

بررسی موضوعی امتحانات نهایی

هندسه ۳ دوازدهم ریاضی

بر اساس سوالات طبقه بندی شده امتحانات
نهایی استاد بزرگوار استاد جابر عامری

فصل ۱ ماتریس ها و کاربرد آنها

* مفهوم ماتریس و ماتریس های خاص

خلاصه درس

تعریف های اساسی

هر آرایش مستطیل شکل از اعداد را یک ماتریس (Matrix) می نامند .

هر ماتریس که m سطر n ستون دارد را یک ماتریس از مرتبه $m \times n$ می نامند
هر عدد درون یک ماتریس را یک درایه می نامند .

درایه ی a_{ij} یعنی عددی که در سطر i ام و ستون j ام قرار دارد .

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

* مفهوم ماتریس و ماتریس های خاص

خلاصه درس

معرفی چند ماتریس خاص

۱- ماتریس صفر

ماتریسی که همه درایه های آن صفر باشند را ماتریس صفر می نامند و با نماد $\bar{O}$ نمایش می دهند

$$\bar{O} = [a_{ij}]_{m \times n}, a_{ij} = 0$$

۲- ماتریس سطری

ماتریسی که همه درایه های آن فقط در یک سطر باشند را ماتریس سطری می نامند

$$A = [a_{ij}]_{1 \times n} = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \cdots \quad a_{1n}]$$

۳- ماتریس ستونی

ماتریسی که همه درایه های آن فقط در یک ستون باشند را

ماتریس ستونی می نامند

$$A = [a_{ij}]_{m \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

* مفهوم ماتریس و ماتریس های خاص

خلاصه درس

معرفی چند ماتریس خاص

۴- ماتریس مربعی

ماتریسی که تعداد سطرها و ستون های آن مساوی باشند را ماتریس مربعی می نامند .

توجه

در ماتریس مربعی از مرتبه $n \times n$ ، مجموعه درایه های $a_{11}, a_{22}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ را قطر اصلی ماتریس می نامند

$$A = [a_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A = [a_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

نتیجه در ماتریس مربعی شرط آنکه درایه a_{ij} روی قطر اصلی باشد این است که

$$i = j$$

* مفهوم ماتریس و ماتریس های خاص

خلاصه درس

معرفی چند ماتریس خاص

۵- ماتریس قطری

$$A = [a_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

هر ماتریس مربعی که تمام درایه های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس قطری می نامند .

۶ - ماتریس اسکالر

$$A = [a_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} ; \quad a_{ij} = \begin{cases} a & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$$

هر ماتریس قطری که تمام درایه های واقع بر قطر اصلی آن مساوی یکدیگر باشند را ماتریس اسکالر می نامند .

* مفهوم ماتریس و ماتریس های خاص

خلاصه درس

معرفی چند ماتریس خاص

۷- ماتریس همانی (واحد)

هر ماتریس قطری که تمام درایه های واقع بر قطر اصلی آن مساوی یک باشند را ماتریس همانی یا واحد می نامند .

$$I_n = [a_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} ; \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$$

$$I_1 = [1] = 1 \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* مفهوم ماتریس و ماتریس های خاص

خلاصه درس

معرفی چند ماتریس خاص

۸- ماتریس بالا مثلثی

هر ماتریس مربعی که تمام درایه های پایین قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس بالا مثلثی می نامند .

۹- ماتریس پایین مثلثی

هر ماتریس مربعی که تمام درایه های بالای قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس پایین مثلثی می نامند .

$$A = [a_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

$$A = [a_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

* مفهوم ماتریس و ماتریس های خاص

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۱	دی ۱۳۹۷	۰/۲۵ نمره
---	---------	-----------

۱ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. پاسخ

هر ماتریس قطری که درایه های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، را ماتریس **اسکالر** می نامند.

۵	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره
---	------------	-----------

۵ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را یک ماتریس **ایسکالر** می نامیم.

* مفهوم ماتریس و ماتریس های خاص

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۱ نمره	تیر ۱۳۹۸	۲
--------	----------	---

۲: در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i - 2j & i < j \\ -i + j & i \geq j \end{cases}$ می باشد. مجموع درایه های ستون دوم ماتریس A را

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

به دست آورید.

پاسخ



$$a_{12} = 1 - 2(2) = -3$$

$$a_{22} = -2 + 2 = 0$$

$$a_{32} = -3 + 2 = -1$$

$$\rightarrow a_{12} + a_{22} + a_{32} = -3 + 0 - 1 = -4$$

* مفهوم ماتریس و ماتریس های خاص

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۳	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره
---	---------	-----------

۳: جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

در ماتریس $A = [a_{ij}]_{4 \times 3}$ که در آن $a_{ij} = \frac{2i}{j-1}$ باشد، درایه های واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس A برابر

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

است با : 6

پاسخ



$$a_{32} = \frac{2(3)}{2-1} = 6$$

* مفهوم ماتریس و ماتریس های خاص

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۴	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره
---	---------	-----------

۴ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

✓ هر ماتریس اسکالر یک ماتریس قطری است.

پاسخ



هر ماتریس قطری که تمام درایه های
واقع بر قطر اصلی آن مساوی یکدیگر
باشند را ماتریس اسکالر می نامند .

* مفهوم ماتریس و ماتریس های خاص

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۶	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۲۵/۰ نمره
---	----------------------	-----------

۶: در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

اگر ماتریس A فقط از یک سطر تشکیل شده باشد (فقط دارای یک سطر باشد) آنگاه آن را یک ماتریس **سطری** می نامیم.

۷	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۲۵/۰ نمره
---	----------------------	-----------

۷: درستی یا نادرستی گزاره ی زیر را معلوم کنید.

ماتریس مربعی که تمام درایه های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند، ماتریس **قطری** نامیده می شود. **×**

* مفهوم ماتریس و ماتریس های خاص

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۸	شهریور ۱۳۹۹	۲۵/۰ نمره
---	-------------	-----------

۸: جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

در ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ m-۱ & ۴ \end{bmatrix}$ مقدار m برابر ۱ است.

پاسخ



$$m - 1 = 0 \rightarrow \boxed{m = 1}$$

* تساوی ماتریس ها

تساوی بین دو ماتریس: دو ماتریس هم مرتبه $A=[a_{ij}]_{m \times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m \times n}$ را مساوی می‌گوییم هرگاه درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند به عبارت دیگر:

$$\forall i, j, a_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}] = [b_{ij}]$$

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۱	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره
---	-------------	-----------

۱: اگر $A = \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A = B$ ، در این صورت حاصل $x + y + z$ را بیابید.

$$2x = 3 \rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

$$2x + y = 5 \rightarrow 3 + y = 5 \rightarrow \boxed{y = 2}$$

$$\rightarrow x + y + z = \frac{3}{2} + 2 - 2 = \frac{3}{2}$$

پاسخ



نمونه سوالات امتحانات نهایی

۲	شهریور ۱۳۹۹	۱/۵ نمره
---	-------------	----------

۲: اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-1 & 8 \\ 3 & z+1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} y+1 & x-2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ مساوی باشند. مقدار $x + y + z$ را بیابید.

پاسخ

$$x - 2 = 8 \rightarrow \boxed{x = 10}$$

$$y + 1 = x - 1 \rightarrow y + 1 = 9 \rightarrow \boxed{y = 8}$$

$$z + 1 = 4 \rightarrow \boxed{z = 3}$$

$$\rightarrow x + y + z = 10 + 8 + 3 = 21$$

* اعمال روی ماتریس ها

خلاصه درس

ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس (ضرب اسکالر)

تعریف: برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریسی چون A آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم، به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} , r \in \mathbb{R} \Rightarrow rA = r[a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

قرینه یک ماتریس

برای بدست آوردن قرینه ماتریس A کافی است تمام درایه های آن را در -1 ضرب کنیم .

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \rightarrow -A = -[a_{ij}]_{m \times n} = [-a_{ij}]_{m \times n}$$

* اعمال روی ماتریس ها

خلاصه درس

جمع و تفریق دو ماتریس

برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم مرتبه A و B کافی است درایه های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم که حاصل مجموع یا تفاضل A و B ماتریسی است چون C که از همان مرتبه A و B است. به عبارت دیگر می توان نوشت :

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} , B = [b_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow A \pm B = [a_{ij}] \pm [b_{ij}] = [a_{ij} \pm b_{ij}]$$

* اعمال روی ماتریس ها

خلاصه درس

خواص مهم جمع ماتریسها

اگر A, B, C ماتریس هایی هم مرتبه باشند . نتایج زیر به راحتی قابل اثبات است .

1. $A + B = B + A$	خاصیت جابه جایی
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$	خاصیت دسته بندی
3. $A + \bar{0} = \bar{0} + A = A$	خاصیت عضو خنثی برای جمع ماتریس ها
4. $A + (-A) = (-A) + A = \bar{0}$	خاصیت جمع با قرینه

* اعمال روی ماتریس ها

خلاصه درس

خواص مهم ضرب عدد در ماتریس

اگر A, B ماتریس هایی هم مرتبه و r, s دو عدد حقیقی دلخواه باشند . نتایج زیر به راحتی قابل اثبات است .

$$1. \quad r(A \pm B) = rA \pm rB$$

$$2. \quad (r \pm s)A = rA \pm sA$$

$$3. \quad rA = rB, r \neq 0 \Rightarrow A = B$$

$$4. \quad A = B \Rightarrow rA = rB$$

* اعمال روی ماتریس ها

خلاصه درس

ضرب دو ماتریس

اگر A ماتریسی از مرتبه $m \times n$ و B ماتریسی از مرتبه $n \times p$ باشد .
می توان ماتریس $A \times B$ را به صورت زیر تعریف کرد :

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p} = [c_{ij}]_{m \times p}$$

$c_{ij} = A$ سطر i ام $\times$ ستون j ام B

$$\Rightarrow C_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \dots + a_{ip} \times b_{pj}$$

* اعمال روی ماتریس ها

خلاصه درس

مثال اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ماتریس های $A \times B$, $B \times A$ را در صورت امکان حساب کنید.

$$A_{2 \times 3} \times B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & 10 & 3 \\ 28 & 19 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (2)(1) + (1)(0) + (5)(7) &= 37 \\ (2)(0) + (1)(5) + (5)(1) &= 10 \\ (2)(4) + (1)(0) + (5)(-1) &= 3 \end{aligned}$$

محاسبه $B \times A$ امکان پذیر نیست
زیرا تعداد سطرها B با تعداد
ستون های A مساوی نیست.

$$\begin{aligned} (0)(1) + (3)(0) + (4)(7) &= 28 \\ (0)(0) + (3)(5) + (4)(1) &= 19 \\ (0)(4) + (3)(0) + (4)(-1) &= -4 \end{aligned}$$

* اعمال روی ماتریس ها

خلاصه درس

بعضی از خواص مهم ضرب ماتریسها

اگر A, B, C سه ماتریس و r یک عدد حقیقی دلخواه باشد . نتایج زیر به راحتی قابل اثبات است .

ضرب ماتریس ها خاصیت جابه جایی ندارد

$$1. \quad AB \neq BA$$

خاصیت دسته بندی

$$2. \quad A(BC) = (AB)C$$

خاصیت توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع ماتریس ها

$$3. \quad A \times (B + C) = AB + AC, (B + C) \times A = BA + CA$$

خاصیت ضرب ماتریس مربعی در ماتریس همانی

$$4. \quad AI = IA = A$$

$$5. \quad r(AB) = (rA)B = A(rB)$$

* اعمال روی ماتریس ها

خلاصه درس

توجه : ضرب ماتریس ها در حالت کلی خاصیت جابه جایی ندارد $AB \neq BA$

پس

$$1. (A - B)(A + B) = A^2 + AB - BA - B^2 \neq A^2 - B^2$$

$$2. (A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

$$3. (A - B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$$

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۱	دی ۱۳۹۷	۲۵/۰ نمره
---	---------	-----------

۱ : جای خالی را با یک کلمه‌ی مناسب پر کنید.

حاصل ضرب ماتریس های خاصیت جابجایی ندارد .

پاسخ



نمونه سوالات امتحانات نهایی

۱ نمره	دی ۱۳۹۷	۲
--------	---------	---

۲: درستی یا نادرستی عبارات های زیر را مشخص کنید.

الف: اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد. مجموع درایه های سطر دوم A^3 برابر ۵ می باشد. ✗

$$A^2 = A_{3 \times 3} \times A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ -1 & 1 & -4 \\ 7 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

پاسخ

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ -1 & 1 & -4 \\ 7 & 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & -10 & -14 \\ -8 & -6 & -7 \\ 11 & 12 & -22 \end{bmatrix}$$

$$-8 - 6 - 7 = -21 \neq 5$$

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۱ نمره	دی ۱۳۹۷	۲
--------	---------	---

۲ : درستی یا نادرستی عبارات های زیر را مشخص کنید.

ب: اگر $A^2 = A$ باشد. در این صورت داریم : $(A + I)^2 = I + 3A$

پاسخ

$$\begin{aligned}
 (A + I)^2 &= (A + I)(A + I) \\
 &= A^2 + AI + IA + I^2 \\
 &= A + A + A + I \\
 &= I + 3A
 \end{aligned}$$



نمونه سوالات امتحانات نهایی

۳	دی ۱۳۹۷	نمره ۱/۲۵
---	---------	-----------

۳: اگر ماتریس A به صورت زیر تعریف شده باشد. ماتریس $2A - 3I$ را به دست آورید.

$$a_{ij} = \begin{cases} i \cdot j & i > j \\ i^2 & i = j \\ 2i - j & i < j \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

پاسخ

$$2A - 3I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 8 & 2 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

۴	دی ۱۳۹۷	۱/۵ نمره
---	---------	----------

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۴: اگر ضرب ماتریس های $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشد.

$$AB = \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x + 3y & 3x + 4y \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

حاصل $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -x \end{bmatrix} \times [x \quad 2 \quad -y]$ را بیابید.

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x + 6 & 4y - 3 \\ 3x + 8 & 3y - 4 \end{bmatrix}$$

$$AB = BA \rightarrow 3x + 8 = 5 \rightarrow \boxed{x = -1}, \quad 3y - 4 = 2 \rightarrow \boxed{y = 2}$$

پاسخ

$$[-1 \quad 2 \quad -2] \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [-3 + 4 - 2] = [-1] = -1$$

* اعمال روی ماتریس ها

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۵	خرداد ۱۳۹۸	۲۵/۰ نمره
---	------------	-----------

۵: درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر برای ماتریس های متمایز A و B و C داشته باشیم، $AB = AC$ آنگاه لزوماً $B = C$ است. نادرست

پاسخ

* اعمال روی ماتریس ها

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۶	خرداد ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره
---	------------	-----------

۶: در معادله‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x & 2 \end{bmatrix}$ مقدار x را بیابید.

$$[3x \quad 2] \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = [3x - 6 \quad -6x + 12]$$

پاسخ

$$\begin{aligned} [3x \quad 2] \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} &= [3x - 6 \quad -6x + 12] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [-3x + 6 - 6x + 12] \\ &= [-9x + 18] \end{aligned}$$

$$\rightarrow -9x + 18 = 0 \rightarrow x = 2$$

* اعمال روی ماتریس ها

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۷	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره
---	---------	----------

۷: اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^7 را به دست آورید.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -2I$$

پاسخ

$$A^3 = A^2 \times A = -2IA = -2A$$

$$A^4 = A^2 \times A^2 = (-2I)(-2I) = 4I^2 = 4I$$

$$A^7 = A^4 \times A^3 = (4I)(-2A) = -8IA = -8A = -8 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -16 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۸	دی ۱۳۹۸	نمره ۱/۲۵
---	---------	-----------

۸: ماتریس های $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a+b & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4a+b \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. مقادیر a و b را

چنان بیابید که داشته باشیم: $A^2 - B = \overline{O}$ (ماتریس صفر است).

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

پاسخ

$$A^2 - B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+b & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ 4a+b=5 \end{cases}$$

$$\rightarrow a=0, b=5$$

* اعمال روی ماتریس ها

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۹	خرداد ۱۳۹۹	۲۵/۰ نمره
---	------------	-----------

۹: درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالت کلی حاصل ضرب ماتریس ها خاصیت جابجایی دارد. **نادرست**

پاسخ

* اعمال روی ماتریس ها

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۱۰	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۲۵ نمره
----	----------------------	-----------

۱۰: اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & a \end{bmatrix}$ ، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل ضرب $A \times B$

ماتریس قطری باشد.

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 2a - 4 \\ 2b - 2 & -b - a \end{bmatrix}$$

پاسخ

$$\rightarrow 2a - 4 = 0 , 2b - 2 = 0$$

$$\rightarrow a = 2 , \quad b = 1$$

* اعمال روی ماتریس ها

نمونه سوالات امتحانات نهایی

نمره ۱/۲۵	شهریور ۱۳۹۹	۱۱
-----------	-------------	----

۱۱ : معادله‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ را حل کنید.

پاسخ

$$\begin{bmatrix} x & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = [3x-3-12] = [3x-15]$$

$$\rightarrow 3x-15=0 \rightarrow x=5$$

* اعمال روی ماتریس ها

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۱۴	شهریور ۱۳۹۹	۲ نمره
----	-------------	--------

۱۴ : اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقادیر m و n را طوری بیابید که رابطه‌ی $A^2 = mA + nI_2$ برقرار باشد.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

پاسخ

$$mA + nI_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4m \\ 2m & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 4m \\ 2m & m + n \end{bmatrix}$$

$$A^2 = mA + nI_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 4m \\ 2m & m + n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} n = 8 \\ 4m = 4 \rightarrow m = 1 \end{cases}$$

* دترمینان

خلاصه درس

دترمینان تابعی است که یک ماتریس مربعی را به یک عدد حقیقی نظیر می کند.

$$A = [a_{ij}]_{n \times n} \Rightarrow \det(A) = |A| = |a_{ij}|_{n \times n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

دترمینان برای ماتریس های از مرتبه 2×2 به صورت زیر تعریف می شود .

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

* دترمینان

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

خلاصه درس

دترمینان ماتریس 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow M_{21} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} |M_{21}| = -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})$$

$$\det(A) = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$\det(A) = |A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$\det(A) = |A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

* دترمینان

خلاصه درس

مثال دترمینان مقابل را حساب کنید :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -6 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

پاسخ (بسط بر حسب سطر اول)

$$|A| = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \times 3 + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -6 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \times 0 + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \times 4$$

$$= (10 - 7) \times 3 - 0 + (-6 - 6) \times 4$$

$$= +9 - 0 - 48 = -39$$

توجه : در محاسبه دترمینان هیچ تفاوتی ندارد که بر حسب کدام سطر یا ستون محاسبه کنیم

نتیجه : بهتر است سطر یا ستونی انتخاب شود که بیشترین تعداد صفرها را داشته باشد

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

* دترمینان

خلاصه درس دستور ساروس برای محاسبه دترمینان 3×3

توجه : این روش منحصرأ ویژه دترمینان 3×3 می باشد .

فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ در این برای محاسبه دترمینان می توان به صورت زیر عمل کرد .

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

* دترمینان

خلاصه درس نتایج

۱ برای هر دو ماتریس مربعی هم مرتبه A و B همواره داریم $|AB| = |BA| = |A||B|$

ولی در حالت کلی $|A + B| = |B + A| \neq |A| + |B|$

۲: دترمینان هر ماتریس مربعی که تمام درایه های یکی از سطرها یا ستون های آن صفر باشند . مساوی صفر است .

۳: دترمینان هر ماتریس مربعی که یکی از سطرها یا ستون های آن ضربی از سطر دیگر یا یکی از ستون های مضربی از ستون دیگر باشد . مساوی صفر است .

۴: دترمینان هر ماتریس بالا مثلثی یا پایین مثلثی برابر است با حاصل ضرب درایه های قطر اصلی آن .

۵: دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با حاصل ضرب درایه های قطر اصلی آن .

۶: دترمینان هر ماتریس همانی برابر است با یک .

* دترمینان

خلاصه درس نتایج

۷: اگر تمام درایه های یک سطر یا یک ستون از یک ماتریس مربعی را در عدد حقیقی k ضرب کنیم دترمینان آن ماتریس نیز k برابر می شود .

۸: اگر تمام درایه های ماتریس مربعی از مرتبه $n \times n$ را در عدد حقیقی k ضرب کنیم دترمینان آن ماتریس k^n برابر می شود .

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

۹: اگر A یک ماتریس مربعی و n یک عدد طبیعی باشد آنگاه: $|A^n| = |A|^n$

* دترمینان

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۱	دی ۱۳۹۷	۷۵/۰ نمره
---	---------	-----------

۱ : اگر A ماتریس 3×3 باشد و $|A| = -2$. حاصل $|A|.A|$ را بیابید.

$$||A|.A| = |-2A| = (-2)^3 |A| = -8 \times (-2) = 16$$

پاسخ

* دترمینان

نمونه سوالات امتحانات نهایی

انمره	خرداد ۱۳۹۸	۲
-------	------------	---

۲: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A^3|$ را محاسبه کنید.

پاسخ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (8 + 0 + 0) - (0 + 6 + 0) = 8 - 6 = 2$$

$$|A^3| = |A|^3 = 2^3 = 8$$

* دترمینان

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۳	تیر ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره
---	----------	-----------

۳ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی

پاسخ

* دترمینان

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۴	تیر ۱۳۹۸	۱ نمره
---	----------	--------

۴: اگر A ماتریس 3×3 باشد و $|A| = 2$. حاصل $|\frac{1}{|A|}A|$ را بیابید.

$$\left| \frac{1}{|A|}A \right| = \left| \frac{1}{2}A \right| = \left(\frac{1}{2} \right)^3 |A| = \frac{1}{8} \times 2 = \frac{1}{4}$$

پاسخ

مشابه

۹	خرداد ۱۳۹۹	۲۵/۰ نمره
---	------------	-----------

۹: درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر A یک ماتریس 3×3 و $|A| = 2$ باشد، آنگاه $|2A| = 16$ است.

* دترمینان

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۵	شهریور ۱۳۹۸	۲۵ / ۰ نمره
---	-------------	-------------

۵ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A|$ برابر است با -30 .

$$|A| = 2 \times (-3) \times 5 = -30$$

پاسخ

* دترمینان

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۶	شهریور ۱۳۹۸	۲ نمره
---	-------------	--------

۶: اگر ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i = j \\ i - j & i > j \\ j - i & i < j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد. پاسخ الف

الف) حاصل ماتریس $A \times B$ را به دست آورید.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 12 \\ 1 & 10 & 11 \\ 19 & 5 & 42 \end{bmatrix}$$

ب) دترمینان ماتریس B را به دست آورید.

پاسخ ب

~~$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$~~

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (30 + 4 + 0) - (0 + 0 - 5) = 34 + 5 = 39$$

* دترمینان

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۲۵/۰ نمره	دی ۱۳۹۸	۷
-----------	---------	---

۷: جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|-A|$ برابر است با -8

$$|A| = (-2) \times (4) \times (-1) = +8$$

پاسخ

$$|-A| = (-1)^3 |A| = -(+8) = -8$$

* دترمینان

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۸	دی ۱۳۹۸	نمره ۱/۲۵
---	---------	-----------

۸: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ دو ماتریس باشند. دترمینان ماتریس BA را بدست آورید.

پاسخ

$$B \times A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 17 & 8 \end{bmatrix}$$

$$|B \times A| = (72 + 2 + 17) - (-3 + 102 - 8) = 91 - 91 = 0$$

* دترمینان

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۱۰	خرداد ۱۳۹۹	۱/۷۵ نمره
----	------------	-----------

۱۰: دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & m-2 \\ n+1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 0 & n \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد،

$$m - 2 = 0 \rightarrow m = 2$$

$$n + 1 = 0 \rightarrow n = -1$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 0 \times 0 = 2$$

~~$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$~~

حاصل $|A| + |B|$ را محاسبه کنید.

پاسخ

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (0 - 3 - 2) - (0 + 2 + 4) = -5 - 6 = -11$$

$$|A| + |B| = 2 - 11 = -9$$

* دترمینان

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۱۱	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۷۵/۰ نمره
----	----------------------	-----------

۱۱: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ ، در این صورت حاصل $|A| \cdot A$ را بیابید.

~~$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$~~

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 5 \end{vmatrix} = (-10 + 0 + 0) - (0 - 8 + 0) = -10 + 8 = -2$$

$$|A| \cdot A = |-2A| = (-2)^3 |A| = -8 \times (-2) = 16$$

پاسخ

* دترمینان

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۱۲	شهریور ۱۳۹۹	۲۵/۰ نمره
----	-------------	-----------

۱۲ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

اگر A یک ماتریس 3×3 و $|A| = 5$ باشد، آنگاه $|\frac{1}{2}A|$ برابر است.

$$\left| \frac{1}{2}A \right| = \left(\frac{1}{2} \right)^3 |A| = \frac{1}{8} \times (5) = \frac{5}{8}$$

پاسخ

* دترمینان

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۱۳	شهریور ۱۳۹۹	۱/۵ نمره
----	-------------	----------

۱۳: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $|A| + |B^2|$ را بیابید.

$$|A| = 2 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 1 \times (4 + 6) = 20$$

$$|B| = 3 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 1 \times (-2 - 0) = -6$$

$$|A| + |B^2| = |A| + |B|^2 = 20 + 36 = 56$$

پاسخ

* دترمینان

نمونه سوالات امتحانات نهایی

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

۱/۲۵ نمره	دی ۱۳۹۹	۱۵
-----------	---------	----

۱۵: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس همانی 3×3 باشد، حاصل عبارت زیر را به

دست آورید. $|A + B| + |2I_3| =$

پاسخ

~~$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$~~

$$|A + B| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (15 - 9 - 4) - (-2 - 30 + 9) = 2 + 23 = 25$$

$$|2I_3| = 2^3 |I_3| = 8 \times 1 = 8$$

$$|A + B| + |2I_3| = 25 + 8 = 33$$

* وارون ماتریس

خلاصه درس

برای هر ماتریس مربعی مانند A ، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی است چون B به طوری که $A \times B = B \times A = I$. در این صورت B را وارون A می نامیم و با A^{-1} نشان می دهیم.

* وارون ماتریس

خلاصه درس

توجه : وارون یک ماتریس در صورت وجود یکتا است.

اثبات (برهان خلف)

فرض کنیم ماتریس A بیش از یک وارون داشته باشد مثلا ماتریس های متمایز B, C هر دو وارون A باشند . در این صورت :

$$AB = BA = I, \quad AC = CA = I$$

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

$$\Rightarrow B = C$$

و این خلاف فرض متمایز بودن B, C است . لذا وارون یک ماتریس در صورت وجود یکتا است

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

* وارون ماتریس

خلاصه درس

وارون ماتریس 2×2

وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در صورت وجود برابر است با :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

نتیجه

ماتریس مربعی A وارون پذیر است اگر و تنها اگر $|A| \neq 0$

* وارون ماتریس

خلاصه درس

نتایج اگر ماتریس های A, B وارون پذیر باشند آنگاه

$$1) (A^{-1})^{-1} = A$$

$$2) (A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$$

$$3) I^{-1} = I$$

* وارون ماتریس

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۱	خرداد ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره
---	------------	-----------

۱ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس مربعی A وارون پذیر باشد، آن است که دترمینان ماتریس A **ناصفر** باشد.

پاسخ

* وارون ماتریس

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۲	شهریور ۱۳۹۸	۷۵/۰ نمره
---	-------------	-----------

۲: مقدار m را طوری بیابید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} m & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد.

پاسخ

$$|A| = ad - bc = 0$$

$$\rightarrow 2m - 4 \times 1 = 0$$

$$\rightarrow 2m = 4$$

$$\rightarrow m = 2$$

* وارون ماتریس

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۳	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره
---	------------	-----------

۳: جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

اگر $A = \begin{bmatrix} a & 8 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد، مقدار a برابر -6 است.

$$|A| = ad - bc = 0$$

$$\rightarrow -4a - 3 \times 8 = 0$$

$$\rightarrow -4a = 24$$

$$\rightarrow a = -6$$

پاسخ

* وارون ماتریس

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۰/۲۵ نمره	خرداد ۱۳۹۹	۳
-----------	------------	---

۳: جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

اگر $A = \begin{bmatrix} a & 8 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد، مقدار a برابر -6 است.

$$|A| = ad - bc = 0$$

$$\rightarrow -4a - 3 \times 8 = 0$$

$$\rightarrow -4a = 24$$

$$\rightarrow a = -6$$

پاسخ

* وارون ماتریس

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۴	خرداد ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره
---	------------	-----------

۴: الف: اگر $A = \begin{bmatrix} |A| & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $|A|$ را بیابید.

$$|A| = ad - bc$$

$$\rightarrow |A| = 5|A| - 3 \times 8 \rightarrow -4a = 24 \rightarrow |A| = -6$$

پاسخ

ب: ماتریس وارون A را حساب کنید.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{8}{6} \\ \frac{3}{6} & 1 \end{bmatrix}$$

* وارون ماتریس

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۵	خرداد ۱۴۰۰	۱/۵ نمره
---	------------	----------

۵: اگر $2A = \begin{bmatrix} |A| & -4 \\ 1 & |A| \end{bmatrix}$ باشد، در این حاصل $|A^{-1}|$ را بیابید.

$$|A| = ad - bc$$

$$\rightarrow |2A| = |A| \times |A| - (-4) \times 1$$

پاسخ

$$\rightarrow 2^2 |A| = |A|^2 + 4 \rightarrow |A|^2 - 4|A| + 4 = 0 \rightarrow (|A| - 2) = 0 \rightarrow |A| = 2$$

$$\rightarrow 2A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

* وارون ماتریس

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۱ نمره	شهریور ۱۴۰۰	۶
--------	-------------	---

۶: ماتریس $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ مفروض است، ماتریس A را به دست آورید.

$$|A^{-1}| = ad - bc$$

پاسخ

$$\rightarrow |A^{-1}| = 2 \times 3 - (-1) \times 2 = 6 + 2 = 8$$

$$(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A^{-1}|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \rightarrow (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

* حل دستگاه دو معادله دو مجهولی به کمک ماتریس وارون

خلاصه درس

فرض کنیم x, y مجهول های دستگاه دو معادله دو مجهولی مقابل باشند

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

با فرض $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ نتیجه می شود

$$AX = B$$

$$\Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

با شرط وارون پذیر بودن A نتیجه می شود

$$\Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}B}$$

* حل دستگاه دو معادله دو مجهولی به کمک ماتریس وارون

خلاصه درس

نتیجه

شرط لازم و کافی برای آنکه یک دستگاه دو معادله دو مجهولی دارای یک دسته جواب منحصر به فرد باشد این است که دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه صفر **نباشد**

توجه

منظور از مجموعه جواب دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ یافتن مختصات

نقطه یا نقاط مشترک بین دو خط $d : ax + by = c$ و $d' : a'x + b'y = c'$ است

* حل دستگاه دو معادله دو مجهولی به کمک ماتریس وارون

خلاصه درس

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad \text{نتایج}$$

۱. اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ دستگاه دو معادله دو مجهولی فقط یک دسته جواب منحصر به فرد دارد .

(دو خط همدیگر را فقط در یک نقطه قطع می کنند .)

۲. اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ دستگاه دو معادله دو مجهولی هیچ جوابی ندارد . (دو خط موازی اند .)

۳. اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ دستگاه دو معادله دو مجهولی بی شمار جواب دارد . (دو خط منطبق اند .)

* حل دستگاه دو معادله دو مجهولی به کمک ماتریس وارون

خلاصه درس

نکته دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases} ax + by = 0 \\ a'x + b'y = 0 \end{cases}$ را دستگاه همگن می نامند

در دستگاه دو معادله دو مجهولی همگن دو حالت وجود دارد :

۱. اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ دستگاه دو معادله دو مجهولی همگن فقط یک دسته جواب منحصر به فرد دارد .

(دو خط همدیگر را فقط در مبداء مختصات قطع می کنند .)

۲. اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ دستگاه دو معادله دو مجهولی همگن بی شمار جواب دارد . (دو خط منطبق اند .)

* حل دستگاه دو معادله دو مجهولی به کمک ماتریس وارون

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۱ نمره	دی ۱۳۹۷	۱
--------	---------	---

۱ : دستگاه زیر به ازای چه مقادیر m دارای جواب منحصر به فرد می باشد.

$$\begin{cases} (m-3)x + 3y = m \\ 4x + (m+1)y = 2 \end{cases}$$

پاسخ

اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ دستگاه دو معادله دو مجهولی فقط یک دسته جواب منحصر به فرد دارد .

$$\frac{m-3}{4} \neq \frac{3}{m+1} \rightarrow (m-3)(m+1) \neq 3 \times 4 \rightarrow m^2 - 2m - 15 \neq 0$$

$$\rightarrow (m-5)(m+3) \neq 0 \rightarrow m \neq 5 \text{ و } m \neq -3 \rightarrow m \in \mathbb{R} - \{5, -3\}$$

* حل دستگاه دو معادله دو مجهولی به کمک ماتریس وارون

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۲	خرداد ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره
---	------------	-----------

۲: مقدار m را چنان بیابید که دستگاه

$$\begin{cases} mx + 3y = -3 \\ 4x + (m + 4)y = 2 \end{cases}$$
 جواب نداشته باشد.

پاسخ اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ دستگاه دو معادله دو مجهولی هیچ جوابی ندارد.

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{m+4} \neq \frac{-3}{2} \rightarrow m(m+4) = 3 \times 4 \rightarrow m^2 + 4m - 12 = 0$$

$$\rightarrow (m-2)(m+6) = 0 \rightarrow \begin{cases} \boxed{m=2} \rightarrow \frac{m}{4} = \frac{2}{4} \neq \frac{-3}{2} \quad \checkmark \\ m = -6 \rightarrow \frac{m}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2} \quad \times \end{cases}$$

* حل دستگاه دو معادله دو مجهولی به کمک ماتریس وارون

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۳	تیر ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره
---	----------	-----------

۳ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ ، اگر داشته باشیم $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ در این حالت دستگاه هیچ جوابی ندارد. **نادرست**

پاسخ

اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ دستگاه دو معادله دو مجهولی **هیچ جوابی ندارد**.

* حل دستگاه دو معادله دو مجهولی به کمک ماتریس وارون

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۴: دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر را به روش ماتریس وارون حل کنید.

پاسخ

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

با فرض $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ نتیجه می شود

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = (3)(-1) - (2)(1) = -5 \neq 0$$

پس A وارون پذیر بودن است . و دستگاه دارای یک دسته جواب منحصر به فرد است .

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B \Rightarrow X = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow x = 2, y = -1$

* حل دستگاه دو معادله دو مجهولی به کمک ماتریس وارون

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۵	شهریور ۱۳۹۸	۲۵/۰ نمره
---	-------------	-----------

۵: درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ ، اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب باشد و $|A| \neq 0$ ، در این حالت دستگاه هیچ جوابی

ندارد. نادرست

پاسخ

شرط لازم و کافی برای آنکه یک دستگاه دو معادله دو مجهولی دارای یک دسته جواب منحصر به فرد باشد این است که دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه صفر نباشد

* حل دستگاه دو معادله دو مجهولی به کمک ماتریس وارون

نمونه سوالات امتحانات نهایی

۶	شهریور ۱۳۹۸	۱/۵ نمره
---	-------------	----------

۶: دستگاه $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ با فرض $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ نتیجه می شود $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (3)(2) - (-4)(-1) = 2 \neq 0$

پس A وارون پذیر بودن است. و دستگاه دارای یک دسته جواب منحصر به فرد است.

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B \Rightarrow X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow x = 3, y = 2$$