب هر عدد گویا، در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (شهریور ۱۴۰۲) (۶) حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (خرداد ۱۴۰۲) (۷) اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است. (دی ۱۴۰۱)	۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵	



۰/۲۵	۸	برای مقادیر حقیقی و ناصفر a و b به شرط آنکه $a + b \neq 0$ تساوی $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ برقرار است. (دی ۱۴۰۱)
۰/۲۵	۹	مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. (خرداد ۱۴۰۱ خارج از کشور)
۰/۲۵	۱۰	اگر $a > 0$ باشد، آنگاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$. (خرداد ۱۴۰۱ خارج از کشور)
۰/۲۵	۱۱	مربع هر عدد فرد، فرد است. (خرداد ۱۴۰۱ خارج از کشور)
۰/۲۵	۱۲	عدد حقیقی مانند x وجود دارد که $x^3 < x^2$. (خرداد ۱۴۰۱ خارج از کشور)
۰/۲۵	۱۳	هیچ عدد صحیحی مانند x, y وجود ندارد که رابطه $x^2 + y^2 = (x + y)^2$ برقرار باشد. (خرداد ۱۴۰۰)
۰/۲۵	۱۴	برای هر دو عدد حقیقی x, y داریم: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ (شهریور ۱۳۹۹)
۰/۲۵	۱۵	اگر a, b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$ (شهریور ۱۳۹۹)
۰/۲۵	۱۶	اگر a, b داریم: $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ (شهریور ۱۳۹۹)
۰/۲۵	۱۷	حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. (شهریور ۱۳۹۹)
۰/۲۵	۱۸	مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. (شهریور ۱۳۹۸)
۰/۲۵	۱۹	برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از یک، عدد $2^n - 1$ اول است. (شهریور ۱۳۹۸)
۰/۲۵	۲۰	اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است. (دی ۱۳۹۷)
شهریور ۱۴۰۴	۲	ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، عبارت $n^2 - 9n + 1$ همواره عددی فرد است.
خرداد ۱۴۰۴	۳	برای هر دو عدد حقیقی a, b ، گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید: $5a^2 + b^2 \geq 4ab$
دی ۱۴۰۳	۴	برای دو عدد حقیقی x, y نشان دهید: $3x^2 + y^2 \geq 6x - 3$
دی ۱۴۰۳	۵	اگر a, b دو عدد صحیح باشند و $5ab$ عددی فرد باشد، ثابت کنید حاصل $a^2 + b^2$ عددی زوج است.
شهریور ۱۴۰۳	۶	گزینه صحیح را انتخاب کنید: اگر $a, b \in \mathbb{R}$ کدامیک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟ ۱) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ ۲) $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$ ۳) $a < b \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$ ۴) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$



شهریور ۱۴۰۲	۱/۲۵	۷ ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.
خرداد ۱۴۰۳	۱/۵	۸ با استفاده از اثبات بازگشتی نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم: $a^2 + b^2 \geq (a-1)(b+1)$
دی ۱۴۰۲	۱/۵	۹ در هر یک از موارد زیر، گزاره درست را اثبات و گزاره نادرست را با ارائه مثال نقض، رد کنید. الف) با اضافه کردن یک واحد به حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی، حاصل، مربع کامل است. ب) حاصل ضرب هر عدد گویا در عدد گنگ، همواره عددی گنگ است.
دی ۱۴۰۲	۱/۵	۱۰ ثابت کنید مجموع مربعات هر دو عدد حقیقی همواره از قرینه حاصل ضرب آنها کمتر نیست.
شهریور ۱۴۰۲	۱/۲۵	۱۱ برای هر دو عدد حقیقی x و y ، به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) نشان دهید: $2x^2 + 2xy + y^2 \geq 4x - 4$
خرداد ۱۴۰۲	۰/۷۵	۱۲ اگر x, y و z سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - z^2$
دی ۱۴۰۱	۱	۱۳ گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید: «برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $y^2 + 1 \geq -2x(y+x+1)$ »
شهریور ۱۴۰۱	۱	۱۴ هر یک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض کنید. الف: برای هر عدد طبیعی n ، عدد $2^n + 1$ اول است. ب: مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.
شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵	۱۵ a_1, a_2, a_3 اعدادی صحیحی هستند و b_1, b_2, b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.
خرداد ۱۴۰۱ خ	۱	۱۶ اگر n عددی فرد باشد، ثابت کنید $7 + 5n - n^2$ نیز عددی فرد است.
خرداد ۱۴۰۱	۱	۱۷ ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج n ، $7 + 5n - n^2$ عددی فرد است.



دی ۱۴۰۰	۰/۲۵	۱۸	عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف) حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی (گویا، گنگ) است.
دی ۱۴۰۰	۱/۵	۱۹	اگر α, β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.
شهریور ۱۴۰۰	۱	۲۰	ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.
خرداد ۱۴۰۰	۱/۲۵	۲۱	به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچکتر یا مساوی نصف مجموع مربعات آنها است.
دی ۹۹	۰/۲۵	۲۲	گزاره درست را مشخص کرده و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه کنید. برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.
دی ۹۹	۱/۵	۲۳	اگر α, β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.
خرداد ۹۹	۱/۷۵	۲۴	گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید. الف: مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب: اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.
خرداد ۹۹	۱	۲۵	اگر x, y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$
خرداد ۹۹	۱	۲۶	با استفاده از روش برهان خلف، ثابت کنید اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است.
شهریور ۹۹	۱/۲۵	۲۷	ثابت کنید اگر a, b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
خرداد ۹۸	۱	۲۸	ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.
خرداد ۹۸	۱	۲۹	گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره هم‌ارز) ثابت کنید. برای هر دو عدد حقیقی نشان دهید: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$



۳۰	اگر a, b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^2 + b^2$ زوج است.	۱	خرداد ۹۸
۳۱	ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.	۱/۲۵	تیر ۹۸
۳۲	گزاره ی زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم ارز) ثابت کنید. برای هر عدد حقیقی $a > 0$ داریم: $a + \frac{1}{a} \geq 2$	۱	تیر و دی ۹۸
۳۳	برای هر سه عدد حقیقی x, y, z ثابت کنید. $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$	۱/۵	شهریور ۹۸
۳۴	اگر α, β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد. ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ گنگ است.	۱/۲۵	دی ۹۷
۳۵	گزاره ی زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم ارز) ثابت کنید. برای هردو عدد حقیقی x, y داریم: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$	۱	دی ۹۷

بدراشت ضروری دانش آموز:

درس ۱

استدلال ریاضی

math-pilevar.ir



درس

۲

بخش پذیری در اعداد صحیح

خلاصه درسنامه

عدد صحیح b بر عدد صحیح $a \neq 0$ بخش پذیر (تقسیم پذیر) است، هرگاه عددی صحیح مانند q یافت شود به طوری که $b = aq$.

$$a \mid b \iff \exists q \in \mathbb{Z} \text{ such that } b = a \cdot q$$

بخش پذیری عدد صحیح b بر عدد صحیح $a \neq 0$ را به صورت $a \mid b$ نشان می‌دهند به عبارت دیگر:

برای مثال: $12 \mid 48$ زیرا $48 = 4 \times 12$

قرارداد: صفر بر صفر بخش پذیر است، زیرا عددی صحیح مانند q وجود دارد که $0 = 0 \times q$.

تذکره. صورت‌های مختلف بیان نماد بخش پذیری:

برای مثال: وقتی می‌نویسیم $4 \mid 12$ ، چنین می‌خوانیم:

- 12 بر 4 بخش پذیر است.
- 4 شمارنده (مقسوم علیه) 12 است.
- 12 مضرب 4 است.
- 4 سازه (عامل) 12 است.
- 4 ، 12 را می‌شمارد (عاد می‌کند).

ویژگی‌های مهم بخش پذیری

ویژگی ۱: صفر بر هر عدد صحیح همواره بخش پذیر است. به عبارت دیگر: $\forall a \in \mathbb{Z}; a \mid 0$ زیرا $0 = a \times 0$

ویژگی ۲: هر عدد صحیح بر 1 و -1 بخش پذیر است. به عبارت دیگر: $\forall a \in \mathbb{Z}; 1 \mid a, -1 \mid a$

ویژگی ۳: هر عدد صحیح بر خودش و قرینه‌اش بخش پذیر است. به عبارت دیگر: $\forall a \in \mathbb{Z}; a \mid a, -a \mid a$

نتیجه: هر عدد صحیح (البته مخالف 1 و -1) دست کم چهار شمارنده دارد (این چهار شمارنده عبارت‌اند از: 1 ، -1 ، خودش و قرینه‌اش)

ویژگی ۴: اگر $a \mid b$ ، آن‌گاه: الف) $-a \mid b$ ب) $a \mid -b$ پ) $-a \mid -b$

نتیجه: ۱) گزاره شرطی $a \mid b \Rightarrow -a \mid b$

۲) گزاره شرطی $a \mid b \Rightarrow a \mid -b$

۳) علامت اعداد، تأثیری در بخش پذیری ندارد.

ویژگی ۵: برای دو عدد صحیح و غیر صفر a و b همواره داریم: $a \mid b \iff |a| \leq |b|$

نتیجه: ۱) شمارنده‌های هر عدد طبیعی، همواره کوچکتر یا مساوی خود آن عدد طبیعی هستند.

۲) هیچ عدد طبیعی نمی‌تواند اعداد طبیعی کوچکتر از خود را بشمارد.

۳) اگر $a \mid b$ و $|a| > |b|$ ، آن‌گاه $b = 0$.

ویژگی ۶: برای دو عدد صحیح و مخالف صفر a و b همواره داریم: $(a \mid b \wedge b \mid a) \iff |a| = |b|$

نتیجه: ۱ اگر دو عدد طبیعی یکدیگر را بشمارند، آنگاه با هم برابرند و برعکس.

۲ برای عدد صحیح a داریم: الف) $a \mid 1 \leftrightarrow a = \pm 1$ ب) $a \mid a \leftrightarrow a = 0$

ویژگی ۷: برای سه عدد صحیح و مخالف صفر a, b, c داریم: $(a \mid b \wedge b \mid c) \Rightarrow a \mid c$

ویژگی ۸: سمت راست نماد بخش پذیری را می توان در هر عدد صحیح ضرب کرد و یا به توان هر عدد طبیعی رساند. به عبارت دیگر اگر $a \neq 0$ و b اعداد صحیح باشند، داریم:

$$a \mid b \xrightarrow{\forall m \in \mathbb{Z}} a \mid mb \quad \text{ب) } a \mid b \xrightarrow{\forall n \in \mathbb{N}} a \mid b^n$$

تذکر: ۱ ویژگی «الف» بیان می کند که اگر عددی، یک عدد صحیح را بشمارد، هر مضرب آن عدد صحیح را نیز می شمارد.

۲ عکس گزاره های شرطی ویژگی ۸، همیشه درست نیستند. یعنی: $\forall m \in \mathbb{Z}; a \mid mb \not\Rightarrow a \mid b$, $\forall n \in \mathbb{N}; a \mid b^n \not\Rightarrow a \mid b$

برای این منظور به مثال های نقض مقابل توجه کنید: $8 \mid 4 \times 6 \xrightarrow{m=4} 8 \mid 24$ و $8 \mid 4^2 \xrightarrow{n=2} 8 \mid 16$

حالت خاص اگر یک عدد اول، حاصل ضرب دو عدد صحیح را بشمارد، آنگاه حداقل یکی از آن دو عدد صحیح را می شمارد.

$$p \mid ab \Rightarrow (p \mid a \vee p \mid b)$$

به عبارت دیگر اگر p عددی اول و a و b دو عدد صحیح باشند، داریم:

$$\text{برای مثال: } 3 \mid 6 \times 5 \Rightarrow \begin{cases} 3 \mid 6 \\ 3 \mid 5 \end{cases} \quad 3 \mid 6 \times 9 \Rightarrow \begin{cases} 3 \mid 6 \\ 3 \mid 9 \end{cases}$$

حالت خاص اگر یک عدد اول، توان n ام یک عدد صحیح را بشمارد، آنگاه خود آن عدد را نیز می شمارد.

$$p \mid a^n \xrightarrow{\forall n \in \mathbb{N}} p \mid a$$

به عبارت دیگر اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشد، داریم:

برای مثال: $3 \mid 6^2 \xrightarrow{\text{اول نیست}} 3 \mid 6$, $3 \mid 6^2 \xrightarrow{\text{اول است}} 3 \mid 6$

$$a \mid b \xrightarrow[\substack{\forall m \in \mathbb{Z} \\ (m \neq 0)}]{\substack{\forall m \in \mathbb{Z} \\ (m \neq 0)}} ma \mid mb \quad \text{ب) } a \mid b \xrightarrow{\forall n \in \mathbb{N}} a^n \mid b^n$$

ویژگی ۹: اگر $a \neq 0$ و b دو عدد صحیح باشند، داریم:

$$a \mid b \xrightarrow{m \leq n} a^m \mid b^n$$

نتیجه: اگر $a \neq 0$ و b اعدادی صحیح و m و n دو عدد طبیعی باشند، داریم:

برای مثال: (نادرست) $3 \mid 6 \Rightarrow 3^3 \mid 6^2$, (درست) $3 \mid 6 \Rightarrow 3^3 \mid 6^4$

$$\forall m, n \in \mathbb{N}; m \leq n \Rightarrow a^m \mid a^n$$

حالت خاص برای هر عدد صحیح a داریم:

برای مثال: $3^4 \mid 3^9$

ویژگی ۱۰: اگر عددی بر حاصل ضرب چند عدد صحیح غیر صفر بخش پذیر باشد، آنگاه بر هر کدام از آن ها نیز بخش پذیر است.

$$(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots) \mid b \Rightarrow (a_1 \mid b \wedge a_2 \mid b \wedge a_3 \mid b \wedge \dots)$$

به عبارت دیگر برای اعداد صحیح $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0, \dots, b$ داریم:



ویژگی ۱۱: دو طرف دو یا چند بخش پذیری را می توان نظیر به نظیر در یکدیگر ضرب کرد.

$$\begin{cases} a|b \\ c|d \end{cases} \Rightarrow ac|bd$$

به عبارت دیگر اگر $a \neq 0, b, c \neq 0$ و d چهار عدد صحیح باشند، داریم:

$$\begin{cases} 3|6 \\ 4|8 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{3 \times 4}_{12} | \underbrace{6 \times 8}_{48}$$

برای مثال:

$$ac|bd \not\Rightarrow \begin{cases} a|b \\ c|d \end{cases}$$

هشدار: عکس گزاره شرطی ویژگی ۱۱، همواره درست نیست. به عبارت دیگر:

هشدار: دو طرف دو یا چند رابطه بخش پذیری را نمی توان نظیر به نظیر جمع (یا تفریق) نمود.

$$\begin{cases} a|b \\ c|d \end{cases} \not\Rightarrow (a \pm c)|(b \pm d)$$

به عبارت دیگر اگر $a \neq 0, b, c \neq 0$ و d اعدادی صحیح باشند، داریم:

$$\begin{cases} 4|12 \\ 9|18 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{(4+9)}_{13} | \underbrace{(12+18)}_{30}, \quad \underbrace{(4-9)}_{-5} | \underbrace{(12-18)}_{-6}$$

مثال نقض

ویژگی ۱۲: اگر عددی دو عدد صحیح را بشمارد، آنگاه مجموع، تفاضل و حاصل ضرب آن دو عدد را نیز می شمارد.

$$(a|b \wedge a|c) \Rightarrow (a|(b \pm c) \wedge a|b \cdot c)$$

به عبارت دیگر برای اعداد صحیح $a \neq 0, b, c$ داریم:

$$\begin{cases} 3|6 \\ 3|9 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{3|6+9}_{15}, \quad \underbrace{3|6-9}_{-3}, \quad \underbrace{3|6 \times 9}_{54}$$

برای مثال:

هشدار: عکس گزاره شرطی ویژگی ۱۲، همیشه درست نیست. به عبارت دیگر:

$$\begin{cases} a|bc \not\Rightarrow (a|b \wedge a|c) \\ a|(b \pm c) \not\Rightarrow (a|b \wedge a|c) \end{cases}$$

برای اعداد صحیح $a \neq 0, b, c$ داریم:

$$\begin{cases} 8|4 \times 6 \Rightarrow (8|4 \wedge 8|6) \\ 2|(5 \pm 1) \Rightarrow (2|5 \wedge 2|1) \end{cases}$$

به مثال های نقض زیر توجه کنید:

ویژگی ۱۳: اگر عددی دو عدد صحیح را بشمارد، آنگاه هر ترکیب خطی آن دو عدد را نیز می شمارد.

$$(a|b \wedge a|c) \xrightarrow{\forall m, n \in \mathbb{Z}} a|(mb \pm nc)$$

به عبارت دیگر برای اعداد صحیح $a \neq 0, b, c$ داریم:

مثال

اگر a عددی طبیعی و بزرگتر از یک باشد، به طوری که $a|9k+4$ و $a|5k+3$ ، آنگاه a همواره چگونه است؟ ($\forall k \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{cases} a|9k+4 \xrightarrow{\text{ویژگی ۱۳}} a|5(9k+4) \Rightarrow a|45k+20 \\ a|5k+3 \xrightarrow{\text{ویژگی ۱۳}} a|9(5k+3) \Rightarrow a|45k+27 \end{cases} \xrightarrow[\text{(ویژگی ۱۲)}]{a \text{ تفاضل را می شمارد}} a|7$$

پاسخ:

از طرفی $a > 1$ عددی طبیعی است و چون شمارنده ۷ است، پس $a = 7$ قابل قبول است لذا a عددی اول است.



بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م)



عددی که هر دو عدد صحیح را بشمارد و در بین تمام مقسوم‌علیه‌های مشترک آن دو عدد صحیح، از همه بزرگ‌تر باشد، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م) آن دو عدد نامیده می‌شود. به عبارت دیگر:

عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌گوییم اگر و تنها اگر هر دو شرط زیر برقرار باشند:

$$\text{الف) } d|a \wedge d|b \quad \text{ب) } \forall m \in \mathbb{N}; (m|a \wedge m|b) \Rightarrow m \leq d$$

• ب.م.م دو عدد صحیح a و b را با نماد (a, b) نشان می‌دهند.

برای مثال: $(12, 18) = 6$ است.

نتیجه ۱: ب.م.م دو عدد صحیح، در صورت وجود، همواره عددی طبیعی و یکتاست.

۲: اگر $a \neq 0$ عددی صحیح باشد، آن‌گاه: $(a, 0) = |a|$

۳: علامت، تأثیری در محاسبه ب.م.م دو عدد صحیح ندارد. به عبارت دیگر اگر a و b دو عدد صحیح باشند، که حداقل یکی مخالف صفر است، آن‌گاه:

$$(a, b) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b)$$

۴: ب.م.م دو عدد صحیح، از نظر قدرمطلق از هر دو عدد، کوچک‌تر یا مساوی است. به عبارت دیگر برای دو عدد صحیح و غیر صفر a و b داریم:

$$(a, b)|a \Rightarrow (a, b) \leq |a|, (a, b)|b \Rightarrow (a, b) \leq |b|$$

مثال

اگر $a \in \mathbb{Z}$ باشد، آن‌گاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $3a - 2$ و $5a + 1$ کدام است؟

$$\begin{cases} d|3a - 2 \Rightarrow d|5(3a - 2) \Rightarrow d|15a - 10 \\ d|5a + 1 \Rightarrow d|3(5a + 1) \Rightarrow d|15a + 3 \end{cases} \xrightarrow{d \text{ تفاضل را می‌شمارد}} d|13$$

پاسخ: فرض کنیم $(3a - 2, 5a + 1)$ ، پس: $d|13$

با توجه به اینکه $d \in \mathbb{N}$ ، بنابراین $d = 1$ یا $d = 13$ است.

محاسبه ب.م.م دو عدد صحیح معلوم به کمک تجزیه



برای یافتن ب.م.م دو عدد صحیح، ابتدا هر دو عدد را به صورت تجزیه شده، می‌نویسیم، سپس پایه‌های مشترک با توان کمتر را در یکدیگر ضرب می‌کنیم.

$$\begin{cases} 105 = 3^1 \times 5^1 \times 7^1 \\ 350 = 2^1 \times 5^2 \times 7^1 \end{cases} \Rightarrow (105, 350) = 5^1 \times 7^1 = 35$$

برای مثال: برای یافتن ب.م.م دو عدد 105 و 350 ، داریم:

دو عدد نسبت به هم اول (متباین)



دو عدد را نسبت به هم اول می‌گوییم هرگاه ب.م.م آن‌ها برابر ۱ باشد و برعکس.

به عبارت دیگر برای دو عدد صحیح a و b (که حداقل یکی غیر صفر است)، داریم:

$$(a, b) = 1 \Leftrightarrow a \text{ و } b \text{ نسبت به هم اول اند (متباین‌اند)}$$

برای مثال: دو عدد 10 و 21 نسبت به هم اول‌اند، زیرا $(10, 21) = 1$



نکات مهم اعداد نسبت به هم اول

$$\forall a \in \mathbb{Z}; (a, 1) = 1$$

نکته: ۱ عدد ۱ نسبت به هر عدد صحیح همواره اول است. به عبارت دیگر:

$$\forall a \in \mathbb{Z}; (a, a+1) = 1$$

نکته: ۲ هر دو عدد صحیح متوالی: نسبت به هم اول اند، به عبارت دیگر:

نکته: ۳ اگر دو عدد صحیح نسبت به هم اول باشند، آنگاه شمارنده‌های آن‌ها نیز نسبت به هم اول اند. به عبارت دیگر:

$$(a, b) = 1 \rightarrow \frac{c|a}{d|b} \rightarrow (c, d) = 1$$

نکته: ۴ اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشد، به طوری که $p \nmid a$ ، آنگاه $(p, a) = 1$.

برای مثال: عدد اول ۷ را در نظر می‌گیریم، واضح است که $7 \nmid 10$ ، پس $(7, 10) = 1$.

مضرب مشترک دو عدد صحیح



اگر عددی، بر هر دو عدد صحیح بخش‌پذیر باشد، مضرب مشترک آن دو عدد نامیده می‌شود. بنابراین:

عدد صحیح m ، مضرب مشترک دو عدد صحیح و مخالف صفر a و b است اگر و تنها اگر $a|m$ و $b|m$.

برای مثال: عدد ۷۲ مضرب مشترک دو عدد ۱۲ و ۱۸ است. زیرا $12|72$ و $18|72$.

کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م)



عددی که بر هر دو عدد صحیح بخش‌پذیر است و در بین تمام مضرب‌های مشترک و مثبت آن دو عدد صحیح، از همه کوچک‌تر باشد، کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) آن دو عدد نامیده می‌شود. بنابراین:

عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد صحیح و غیرصفر a و b می‌گوییم اگر و تنها اگر هر دو شرط زیر برقرار باشند:

$$\text{الف) } a|c \wedge b|c \quad \text{ب) } \forall m \in \mathbb{N}; (a|m \wedge b|m) \Rightarrow c \leq m$$

برای مثال: $[12, 18] = 36$ است.

نتیجه ۱: ک.م.م دو عدد صحیح، در صورت وجود، همواره عددی طبیعی و یکتا است.

حال خاص: اگر a عددی صحیح باشد، آنگاه: وجود ندارد $[a, 0]$

زیرا عددی طبیعی یافت نمی‌شود که هم بر a و هم بر صفر بخش‌پذیر باشد. (توجه کنید که تنها صفر بر صفر بخش‌پذیر است، که صفر عددی طبیعی نیست).

۲: علامت تأثیری در محاسبه ک.م.م دو عدد صحیح ندارد. به عبارت دیگر اگر a و b دو عدد صحیح و مخالف صفر باشند. آنگاه:

$$[a, b] = [-a, b] = [a, -b] = [-a, -b]$$

۳: ک.م.م دو عدد صحیح و غیرصفر، از هر دو عدد بزرگ‌تر یا مساوی است. به عبارت دیگر برای دو عدد صحیح و غیر صفر a و b داریم:

$$a|[a, b] \Rightarrow a \leq [a, b] \quad , \quad b|[a, b] \Rightarrow b \leq [a, b]$$



محاسبه ک.م.م دو عدد صحیح معلوم به کمک تجزیه



برای یافتن ک.م.م دو عدد صحیح، ابتدا هر دو عدد را به صورت تجزیه شده، می‌نویسیم. سپس پایه‌های مشترک و غیرمشترک با توان بیشتر را در یکدیگر ضرب می‌کنیم.

برای مثال: برای یافتن ک.م.م دو عدد ۷۲۰ و ۵۰۴ داریم:

$$\begin{cases} 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1 \\ 504 = 2^3 \times 3^2 \times 7^1 \end{cases} \Rightarrow [720, 504] = 2^4 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 = 5040$$

نتیجه: ک.م.م دو عدد نسبت به هم اول، با حاصل ضرب آن دو عدد برابر است و برعکس.

$$(a, b) = 1 \Leftrightarrow [a, b] = |ab|$$

به عبارت دیگر برای دو عدد صحیح و مخالف صفر a و b داریم:

قضیه تقسیم

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، آنگاه اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r وجود دارند به طوری که:

$$\underbrace{a = bq + r}_{\text{فرمول تقسیم}}, \quad \underbrace{0 \leq r < b}_{\text{شرط تقسیم}}$$

قضیه تقسیم، در واقع همان عملیات تقسیم است، که در دوران ابتدایی بدون آن که اعداد اعشاری یا کسری مورد استفاده قرار گیرند، آن را به صورت زیر یاد گرفتیم: (این تقسیم را تا جایی ادامه می‌دادیم که $r < b$ باشد.)

$$\begin{array}{r} a \\ \vdots \\ r \end{array} \bigg| \begin{array}{r} b \\ q \end{array} \xrightarrow{\text{امتحان درستی تقسیم}} a = b \cdot q + r$$

برای مثال: در تقسیم عدد ۳۵ بر عدد ۸ داریم:

$$\begin{array}{r} 35 \\ - 32 \\ \hline 3 \end{array} \bigg| \begin{array}{r} 8 \\ 4 \end{array} \xrightarrow{\text{امتحان درستی تقسیم}} 35 = 8 \underbrace{(4)}_q + \underbrace{3}_r, \quad 0 \leq 3 < 8$$

مثال

اگر باقی‌مانده تقسیم عدد صحیح a بر دو عدد ۶ و ۸ به ترتیب ۳ و ۵ باشد، آنگاه باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۲۴ کدام است؟

پاسخ: اگر خارج قسمت تقسیم عدد صحیح a بر دو عدد ۶ و ۸ را به ترتیب q و q' در نظر بگیریم، طبق فرض مسئله داریم:

$$\begin{cases} a = 6q + 3, 0 \leq 3 < 6 \\ a = 8q' + 5, 0 \leq 5 < 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6q + 3 \xrightarrow{\times 4} 4a = 24q + 12 \\ a = 8q' + 5 \xrightarrow{\times 3} 3a = 24q' + 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a = 24q + 12 \\ 3a = 24q' + 15 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفریق}} a = 24 \underbrace{(q - q')}_{q'' \in \mathbb{Z}} + \underbrace{(12 - 15)}_{-3} \Rightarrow a = 24q'' + (-3)$$

اما از آنجایی که باقی‌مانده منفی قابل قبول نیست، پس:

$$a = 24q'' + (-3) \Rightarrow a = 24q'' - 24 + 24 + (-3) \Rightarrow a = 24 \underbrace{(q'' - 1)}_{q''' \in \mathbb{Z}} + 21 \Rightarrow a = 24q''' + 21$$

تذکر: هرگاه در عملیات مربوط به «تقسیم»، باقی‌مانده منفی پدید آمد، مقسوم‌علیه را اضافه و کم کنید.





نمایش اعداد صحیح به شکل‌های مختلف (افراز مجموعه اعداد صحیح)



در تقسیم هر عدد صحیح بر هر عدد طبیعی، به تعدادی برابر با همان عدد طبیعی، باقی‌مانده مختلف وجود دارد.

برای مثال: اگر a عددی صحیح باشد، آنگاه در تقسیم بر عدد ۳، در صورتی که خارج قسمت را عدد صحیح k در نظر بگیریم، طبق قضیه تقسیم داریم:

$$a = 3k + r, 0 \leq r < 3$$

به عبارت دیگر هر عدد صحیح به صورت $3k$ یا $3k + 1$ یا $3k + 2$ است ($k \in \mathbb{Z}$).

• به همین ترتیب در تقسیم هر عدد صحیح بر عدد ۴، مجموعه $\mathbb{Z}$ به صورت زیر افراز می‌گردد:

به عبارت دیگر هر عدد صحیح به صورت $4k$ یا $4k + 1$ یا $4k + 2$ یا $4k + 3$ است ($k \in \mathbb{Z}$).

• در تقسیم هر عدد صحیح بر عدد ۵، مجموعه $\mathbb{Z}$ به صورت زیر افراز می‌شود:

به عبارت دیگر هر عدد صحیح به صورت $5k$ یا $5k + 1$ یا $5k + 2$ یا $5k + 3$ یا $5k + 4$ است ($k \in \mathbb{Z}$).

اعداد زوج و فرد

• اگر باقی‌مانده تقسیم یک عدد صحیح بر عدد ۲ برابر صفر باشد، آن عدد صحیح به صورت $2k$ نشان داده می‌شود و آن را عدد زوج می‌گویند.

• اگر باقی‌مانده تقسیم یک عدد صحیح بر عدد ۲ برابر ۱ باشد، آن عدد صحیح به صورت $2k + 1$ نشان داده می‌شود و آن را عدد فرد می‌گویند.

هشدار: هر عدد فرد به صورت $2k - 1$ نیز نمایش داده می‌شود.



(زوج) = (زوج) $\pm$ (زوج) $\pm \dots \pm$ (زوج) $\pm$ (زوج)

نکته: ۱ مجموعه و تفاضل تعدادی عددی زوج، همواره زوج است. به عبارت دیگر:

(فرد) = (فرد) $\pm$ (زوج)

۲ مجموعه و تفاضل یک عدد زوج و یک فرد، همواره فرد است. به عبارت دیگر:

(زوج) $\times$ (زوج) = (زوج)

۳ حاصل ضرب عدد زوج در هر عددی صحیح، همواره زوج است. به عبارت دیگر:

سوالات نهایی



ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۳۶	درستی و یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید: (۱) حاصل عبارت $([-12, -18], 30)$ برابر ۶- است. () نماد ب‌م‌م و [] نماد کم‌م است (شهریور ۱۴۰۳) (۲) $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ آنگاه: $[m^5, (m^3, m^2)] = m^5$ (خرداد ۱۴۰۳) (۳) برای اعداد صحیح a, b, c که $a \neq 0$ ، اگر $a b + c$ آنگاه $a b$ یا $a c$. (شهریور ۱۴۰۲) (۴) اگر داشته باشیم $(a, b) = 1$ آنگاه می‌گوییم a و b نسبت به هم اول‌اند. (شهریور ۱۴۰۲) (۵) حاصل $(3m + 1, 3m + 2)$ برابر ۱ می‌باشد. (خرداد ۱۴۰۲) (۶) اگر $a b + c$ آنگاه $a b$ یا $a c$. (دی ۱۴۰۱)	۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵	



۰/۲۵	۷) اگر $a b$ و $b \neq 0$ ، در این صورت $ a > b $. (خرداد ۱۴۰۱)	
۰/۲۵	۸) برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b اگر $(a c, b c)$ و $(\forall m > 0, a m, b m \Rightarrow c \leq m)$ آنگاه $[a, b] = c$. (خرداد ۱۴۰۱)	
۰/۲۵	۹) بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۴ و ۲ برابر ۲ است. (خرداد ۱۴۰۱)	
۰/۲۵	۱۰) اگر $a b$ و m, n دو عدد طبیعی باشند که $m \leq n$ ، آن گاه $a^m b^n$. (شهریور ۱۴۰۰)	
۰/۲۵	۱۱) اگر $a b$ آن گاه $(a, b) = a$. (شهریور ۱۴۰۰)	
۰/۲۵	۱۲) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است. (خرداد ۱۴۰۰)	
۰/۲۵	۱۳) اگر $a^2 b^2$ آنگاه $a b$ (خرداد ۱۳۹۸ خارج)	
۰/۲۵	۱۴) مربع هر عدد فرد را می توان به صورت $8k - 1$ نوشت. $(k \in \mathbb{Z})$ (تیر ۱۳۹۸)	
۰/۲۵	۱۵) اگر $a b$ آنگاه $[a, b] = b $ (دی ۱۳۹۸)	
۰/۲۵	۱۶) هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اول اند. (دی ۱۳۹۷)	
۰/۲۵	جای های خالی را با کلمه یا عبارت مناسب تکمیل کنید:	۳۷
۰/۲۵	۱) حاصل عبارت $[15, (48, 72)]$ برابر است. (شهریور ۱۴۰۴)	
۰/۲۵	۲) اگر a, b دو عدد طبیعی بزرگتر از یک باشند و $b 27$ و $a 9$ آنگاه $a = \dots$ است. (دی ۱۴۰۳)	
۰/۲۵	۳) اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $a \nmid p$ ، $(p, a) = \dots$ (شهریور ۱۴۰۳)	
۰/۲۵	۴) اگر k عددی صحیح باشد، باقی مانده تقسیم $19k - 30$ بر ۱۹ برابر با است. (دی ۱۴۰۲)	
۰/۲۵	۵) اگر a, b و c اعدادی طبیعی باشند که $a b$ و $b c$ در این صورت حاصل عبارت $[a, b], [a, c]$ برابر است. (دی ۱۴۰۲)	
۰/۲۵	۶) حاصل $(m^2, m], m^5)$ برابر با است. (دی ۱۴۰۱)	
۰/۲۵	۷) اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b داشته باشیم $(a, b) = 1$ ، می گویم a و b هستند. (دی ۱۴۰۱)	
۰/۵	۸) a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a b$ آن گاه عدد، شمارنده عدد است. (خرداد ۱۴۰۰)	
۰/۲۵	۹) m عددی صحیح است. حاصل $(2m, 6m^3)$ برابر با است. (خرداد ۱۴۰۰)	
۰/۵	۱۰) اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b داشته باشیم $(a, b) = 1$ ، می گویم a و b دو عدد هستند. (خرداد ۱۳۹۹ خارج)	
۰/۵	۱۱) اگر $a b$ ، مقدار $[a, b]$ برابر با است. (خرداد ۱۳۹۹ خارج)	
۰/۵	۱۲) در تقسیم عدد ۱۲۷- بر ۱۵ باقیمانده برابر و خارج قسمت است. (خرداد ۱۳۹۸ خارج)	
۰/۵	۱۳) حاصل $[12, (6, 8)]$ برابر خواهد شد. (تیر ۱۳۹۸)	
شهریور ۱۴۰۴	۳۸) اگر باقی مانده تقسیم اعداد صحیح a و b بر ۲۳ به ترتیب ۶ و ۷ باشد، آن گاه باقی مانده تقسیم عدد $3a - 5b$ بر ۲۳ را به دست آورید.	۱/۵
شهریور ۱۴۰۴	۳۹) اگر a عدد صحیح بزرگتر از یک و $5 + 11k$ و $3 + 7k$ ، ثابت کنید a عددی اول است.	۱/۲۵



۴۰	در سوال چهار گزینه‌ای زیر، گزینه صحیح را انتخاب کنید: به ازای چند مقدار a ، تساوی $a = (2a, 27)$ برقرار است؟	۱ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴)	۰/۵ خرداد ۱۴۰۴
۴۱	اگر باقی‌مانده تقسیم دو عدد صحیح m, n بر ۱۹ به ترتیب ۴ و ۵ باشد، آنگاه باقی‌مانده تقسیم عدد $(3m - 5n)$ بر ۱۹ را به دست آورید.		۱/۵ خرداد ۱۴۰۴
۴۲	اگر k عددی صحیح باشد به طوری که $4 3k + 1$ ، ثابت کنید: $16 9k^2 + 18k + 5$		۱ خرداد ۱۴۰۴
۴۳	اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و $4 3m - 2$ و $2a 5m - 2$ جواب‌های صحیح a را مشخص کنید؟ ($m \in \mathbb{Z}$)		۱/۵ دی ۱۴۰۳
۴۴	هرگاه a, b, c سه عدد صحیح و $a \neq 0$ و $a b$ و $a c$ ثابت کنید: $a b \pm c$		۱/۲۵ شهریور ۱۴۰۳
۴۵	اگر a, b دو عدد صحیح و ab فرد باشد، باقی‌مانده $5 - a^2 + b^2$ بر ۸ را حساب کنید.		۱/۵ شهریور ۱۴۰۳
۴۶	ثابت کنید اگر $p \geq 3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$ نوشته می‌شود.		۰/۷۵ شهریور ۱۴۰۳
۴۷	اگر a عددی طبیعی و داشته باشیم $a 7k + 1$ و $a 4k + 3$ ثابت کنید $a = 1$ یا $a = 17$.		۱ خرداد ۱۴۰۳
۴۸	اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب ۲ و ۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد a را بر ۲۰ بیابید.		۱/۲۵ خرداد ۱۴۰۳
۴۹	اگر $a b$ و $b \neq 0$ در این صورت ثابت کنید: $ a \leq b $.		۱/۲۵ دی ۱۴۰۲
۵۰	به روش برهان خلف نشان دهید؛ اگر a عدد صحیح فرد باشد و $2 a + b$ ، آنگاه b نیز عددی فرد است.		۱ شهریور ۱۴۰۲



۵۱	اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به طوری که $7 2k+1$ ، ثابت کنید: $49 4k^2-10k-6$	۱/۲۵	شعبان ۱۴۰۲
۵۲	اگر $a 2m+3$ و $a m+7$ در این صورت چند مقدار صحیح و نامنفی برای a وجود دارد؟	۱	خرداد ۱۴۰۲
۵۳	باقی مانده تقسیم a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب برابر ۳ و ۴ می باشد، باقی مانده تقسیم a بر ۲۰ را محاسبه کنید. (با راه حل)	۱/۵	خرداد ۱۴۰۲
۵۴	اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(5m+4)$ و $(6m+5)$ بر a بخش پذیر باشند، ثابت کنید $a = \pm 1$.	۱/۲۵	دی ۱۴۰۱
۵۵	اگر a و b عددی صحیح و فرد باشد، در این صورت باقیمانده تقسیم عدد (a^2+b^2+5) را بر ۸ بیابید.	۱	دی ۱۴۰۱
۵۶	اگر عدد طبیعی a دو عدد $(8k+13)$ و $(5k+9)$ را عاد کند، ثابت کنید: $a=1$ یا $a=7$	۰/۷۵	شعبان ۱۴۰۱
۵۷	اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۷ به ترتیب ۳ و ۵ باشد، باقیمانده تقسیم عدد a را بر ۴۲ بیابید.	۱	شعبان ۱۴۰۱
۵۸	پاسخ صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف) اگر $a b$ و $b a$ ، آنگاه a برابر با $(\pm b-b)$ است. ب) اگر $(a,b)=d$ ، آنگاه برای هر $m > 0$ که $m a$ و $m b$ داریم: $m \geq d - m \leq d$ پ) اگر برای دو عدد صحیح x و k داشته باشیم: $x = 4k + 3$ آنگاه $x \in [4]_3 - x \in [3]_4$	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۱ خ
۵۹	اگر $a > 1$ و $a 9k+4$ و $a 5k+3$ ، ثابت کنید a عددی اول است.	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۱ خ
۶۰	اگر عدد مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد، به طوری که $5 4k+1$ ، ثابت کنید $25 16k^2+28k+6$	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۱
۶۱	عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف) اگر برای دو عدد صحیح a و b داشته باشیم $a b$ ، برای هر $m \in \mathbb{Z}$ داریم: $(a mb, ma b)$ ب) اگر $a b$ آنگاه ب.م.م دو عدد a و b برابر با (a, a) است.	۰/۵	دی ۱۴۰۰



دی ۱۴۰۰	۱/۵	۶۲ ثابت کنید باقی مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، برابر یک است.
دی ۱۴۰۰	۱/۲۵	۶۳ اگر در تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقی مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است.
شهریور ۱۴۰۰	۱	۶۴ اگر $a > 1$ ، $a 9k+4$ و $a 5k+3$ ، ثابت کنید a عددی اول است.
شهریور ۱۴۰۰	۱/۵	۶۵ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح $a+4$ یا $a+2$ یا a بر ۳ بخش پذیر است.
خرداد ۱۴۰۰	۰/۷۵	۶۶ ثابت کنید اگر $p \geq 5$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 4k+3$ و $p = 4k+1$ نوشته می شود.
دی ۹۹	۰/۲۵	۶۷ گزاره های درست را مشخص کرده و برای گزاره های نادرست، مثال نقض ارائه کنید. برای دو عدد طبیعی a, b ، اگر $a b$ آن گاه $[a, b] = b $
دی ۹۹	۱	۶۸ اگر باقیمانده تقسیم اعداد a, b بر ۱۷ برابر ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $(2a-5b)$ بر ۱۷ را بیابید.
دی ۹۹	۱/۲۵	۶۹ اگر a عدد طبیعی باشد، حاصل $(5a+4, 2a+3)$ را به دست آورید.
خرداد ۹۹	۱/۲۵	۷۰ اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $2a+3$ بر ۸ را بدست آورید.
خرداد ۹۹	۱	۷۱ اگر $n \in \mathbb{N}$ ، $n 9k+7$ و $n 7k+6$ ، ثابت کنید $n=5$ یا $n=1$
خرداد ۹۹	۱/۲۵	۷۲ اگر $2-5m a$ و $3m+1 a$ ، برای a چند جواب طبیعی وجود دارد؟
خرداد ۹۹	۱/۲۵	۷۳ اگر باقیمانده تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۱ برابر ۱۹ باشد، باقی مانده $2a-1$ تقسیم بر ۳۱ را بدست آورید.
خرداد ۹۹	۰/۷۵	۷۴ بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $4k$ و $16k^2-1$ را بیابید.



۷۵	فرض کنیم n و a دو عدد طبیعی باشند به طوری که $a 2n+3$ و $a 3n+4$ نشان دهید $a=1$	۱/۲۵	شهریور ۹۹
۷۶	ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 6k + 5$ یا $p = 6k + 1$ ($k \in W$) نوشته می‌شود.	۱/۵	شهریور ۹۹
۷۷	اگر باقیمانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $(2m - 5n)$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.	۱/۲۵	شهریور ۹۹
۷۸	اگر باقیمانده تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد. در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $5n - 3m$ بر ۱۳ را بدست آورید.	۱/۵	خرداد ۹۸
۷۹	حاصل عبارت مقابل کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ الف: m ب: m^5 ج: m^5 د: m^2 $([m^2, m], m^5) = \dots$	۰/۲۵	خرداد ۹۸ خ
۸۰	اگر عددی مانند k در Z باشد به طوری که $5 4k+1$ ، ثابت کنید $25 16k^2 + 28k + 6$	۱/۲۵	تیر ۹۸
۸۱	جای خالی را پر کنید. اگر $[a, b] = c$ و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند. ۱) $a c$ و $b c$ ۲) $\forall m > 0 \dots$	۰/۵	شهریور ۹۸
۸۲	اگر باقیمانده تقسیم a بر دو عدد ۶ و ۵ به ترتیب ۳ و ۲ باشد، باقی مانده تقسیم عدد a را بر ۳۰ بیابید.	۱/۵	شهریور ۹۸
۸۳	اگر عدد طبیعی $a > 1$ در دو شرط $a 4k+9$ و $a 6k+14$ صدق کند، مقدار a را بیابید.	۱	دی ۹۸
۸۴	فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $[21a^2, 35a^3]$ را بدست آورید.	۱	دی ۹۸
۸۵	اگر $a > 1$ و $a 9k+4$ ، $a 5k+3$ ثابت کنید a عددی اول است.	۱	دی ۹۷
۸۶	پاسخ سوال زیر را بدست آورید. دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید. اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $2 a+b$ در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $3 + a^2 + b^2$ را بر ۸ بیابید.	۱/۲۵	دی ۹۷



درس

۳

هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

خلاصه درسنامه

دو عدد صحیح a و b را به پیمانه عدد طبیعی m هم‌نهشت می‌گوییم هرگاه تفاضل a و b مضربی از m باشد (بخش‌پذیر باشد) بنابراین برای دو عدد صحیح a و b و عدد طبیعی m ، هرگاه $m | a - b$ ، در این صورت می‌گوییم:

« a با b به پیمانه m (سج) هم‌نهشت است» و می‌نویسیم: $a \equiv b \pmod{m}$

برای دو عدد صحیح a و b و عدد طبیعی m داریم:

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m | a - b \text{ یا } a - b = mk \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{برای مثال: } 33 \equiv 45 \pmod{12} \text{ زیرا } (45 - 33) = 12 \cdot 1. \text{ اما } 14 \not\equiv 27 \pmod{13} \text{ زیرا } (27 - 14) = 13 \cdot 1$$

ویژگی‌های هم‌نهشتی

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N}; a \equiv a \pmod{m}$$

ویژگی ۱: هر عدد صحیح با هر پیمانه‌ای، با خودش هم‌نهشت است. به عبارت دیگر:

$$\forall m \in \mathbb{Z}; m \equiv 0 \pmod{m}$$

ویژگی ۲: هر عدد صحیح به پیمانه خودش با صفر هم‌نهشت است. به عبارت دیگر:

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow b \equiv a \pmod{m}$$

ویژگی ۳: هم‌نهشتی خاصیت جابه‌جایی دارد. به عبارت دیگر برای اعداد صحیح a و b و عدد طبیعی m داریم:

$$a \equiv b \pmod{m} \wedge b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$$

ویژگی ۴: هم‌نهشتی خاصیت تعدی دارد. به عبارت دیگر برای اعداد صحیح a, b و c و عدد طبیعی m داریم:

$$\text{برای مثال: } \begin{array}{ccc} 12 \equiv 2 \pmod{10} & \Rightarrow & 12 \equiv 2 \pmod{10} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 12 - 2 = 10 & & 12 - 2 = 10 \end{array}$$

ویژگی ۵: دو طرف هم‌نهشتی را می‌توان با هر عدد صحیح جمع یا تفریق کرد، بدون آنکه پیمانه تغییر کند.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow (a \pm c) \equiv (b \pm c) \pmod{m}$$

به عبارت دیگر برای اعداد صحیح a, b و c و عدد طبیعی m داریم:

$$\text{برای مثال: } 17 \equiv 7 \pmod{10} \xrightarrow{+3} (17 + 3) \equiv (7 + 3) \pmod{10} \Rightarrow 20 \equiv 10 \pmod{10}$$

ویژگی ۶: ضرب یک عدد صحیح را در دو طرف یک هم‌نهشتی به دو صورت ممکن است: (a و b اعدادی صحیح و m عددی طبیعی است).

$$a \equiv b \pmod{m} \xrightarrow{\forall c \in \mathbb{Z}} \begin{cases} ac \equiv bc \pmod{m} & (\text{بدون تغییر پیمانه}) \\ ac \equiv bc \pmod{m|c} & (\text{با تغییر پیمانه}) \end{cases}$$

$$\text{برای مثال: } 8 \equiv 6 \pmod{24} \xrightarrow{\times 3} 8 \times 3 \equiv 6 \times 3 \pmod{24} \text{ یا } 8 \times 3 \equiv 6 \times 3 \pmod{18}$$



تذکر: ویژگی ۶، دو شرطی نیست. به عبارت دیگر از $ac \equiv bc^m$ ، لزوماً نمی‌توان $a \equiv b^m$ نتیجه گرفت.

ویژگی ۷: دو طرف یک هم‌نهشتی را می‌توان بدون تغییر پیمانه، به توان هر عدد طبیعی رساند.

$$a \equiv b \xrightarrow{\forall n \in \mathbb{N}} a^n \equiv b^n$$

به عبارت دیگر برای اعداد صحیح a و b و عدد طبیعی m داریم:

برای مثال: $5 \equiv 2 \Rightarrow 5^2 \equiv 2^2 \pmod{21}$ (زیرا $25 - 4 = 21$)

هشدار: عکس ویژگی ۷) همواره درست نیست. به عبارت دیگر ریشه گرفتن از دو طرف هم‌نهشتی، همواره امکان‌پذیر نیست.

ویژگی ۸: دو طرف دو (یا چند) هم‌نهشتی با پیمانه یکسان را می‌توان با هم جمع یا تفریق نمود و یا در یکدیگر ضرب کرد، بدون آنکه پیمانه تغییر کند. به

عبارت دیگر، برای اعداد صحیح a, b, c و عدد طبیعی m داریم:

$$\begin{cases} a \equiv b \\ c \equiv d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a \pm c) \equiv (b \pm d) \\ ac \equiv bd \end{cases}$$

برای مثال: $\begin{cases} 15 \equiv 10 \\ 7 \equiv 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15 \times 7 \equiv 10 \times 2 \\ 105 \equiv 20 \end{cases}, \quad \begin{cases} (15+7) \equiv (10+2) \\ 22 \equiv 12 \end{cases}$

ویژگی ۹: به یک طرف هم‌نهشتی می‌توان هر مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد.

$$a \equiv b \xrightarrow{\forall k \in \mathbb{Z}} a \equiv b \pm mk$$

به عبارت دیگر برای اعداد صحیح a و b و عدد طبیعی m داریم:

برای مثال:

$$25 \equiv 13 \Rightarrow 25 \equiv 13 + 5 \times 3 \pmod{28}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} : mk \equiv 0$$

نتیجه ۱: هر مضرب از پیمانه، با صفر هم‌نهشت است. یعنی برای هر عدد طبیعی m داریم:

۲: به دو طرف هم‌نهشتی نیز می‌توان هر مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد.

■ قضیه هم‌باقی‌ماندگی

دو عدد صحیح هم‌نهشت‌اند اگر و تنها اگر هر دو در تقسیم بر پیمانه، هم‌باقی‌مانده باشند.

$$a \equiv b \Leftrightarrow a \text{ و } b \text{ در تقسیم بر } m \text{ هم‌باقی‌مانده‌اند}$$

به عبارت دیگر برای اعداد صحیح a و b و عدد طبیعی m داریم:

برای مثال:

$$\begin{array}{ccc} 27 & \equiv & 12 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{باقیمانده تقسیم ۲۷ بر ۵ برابر ۲ است.} & & \text{باقیمانده تقسیم ۱۲ بر ۵ برابر ۲ است.} \end{array}$$



نتیجه: هم‌نهشتی، به مفهوم هم‌باقی‌مانده شدن است.

ارتباط قضیه تقسیم و هم‌نهشتی

باقی‌مانده $\equiv$ مقسوم علیه مقسوم

در قضیه تقسیم همواره هم‌نهشتی روبه‌رو برقرار است:

به عبارت دیگر: اگر a عددی طبیعی باشد، آنگاه طبق قضیه تقسیم اعدادی صحیح و یکتا مانند q و r وجود دارند به طوری که:

$$a = mq + r \iff a \overset{0 \leq r < m}{\equiv} r$$

برای مثال: می‌دانیم باقی‌مانده تقسیم عدد ۲۷ بر ۵ برابر ۲ است، پس: $27 \equiv 2 \pmod{5} \iff 27 = 5(5) + 2$ ، زیرا $5 \mid (27 - 2)$

نتیجه: اگر در هم‌نهشتی $a \equiv m$ ، عدد s باقی‌مانده تقسیم a بر m نباشد، آنگاه برای یافتن باقی‌مانده تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی m :

در صورت منفی بودن عدد s ، آنقدر پیمانه را به آن اضافه می‌کنیم، تا نامنفی و کوچک‌تر از پیمانه باشد که همان عدد باقی‌مانده تقسیم a بر m است.

برای مثال: در هم‌نهشتی $93 \equiv -27$ (زیرا $93 - (-27) = 120$)

واضح است که عدد -27 ، باقی‌مانده تقسیم ۹۳ بر ۱۲ نیست (چرا؟). اکنون داریم:

$$93 \equiv -27 \Rightarrow 93 \equiv -27 + 3 \times 12 \Rightarrow 93 \equiv 9$$

یعنی باقی‌مانده تقسیم ۹۳ بر ۱۲ برابر ۹ است.

در صورتی که عدد s از پیمانه بزرگ‌تر باشد، آنقدر پیمانه را از آن کم می‌کنیم (پیمانه پیمانه از آن برمی‌داریم)، تا کوچک‌تر از پیمانه (و نامنفی) شود، که همان عدد باقی‌مانده تقسیم a بر m است.

برای مثال: در هم‌نهشتی $46 \equiv 20$ (زیرا $46 - 20 = 26$) واضح است که عدد ۲۰، باقی‌مانده تقسیم ۴۶ بر ۱۳ نیست (چرا؟). اکنون داریم:

$$46 \equiv 20 \Rightarrow 46 \equiv 20 - 13 \Rightarrow 46 \equiv 7$$

مثال

اگر باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد صحیح a و b بر عدد ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(2a - 5b)$ بر ۱۷ کدام است؟

پاسخ: مطابق فرض، با توجه به ارتباط قضیه تقسیم و هم‌نهشتی، داریم:

$$a = 17q + 5 \Rightarrow a \overset{\times 2}{\equiv} 10 \pmod{17}, \quad b = 17q' + 3 \Rightarrow b \overset{\times 5}{\equiv} 15 \pmod{17}$$

$$2a - 5b \equiv 10 - 15 \pmod{17} \Rightarrow 2a - 5b \equiv -5 \pmod{17}$$

از تفاضل دو هم‌نهشتی به دست آمده داریم:

با افزودن پیمانه به عدد -5 ، باقی‌مانده برابر با 12 ($12 = 17 + (-5)$) است.

تکنیک: یافتن باقی‌مانده تقسیم اعداد به شکل a^n بر عدد طبیعی m به روش آزمون و خطا (روش ضرب‌های متوالی)



گام اول در این نوع مسائل ابتدا توانی از عدد پایه می‌یابیم (آزمون و خطا)، که به پیمانه داده شده با یک عدد کوچک (نظیر ۱، -۱ و صفر)، هم‌نهشت شود.

برای مثال: می‌خواهیم باقی‌مانده تقسیم عدد 3^{98} بر عدد 80 را بیابیم. برای این منظور به کمک آزمون و خطا (روش ضرب‌های متوالی) داریم:

$$3^1 \equiv 3, \quad 3^2 \equiv 9, \quad 3^3 \equiv 27, \quad \underbrace{3^4}_{81} \equiv 1$$

گام دوم اکنون دو طرف هم‌نهشتی به دست آمده را به توان عددی مناسب می‌رسانیم، تا توان عدد پایه، به توان موردنظر مسئله نزدیک گردد یا مساوی با آن شود.

$$3^4 \equiv 1 \xrightarrow{\text{توان } 24} (3^4)^{24} \equiv 1 \Rightarrow 3^{4 \times 24} \equiv 1 \Rightarrow 3^{96} \equiv 1$$

$$3^{96} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3^2} 3^2 \times 3^{96} \equiv 3^2 \Rightarrow 3^{98} \equiv 9$$

یعنی باقی‌مانده تقسیم عدد 3^{98} بر عدد 80 برابر با ۹ است.

کاربرد هم‌نهشتی در مسائل گردش (دوره‌ای)



مسائلی از قبیل روزهای هفته، ساعت و ماه که حالت گردش داشته و با افزودن عدد ثابتی (۷ روز، ۲۴ ساعت و ۱۲ ماه) به وضعیت و شرایط قبلی برمی‌گردند، به عنوان مثال‌هایی عملی از کاربرد هم‌نهشتی هستند.

مثال

اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

جمعه	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

پاسخ: در این مسئله، روز شروعی، جمعه است. پس:

اکنون روزهای موردنظر را محاسبه می‌کنیم. ۳۱ مردادماه، آخرین روز مرداد است لذا یک از مرداد ماه محسوب می‌شود. شهریورماه دارای ۳۱ روز، ماه‌های مهر، آبان، آذر و دی، هر کدام ۳۰ روز و تا روز یازدهم بهمن، ۱۱ روز داریم. بنابراین کل روزهای موردنظر عبارت‌اند از:

$$1 + 31 + 4 \times 30 + 11 = 163 \xrightarrow{\text{باقی‌مانده بر } 7} 163 \equiv 2$$

اما چون در این مسئله، تقویم قرار است به عقب برگردد، بنابراین عدد $163 -$ را به پیمانه ۷ در نظر می‌گیریم:

$$-163 \equiv -2 \equiv 5 \xrightarrow{\text{طبق جدول}} \text{چهارشنبه}$$

❖ **کلاس (دسته) هم‌نهشتی:** مجموعه همه اعداد صحیح که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی m برابر با r می‌باشد، کلاس (دسته) هم‌نهشتی r به پیمانه

$$[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv r \pmod{m} \text{ یا } x = mk + r\}$$

m نامیده می‌شود. به عبارت دیگر:

برای مثال: تمام دسته‌های هم‌نهشتی به پیمانه ۵ عبارت‌اند از: $[0]_5, [1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5$

مثلاً منظور از $[2]_5$ ، مجموعه تمام اعداد صحیحی است که در تقسیم بر عدد ۵ باقی‌مانده ۲ دارند (همان اعداد به شکل $5k + 2$).



نکته: یک عدد صحیح متعلق به یک کلاس هم‌نهشتی است، اگر و تنها اگر به پیمانه داده شده با عدد آن کلاس هم‌نهشت باشد. به عبارت دیگر:

$$a \in [r]_m \Leftrightarrow a \equiv r^m$$

مثال

عدد ۱۳۹۸ به کدام کلاس هم‌نهشتی به پیمانه ۱۲ تعلق دارد؟

پاسخ: باید بررسی کنیم که باقی‌مانده تقسیم ۱۳۹۸ بر عدد ۱۲ برابر با چه عددی است. داریم:

$$1398 = 12(116) + 6 \Rightarrow 1398 \equiv 6^{12} \Rightarrow 1398 \in [6]_{12}$$

نکات تکمیلی هم‌نهشتی

نکته ۱: اگر یک عدد طبیعی پیمانه را بشمارد، آن‌گاه می‌تواند به جای پیمانه قرار بگیرد (یعنی شمارنده‌های طبیعی پیمانه، می‌توانند به جای پیمانه قرار گیرند). به عبارت دیگر برای اعداد صحیح a و b و اعداد طبیعی m و n داریم:

$$a \equiv b \xrightarrow{n|m} a \equiv b^n$$

$$24 \equiv 9 \xrightarrow{5|15} 24^5 \equiv 9^5$$

برای مثال:

نکته ۲: دو هم‌نهشتی یکسان با پیمانه‌های متفاوت

برای اعداد صحیح a و b و اعداد طبیعی m و n داریم:

$$\begin{cases} a \equiv b^m \\ a \equiv b^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv b^{(m,n)} \\ a \equiv b^{[m,n]} \end{cases}$$

مثال

اگر باقی‌مانده‌های تقسیم عدد صحیح a بر ۹ و ۶ هر دو مساوی با ۴ باشد آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم a بر ۱۸ کدام است؟

پاسخ: به کمک مطلب بالا داریم:

$$\begin{cases} a \equiv 4^6 \\ a \equiv 4^9 \end{cases} \xrightarrow{[6,9]=18} a \equiv 4^{18}$$

نکته ۳: تقسیم دو طرف هم‌نهشتی بر یک عدد صحیح غیر صفر

■ **قضیه:** در تقسیم دو طرف هم‌نهشتی بر یک عدد صحیح (غیر صفر)، که عامل مشترک هر دو طرف می‌باشد، باید پیمانه آن هم‌نهشتی نیز بر ب.م.م پیمانه

و عددی که از دو طرف حذف می‌گردد، تقسیم شود.

$$ac \equiv bc \xrightarrow[(m,c)=d]{\div c} a \equiv b^{\frac{m}{d}}$$

به عبارت دیگر برای اعداد صحیح a ، b و $c \neq 0$ و عدد طبیعی m داریم:

$$48 \equiv 30 \xrightarrow[(9,6)=3]{\div 6} 8 \equiv 5^{\frac{9}{3}}$$

برای مثال:



حالت خاص

$$ac \equiv bc \xrightarrow[(m,c)=1]{\div c} a \equiv b$$

به عبارت دیگر: قاعده حذف (تقسیم دو طرف هم‌نهشتی بر یک عدد صحیح)، برای هر عددی که نسبت به پیمانه اول باشد، همواره برقرار است.

$$\text{برای مثال: } 24 \equiv 6 \xrightarrow[(4,3)=1]{\div 4} 3$$

قاعده‌های بخش‌پذیری مهم

قاعده ۱: بخش‌پذیری بر ۳ و ۹

باقی‌مانده تقسیم هر عدد طبیعی بر ۳ یا ۹ برابر است با: باقی‌مانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳ یا ۹

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} \equiv_{3 \text{ یا } 9} \underbrace{a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0}_{\text{مجموع ارقام}}$$

به عبارت دیگر:

برای مثال: برای یافتن باقی‌مانده تقسیم عدد ۶۹۴۷۵۱۳۲ بر عدد ۳ داریم:

$$69475132 \equiv 6 + 9 + 4 + 7 + 5 + 1 + 3 + 2 \equiv 37 \equiv 1 \pmod{3}$$

نتیجه: عددی بر ۳ یا ۹ بخش‌پذیر است که مجموع ارقام آن بر ۳ یا ۹ بخش‌پذیر باشد.

قاعده ۲: بخش‌پذیری بر ۱۱

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} \equiv_{11} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 رقم صدگان رقم دهگان رقم یکان

$$\text{برای مثال: باقی‌مانده تقسیم عدد } 2476941 \text{ بر } 11 \text{ عبارت است از: } 2476941 \equiv 1 - 4 + 9 - 6 + 7 - 4 + 2 \equiv 5$$

قاعده ۳: بخش‌پذیری بر ۲، ۵ و ۱۰

باقی‌مانده تقسیم هر عدد طبیعی بر ۲، ۵ و ۱۰ برابر است با: باقی‌مانده تقسیم رقم یکان آن عدد بر ۲، ۵ و ۱۰.

به عبارت دیگر:

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} \equiv_{2 \text{ یا } 5 \text{ یا } 10} \underbrace{a_0}_{\text{رقم یکان}}$$

زیرا می‌دانیم $10^k \equiv 0 \pmod{2, 5, 10}$ و $\forall k \in \mathbb{N}$ و لذا هر عدد طبیعی از رقم دهگان به بعد، بر ۲، ۵ و ۱۰ بخش‌پذیر است.

برای مثال: باقی‌مانده تقسیم عدد ۵۹۷۳۴۸ بر ۲، ۵ و ۱۰ عبارت است از:

$$597348 \equiv 8 \pmod{10}, \quad 597348 \equiv 8 \pmod{2}, \quad 597348 \equiv 3 \pmod{5}$$

مثال

رقم یکان عدد $A = 1! + 2! + 3! + \dots + 500!$ کدام است؟

پاسخ: کافی است باقی مانده تقسیم عدد A را بر عدد 10 بیابیم. برای این منظور ابتدا توجه کنید که:

$$1! \equiv 1, 2! \equiv 2, 3! \equiv 6, 4! \equiv 4, 5! \equiv 0 \pmod{10} \xrightarrow{\times 6} 6! \equiv 0 \xrightarrow{\times 7} 7! \equiv 0 \xrightarrow{\times 8} \dots$$

بنابراین:

$$A \equiv 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 500! \equiv 13 \equiv 3 \pmod{10}$$

یعنی رقم یکان عدد A برابر با ۳ است.

تکنیک: $\forall n \in \mathbb{N}; n \geq 5 \Rightarrow n! \equiv 0 \pmod{10}$ (یعنی رقم یکان $n!$ برای n های طبیعی بزرگتر یا مساوی ۵، برابر صفر است).

مثال

اگر دو عدد $(3a - 5)$ و $(4a - 7)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(9a + 6)$ کدام است؟

پاسخ: دو عدد طبیعی که رقم یکان برابر دارند، یعنی باقی مانده تقسیم آن ها بر عدد 10 یکسان است. به عبارت دیگر هر دو در تقسیم بر عدد 10 هم باقی مانده و لذا هم نهشتی اند. بنابراین طبق فرض داده شده، داریم:

$$4a - 7 \equiv 3a - 5 \pmod{10} \Rightarrow 4a - 3a \equiv 7 - 5 \pmod{10} \Rightarrow a \equiv 2 \pmod{10} \xrightarrow{\times 9} 9a \equiv 18 \equiv 8 \pmod{10} \xrightarrow{+6} 9a + 6 \equiv 14 \equiv 4 \pmod{10}$$

پس رقم یکان عدد $(9a + 6)$ برابر ۴ است.

معادله هم نهشتی

یک هم نهشتی به صورت $ax \equiv b \pmod{m}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$) با وجود مجهول (متغیر) x ، معادله هم نهشتی نامیده می شود. منظور از حل معادله هم نهشتی، پیدا کردن همه اعداد صحیحی است که به جای متغیر x در معادله صدق کند.

$$x \equiv 3 \pmod{5} \xrightarrow{\text{تعریف}} 5|x - 3 \xrightarrow{r \in \mathbb{Z}} x - 3 = 5k \Rightarrow x = 5k + 3$$

برای مثال: برای حل معادله هم نهشتی $x \equiv 3 \pmod{5}$ ، داریم:

بنابراین بی شمار عدد صحیح برای x وجود دارد. مثلاً به ازای $x = 3, k = 0$ و به ازای $x = 8, k = 1$ و به ازای $x = 13, k = 2$ و ... به دست می آید.

شرط وجود جواب یک معادله هم نهشتی

قضیه: معادله هم نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ جواب دارد اگر و تنها اگر $(a, m) | b$.

برای مثال: معادله هم نهشتی $6x \equiv 20 \pmod{9}$ جواب ندارد، زیرا $20 \nmid (6, 9)$ و معادله هم نهشتی $4x \equiv 22 \pmod{22}$ جواب دارد. زیرا $22 \mid (4, 22)$.

نتیجه: معادله هم نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ همواره جواب دارد اگر و تنها اگر $(a, m) = 1$.

❖ حل معادله هم‌نهشتی (به کمک ویژگی‌های هم‌نهشتی)

ابتدا مضربی مناسب از پیمانه را به طرف معلوم معادله اضافه یا کم می‌کنیم تا بتوانیم دو طرف را بر ضریب مجهول تقسیم کنیم، سپس تعریف هم‌نهشتی را به کار می‌بریم.

برای مثال: برای حل معادله هم‌نهشتی $2x \equiv 1 \pmod{7}$ داریم:

$$2x \equiv 1 + 7 \Rightarrow 2x \equiv 8 \xrightarrow{(7,2)=1} x \equiv 4 \xrightarrow{\text{تعریف}} \forall |x-4 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} x-4 = 7k \Rightarrow x = 7k + 4$$

معادله سیاله

هر معادله‌ای که مجموعه جواب آن، از مجموعه اعداد صحیح در نظر گرفته شود، معادله سیاله نامیده می‌شود.

برای مثال: معادله سیاله $4x + 3y = 8$ ، در مجموعه اعداد صحیح دارای یک جواب $(x=2, y=0)$ است. البته جواب‌های صحیح دیگری نیز دارد.

◀ شرط وجود جواب یک معادله سیاله خطی

■ قضیه: معادله سیاله $ax + by = c$ جواب (صحیح) دارد، اگر و تنها اگر $(a, b) | c$.

برای مثال: معادله سیاله $6x + 9y = 21$ جواب دارد، زیرا $(6, 9) | 21$ ، معادله سیاله $8x + 12y = 22$ جواب ندارد، زیرا $(8, 12) \nmid 22$.

❖ حل معادله سیاله خطی به کمک تبدیل به معادله هم‌نهشتی

هر معادله سیاله خطی دو متغیری را می‌توان به دو صورت به یک معادله هم‌نهشتی تبدیل کرد:

$$ax + by = c \xrightarrow{\text{تبدیل به هم‌نهشتی}} ax \equiv c \pmod{b} \quad , \quad by \equiv c \pmod{a} \quad (a, b, c \in \mathbb{Z})$$

بنابراین به طور خلاصه می‌توان گفت:

برای مثال: برای حل معادله سیاله $4x + 5y = 9$ ، به کمک تبدیل به معادله هم‌نهشتی داریم:

$$4x + 5y = 9 \Rightarrow 4x \equiv 9 \pmod{5} \Rightarrow 4x \equiv 9 - 5 \pmod{5} \Rightarrow 4x \equiv 4 \pmod{5} \xrightarrow{(5,4)=1} x \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow \forall |x-1 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} x-1 = 5k \Rightarrow x = 5k + 1$$

اکنون با قرار دادن جواب به دست آمده برای x در معادله سیاله، داریم:

$$4(5k + 1) + 5y = 9 \Rightarrow 20k + 4 + 5y = 9 \Rightarrow 20k + 5y = 5 \xrightarrow{\div 5} 4k + y = 1 \Rightarrow y = -4k + 1$$

نتیجه: معادله سیاله خطی دو متغیری، جواب ندارد یا بی شمار جواب دارد.



مثال

مثال: به چند طریق می‌توان مبلغ ۱۷۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی و ۵۰۰۰ تومانی خرد کرد؟
پاسخ: اگر x را تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی و y را تعداد اسکناس‌های ۵۰۰۰ تومانی در نظر بگیریم، آنگاه معادله سیاله خطی $2000x + 5000y = 17000$ به دست می‌آید، اما چون x و y تعداد اسکناس‌ها را نشان می‌دهند، لذا اعداد صحیح و نامنفی (حسابی) اند. پس باید تعداد جواب‌های حسابی این معادله سیاله را بیابیم. پس از ساده کردن این معادله سیاله به عدد ۱۰۰۰، داریم:

$$2x + 5y = 17 \xrightarrow{\text{تبدیل به معادله هم‌نهشتی}} 2x \equiv 17 - 5y \pmod{5} \xrightarrow{(5,2)=1} x \equiv 1 - \frac{5}{2}y \pmod{5} \xrightarrow{\text{تعریف}} x = 5k + 1 \xrightarrow{\text{در معادله سیاله}} 2(5k + 1) + 5y = 17$$

$$\Rightarrow 10k + 2 + 5y = 17 \Rightarrow 10k + 5y = 15 \xrightarrow{\div 5} 2k + y = 3 \rightarrow y = -2k + 3$$

$$k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \quad (\text{یک اسکناس ۲۰۰۰ تومانی و ۳ اسکناس ۵۰۰۰ تومانی})$$

$$k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases} \quad (\text{۶ اسکناس ۲۰۰۰ تومانی و ۱ اسکناس ۵۰۰۰ تومانی})$$

سوالات نهایی



درس ۳

هم‌نهشتی

ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۸۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (۱) عدد ۱۴۰۴ به کلاس یا دسته هم‌نهشتی ۷ به پیمانه ۱۱ تعلق دارد. (خرداد ۱۴۰۴) (۲) تفاضل هر دو عدد دلخواه از مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Z} x = 4k + 3\}$ مضرب ۴ است. (خرداد ۱۴۰۳) (۳) معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a, m) b$. (شهریور ۱۴۰۲) (۴) برای هر دو عدد صحیح a و b و عدد طبیعی m ، اگر باقیمانده تقسیم a بر m مساوی با r باشد، در این صورت $a \equiv r \pmod{m}$. (خرداد ۱۴۰۱) (۵) اگر $a \equiv b \pmod{m}$ ، آنگاه باقی مانده تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی‌اند. (شهریور ۱۴۰۰) (۶) منظور از حل معادله هم‌نهشتی، پیدا کردن همه جواب‌های حقیقی است که در معادله $ax \equiv b \pmod{m}$ صدق کنند. (شهریور ۱۴۰۰) (۷) اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $n m$ آنگاه $a \equiv b \pmod{n}$. (خرداد ۱۳۹۸ خارج) (۸) باقیمانده تقسیم عدد $A = 4985327$ بر عدد ۱۱ برابر ۶ است. (خرداد ۱۳۹۸ خارج) (۹) معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است، اگر و تنها اگر $(a, m) b$. (دی ۱۳۹۸)	۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵	
۸۸	در جای خالی کلمه‌ی مناسب قرار دهید. اگر ۱۲ بهمن جمعه باشد، ۳۱ مرداد همان سال است.	۰/۲۵	خرداد ۹۸ خ



شهریور ۱۴۰۴	۱	۸۹	در صورتی که دهم مهر در یک سال دوشنبه باشد، ۲۹ اسفند در همان سال چند شنبه است؟ (ذکر راه حل الزامی است.)
شهریور ۱۴۰۴	۱/۲۵	۹۰	جواب عمومی معادله هم‌نهشتی $۷۵^۰ \equiv ۴۶۳x \pmod{۹}$ را به دست آورید.
خرداد ۱۴۰۴	۱	۹۱	اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $n m$ ، ثابت کنید: $a \equiv b \pmod{n}$
خرداد ۱۴۰۴	۱/۲۵	۹۲	نشان دهید شرط وجود جواب برای معادله $۱۶x \equiv ۲۰ \pmod{۱۴}$ برقرار است، سپس جواب‌های عمومی آن را به دست آورید.
دی ۱۴۰۳	۱	۹۳	اگر m و n دو عدد طبیعی و a, b دو عدد صحیح باشند و $a \equiv b \pmod{m}$ نشان دهید، $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.
دی ۱۴۰۳	۱/۵	۹۴	شخصی در یک مسابقه پرتاب دارت، در هر پرتاب ۷ یا ۹ امتیاز و در مجموع ۱۸۳ امتیاز کسب کرده است. حداکثر تعداد پرتاب‌های ۹ امتیازی او چند تاست؟
شهریور ۱۴۰۳	۱/۵	۹۵	معادله $۲x + ۱ \equiv ۱۳ - ۹x \pmod{۱۱}$ را حل کنید و تعداد جواب‌های دو رقمی طبیعی آنرا به دست آورید.
خرداد ۱۴۰۳	۱/۵	۹۶	جواب‌های عمومی معادله سیاله $۵x + ۹y = ۲۲$ را بدست آورید.
دی ۱۴۰۲	۰/۷۵	۹۷	در هر یک از سوالات زیر، گزینه مناسب را انتخاب کنید. الف) عدد ۱۴۰۲ به کدام دسته هم‌نهشتی به پیمانه ۷ تعلق دارد؟ (۱) [۵] (۲) [۲] (۳) [۰] (۴) [۱] ب) باقی‌مانده تقسیم عدد $(۷^{۱۰۰} - ۲^{۱۰۰} - ۹^{۱۰۰})$ بر ۱۴ کدام است؟ (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۸ پ) کدام یک از معادلات هم‌نهشتی زیر در مجموعه اعداد صحیح جواب ندارد؟ (۱) $۶x \equiv ۱۱ \pmod{۹}$ (۲) $۲x \equiv ۳ \pmod{۵}$ (۳) $۵x \equiv ۱۰ \pmod{۵}$ (۴) $۳x \equiv ۱۰ \pmod{۷}$
دی ۱۴۰۲	۱/۵	۹۸	رقم یکان عدد $A = ۲! + ۴! + ۶! + \dots + ۱۰۰!$ را به دست آورید.



شماره ۱۴۰۲	۱	باقی مانده تقسیم عدد $1 + 6^{314}$ را بر ۱۶ به دست آورید.	۹۹
شماره ۱۴۰۲	۱/۵	معادله هم‌نهشتی $11 \equiv 1402x \pmod{9}$ را حل کنید.	۱۰۰
شماره ۱۴۰۲	۱/۲۵	در معادله سیاله $19y = 15x + 7$ ، بزرگترین عدد ۲ رقمی طبیعی که می‌توان برای x در نظر گرفت چه مقداری می‌باشد؟ (با راه حل)	۱۰۱
دی ۱۴۰۱	۱/۵	باقیمانده تقسیم عدد $200! + 199! + 198! + \dots + 2! + 1!$ را بر ۱۵ بدست آورید. (! نماد فاکتوریل می‌باشد)	۱۰۲
دی ۱۴۰۱	۱	معادله هم‌نهشتی $10 \equiv 4x \pmod{9}$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه جواب آن را بدست آورید.	۱۰۳
شماره ۱۴۰۱	۱/۲۵	ثابت کنید باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۹، برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹.	۱۰۴
شماره ۱۴۰۱	۱/۷۵	دانش آموزی در یک آزمون علمی شرکت کرده است او به سوالات ۵ امتیازی و ۳ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۴۲ امتیاز کسب کرده است (پاسخ به هر سوال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد). این دانش آموز به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را کسب کند؟	۱۰۵
شماره ۱۴۰۱	۰/۲۵	پاسخ صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a, m) b - (a, b) m$	۱۰۶
شماره ۱۴۰۱	۰/۷۵	بدون انجام عمل تقسیم، باقیمانده تقسیم عدد $A = 1358112$ را بر ۹ تعیین کنید.	۱۰۷
شماره ۱۴۰۱	۱	اگر در یک سال اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۷ اسفند ماه در همان سال چه روزی است؟	۱۰۸
شماره ۱۴۰۱	۱	همه اعداد صحیح مانند a را بیابید که ۵ برابر آنها به علاوه ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشند.	۱۰۹



۱۴۰۱ خرداد	۱	۱۱۰ باقیمانده تقسیم عدد $27^{20} + 18$ بر ۱۳ بیابید.
۱۴۰۱ خرداد	۱/۲۵	۱۱۱ اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟
۱۴۰۰ دی	۰/۲۵	۱۱۲ عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید. اگر $ac \equiv bc$ و $(c, m) = d$ آن گاه رابطه $a \equiv b$ برقرار خواهد بود.
۱۴۰۰ دی	۱/۷۵	۱۱۳ معادله سیاله $185 = 6x + 7y$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.
۱۴۰۰ شهریور	۱	۱۱۴ اگر دو عدد $(3a - 5)$ و $(4a - 7)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(9a + 6)$ را به دست آورید.
۱۴۰۰ شهریور	۱/۵	۱۱۵ معادله سیاله $18 = 5x + 2y$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.
۱۴۰۰ خرداد	۰/۷۵	۱۱۶ باقیمانده تقسیم عدد $11 + 9 \times (1000)^{25}$ بر ۷ بیابید.
۱۴۰۰ خرداد	۱	۱۱۷ معادله $1 \equiv 7x$ را حل کنید.
۹۹ دی	۱/۲۵	۱۱۸ باقیمانده تقسیم $(38^{36} + 19)$ بر ۴ به دست آورید.
۹۹ دی	۱	۱۱۹ معادله هم‌نهشتی $20 \equiv 8x$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.
۹۹ خرداد	۱/۵	۱۲۰ باقی‌مانده تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را بدست آورید.
۹۹ خرداد	۱/۲۵	۱۲۱ معادله هم‌نهشتی $2 \equiv 5x$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.



۱۲۲	معادله سیاله $4x + 3y = 19$ را در نظر بگیرید. الف: نشان دهید معادله سیاله فوق دارای جواب است. ب: جواب عمومی معادله سیاله داده شده را بیابید.	۱/۷۵	خرداد ۹۹ خ
۱۲۳	رقم یکان عدد $2^{11} + 7$ را بدست آورید.	۱/۲۵	شهریور ۹۹
۱۲۴	معادله سیاله $2x + 5y = 19$ را حل کنید.	۱	شهریور ۹۹
۱۲۵	فرض کنیم $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $n \in \mathbb{N}$ ثابت کنید: $a^n \equiv b^n \pmod{m}$	۱	شهریور ۹۹
۱۲۶	اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد. در این صورت با استفاده از هم‌نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟	۱	خرداد ۹۸
۱۲۷	با تبدیل معادله سیاله $5x + 2y = 18$ خطی $5x + 2y = 18$ به معادله y هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.	۱/۵	خرداد ۹۸
۱۲۸	جوابهای عمومی معادله سیاله $7x + 5y = 11$ خطی را حل کنید.	۱	خرداد ۹۸ خ
۱۲۹	جواب عمومی معادله $4x \equiv 17 \pmod{17}$ را بدست آورید.	۱	تیر ۹۸
۱۳۰	باقیمانده تقسیم $27^7 + 19$ را بر ۱۳ بیابید.	۱/۵	شهریور ۹۸
۱۳۱	با تبدیل معادله سیاله خطی $29000x + 5000y = 2000x + 5000y$ به معادله y هم‌نهشتی و حل آن، جواب عمومی این معادله را بیابید.	۱/۵	شهریور ۹۸
۱۳۲	باقیمانده تقسیم 13^{22} را بر ۱۷ به دست آورید.	۱	دی ۹۸
۱۳۳	ثابت کنید می‌توان دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد. به عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح a, b, c عدد طبیعی m ، آنگاه $ac \equiv bc \pmod{m}$	۱	دی ۹۸
۱۳۴	جواب‌های عمومی معادله $9x + 13y = 7$ خطی را بدست آورید.	۱/۵	دی ۹۸

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

ریاضیات گسسته



درس

۱

استدلال ریاضی

روش سوم:

$$\begin{aligned} 5a^2 + b^2 &\geq 4ab \Leftrightarrow 10a^2 + 2b^2 \geq 8ab \quad (0.25) \\ \Leftrightarrow (9a^2 - 6ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) &\geq 0 \quad (0.25) \\ \Leftrightarrow (3a - b)^2 + (a - b)^2 &\geq 0 \quad (0.25) \end{aligned}$$

نامساوی آخر، همواره برقرار است. (0.25) و روابط بالا برگشت پذیرند. (0.25)

(ملاحظات: در هر یک از روش‌ها در صورت استفاده از نماد $\Leftrightarrow$ و یا نوشتن عبارت «برگشت پذیر بودن رابطه‌ها» (0.25) نمره منظور شود. (صفحه ۸)

$$\begin{aligned} 3x^2 + y^2 &\geq 6x - 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 + y^2 \geq 0 \quad -4 \\ &\Leftrightarrow 3(x - 1)^2 + y^2 \geq 0 \quad 0.25 \end{aligned}$$

نامساوی همواره برقرار است. (0.25) (چه با استفاده از نماد $\Leftrightarrow$ و چه به صورت توضیحی، به برگشت پذیر بودن مراحل اشاره شود (0.25) نمره تعلق بگیرد.)

روش اول:

$$\begin{aligned} 5ab &\Rightarrow ab \geq 2 \quad \text{هر دو فرد} \Rightarrow (2k+1)^2 + (2k'+1)^2 = \\ &\quad 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 = 2 \left(2k^2 + 2k + 2k'^2 + 2k' + 1 \right) \\ &\quad = 2 \left(2k^2 + 2k + 2k'^2 + 2k' + 1 \right) \quad 0.5 \\ a^2 + b^2 &= 2q \quad (0.25) \end{aligned}$$

(صفحه ۵)

روش دوم: مربع هر عدد فرد به صورت $4k+1$ است. (0.25) وقتی $5ab$ فرد است، بنابراین a و b هر دو فرد هستند. (0.25) بنابراین (0.5) $a^2 + b^2 = (4k+1) + (4k'+1) = 2 \left(2k^2 + 2k + 2k'^2 + 2k' + 1 \right) = 2q$ (0.5) عددی زوج می‌شود. (0.25)

روش سوم: وقتی $5ab$ فرد است، بنابراین a و b هر دو زوج هستند (0.25). در نتیجه توان دوم آن‌ها یعنی a^2 و b^2 هر دو فرد هستند (0.5). از آن جا که مجموع دو عدد فرد عددی زوج است (0.25)، بنابراین $a^2 + b^2$ عددی زوج است.

۶- گزینه ۲ (0.25) صفحه ۷

۷- رادحل اول: صفحه ۷

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab \quad (0.25)$$

- | | |
|------------------|-------------------|
| ۱-۱) درست (0.25) | ۱۱) درست (0.25) |
| ۲) نادرست (0.25) | ۱۲) درست (0.25) |
| ۳) درست (0.25) | ۱۳) نادرست (0.25) |
| ۴) نادرست (0.25) | ۱۴) نادرست (0.25) |
| ۵) نادرست (0.25) | ۱۵) درست (0.25) |
| ۶) درست (0.25) | ۱۶) نادرست (0.25) |
| ۷) درست (0.25) | ۱۷) نادرست (0.25) |
| ۸) نادرست (0.25) | ۱۸) درست (0.25) |
| ۹) نادرست (0.25) | ۱۹) نادرست (0.25) |
| ۱۰) درست (0.25) | ۲۰) درست (0.25) |

$$\begin{aligned} n = 2k &\Rightarrow n^2 - 9n + 1 = (2k)^2 - 9(2k) + 1 = 2(2k^2 - 9k) + 1 \\ &= 2t + 1 \quad 0.25 \\ n = 2k + 1 &\Rightarrow n^2 - 9n + 1 = (2k+1)^2 - 9(2k+1) + 1 = 2q + 1 \quad 0.25 \end{aligned}$$

روش اول:

$$\begin{aligned} 5a^2 + b^2 &\geq 4ab \Leftrightarrow 5a^2 + b^2 - 4ab \geq 0 \quad 0.25 \\ \Leftrightarrow 4a^2 + a^2 + b^2 - 4ab &\geq 0 \Leftrightarrow (2a - b)^2 + a^2 \geq 0 \quad 0.25 \end{aligned}$$

نامساوی آخر، همواره برقرار است (0.25) و روابط بالا برگشت پذیرند. (0.25)

روش دوم:

$$\begin{aligned} 5a^2 + b^2 &\geq 4ab \Leftrightarrow 5a^2 - 4ab + b^2 \geq 0 \quad 0.25 \\ \left\{ \begin{aligned} \Delta &> 0 \\ \Delta &= 16b^2 - 20b^2 = -4b^2 \leq 0 \end{aligned} \right. \quad 0.5 \end{aligned}$$

نامساوی آخر، همواره برقرار است. (0.25) زیرا:

روابط بالا برگشت پذیرند. (0.25)

یا به طور مشابه استدلال زیر نیز قابل قبول است:

$$\begin{aligned} 5a^2 + b^2 &\geq 4ab \Leftrightarrow b^2 - 4ab + 5a^2 \geq 0 \quad 0.25 \\ \left\{ \begin{aligned} \Delta &> 0 \\ \Delta &= 16a^2 - 20a^2 = -4a^2 \leq 0 \end{aligned} \right. \quad 0.5 \end{aligned}$$

نامساوی آخر، همواره برقرار است (0.25) و روابط بالا برگشت پذیرند. (0.25)

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 2xy + y^2}_{(0/25)} + \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(0/25)} \geq 0 \Rightarrow \underbrace{(x+y)^2}_{(0/25)} + \underbrace{(x-2)^2}_{(0/25)} \geq 0$$

این رابطه همواره برقرار است (۰/۲۵)

$$x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - z^2 \quad -۱۳$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy + z^2 + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + z^2 + 1 \geq 0 \quad \text{همواره بدیهی است}$$

$$y^2 + 1 \geq -2x(y+x+1) \quad -۱۴$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (x+y)^2 \geq 0$$

این رابطه بازگشتی همواره بدیهی است

۱۵- الف: نادرست، مثال نقض $n=3$ (مشابه کار در کلاس صفحه ۳)

ب: درست، اثبات

$$a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = (2k+1)^2 = 2 \underbrace{(2k^2 + 2k)}_{k'} + 1 = 2k' + 1$$

۱۶- اگر $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است.

پس هر سه عامل $(a_1 - b_1)$ و $(a_2 - b_2)$ و $(a_3 - b_3)$ هم باید فرد باشند.

در نتیجه مجموع آنها هم باید فرد باشد.

اما با توجه به فرض مسئله: مجموع این سه عبارت برابر صفر است که عددی زوج است، با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.

$$n = 2k - 1 \quad -۱۷$$

$$\Rightarrow (2k-1)^2 - 5(2k-1) + 7$$

$$= 4k^2 - 4k + 1 - 10k + 5 + 7 = 4k^2 - 14k + 13$$

$$= 2 \underbrace{(2k^2 - 7k + 6)}_{k'} + 1 = 2k' + 1$$

۱۸- (مثال صفحه ۴)

$$n = 2k \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1$$

$$= 2 \underbrace{(2k^2 - 5k + 3)}_q + 1 = 2q + 1$$

۱۹- گنگ

۲۰- فرض خلف: $\alpha - \beta$ گویاست.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha - \beta = m \in \mathbb{Q} \\ \alpha + \beta = n \in \mathbb{Q} \end{array} \right\} \Rightarrow 2\alpha = m + n$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{a^2 + b^2 - 2ab}_{(0/25)} \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{(a-b)^2}_{(0/25)} \geq 0$$

رابطه اخیر همواره برقرار است. (در صورت نوشتن رابطه های بالا بصورت یک طرفه و ذکر برگشت پذیری بودن رابطه ها نمره کامل تعلق گیرد.)

را حول دوم:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \underbrace{a+b}_{(0/25)} \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{a+b-2\sqrt{ab}}_{(0/25)} \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}_{(0/5)} \geq 0$$

رابطه اخیر همواره برقرار است. (در صورت نوشتن رابطه های بالا بصورت یک طرفه و ذکر برگشت پذیری بودن رابطه ها نمره کامل تعلق گیرد.)

۸- نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۸)

$$a^2 + b^2 \geq ab + a - b - 1 \quad (0/25) \quad -۹$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - 2ab - 2a + 2b + 2 \geq 0 \quad (0/25)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 \geq 0 \quad (0/75)$$

(صفحه ۸)

این رابطه همواره برقرار است. (در صورت اثبات یک طرفه رابطه ها و ذکر برگشت پذیری بودن آنها نمره کامل تعلق گیرد.)

۱۰- الف) درست (۰/۲۵)

$$\underbrace{2k \times (2k+2) + 1}_{(0/25)} = \underbrace{4k^2 + 4k + 1}_{(0/25)} = (2k+1)^2$$

(مشابه قسمت ج کار در کلاس صفحه ۳)

ب) نادرست (۰/۲۵)

با در نظر گرفتن صفر به عنوان عدد گویا (۰/۲۵) و انتخاب هر عدد گنگی، حاصل ضرب صفر است که گویا می شود. (۰/۲۵)

(مشابه مثال آخر صفحه ۵)

۱۱- مثال ۳ صفحه ۷

$$\underbrace{a^2 + b^2}_{(0/25)} \geq -ab \Leftrightarrow \underbrace{a^2 + b^2 + ab}_{(0/25)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2a^2 + 2b^2 + 2ab}_{(0/25)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{a^2 + b^2 + (a^2 + b^2 + 2ab)}_{(0/25)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{a^2 + b^2 + (a+b)^2}_{(0/25)} \geq 0 \quad \text{همواره برقرار است}$$

$$2x^2 + 2xy + y^2 \geq 4x - 4 \quad -۱۲$$



$$28- \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ اگر دو عدد نامنفی باشند، حکم چنین خواهد بود}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

چون تمام مراحل اثبات، بازگشت پذیر هستند لذا حکم درست است.

$$29- 2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0$$

نامساوی بدست آمده همیشه درست است. چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، پس حکم مسئله درست است.

30- با توجه به فرد بودن عدد ab نتیجه می‌گیریم هر دو عدد a, b فرد هستند، لذا با فرض صحیح بودن اعداد m و n می‌توان در نظر گرفت $a = 2n - 1$ و $b = 2m - 1$ بنابراین:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2n-1)^2 + (2m-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 + 4m^2 - 4m + 1 \\ &= 2(2n^2 - 2n + 2m^2 - 2m + 1) = 2k \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

پس $a^2 + b^2$ یک عدد زوج است.

31- فرض کنید r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد، نشان می‌دهیم $x+r$ یک عدد گنگ است. فرض کنید که $x+r$ گنگ نباشد (فرض خلف). بنابراین عددی گویا است. از طرفی می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، گویاست. پس تفاضل $x+r$ و r باید عددی گویا باشد. یعنی $(r+x-r) \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض ما در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌گردد.

$$32- a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسئله درست است.

33- ابتدا طرفین نامساوی را در 2 ضرب می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (x^2 - 2xz + z^2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \geq 0 \quad \text{همیشه درست}$$

چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسئله درست است.

34- اگر $\alpha + 2\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است. از طرفی طبق فرض

$$\Rightarrow \alpha = \frac{m+n}{2} \Rightarrow \alpha \in Q \quad \text{تناقض با فرض}$$

21- فرض کنید r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد، نشان می‌دهیم $x+r$ یک عدد گنگ است. فرض کنید که $x+r$ گنگ نباشد (فرض خلف). بنابراین عددی گویا است. از طرفی می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، گویاست. پس تفاضل $x+r$ و r باید عددی گویا باشد. یعنی $(r+x-r) \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض ما در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌گردد.

$$22- xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \Leftrightarrow 2xy \leq x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \quad \text{گزاره همواره درست}$$

23- فرض خلف: $\alpha - \beta$ گویاست.

$$\left. \begin{aligned} \alpha - \beta &= m \in Q \\ \alpha + \beta &= n \in Q \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\alpha = m+n \Rightarrow \alpha = \frac{m+n}{2}$$

$\Rightarrow \alpha \in Q$ تناقض با فرض

$$24- \text{الف: نادرست} \quad \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin Q^c, \quad \sqrt{2} - \sqrt{2} \in Q^c$$

ب: درست

$$(2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k+1) = 4 \times 2q = 8q$$

25-

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$$

چون رابطه آخر همواره درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مساله درست است.

26- فرض خلف: فرض کنید $\frac{1}{x}$ گنگ نباشد پس گویاست و

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad a, b \neq 0$$

با معکوس کردن این تساوی داریم:

$x = \frac{b}{a}$ ، پس x هم گویاست که این با فرض گنگ بودن x در تناقض است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

$$27- \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

نابرابری آخر برای a, b نامنفی همیشه درست است. اثبات بازگشتی و حکم برقرار است.

$\alpha + \beta$ نیز عددی گویا است. می دانیم که تفاضل دو عدد گویا، گویا است. در نتیجه:

$$(\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \in \mathbb{Q}$$

اما با توجه به فرض مسئله β گنگ است. با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.

۳۵- ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می کنیم:

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \iff 2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$$

$$\iff (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \geq 0$$

$$\iff (x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0$$

همیشه درست

چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسئله درست است.

یادداشت ضروری دانش آموز:



درس

۲

بخش پذیری در اعداد صحیح

روش دوم:

$$\begin{aligned} 11k + 5 &= aq_1 \Rightarrow 11k + 35 = aq_2 \\ 7k + 3 &= aq_3 \Rightarrow 7k + 33 = aq_4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 = aq_5 \Rightarrow q_5 = 1, a = 2$$

۴۰- گزینه ج یا ۴ (۰/۵) صفحه ۱۳

۴۱- روش اول:

$$\begin{cases} m = 19q_1 + 4 \\ n = 19q_2 + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m = 19q_3 + 12 \\ 5n = 19q_4 + 25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3m - 5n = 19q_5 + 6 \Rightarrow r = 6$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} m &\equiv 4 \pmod{19}, n \equiv 5 \pmod{19} \Rightarrow 3m - 5n \equiv 12 - 25 \equiv -13 \pmod{19} \\ \Rightarrow 3m - 5n &\equiv -13 + 19 \equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow r = 6 \end{aligned}$$

روش سوم:

$$\begin{aligned} 19|m - 4 &\Rightarrow 19|3m - 12 \\ 19|n - 5 &\Rightarrow 19|5n - 25 \\ \Rightarrow 19|3m - 5n + 13 &\Rightarrow 19|3m - 5n - 6 \Rightarrow r = 6 \end{aligned}$$

ملاحظات: اگر دانش آموز با مثال عددی باقی مانده را درست به دست آورد، (۰/۵) نمره داده شود. صفحه ۱۴

۴۲- روش اول:

$$\begin{aligned} 4|3k + 1 &\Rightarrow 4 \times 4|(3k + 1) \Rightarrow 16|12k + 4 \quad (0.25) \\ 4|3k + 1 &\Rightarrow 4^2|(3k + 1)^2 \Rightarrow 16|9k^2 + 6k + 1 \quad (0.25) \\ \Rightarrow 16|9k^2 + 18k + 5 &\quad (0.5) \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} 3k + 1 &= 4q \Rightarrow \begin{cases} 12k + 4 = 16q \\ 9k^2 + 6k + 1 = 16q^2 \end{cases} \\ \Rightarrow 9k^2 + 18k + 5 &= 16q' \Rightarrow 16|9k^2 + 18k + 5 \end{aligned}$$

- | | |
|--------------------|----------------------|
| (۰/۲۵) نادرست (۹) | (۰/۲۵) نادرست (۱-۳۶) |
| (۰/۲۵) درست (۱۰) | (۰/۲۵) نادرست (۲) |
| (۰/۲۵) نادرست (۱۱) | (۰/۲۵) نادرست (۳) |
| (۰/۲۵) درست (۱۲) | (۰/۲۵) درست (۴) |
| (۰/۲۵) نادرست (۱۳) | (۰/۲۵) درست (۵) |
| (۰/۲۵) نادرست (۱۴) | (۰/۲۵) نادرست (۶) |
| (۰/۲۵) درست (۱۵) | (۰/۲۵) نادرست (۷) |
| (۰/۲۵) درست (۱۶) | (۰/۲۵) درست (۸) |

- | | |
|--|---------------------------|
| (۰/۵) عدد a شمارنده عدد b است. (۸) | (۰/۲۵) (۱-۳۷) ۱۲۰ |
| (۰/۲۵) $2m$ (۹) | (۰/۲۵) $a = 3$ (۲) |
| (۰/۵) نسبت به هم اول (۱۰) | (۰/۲۵) ۱ (۳) |
| (۰/۵) $ b $ (۱۱) | (۰/۲۵) ۴ (۴) |
| (۰/۲۵) باقیمانده ۸، خارج قسمت ۹- است. (۱۲) | (۰/۲۵) b (۵) |
| (۰/۵) | (۰/۲۵) m^2 (۶) |
| (۰/۵) ۱۲ (۱۳) | (۰/۲۵) نسبت به هم اول (۷) |

۳۸- روش اول:

$$\begin{aligned} a &= 23q_1 + 6 \Rightarrow 3a = 3 \times 23q_1 + 18 \\ b &= 23q_2 + 7 \Rightarrow -5b = -5 \times 23q_2 - 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3a - 5b &= 23(3q_1 - 5q_2) - 17 + 23 - 23 \quad (0.25) \\ = 23(3q_1 - 5q_2 - 1) + 6 &\Rightarrow r = 6 \quad (0.25) \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} a &\equiv 6 \pmod{23} \Rightarrow 3a \equiv 18 \pmod{23} \\ b &\equiv 7 \pmod{23} \Rightarrow 5b \equiv 35 \pmod{23} \end{aligned}$$

روش سوم:

$$\begin{aligned} a &= 23q_1 + 6 \Rightarrow 23|a - 6 \\ b &= 23q_2 + 7 \Rightarrow 23|b - 7 \\ \Rightarrow 23|3a - 5b - 6 &\Rightarrow 3a - 5b = 23q_3 + 6 \Rightarrow r = 6 \end{aligned}$$

۳۹- روش اول:

$$\begin{aligned} a|11k + 5 &\Rightarrow a|77k + 35 \\ a|7k + 3 &\Rightarrow a|77k + 33 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a|(77k + 35) - (77k + 33) \Rightarrow a|2 \xrightarrow{a>1} a = 2$$

روش سوم:

$$\begin{aligned} 3k+1 &\equiv 0 \pmod{25} \Rightarrow 12k+4 \equiv 0 \pmod{25}, 9k^2+6k+1 \equiv 0 \pmod{25} \\ &\Rightarrow 9k^2+18k+5 \equiv 0 \pmod{25} \Rightarrow 9k^2+18k+5 \equiv 0 \pmod{25} \end{aligned}$$

روش چهارم:

$$\begin{aligned} 4|3k+1 &\Rightarrow 4|3k+5 \Rightarrow 16|(3k+1)(3k+5) \\ &\Rightarrow 16|9k^2+18k+5 \end{aligned}$$

روش پنجم:

$$\begin{aligned} 3k+1 &\equiv 0 \pmod{25} \Rightarrow 3k+5 \equiv 0 \pmod{25} \\ &\Rightarrow (3k+1)(3k+5) \equiv 0 \pmod{25} \Rightarrow 16|9k^2+18k+5 \end{aligned}$$

صفحه ۱۶

$$\begin{aligned} 2a|5m-2 &\xrightarrow{\times 3} 2a|15m-6 \\ 2a|3m-4 &\xrightarrow{\times 5} 2a|15m-20 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} - \\ - \end{array} \right. \Rightarrow 2a|14 \Rightarrow a|7$$

-۴۳

$$\Rightarrow a = \pm 1, \pm 7 \pmod{25}$$

(صفحه ۱۲)

$$\begin{aligned} a|b &\xrightarrow{\exists q \in \mathbb{Z}} b = aq \pmod{25} \\ a|c &\xrightarrow{\exists q' \in \mathbb{Z}} c = aq' \pmod{25} \\ \pm &\rightarrow b \pm c = aq \pm aq' = a(q \pm q') \rightarrow a|b \pm c \end{aligned}$$

-۴۴

-۴۵ راه اول: ab فرد است لذا هر دو عدد a, b فرد می باشند.

$$\begin{aligned} a &= 2k+1 \rightarrow a^2+b^2-5 = 4k^2+4k+1+4k'^2+4k'+1-5 \\ b &= 2k'+1 \end{aligned}$$

$$= 4k(k+1) + 4k'(k'+1) - 3$$

$$= 4k'' - 3 = 4q'' - 3 + 4 - 4 = 4t + 5 \rightarrow r = 5 \pmod{25}$$

راه دوم: ab فرد است لذا هر دو عدد a, b فرد می باشند.

$$\begin{aligned} a &= 2k+1 \rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{25} \\ b &= 2k'+1 \rightarrow b^2 \equiv 1 \pmod{25} \rightarrow a^2+b^2 \equiv 2 \pmod{25} \\ &\rightarrow a^2+b^2-5 \equiv 2-5 \equiv -3 \equiv 22 \pmod{25} \rightarrow r = 22 \pmod{25} \end{aligned}$$

-۴۶ کافی است p را بر عدد ۴ تقسیم کنیم. در این صورت طبق قضیه تقسیم خواهیم داشت:

$$p = 4k, p = 4k+1, p = 4k+2, p = 4k+3 \pmod{25}$$

در حالت های $p = 4k+2, p = 4k$ عددی زوج است. (۰/۲۵) لذا با اول بودن آن تناقض دارد. فقط حالت های $p = 4k+1$ و $p = 4k+3$ باقی می ماند و حکم اثبات می شود. (۰/۲۵)

$$a|7k+1 \Rightarrow a|28k+4 \pmod{25} \quad -۴۷$$

$$a|4k+3 \Rightarrow a|28k+21 \pmod{25}$$

$$a|17 \pmod{25} \quad (a|-17) \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a=1 \quad \text{یا} \quad a=17 \pmod{25}$$

(صفحه ۱۲)

-۴۸ روش اول:

$$\begin{aligned} a &= 4q_1+2 \pmod{25} \Rightarrow 5a = 20q_1+10 \pmod{25} \\ a &= 5q_2+3 \pmod{25} \Rightarrow 4a = 20q_2+12 \pmod{25} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = 20(q_1 - q_2) - 2 \pmod{25}$$

$$a = 20q_3+18 \Rightarrow r = 18 \quad \text{یا} \quad r = -2+20 = 18 \pmod{25}$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} a &\equiv 2 \pmod{25} \Rightarrow a = 4k+18 \Rightarrow 4k+18 \equiv 18 \pmod{25} \\ a &\equiv 3 \pmod{25} \Rightarrow a = 4k+18 \Rightarrow 4k+18 \equiv 18 \pmod{25} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k \equiv 5t \pmod{25} \Rightarrow a = 20t+18 \Rightarrow r = 18 \pmod{25}$$

ص ۱۶

$$a|b \rightarrow b = aq, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow |b| = |a||q| \pmod{25} \quad -۴۹$$

$$q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \Rightarrow |q| \geq 1 \Rightarrow |a||q| \geq |a| \Rightarrow |b| \geq |a| \pmod{25}$$

(ویژگی ۴ صفحه ۱۱)

$$b = 2k, b|a+2 \Rightarrow a+2 = bq \Rightarrow a = 2t \pmod{25} \quad -۵۰$$

که با فرض سوال در تناقض است. (۰/۲۵) (ص ۱۶)

-۵۱

$$7|2k+1 \Rightarrow \begin{cases} 49|4k^2+4k+1 \\ 49|14k+7 \end{cases} \Rightarrow 49|4k^2-10k-6 \pmod{25}$$

$$\begin{cases} a|2m+3 \\ a|m+7 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} a|2m+3 \\ a|2m+14 \end{cases} \quad -۵۲$$



$$\left. \begin{array}{l} a|9k+4 \xrightarrow{\times 5} a|45k+20 \\ a|5k+3 \xrightarrow{\times 9} a|45k+27 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow a|(45k+20) - (45k+27) \Rightarrow a|20-27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a|-7 \xrightarrow{a>1} a=7$$

$$\left. \begin{array}{l} 5|4k+1 \Rightarrow 25|16k^2+8k+1 \\ 5|4k+1 \Rightarrow 25|20k+5 \end{array} \right\} \Rightarrow 25|16k^2+28k+6 \quad -60$$

$$-61 \quad \text{الف: } a|mb \quad \text{ب: } |a|$$

$$-62 \quad a=2k+1 \Rightarrow a^2=4k^2+4k+1$$

$$=4k(k+1)+1=4 \times 2q+1=8q+1 \Rightarrow r=1$$

$$-63 \quad a=bq+r, \quad 0 \leq r < b$$

$$\Rightarrow a-bq=r \Rightarrow \begin{cases} n|a \\ n|b \end{cases} \Rightarrow n|a-bq \Rightarrow n|r$$

$$-64 \quad a|9(5k+3)-5(9k+4) \Rightarrow a|27-20$$

$$\Rightarrow a|7 \xrightarrow{a>1} a=7 \in P$$

-65 طبق الگوریتم تقسیم داریم:

$$a=3k \quad \text{که بر 3 بخش پذیر است. یا}$$

$$a=3k+1 \Rightarrow a+2=3(k+1) \quad \text{که بر 3 بخش پذیر است. یا}$$

$$a=3k+2 \Rightarrow a+4=3(k+2) \quad \text{که بر 3 بخش پذیر است.}$$

-66

$$1: p=4k \quad \text{عددی زوج است}$$

$$2: p=4k+1$$

$$3: p=4k+2=2(2k+1) \quad \text{عددی زوج است}$$

$$4: p=4k+3$$

در حالت 1 و 3 و 4، عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم 2 یا 4 خواهند بود

$$\left. \begin{array}{l} a=17q+5 \xrightarrow{\times 2} 2a=17 \times 2q+10 \\ b=17q'+3 \xrightarrow{\times (-5)} -5b=-17 \times 5q'-15 \end{array} \right\} \quad -67$$

$$\Rightarrow 2a-5b=17 \times 2q+10-17 \times 5q'-15$$

$$\rightarrow a|11 \rightarrow a=1, a=11$$

این سوال اشکال علمی دارد.

$$11|2m+3 \xrightarrow{m=5} 11|13$$

یعنی $a=11$ به ازای تمام m ها قابل قبول نیست.

$$a=11 \Rightarrow \begin{cases} 2m \equiv -3 \Rightarrow 12m \equiv -18 \equiv 4 \\ m \equiv -7 \Rightarrow m \equiv 4 \end{cases} \Rightarrow m \equiv 4 \Rightarrow m \equiv k+4$$

البته اگر بین یک و 11 یا گفته بود ترکیب فعلی می شود ولی در کل در این سوال باید در مورد m بحث کرد.

$$-53 \quad \begin{cases} a=5q_1+4 \xrightarrow{\times 4} 4a=20q_1+16 \\ a=4q_2+3 \xrightarrow{\times 5} 5a=20q_2+15 \end{cases}$$

$$\rightarrow a=20q-1 \rightarrow a=20q''+19$$

$$-54 \quad \left. \begin{array}{l} a|6(5m+4) \\ a|5(6m+5) \end{array} \right\} \Rightarrow a|5(6m+5)-6(5m+4)$$

$$\Rightarrow a|1 \Rightarrow a=\pm 1$$

-55 می دانیم مربع هر عدد فرد، به صورت $8k+1$ می باشد ($k \in \mathbb{Z}$) پس داریم:

$$\begin{cases} a^2=8k+1 \\ b^2=8k'+1 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+5=8k+1+8k'+1+5$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+5=8k''+7 \Rightarrow r=7$$

$$-56 \quad \begin{array}{l} a|5k+9 \Rightarrow a|40k+72 \\ a|8k+13 \Rightarrow a|40k+65 \end{array} \Rightarrow$$

$$a|7 \Rightarrow a=1 \vee a=7$$

$$-57 \quad \begin{cases} a=6q_1+3 \\ a=7q_2+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a=42q_1+21 \\ 6a=42q_2+30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=42(q_1-q_2-1)+33 \Rightarrow r=33$$

-58 الف: $\nexists b$

ب: $m \leq d$

پ: $x \in [3]4$

-59

می‌شود.

$$\begin{aligned} m &= 17q + 5 \quad (q \in \mathbb{Z}) \\ n &= 17q' + 3 \quad (q' \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q - 5q') - 5$$

$$\Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q - 5q' - 1) + 12 \Rightarrow r = 12$$

$$\begin{cases} m = 13q_1 + 2 \\ n = 13q_2 + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m = 13(3q_1) + 6 \\ 5n = 13(5q_2) + 45 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5n - 3m = 13q' + 39 \Rightarrow 5n - 3m = 13q' + 3(13)$$

$$\Rightarrow 5n - 3m = 13q'' + 0 \Rightarrow r = 0$$

۷۸- گزینه د، یعنی m^2 درست است.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} 5|4k+1 &\Rightarrow 5|(4k+1)^2 \Rightarrow 25|16k^2+8k+1 \\ 5|4k+1 &\Rightarrow 25|20k+5 \end{aligned} \right\} \\ \Rightarrow 25|(16k^2+8k+1) + (20k+5) \Rightarrow 25|16k^2+28k+6 \end{aligned}$$

۸۰- ۱۲

$$\forall m > 0, \quad a|m, \quad b|m \Rightarrow c \leq m \quad -81$$

$$\begin{cases} a = 5q_1 + 2 \\ a = 6q_2 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a = 30q_1 + 10 \\ 6a = 30q_2 + 18 \end{cases} \Rightarrow$$

$$a = 30q - 3 \Rightarrow a = 30q + 27$$

۸۳-

$$\begin{aligned} a|4k+9 &\Rightarrow a|-(4k+9) + 4(6k+14) \Rightarrow a|2 \xrightarrow{a>1} a=2 \\ a|6k+14 &\end{aligned}$$

$$A = 21a^2 = 3 \times 7 \times a^2 \quad -84$$

$$B = 35a^3 = 5 \times 7 \times a^3 \Rightarrow [A, B] = 105a^3$$

$$\begin{aligned} a|9k+4 &\Rightarrow a|5(9k+4) \Rightarrow a|45k+20 \\ a|5k+3 &\Rightarrow a|9(5k+3) \Rightarrow a|45k+27 \end{aligned} \quad -85$$

$$\Rightarrow a|(45k+20) + (45k+27) \Rightarrow a|90k+47 \xrightarrow{a>1} a=1$$

$$86- \text{ عدد } a \text{ عددی فردی است. بنابراین } a+2 \text{ عددی فرد است و } b|a+2. \text{ بنابراین } b$$

$$= 17(\underbrace{2q - 5q' - 1}_k) + 12 = 17k + 12 \Rightarrow r = 12$$

$$\begin{aligned} (5a+4, 2a+3) = d &\Rightarrow d|2a+3 \\ &\quad d|5a+4 \end{aligned} \quad -88$$

$$\Rightarrow d|-2(5a+4) + 5(2a+3) \Rightarrow d|7 \Rightarrow d=1 \text{ یا } d=7$$

$$a = 4q + 3 \quad -89$$

$$\Rightarrow 2a + 3 = 8q + 9 = 8(q+1) + 1 = 8q' + 1 \Rightarrow r = 1$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} n|9k+7 \\ n|7k+6 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow n| -63k - 49 + 63k + 54 \\ &\Rightarrow n|5 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n=1 \text{ یا } n=5 \end{aligned} \quad -90$$

$$\begin{aligned} a|5m-2 &\Rightarrow a| -3(5m-2) + 5(3m+1) \\ a|3m+1 &\Rightarrow a| -15m+6 + 15m+5 \Rightarrow a|11 \Rightarrow a=1 \text{ یا } a=11 \end{aligned} \quad -91$$

$$a \equiv 19 \Rightarrow 2a \equiv 38 \equiv 7 \Rightarrow 2a - 1 \equiv 6 \quad \text{باقیمانده} \quad -92$$

$$\begin{aligned} d = (4k, 16k^2 - 1) &\Rightarrow \begin{cases} d|4k \Rightarrow d|16k^2 \\ d|16k^2 - 1 \end{cases} \\ \Rightarrow d|16k^2 - (16k^2 - 1) &\Rightarrow d|1 \Rightarrow d=1 \end{aligned} \quad -93$$

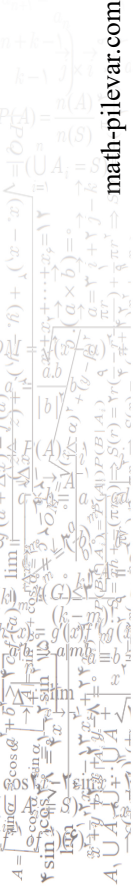
$$\begin{aligned} a|3n+4 &\Rightarrow a| -2(3n+4) + 3(2n+3) \Rightarrow a|1 \\ a|2n+3 &\end{aligned} \quad -94$$

$$\Rightarrow a = \pm 1 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = 1$$

۷۵- هرگاه p را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

- ۱) $p = 6k$
- ۲) $p = 6k + 1$
- ۳) $p = 6k + 2 = 2(3k + 1)$
- ۴) $p = 6k + 3 = 3(2k + 1)$
- ۵) $p = 6k + 4 = 2(k + 2)$
- ۶) $p = 6k + 5$

p در حالت‌های ۱ و ۳ و ۵ زوج و در حالت ۴، بر ۳ بخش پذیر است که با اول بودن p تناقض دارد. بنابراین فقط در حالات ۲ یا ۶، p می‌تواند عددی اول باشد که حکم اثبات



نیز عددی فرد خواهد بود. می‌دانیم که مربع هر عدد فرد، مضربی از ۸ به علاوه یک است. پس:

$$a^2 + b^2 + 3 = (8m + 1) + (8n + 1) + 3 = 8(m + n) + 5 \Rightarrow r = 5$$

یادداشت ضروری دانش آموز:

درس

۳

هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

رابطه (*) با (**) تناقض دارد، پس حکم برقرار است. (۰/۲۵)
(صفحه ۲۹)

۹۲- روش اول:

$$(16, 14) = 2 \mid 20 \quad \text{معادله جواب دارد}$$

$$16x \equiv 20 \Rightarrow 4x \equiv 5 \Rightarrow 4x \equiv 5 + 7 \Rightarrow x \equiv 3 \Rightarrow x = 7k + 3$$

روش دوم:

$$16x \equiv 20 \Rightarrow 16x + 14y = 20 \Rightarrow 8x + 7y = 10, (8, 7) = 1, 1 \mid 10$$

معادله جواب دارد

$$8x \equiv 10 \Rightarrow 4x \equiv 5 \Rightarrow 4x \equiv 5 + 7 \Rightarrow x \equiv 3 \Rightarrow x = 7k + 3$$

ملاحظات: به هر پاسخ صحیح دیگر که از روش کاهش یا افزایش پیمانه استفاده شود، نمره کامل تعلق گیرد.

(صفحه ۳۰)

۹۳- (صفحه ۲۰)

$$a^m \equiv b \Rightarrow m \mid (a-b) \Rightarrow m \mid (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + \dots + b^{n-1})$$

$$\Rightarrow m \mid a^n - b^n \Rightarrow a^n \equiv b^n$$

۹۴- (صفحه ۲۸) روش اول:

$$7x + 9y = 183 \Rightarrow 7x \equiv 183 \Rightarrow 7x \equiv 3 \xrightarrow{+18} 7x \equiv 21 \xrightarrow{\div 7} x \equiv 3$$

$$\Rightarrow x = 9k + 3 \Rightarrow 7(9k + 3) + 9y = 183 \Rightarrow y = 18 - 7k$$

حداکثر تعداد پرتاب‌های ۹ امتیازی $k=0 \Rightarrow y=18$

روش دوم:

$$7x + 9y = 183 \Rightarrow 9y \equiv 183 \Rightarrow 9y \equiv 3 \xrightarrow{+35} 9y \equiv 36 \xrightarrow{\div 9} y \equiv 4$$

$$\Rightarrow y = 9k + 4 \Rightarrow 7x + 9(9k + 4) = 183 \Rightarrow x = 21 - 9k$$

حداکثر تعداد پرتاب‌های ۹ امتیازی $k=2 \Rightarrow y=18$

(به روش‌های صحیح دیگر، به تناسب نمره تعلق گیرد.)

- ۸۷- (۱) درست (۰/۲۵) (۲) درست (۰/۲۵) (۳) درست (۰/۲۵) (۴) درست (۰/۲۵) (۵) درست (۰/۲۵)
- ۶) نادرست (۰/۲۵) (۷) درست (۰/۲۵) (۸) درست (۰/۲۵) (۹) نادرست (۰/۲۵)

۸۸- چهارشنبه

۸۹-

$$(0/25) \quad 169 \equiv 1 \Rightarrow 169 \equiv 1 + 4 \times 30 + 29 \Rightarrow \text{تعداد روزهای باقی‌مانده تا ۲۹ اسفند}$$

د	س	چ	پ	ج	ش	ی
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷

روز سه‌شنبه (۰/۲۵)

۹۰-

$$463x \equiv 750 \Rightarrow (4+6+3)x \equiv (7+5+0) \Rightarrow 13x \equiv 12 \xrightarrow{(4,9)=1} x \equiv 3 \Rightarrow x = 9k + 3$$

ملاحظات: اگر معادله با تبدیل به معادله سیاله یا هر روش دیگر حل شود و به جواب نهایی درست منتهی گردد نمره کامل منظور گردد.

۹۱- روش اول:

$$\begin{cases} m \mid a-b \\ n \mid m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \mid a-b \\ n \mid m \end{cases} \Rightarrow a \equiv b$$

$$\begin{cases} a^m \equiv b \\ n \mid m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^m \equiv b \\ m = nq_1 \end{cases} \Rightarrow a - b = nq_1q_2 \Rightarrow a \equiv b$$

روش سوم:

$$\begin{cases} a^m \equiv b \\ n \mid m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^m \equiv b \\ m = nq \end{cases} \Rightarrow a - b = nq \Rightarrow a \equiv b$$

روش چهارم: برهان خلف: فرض می‌کنیم حکم برقرار نباشد، پس a هم‌نهشت b به پیمانه n نیست:

$$\begin{cases} a - b \neq nq_1 \Rightarrow a - b = nq_1 + r, 0 < r < n \quad (*) \\ a^m \equiv b, n \mid m \Rightarrow a - b = m q_2, m = n q_3 \Rightarrow a - b = n q_3 q_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n q_1 + r = n q_3 q_2 \Rightarrow n \mid r \quad (**)$$



$$\begin{aligned} 15x \equiv 7 \Rightarrow 15x &\equiv 7 + (2 \times 19) \\ \Rightarrow 15x &\equiv 45 \xrightarrow{(15,19)=1} x \equiv 3 \\ \Rightarrow x &= 19k + 3 \xrightarrow{k=5} x = 98 \end{aligned}$$

۱۰۲- میدانیم $1! \equiv 1$ و $2! \equiv 2$ و $3! \equiv 6$ و $4! \equiv 24$ و $5! \equiv 120$ و ... و $200! \equiv 0$ پس داریم:

$$\begin{aligned} 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 200! &\equiv 15 \\ 1 + 2 + 6 + 24 + 0 + \dots + 0 &\equiv 3 \end{aligned}$$

۱۰۳- چون $10 \mid (4, 6)$ معادله جواب دارد

$$4x \equiv 10 \Rightarrow 4x \equiv 4 \Rightarrow x \equiv 1 \Rightarrow x = 3k + 1$$

۱۰۴- عدد n رقمی $A = \overline{a_n-1 a_n-2 \dots a_1 a_0}$ را بسط می‌دهیم و در همنهشتی به پیمانه ۹ به جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار می‌دهیم

$$A = 10^{n-1} \times a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + 10^0 a_0 \Rightarrow$$

$$A \equiv 1 \times a_{n-1} + \dots + 1 \times a_1 + a_0$$

$$\Rightarrow A \equiv a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

درس ۳

هم‌نهشتی

$$5x + 3y = 42 \Rightarrow 5x \equiv 42 \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 0 \Rightarrow$$

$$x = 3k \Rightarrow 5(3k) + 3y = 42 \Rightarrow y = -5k + 14$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$(a, m) \mid b \quad -106$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 \equiv 21 \equiv 3 \quad -107$$

-108

شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$$(29 + 4 \times 30 + 7) \equiv 1 + 4 \times 2 + 0 \equiv 2$$

هفت اسفند روز دوشنبه می‌باشد.

$$11 \mid 5a + 9 \Rightarrow 5a + 9 = 11k \Rightarrow 5a = 11k - 9 \quad -109$$

$$\Rightarrow a = \frac{11}{5}k - \frac{9}{5} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۹۵- صفحه ۲۵

$$9x - 1 \equiv 2x + 1 \Rightarrow \underbrace{7x \equiv 2}_{(0,25)} \Rightarrow 7x \equiv 2 + 2 \times 13 = 28 \xrightarrow{+7} x \equiv 4 \quad (0,25)$$

$$\rightarrow x = 13k + 4 \rightarrow \underbrace{10 \leq 13k + 4 \leq 99}_{(0,25)} \rightarrow \frac{6}{13} \leq k \leq \frac{95}{13}$$

لذا معادله ۷ جواب دورقمی دارد. $(0,25)$

۹۶- روش اول:

$$\underbrace{5x \equiv 22}_{(0,25)} \Rightarrow \underbrace{x \equiv 8}_{(0,5)} \Rightarrow x = 9k + 8 \text{ یا } x = 9k - 1 \quad (0,25)$$

$$\left. \begin{aligned} 5(9k + 8) + 9y &= 22 \\ \text{یا} \\ 5(9k - 1) + 9y &= 22 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = -2 - 5k \text{ یا } y = -5k + 3 \quad (0,25)$$

روش دوم:

$$\underbrace{9y \equiv 22}_{(0,25)} \Rightarrow \underbrace{y \equiv 3}_{(0,5)} \Rightarrow y = 5k + 3 \text{ یا } y = 5k - 2 \quad (0,25)$$

$$\left. \begin{aligned} 5x + 9(5k + 3) &= 22 \\ \text{یا} \\ 5x + 9(5k - 2) &= 22 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = -1 - 9k \text{ یا } x = -9k + 8 \quad (0,25)$$

۲۹ صفحه

۹۷- الف) گزینه ۲ $(0,25)$ (مشابه سوال ۱ صفحه ۲۹)

ب) گزینه ۱ $(0,25)$ (مشابه سوال ۸ صفحه ۲۹)

پ) گزینه ۱ $(0,25)$ (مشابه مثال سوم صفحه ۲۵)

$$A = 2! + 4! + 6! + \dots + 100! \Rightarrow A = 2! + 4! + 10k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad -98$$

$$\underbrace{A \equiv 2 + 24 + 0}_{(0,5)} \Rightarrow \underbrace{A \equiv 26 \equiv 1}_{(0,5)}$$

مشابه سوال ۱۱ صفحه ۲۹

۹۹- ص ۲۱

$$\underbrace{63 \equiv -1}_{(0,25)} \Rightarrow \underbrace{63^{14} \equiv 1}_{(0,25)} \Rightarrow \underbrace{A \equiv 2}_{(0,25)} \Rightarrow \underbrace{r = 2}_{(0,25)}$$

۱۰۰- ص ۳۰

$$\underbrace{(1 + 4 + 0 + 2)x \equiv 1 + 1}_{(0,5)} \Rightarrow \underbrace{7x \equiv 2}_{(0,25)} \Rightarrow \underbrace{7x \equiv -7}_{(0,25)}$$

$$\xrightarrow{(7,9)=1} \underbrace{x \equiv -1}_{(0,25)} \Rightarrow \underbrace{x = 9k - 1}_{(0,25)} \text{ یا } \underbrace{x = 9k + 8}_{(0,25)}$$

١٠

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 19 \Rightarrow 4x \equiv 19 \equiv 1 \Rightarrow 4x \equiv 3 + 1 \Rightarrow 4x \equiv 4 \\ &\Rightarrow x \equiv 1 \Rightarrow x = 3k + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4(3k+1)+3y &= 19 \Rightarrow 12k+4+3y=19 \\ \Rightarrow 3y &= -12k+15 \Rightarrow y = -4k+5 \end{aligned}$$

$$\gamma^5 \stackrel{1^\circ}{=} \gamma \Rightarrow \gamma^{1^\circ} \stackrel{1^\circ}{=} \gamma^2 \Rightarrow \gamma^{11} \stackrel{1^\circ}{=} \lambda \Rightarrow \gamma^{11} + \gamma \stackrel{1^\circ}{=} \gamma^5 \stackrel{1^\circ}{=} \gamma \quad -123$$

رقم مکان برابر ۵ است.

$$\begin{aligned} \gamma x \triangleq 19 \triangleq \gamma &\Rightarrow \xrightarrow{(\gamma, \Delta)=1} x \triangleq \gamma \Rightarrow x = \Delta k + \gamma \\ &\Rightarrow \gamma = -\gamma k + \gamma \end{aligned} \quad -124$$

$$\begin{aligned} a &\equiv^m b \Rightarrow m|a-b \\ &\Rightarrow m|(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}\right) \\ &\Rightarrow m|a^n-b^n \Rightarrow a^n \equiv^m b^n \end{aligned}$$

۱۲۶- روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می‌گیریم؛ ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ روز بهمن، فاصله ی اول مهر تا ۱۲ بهمن است. که روی هم ۱۳۱ روز می‌شوند. حال باقی مانده ی تقسیم ۱۳۱ بر ۷ را تعیین می‌کنیم که برابر ۵ است. لذا ۱۲ بهمن متناظر با روز پنجشنبه است.

شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$$\begin{aligned} \Delta x + \gamma y = 1\lambda &\Rightarrow \gamma y \stackrel{\Delta}{=} 1\lambda \xrightarrow{(\gamma, \Delta)=1} y \stackrel{\Delta}{=} \mathfrak{A} & -1\gamma\gamma \\ \Rightarrow y \stackrel{\Delta}{=} \Delta + \mathfrak{F} &\Rightarrow y \stackrel{\Delta}{=} \mathfrak{F} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} y = \Delta k + \mathfrak{F} \\ \Delta x + \gamma y = 1\lambda &\xrightarrow{y = \Delta k + \mathfrak{F}} \Delta x + \gamma(\Delta k + \mathfrak{F}) = 1\lambda \Rightarrow x = -\gamma k + \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \stackrel{\Delta}{=} 11 &\Rightarrow \forall x \stackrel{\Delta}{=} 11 + 2 \times \Delta \Rightarrow \forall x \stackrel{\Delta}{=} 21 && -12\lambda \\ \xrightarrow{(V, \Delta)=1} x \stackrel{\Delta}{=} 3 &\Rightarrow x = \Delta k + 3, \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \forall x + \Delta y = 11 &\xrightarrow{x = \Delta k + 3} \forall (\Delta k + 3) + \Delta y = 11 \\ \Rightarrow y = -\Delta k - 2 &\quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}fx &\stackrel{\Delta}{=} 1\gamma \Rightarrow fx \stackrel{\Delta}{=} 1\Delta + 2 \Rightarrow fx \stackrel{\Delta}{=} 2 \Rightarrow fx \stackrel{\Delta}{=} 2 + 1. & -129 \\ \Rightarrow fx &\stackrel{\Delta}{=} 1\gamma \xrightarrow{(f,\Delta)=1} x \stackrel{\Delta}{=} 3 \Rightarrow x = \Delta k + 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\gamma &= 13 \times 2 + 1 \Rightarrow 2\gamma \equiv 1 \\ \Rightarrow (2\gamma)^{2^0} &\equiv 1 \xrightarrow{+1\lambda} 2\gamma^{2^0} + 1\lambda \equiv 19 \Rightarrow 19 \equiv \varepsilon \Rightarrow r = \varepsilon \end{aligned} \quad -110.$$

۱۱۱- فاصله ۱ مهر تا ۱۲ بهمن برابر است با: ۲۹ روز در مهرماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ و روز تا ۱۲ بهمن؛ یعنی $۱۳۱ = ۱۲ + ۳۰ \times ۳ + ۲۹$. از طرفی $۱۳۱ \equiv ۵ \pmod{۱۳}$. بنابراین طبق جدول زیر ۱۲ بهمن ینجشنبه است.

شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$a \stackrel{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

-112

$$\begin{aligned} \varphi x &\equiv \lambda \Delta = 23 \times \gamma + 24 \Rightarrow \varphi x \equiv 24 & -113 \\ \xrightarrow{(\varphi, \gamma)=1} x &\equiv \gamma \Rightarrow x = \gamma k + 24 \\ \Rightarrow \varphi(\gamma k + 24) + \gamma \gamma &= \lambda \Delta \Rightarrow \gamma = -\varphi k + 23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi a - \gamma &\equiv \varphi a - \delta \Rightarrow a \equiv \gamma & -11\text{f} \\ \Rightarrow \varphi a + \varepsilon &\equiv \varphi \gamma \equiv \varphi \Rightarrow r = \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon y \stackrel{\Delta}{=} 1\lambda &\Rightarrow \frac{(\Upsilon, \Delta)=1}{\div \Upsilon} y \stackrel{\Delta}{=} 9 \stackrel{\Delta}{=} \Upsilon \Rightarrow y = \Delta k + \Upsilon \\ &\Rightarrow \Delta x + \Upsilon (\Delta k + \Upsilon) = 1\lambda \Rightarrow x = -\Upsilon k + \Upsilon \end{aligned} \quad -115$$

$$1000 \equiv -1 \Rightarrow 1000^{25} \times 9 + 11 \equiv (-1)^{25} \times 9 + 11 \equiv 2 \Rightarrow r = 2 \quad -116$$

$$\begin{aligned} \gamma x \equiv 1 &\Rightarrow \gamma x \equiv \mathfrak{r} \times \Delta + 1 \Rightarrow \gamma x \equiv \mathfrak{r} \quad -11V \\ \xrightarrow[\div \gamma]{(\gamma, \mathfrak{r})=1} &x \equiv \mathfrak{r} \Rightarrow x = \mathfrak{r}k + \mathfrak{r} \end{aligned}$$

$$38 \equiv 2 \Rightarrow 38^2 \equiv 4 \equiv 0 \Rightarrow 38^{36} \equiv 0 \cdot 19 \equiv 0 \Rightarrow 38^{36} + 19 \equiv 0 \quad -118$$

$$\lambda x \equiv \gamma \circ \frac{1\gamma}{\gamma} \equiv \frac{1\gamma}{\gamma} \xrightarrow[\div \lambda]{(\lambda, 1\gamma) = \gamma} x \equiv \frac{1\gamma}{\gamma} = \gamma \Rightarrow x = \gamma k + \gamma \quad -119$$

$$v^2 = 49 \equiv 1 \Rightarrow v^4 \equiv 1, 1 \Rightarrow v^{28} \equiv 1, \xrightarrow{\times v^{10}} v^{30} \equiv 1 \quad -12.$$

$$\varphi x \equiv \gamma + (11 \times \gamma) \Rightarrow \varphi x \equiv \gamma \xrightarrow{(\varphi, 11)=1} x \equiv \gamma \Rightarrow x = 11k + \gamma \quad -121$$

١٢٢- الف: $1 \mid 19 \Rightarrow (4, 3) = 1$



$$\begin{aligned} 27 \equiv 1 &\Rightarrow 27^7 \equiv 1^7 \\ &\Rightarrow 27^7 + 19 \equiv 1 + 19 \Rightarrow 27^7 + 19 \equiv 20 \Rightarrow 27^7 + 19 \equiv 7 \end{aligned} \quad -130$$

$$\begin{aligned} 2x + 5y = 29 &\Rightarrow 2x \equiv 29 \Rightarrow 2x \equiv 4 \\ &\Rightarrow x = 5k + 2 \Rightarrow y = -2k + 5 \end{aligned} \quad -131$$

$$\begin{aligned} 13 \equiv -4 &\Rightarrow 13^2 \equiv (-4)^2 \Rightarrow 13^2 \equiv 16 \\ \frac{16^{17}-1}{16^{17}-1} &\Rightarrow 13^2 \equiv -1 \Rightarrow (13^2)^{11} \equiv (-1)^{11} \\ &\Rightarrow 13^{22} \equiv -1 \Rightarrow 13^{22} \equiv -1 + 17 \Rightarrow 13^{22} \equiv 16 \Rightarrow r = 16 \end{aligned} \quad -132$$

$$a^m \equiv b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|c(a-b) \Rightarrow m|ac-bc \Rightarrow ac \equiv bc \quad -133$$

$$\begin{aligned} 13y \equiv 7 &\xrightarrow{13 \equiv 4, 7 \equiv 16} 4y \equiv 16 \xrightarrow{(4,9)=1} y \equiv 4 \\ &\Rightarrow y = 9k + 4, \quad x = -13k - 5 \end{aligned} \quad -134$$

$$\begin{aligned} 1000 \equiv 6 &\xrightarrow{6 \equiv -1} 1000 \equiv -1 \\ &\Rightarrow 1000^{13} \equiv (-1)^{13} \Rightarrow 1000^{13} \equiv -1 \\ &\Rightarrow 1000^{13} \times 12 \equiv -1 \times 12 \Rightarrow 1000^{13} \times 12 \equiv -12 \\ &\Rightarrow 1000^{13} \times 12 + 10 \equiv -12 + 10 \Rightarrow 1000^{13} \times 12 + 10 \equiv -2 \\ &\Rightarrow 1000^{13} \times 12 + 10 \equiv -2 + 7 \Rightarrow 1000^{13} \times 12 + 10 \equiv 5 \Rightarrow r = 5 \end{aligned} \quad -135$$

$$3x \equiv 13 \Rightarrow 3x \equiv 6 \xrightarrow{(3,7)=1} x \equiv 2 \Rightarrow x = 7k + 2 \quad -136$$

برداشتن ضروری دانش آموز:

«مجموعه کتاب‌های سمن»



math-pilevar.ir

[@plv.math](https://www.instagram.com/plv.math)



نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com