



نمونه سوال

فصل ۱: ماتریس

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس ها

درس دوم: وارون ماتریس و دترمینان

فصل ۲: آشنایی با مقاطع مخروطی

درس اول: آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

درس دوم: دایره

گروه ریاضی استان مرکزی

سال ۱۴۰۰

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۱
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	ماتریس و اعمال روی ماتریس	تساوی ماتریس		
حیطه شناختی: درک و فهم	سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۱		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال

اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x+y & 1 \\ 2 & y+z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & x+z \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، حاصل $x+y+z$ را بیابید.

پاسخ تشریحی

$$A = B \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & x+z \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & 1 \\ 2 & y+z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y = -3 \\ y+z = 5 \\ x+z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2(x+y+z) = 3 \Rightarrow x+y+z = \frac{3}{2}$$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۱
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	ماتریس و اعمال روی ماتریس	ضرب ماتریس ها		
حیطه شناختی: ترکیب	سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۱/۲۵		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال
اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ باشند، حاصل عبارت $(A+B)^2$ را بیابید.

پاسخ تشریحی
$A+B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۱
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	ماتریس و اعمال روی ماتریس	انواع ماتریس و ضرب ماتریس ها		
حیطه شناختی: درک و فهم		سطح ارزشیابی: متوسط		بارم: ۱
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی		استان: مرکزی		شهرستان: اراک

سوال
اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ y & 1 \end{bmatrix}$ و AB ماتریسی قطری باشد، y, x را بیابید.

پاسخ تشریحی
$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-y & 4x-1 \\ 1+y & 2x+1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4} \\ 1+y=0 \Rightarrow y=-1 \end{cases}$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۱
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	ماتریس و اعمال روی ماتریس	ضرب ماتریس ها		
حیطه شناختی: ترکیب		سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۱	
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال
اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ x & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \\ x & 6 \end{bmatrix}$ و درایه سطر دوم و ستون اول ماتریس AB برابر با ۲۳ باشد، x را پیدا کنید.

پاسخ تشریحی
$A \times \text{ستون اول } B = 23 \Rightarrow \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = 23 \Rightarrow$ $5x + 2 + 2x = 23 \Rightarrow 7x = 21 \Rightarrow x = 3$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۱
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	ماتریس و اعمال روی ماتریس	ضرب ماتریس ها		
حیطه شناختی: تجزیه و تحلیل		سطح ارزشیابی: دشوار		بارم: ۱
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی		استان: مرکزی		شهرستان: اراک

سوال
اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$، حاصل $A^{100} - A^{99}$ را به دست آورید.

پاسخ تشریحی
$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ $A^3 = A^2 \times A$ $A^{100} - A^{99} = I_3 - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۱
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	ماتریس و اعمال روی ماتریس	ضرب ماتریس ها		
حیطه شناختی: ترکیب	سطح ارزشیابی: دشوار	بارم: ۱		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال

اگر $AB + BA = O$ ، در این صورت ثابت کنید $A^2B = BA^2$.

پاسخ تشریحی

$$AB + BA = O \Rightarrow AB = -BA \xrightarrow{\times A} A^2B = -ABA \Rightarrow A^2B = -(-BA)A \Rightarrow$$

$$A^2B = BA^2$$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۱
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	ماتریس و اعمال روی ماتریس	درایه و ضرب عدد در ماتریس		
حیطه شناختی: ترکیب		سطح ارزشیابی: متوسط		بارم: ۰/۲۵
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی		استان: مرکزی		شهرستان: اراک

سوال

سؤال: جای خالی را با عبارت مناسب، پر کنید.

در ماتریس $A_{3 \times 4} = [a_{ij}]$ که در آن $a_{ij} = \frac{i}{j+1}$ است، در ماتریس $3A$ ، درایه a_{24} برابر است با

پاسخ تشریحی

پاسخ: $\frac{6}{5}$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow 3A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} \\ 3 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{6}{5} \\ -\frac{9}{2} & 3 & \frac{9}{4} & \frac{9}{5} \end{bmatrix}$$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۱
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	ماتریس و اعمال روی ماتریس	انواع ماتریس ها		
حیطه شناختی: دانش	سطح ارزشیابی: آسان	بارم: ۰/۲۵		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال
درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. ماتریس مربعی که تمام درایه های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشد را ماتریس اسکالر می نامند.

پاسخ تشریحی
نادرست

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۱
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی: مفهوم درایه و قطر اصلی		
ماتریس و کاربردها		حیطه شناختی: ترکیب		
سطح ارزشیابی: متوسط		بارم: ۰/۲۵		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی		استان: مرکزی		
شهرستان: اراک				

سوال

جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

اگر ماتریس $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ ماتریس مربعی از مرتبه ۳ باشد و $b_{ij} = i^2 + j$ باشد، آن گاه مجموع درایه های روی قطر اصلی ماتریس B برابر است.

پاسخ تشریحی

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه های روی قطر اصلی} = 2 + 6 + 12 = 20$$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۱
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	ماتریس و اعمال روی ماتریس	خاصیت ضرب ماتریس		
حیطه شناختی: تجزیه و تحلیل		سطح ارزشیابی: متوسط		بارم: ۲
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی		استان: مرکزی		شهرستان: اراک

سوال

a, b را چنان بیابید که دو ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشند.

پاسخ تشریحی

$$\begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2+3a & 6+2a \\ -1+3b & -3+2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & a+3b \\ 4 & 3a+2b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2+3a = -1 \Rightarrow 3a = -3 \rightarrow a = -1 \\ -1+3b = 4 \Rightarrow 3b = 5 \rightarrow b = \frac{5}{3} \end{cases}$$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۱
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	ماتریس و اعمال روی ماتریس	ضرب ماتریس ها		
حیطه شناختی: تجزیه و تحلیل		سطح ارزشیابی: دشوار		بارم: ۱
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی		استان: مرکزی		شهرستان: اراک

سوال

اگر $A = \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^{1397} را بر حسب A به دست آورید.

پاسخ تشریحی

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & x^2 + y^2 \end{bmatrix} = (x^2 + y^2)I$$

$$A^{1397} = (A^2)^{698} \times A = (x^2 + y^2)^{698} I \cdot A = (x^2 + y^2)^{698} A$$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	وارون ماتریس و دترمینان	وارون ماتریس		
حیطه شناختی: ترکیب	سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۱/۵		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال
اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ باشند، آنگاه $(A - B)^{-1}$ را به دست آورید.

پاسخ تشریحی
$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ $ A - B = 4 - 2 = 2 \Rightarrow (A - B)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:	حل دستگاه با وارون ماتریس	
ماتریس و کاربردها	وارون ماتریس و دترمینان	سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۱	
حیطه شناختی: کاربرد	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال
دستگاه $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - y = 3 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

پاسخ تشریحی
$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	وارون ماتریس و دترمینان	دترمینان		
حیطه شناختی: تجزیه و تحلیل	سطح ارزشیابی: دشوار	بارم: ۱		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال

اگر نقطه (a, b) روی خط $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ قرار داشته باشد، حاصل $b - 2a$ را به دست آورید.

پاسخ تشریحی

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3y - 1 - 2(x + y) = 0 \Rightarrow 3y - 1 - 2x - 2y = 0 \Rightarrow y = 2x + 1$$

$$\Rightarrow b = 2a + 1 \Rightarrow b - 2a = 1$$

نقطه روی خط قرار دارد

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	وارون ماتریس و دترمینان	دترمینان		
حیطه شناختی: کاربرد	سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۱/۵		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال
اگر دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & m & 3 \end{bmatrix}$ با دترمینان وارون ماتریس $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & m \end{bmatrix}$ برابر باشد، مقدار m را بیابید.

پاسخ تشریحی
$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & m & 3 \end{vmatrix} = 2(3) - 1(m+2) = 4 - m \Rightarrow A = 4 - 3$ $ B = m - 2 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{m-2}$ $ A = B^{-1} \Rightarrow 4 - m = \frac{1}{m-2} \Rightarrow 4m - 8 - m^2 + 2m = 1 \Rightarrow m^2 - 6m + 9 = 0 \Rightarrow$ $(m-3)^2 = 0 \Rightarrow m = 3$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	وارون ماتریس و دترمینان	حل دستگاه با استفاده از وارون		
حیطه شناختی: کاربرد	سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۱/۵		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال

سؤال: دستگاه معادلات زیر را به روش ماتریس وارون، حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{3x}{2} = \frac{7}{6} - \frac{y}{3} \\ x - \frac{y}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

پاسخ تشریحی

معادله اول را در ۶ و معادله دوم را در ۲ ضرب می کنیم، پس:

$$\begin{cases} 9x = 7 - 3y \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + 3y = 7 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-9-6} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{15} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{15} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{15} \\ \frac{-13}{15} \end{bmatrix}$$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	وارون ماتریس و دترمینان	وارون ماتریس		
حیطه شناختی: تجزیه و تحلیل	سطح ارزشیابی: دشوار	بارم: ۱		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال

A, B دو ماتریس مربعی، هم مرتبه و وارون پذیرند که $A + B = AB$. ثابت کنید $B = (I - A^{-1})^{-1}$

پاسخ تشریحی

$$A + B = AB \Rightarrow A^{-1}(A + B) = A^{-1}(AB) \Rightarrow I + A^{-1}B = B \Rightarrow I = B - A^{-1}B \Rightarrow$$

$$I = (I - A^{-1})B \Rightarrow B = (I - A^{-1})^{-1}$$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	وارون ماتریس و دترمینان	دترمینان		
حیطه شناختی: ترکیب	سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۱/۵		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال
اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، مقدار $A^3 B^2$ را بدست آورید.

پاسخ تشریحی
$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = (-1)^{2+3} (1) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = 3(-1)(1) = -3$ $ A^3 B^2 = A ^3 B ^2 = (2^3)(-3)^2 = 72$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	وارون ماتریس و دترمینان	دترمینان و خواص آن		
حیطه شناختی: ترکیب		سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۱	
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال

اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشند، مقدار $\left| \frac{1}{2}A^3 \right| + |2B^2|$ را به دست آورید.

پاسخ تشریحی

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (-1)^{2+3} (1) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 5$$

$$\left| \frac{1}{2}A^3 \right| + |2B^2| = \frac{1}{8} |A|^3 + 4 |B|^2 = \frac{1}{8} \times 8 + 4(25) = 101$$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	وارون ماتریس و دترمینان	تعداد جواب های دستگاه		
حیطه شناختی: درک و فهم		سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۱	
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال
اگر دستگاه $\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ 2x + my = m^2 \end{cases}$ فاقد جواب باشد، مجموعه مقادیر قابل قبول برای m کدام است؟ (۱) $\{-1\}$ (۲) $\{2\}$ (۳) $\{1,2\}$ (۴) $\{-1,2\}$

پاسخ تشریحی
گزینه ۱ $\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ 2x + my = m^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{m-1}{2} = \frac{1}{m} \# \frac{2}{m^2} \Rightarrow \frac{m-1}{2} = \frac{1}{m} \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow$ $(m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow m = 2, m = -1$ $m = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \Rightarrow m = 2$ قابل قبول نیست $m = -1 \Rightarrow \frac{-2}{2} = \frac{1}{-1} \# 2 \Rightarrow m = -1$ قابل قبول است

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	وارون ماتریس و دترمینان	شرط وارون پذیری		
حیطه شناختی: درک و فهم	سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۱		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال
اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & m & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & m \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A به ازای کدام مقدار m، وارون پذیر نیست؟ (۱) -۲ (۲) ۳ (۳) هر مقدار (۴) هیچ مقدار

پاسخ تشریحی
گزینه ۴ شرط وارون ناپذیری، $A = 0$ است. بنابراین: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & m & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & m \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 5m-3 \\ 5m-3 & m^2+9 \end{bmatrix} \Rightarrow A = 30m^2 + 270 - 25m^2 + 30m - 9 = 0$ معادله درجه دوم $5m^2 + 30m + 261 = 0$ فاقد جواب است، پس به ازای هیچ مقدار m، ماتریس A وارون پذیر نیست.

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	وارون ماتریس و دترمینان	وارون ماتریس		
حیطه شناختی: ترکیب	سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۱		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال
اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = A^2 - 7I$ باشد، ماتریس $12B^{-1}$ کدام است؟ (۱) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

پاسخ تشریحی
گزینه ۳ $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & -2-4 \\ 6+12 & -3+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 18 & 13 \end{bmatrix}$ $B = A^2 - 7I = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 18 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 18 & 6 \end{bmatrix}$ $B^{-1} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -18 & -6 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow 12B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	وارون ماتریس و دترمینان	خواص دترمینان		
حیطه شناختی: ترکیب	سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۵/۰		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال
اگر A ماتریس مربعی و $ A =3$ باشد، حاصل $ A^{-1} ^3 + (A^3)^{-1} $ را محاسبه کنید.

پاسخ تشریحی
$ A =3 \Rightarrow A^{-1} =\frac{1}{3} \quad , \quad (A^3)^{-1} =\frac{1}{ A ^3}=\frac{1}{27}$ $ A^{-1} ^3 + (A^3)^{-1} =\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{27}=\frac{2}{27}$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	وارون ماتریس و دترمینان	دترمینان		
حیطه شناختی: کاربرد	سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۱		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال
گر $A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ و دترمینان ماتریس $A^2 - A$ برابر ۹ باشد، مقدار a کدام است؟ (۱) -۱ یا ۵ (۲) ۱ یا -۵ (۳) ۱ یا ۵ (۴) -۱ یا -۵

پاسخ تشریحی
گزینه ۲ $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+a & a \\ 1 & a+1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow A^2 - A = \begin{bmatrix} 4+a & a \\ 1 & a+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+a & 0 \\ 0 & a+2 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow A^2 - A = (a+2)^2 = 9 \Rightarrow a+2 = \pm 3 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } a = -5$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	وارون ماتریس و دترمینان	تعداد جواب های دستگاه		
حیطه شناختی: کاربرد	سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۱		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال
اگر دستگاه $\begin{cases} mx - 2y = 3 \\ 6x - 3my = n \end{cases}$ دارای بیشمار جواب باشد، مقدار $m+n$ کدام است؟ (۱) -۱۱ (۲) -۱۳ (۳) ۲۲ (۴) $\frac{17}{2}$

پاسخ تشریحی
گزینه ۱ $\frac{m}{6} = \frac{-2}{-3m} = \frac{3}{n} \Rightarrow -3m^2 = -12 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2 \Rightarrow n = \pm 9 \Rightarrow m + n = \pm 11$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	وارون ماتریس و دترمینان	حل دستگاه ماتریسی		
حیطه شناختی: کاربرد	سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۱/۵		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال
ریشه های معادله $\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ را بیابید.

پاسخ تشریحی
$\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -x+2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x(-x+2)+3=0$ $\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = 3$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	وارون ماتریس و دترمینان	حل دستگاه با وارون ماتریس		
حیطه شناختی: تجزیه و تحلیل		سطح ارزشیابی: متوسط		بارم: ۱/۵
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی		استان: مرکزی		شهرستان: اراک

سوال

دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B = \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \end{bmatrix}$ ماتریس جواب آن باشد، سپس جواب دستگاه را با استفاده از ماتریس A^{-1} به دست آورید.

پاسخ تشریحی

$$\begin{cases} 2x - 5y = -8 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2+15} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{17} & \frac{5}{17} \\ -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	وارون ماتریس و دترمینان	حل دستگاه با وارون ماتریس		
حیطه شناختی: ترکیب		سطح ارزشیابی: متوسط		بارم: ۱/۵
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی		استان: مرکزی		شهرستان: اراک

سوال			
اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$، از رابطه $AX = B$، ماتریس X کدام است؟			
(۱) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	(۲) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	(۳) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$	(۴) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

پاسخ تشریحی
گزینه ۴ $AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$ $A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	وارون ماتریس و دترمینان	دترمینان		
حیطه شناختی: کاربرد	سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۵/۰		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال
اگر $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix}$، مقدار دترمینان ماتریس $(A^{-1})^2$ کدام است؟ (۱) $4a^2$ (۲) $2a$ (۳) $\frac{1}{4a^2}$ (۴) $\frac{1}{2a}$

پاسخ تشریحی
گزینه ۳ $ A = 3a - a = 2a$ $ (A^{-1})^2 = A^{-1} ^2 = \frac{1}{ A ^2} = \frac{1}{4a^2}$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۱	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
ماتریس و کاربردها	وارون ماتریس و دترمینان	دترمینان		
حیطه شناختی: کاربرد	سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۱		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال			
اگر $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = A + X \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ باشد، مقدار A کدام است؟			
۸۵ (۱)	۱۱۵ (۲)	۱۱۲ (۳)	۹۶ (۴)

پاسخ تشریحی
گزینه ۲ $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + X \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$ با توجه به صورت سؤال خواهیم داشت: $A = -2(-2 - 63) - (14 + 1) = 130 - 15 = 115$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۲	درس: ۱
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:	آشنایی با مقاطع مخروطی	
آشنایی با مقاطع مخروطی	مکان هندسی	سطح ارزشیابی: آسان	بارم: ۰/۲۵	
حیطه شناختی: دانش	نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک	

سوال
جای خالی را با عبارت مناسب، پر کنید. فصل مشترک صفحه دلخواه p با یک سطح مخروطی در حالتی که صفحه p بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس عبور نکند، یک است.

پاسخ تشریحی
دایره

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۲	درس: ۱
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:	آشنایی با مقاطع مخروطی	
آشنایی با مقاطع مخروطی	مکان هندسی	سطح ارزشیابی: آسان	بارم: ۰/۲۵	
حیطه شناختی: دانش	نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک	

سوال
اگر صفحه ای از رأس یک رویه مخروطی نگذرد و بر محور سطح مخروطی عمود باشد، چه شکلی ایجاد می شود؟ (۱) خط راست (۲) دایره (۳) بیضی (۴) سهمی

پاسخ تشریحی
گزینه ۲

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۲	درس: ۱
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
آشنایی با مقاطع مخروطی	مکان هندسی	مکان هندسی		
حیطه شناختی: درک و فهم	سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۰/۲۵		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال

جای خالی را با عبارت مناسب، کامل کنید.

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع L', L به یک فاصله اند، است.

پاسخ تشریحی

نیمسازهای زوایای بین L', L

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۲	درس: ۱
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:	آشنایی با مقاطع مخروطی	
آشنایی با مقاطع مخروطی	مکان هندسی	سطح ارزشیابی: آسان	بارم: ۰/۲۵	
حیطه شناختی: دانش	نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک	

سوال
جای خالی را با عبارت مناسب، کامل کنید. صفحه ای بر محور سطح مخروطی دوار عمود است و از رأس آن نمی گذرد، مقطع حاصل می باشد.

پاسخ تشریحی
دایره

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۲	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
آشنایی با مقاطع مخروطی	دایره	وضعیت دو دایره نسبت به هم		
حیطه شناختی: تجزیه و تحلیل	سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۱/۵		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال

اوضاع نسبی دو دایره $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$ را مشخص کنید.

پاسخ تشریحی

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow O(0,0), r = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0 \Rightarrow O'(3,-1), r' = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 4 - 36} = 1$$

$$d = oo' = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$\begin{cases} r + r' = 2 \\ r - r' = 0 \end{cases} \Rightarrow d > r + r' \Rightarrow \text{دو دایره متخارج اند.}$$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۲	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
آشنایی با مقاطع مخروطی	دایره	خواص دایره		
حیطه شناختی: کاربرد	سطح ارزشیابی: متوسط		بارم: ۱	
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال

شعاع دایره $ax^2 + y^2 + 2x + 4y - k = 0$ برابر ۲ می باشد. مقدار k را بیابید.

پاسخ تشریحی

چون معادله داده شده، معادله دایره است، پس $a = 1$. حال داریم:

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - k = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 4k} = \frac{1}{2} \sqrt{20 + 4k} = \sqrt{5 + k}$$

$$r = 2 \Rightarrow \sqrt{5 + k} = 2 \Rightarrow 5 + k = 4 \Rightarrow k = -1$$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۲	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
آشنایی با مقاطع مخروطی	دایره	وضعیت یک نقطه نسبت به دایره		
حیطه شناختی: تجزیه و تحلیل		سطح ارزشیابی: متوسط		بارم: ۱
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی		استان: مرکزی		شهرستان: اراک

سوال

حدود m را چنان بیابید که نقطه $A(m, m-1)$ داخل دایره $x^2 + y^2 = 5$ باشد.

پاسخ تشریحی

$$x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow o(o, o), r = \sqrt{5} \Rightarrow |oA| = \sqrt{m^2 + (m-1)^2}$$

$$A \text{ درون دایره است} \Rightarrow |oA| < r \Rightarrow \sqrt{m^2 + (m-1)^2} < \sqrt{5} \Rightarrow 2m^2 - 2m + 1 < 5 \Rightarrow$$

$$m^2 - m - 2 < 0 \Rightarrow (m+1)(m-2) < 0 \Rightarrow -1 < m < 2$$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۲	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
آشنایی با مقاطع مخروطی	دایره	وضعیت خط نسبت به دایره		
حیطه شناختی: تجزیه و تحلیل		سطح ارزشیابی: متوسط		بارم: ۱
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی		استان: مرکزی		شهرستان: اراک

سوال

وضعیت خط $L: 3x - 4y = 1$ و دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 3$ را نسبت به هم مشخص کنید.

پاسخ تشریحی

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0 \Rightarrow o(1, -2), r = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 12} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{خط و دایره در دو نقطه متقاطع اند} \Rightarrow \frac{|3(1) - 4(-2) - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{5} = 2 < r \Rightarrow$$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۲	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
آشنایی با مقاطع مخروطی	دایره	نوشتن معادله دایره		
حیطه شناختی: کاربرد	سطح ارزشیابی: دشوار		بارم: ۱/۵	
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال

نقاط $(1,2), (4,-1), (2,3)$ روی دایره هستند. معادله دایره را بنویسید.

پاسخ تشریحی

معادله دایره در حالت کلی به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ که باید هر سه نقطه روی دایره صدق کنند.

$$(1,2) \Rightarrow 1 + 4 + a + 2b + c = 0 \Rightarrow a + 2b + c = -5 \quad (1)$$

$$(4,-1) \Rightarrow 16 + 1 + 4a - b + c = 0 \Rightarrow 4a - b + c = -17 \quad (2)$$

$$(2,3) \Rightarrow 4 + 9 + 2a + 3b + c = 0 \Rightarrow 2a + 3b + c = -13 \quad (3)$$

$$(2) - (1) : 3a - 3b = -12$$

$$\Rightarrow a = -6, b = -2, c = 5$$

$$(3) - (1) : a + b = -8$$

$$\text{معادله دایره : } x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۲	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
آشنایی با مقاطع مخروطی	دایره	وضعیت دو دایره نسبت به هم		
حیطه شناختی: تجزیه و تحلیل	سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۱/۵		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال

به ازای چه مقادیری از a ، دو دایره $x^2 + y^2 + 4x = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$ مماس داخل هستند؟

پاسخ تشریحی

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + a = 0 \Rightarrow o(1, -4), r = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 64 - 4a}$$

$$x^2 + y^2 + 4x = 0 \Rightarrow o'(-2, 0), r' = \frac{1}{2}\sqrt{16} = 2$$

$$oo' = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$oo' = r + r' \Rightarrow 5 = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{68 - 4a} \Rightarrow \sqrt{68 - 4a} = 6 \Rightarrow a = 8$$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۲	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
آشنایی با مقاطع مخروطی	دایره	شناخت خواص دایره		
حیطه شناختی: کاربرد	سطح ارزشیابی: متوسط		بارم: ۱/۵	
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال

معادله دایره ای را بنویسید که دو خط به معادله های $y = -x + 3$, $y = 2x$ شامل قطره های آن باشد و از نقطه $A(4, -2)$ بگذرد.

پاسخ تشریحی

مرکز دایره محل برخورد دو خط است.

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 3 \end{cases} \Rightarrow 2x = -x + 3 \Rightarrow x = 1, y = 2$$

پس $O(1,2)$ مرکز دایره است و شعاع آن به صورت زیر محاسبه می شود:

$$r = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \text{ : معادله دایره}$$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۲	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
آشنایی با مقاطع مخروطی	دایره	وضعیت نسبی دو دایره نسبت به هم		
حیطه شناختی: تجزیه و تحلیل	سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۰/۲۵		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال
دو دایره به شعاع های ۳ و ۴ مفروضند. اگر طول خط المکزین آن ها $\sqrt{2}-1$ باشد، دو دایره نسبت به هم چگونه اند؟ (۱) مماس داخل (۲) متخارج (۳) متداخل (۴) مماس خارج

پاسخ تشریحی
گزینه ۳ دو دایره متداخل هستند. $\Rightarrow d < r - r' \Rightarrow \begin{cases} r + r' = 4 + 3 = 7 \\ r - r' = 4 - 3 = 1 \end{cases}$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۲	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
آشنایی با مقاطع مخروطی	دایره	شناخت معادله دایره به صورت استاندارد و ضمنی		
حیطه شناختی: درک و فهم		سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۱	
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی		استان: مرکزی	شهرستان: اراک	

سوال

ابتدا معادله دایره $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ را استاندارد کرده، سپس مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید.

پاسخ تشریحی

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3 \Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 3 + 4 + 9$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16 \Rightarrow o(2,3) r = 4$$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۲	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
آشنایی با مقاطع مخروطی	دایره	وضعیت نسبی خط نسبت به دایره		
حیطه شناختی: تجزیه و تحلیل		سطح ارزشیابی: متوسط		بارم: ۰/۲۵
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی		استان: مرکزی		شهرستان: اراک

سوال
درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. خط $x + y + 1 = 0$ بر دایره $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ مماس است.

پاسخ تشریحی
نادرست $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow o(-1, 2), r = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 4} = 2$ $d = \frac{ -1 + 2 + 1 }{\sqrt{1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ $d < r \Rightarrow$ خط بر دایره مماس نیست.

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۲	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:	وضعیت نقطه نسبت به دایره	
آشنایی با مقاطع مخروطی	دایره	سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۰/۲۵	
حیطه شناختی: تجزیه و تحلیل	استان: مرکزی	شهرستان: اراک	نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	

سوال
جای خالی را با عبارت مناسب، کامل کنید. وضعیت نقطه $A(-1, -1)$ نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ است.

پاسخ تشریحی
داخل دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0 \Rightarrow o(1, -2), r = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 20} = \sqrt{10}$ $oA = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ $oA < r \Rightarrow$ نقطه A داخل دایره است.

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۲	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
آشنایی با مقاطع مخروطی	دایره	رابطه بین دایره و وتر		
حیطه شناختی: ترکیب	سطح ارزشیابی: دشوار		بارم: ۱	
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال

معادله دایره ای را بنویسید که $O(4,6)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله $3x + 4y + 4 = 0$ وتری به طول ۱۲ جدا کند.

پاسخ تشریحی

$$3x + 4y + 4 = 0 \Rightarrow d = \frac{|3(4) + 6(4) + 4|}{\sqrt{9+16}} = \frac{40}{5} = 8$$

$$r^2 + d^2 = x^2 \Rightarrow r^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow r^2 = 100 \Rightarrow r = 10$$

معادله دایره : $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 100$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۲	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:	وضعیت خط نسبت به دایره	
آشنایی با مقاطع مخروطی	دایره			
حیطه شناختی: تجزیه و تحلیل		سطح ارزشیابی: متوسط		بارم: ۱
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی		استان: مرکزی		شهرستان: اراک

سوال

معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن مبدأ مختصات و بر خط $x + y = 2$ مماس باشد.

پاسخ تشریحی

$$r = OH = \frac{|\circ + \circ - 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$(x - \circ)^2 + (y - \circ)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

معادله دایره :

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۲	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
آشنایی با مقاطع مخروطی	دایره	آشنایی با خواص دایره		
حیطه شناختی: کاربرد	سطح ارزشیابی: متوسط		بارم: ۱	
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال

حدود a را طوری به دست آورید که $x^2 + y^2 - 3x + 5y + a = 0$ بتواند معادله یک دایره باشد.

پاسخ تشریحی

$$x^2 + y^2 - 3x + 5y + a = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 4c = 9 + 25 - 4a > 0 \Rightarrow 34 - 4a > 0$$

$$\Rightarrow a < \frac{17}{2}$$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۲	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:	آشنایی با خواص دایره	
آشنایی با مقاطع مخروطی	دایره	سطح ارزشیابی: دشوار	بارم: ۱/۵	
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال
خط $x + ky = 2$ دایره $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ را در دو نقطه قطع می کند. فاصله این دو نقطه چقدر است؟

پاسخ تشریحی
مرکز این دایره $O(2, 0)$ است که در خط $x + ky = 2$ صدق می کند، پس این خط، قطری از دایره می باشد و فاصله دو نقطه برخورد آن با دایره، برابر قطر دایره است. $r = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 0 + 20} = 3 \Rightarrow \text{قطر} = 2r = 6$

کتاب: هندسه ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	فصل: ۲	درس: ۲
نام فصل:	نام درس:	مفهوم مورد ارزشیابی:		
آشنایی با مقاطع مخروطی	دایره	وضعیت نسبی دو دایره نسبت به هم		
حیطه شناختی: تجزیه و تحلیل	سطح ارزشیابی: متوسط	بارم: ۲		
نام طراح: گروه ریاضی استان مرکزی	استان: مرکزی	شهرستان: اراک		

سوال

معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(1, -2)$ باشد و بر دایره $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ مماس خارج باشد.

پاسخ تشریحی

چون دو دایره مماس خارجی هستند، پس طول خط المکزین برابر مجموع شعاع هاست.

$$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow O'(0, 1), \quad r' = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 4 + 12} = 2$$

$$OO' = \sqrt{(1-0)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$OO' = r + r' \Rightarrow \sqrt{10} = r + 2 \Rightarrow r = \sqrt{10} - 2$$

$$\text{معادله دایره : } (x-1)^2 + (y+2)^2 = (\sqrt{10} - 2)^2$$

