



نمونه سوالات فصل سوم

روابط طولی در مثلث

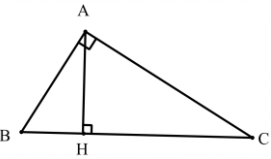
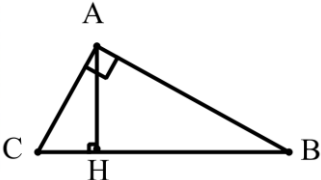
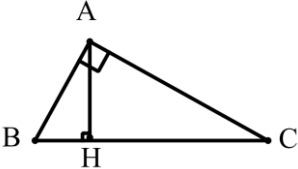
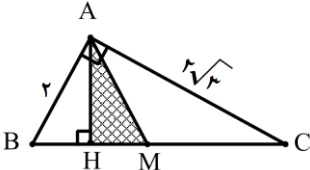
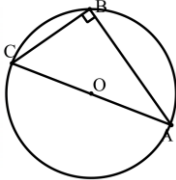
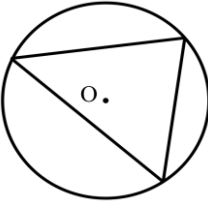
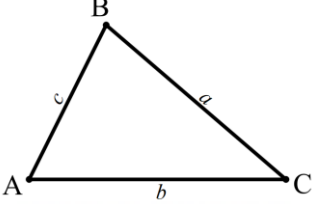
کتاب هندسه ۲

به کوشش: مرتضی معینی

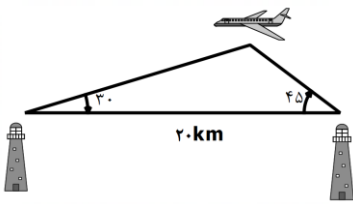
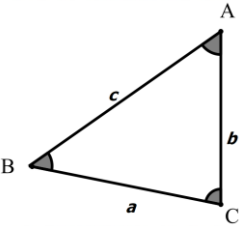
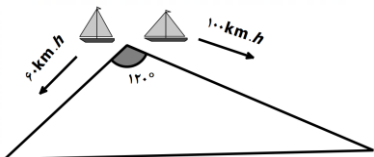
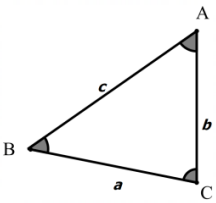
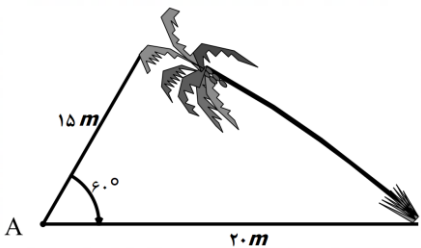


بهار ۹۹

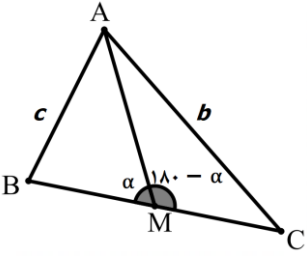
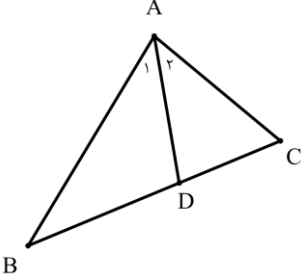
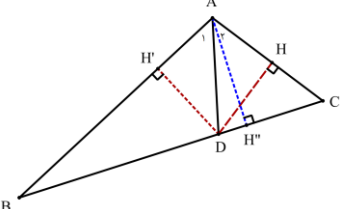
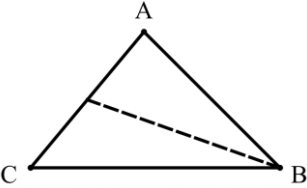
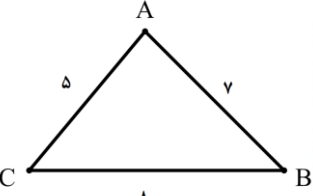
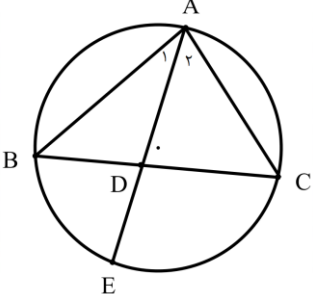
گروه ریاضی آموزش و پرورش ناحیه دو کرج

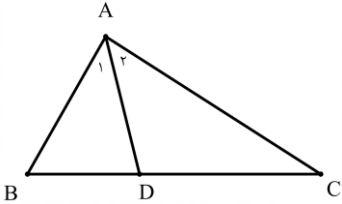
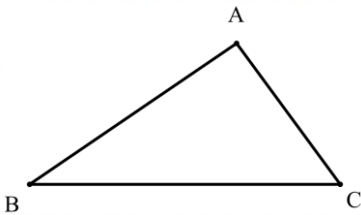
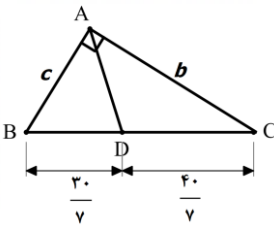
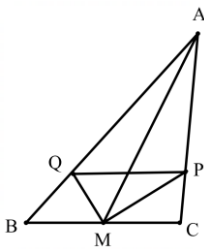
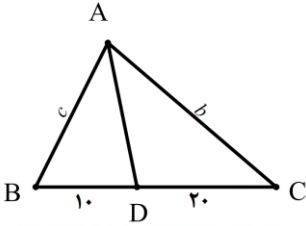
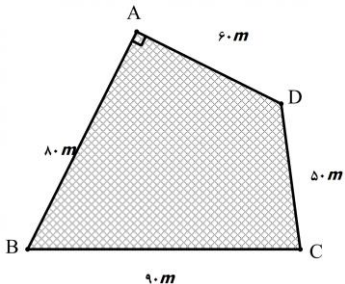
	۱ روابط طولی اضلاع را در مثلث قائم الزاویه را بیان کنید.
	۲ در مثلث قائم الزاویه ای به مساحت ۵۴ نسبت اضلاع قائمه $\frac{3}{4}$ است. طول میانه وارد بر وتر را حساب کنید.
	۳ در مثلث قائم الزاویه روبرو $BH = ۱۲$, $CH = ۴$ است. محیط و مساحت مثلث ABC را به دست آورید.
	۴ در مثلث قائم الزاویه روبرو $AC = ۸$, $BC = ۱۰$ است. طول پاره خط های CH, BH را به دست آورید.
	۵ در مثلث قائم الزاویه ABC طول اضلاع قائم ۲, $۲\sqrt{۳}$ است. مساحت مثلث AMH چه قدر است؟ (AM میانه وارد بر وتر است).
	۶ در یک مثلث قائم الزاویه، یک ضلع قائمه ۴ و اندازه تصویر همین ضلع روی وتر ۲ است. مساحت مثلث را به دست آورید. ۷ ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه نسبت هر ضلع به سینوس زاویه مقابل برابر قطر دایره محیطی مثلث
	۸ در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$)، طول وتر ۱۰ است. اگر $\sin B = \frac{3}{5}$ باشد، مطلوب است محیط این مثلث
	۹ در مثلث ABC داریم: $\hat{A} = ۹۰^\circ$, $\tan B = \sqrt{۲}$ و $a = ۳\sqrt{۳}$. اندازه ضلع AB را بیابید.
	۱۰ ثابت کنید در هر مثلث نسبت هر ضلع به سینوس زاویه مقابل برابر قطر دایره محیطی مثلث
	۱۱ قضیه سینوسها: در مثلث ABC با اضلاع $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ داریم: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ که R شعاع دایره محیطی مثلث است.

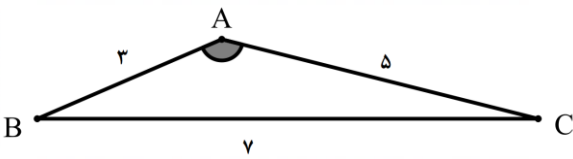
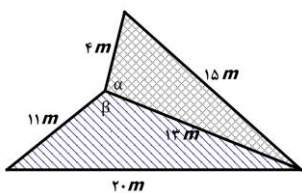
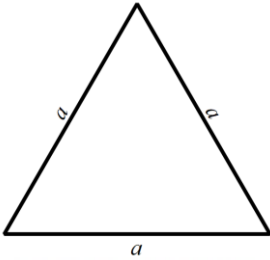
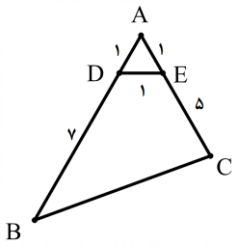
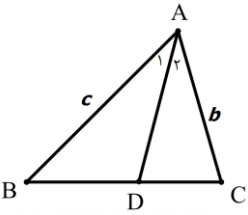
۱۲	در یک مثلث قائم الزاویه، محیط دایره محیطی برابر 20π است. اگر یکی از زاویه های حاده این مثلث 60° باشد، مساحت مثلث را بیابید.
۱۳	در مثلث ABC ، $BC = 10\text{cm}$ و $\hat{A} = 120^\circ$ و $AC = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ مقدار شعاع دایره محیطی مثلث و اندازه زوایای $\hat{C}, \hat{B}$ را به دست آورید.
۱۴	از یک بلوار افقی، یک خیابان فرعی باریک با زاویه 60° درجه جدا شده است. اکنون شهرداری منطقه می خواهد یک خیابان فرعی دیگر به طول ۸۰۰ متر بنا کند تا با زاویه 45° از خیابان فرعی اول جدا، به بلوار منتهی می شود. این خیابان از چه فاصله ای از راس زاویه 60° باید شروع شود و با بلوار چه زاویه ای می سازد؟
۱۵	می خواهیم روی یک رودخانه عمیق بین دو نقطه A, B در دو طرف رودخانه پلی بنا کنیم. برای محاسبات مربوط به احداث پل، باید فاصله ابتدا و انتها آن را محاسبه کنیم (طول AB) به علت عدم امکان پذیری محاسبه فاصله مستقیم، از نقطه A در جهتی حرکت می کنیم تا با عبور از قسمت کم عمق رودخانه (DE) به نقطه C برسیم و طول BC را اندازه گیری می کنیم. اگر $\hat{C} = 60^\circ, \hat{B} = 70^\circ, BC = 3\text{km}$ به کمک ماشین حساب طول AB را محاسبه کنید.
۱۶	طول قاعده مثلث متساوی الساقینی ۱۲ و شعاع دایره محیطی آن $4\sqrt{3}$ است. طول ساق مثلث را بیابید.
۱۷	ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) با ارتفاع h_a داریم: $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

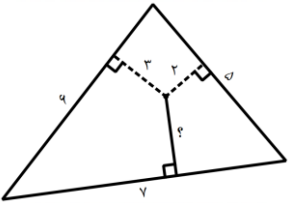
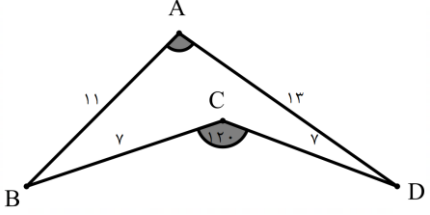
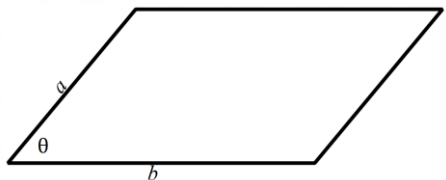
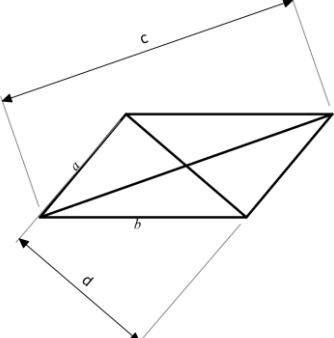
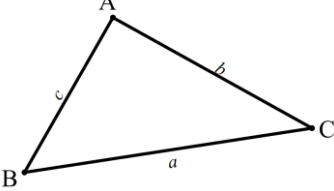
۱۸	شعاع دایره محیطی مثلث قائم الزاویه برابر R است. مجموع مربعات اضلاع این مثلث را بر حسب R بیابید.
۱۹	دو ایستگاه رادیویی، که در فاصله ۲۰ کیلومتری از هم واقع اند، هواپیمایی را با زاویه ۳۰ و ۴۵ درجه رصد کرده اند. فاصله هواپیما را از دو ایستگاه به دست آورید. 
۲۰	الف) با مفروضات $\hat{A} = 60^\circ$ و $b = 8, a = 8\sqrt{3}$ چند مثلث می توان رسم کرد؟ ب) با مفروضات $\hat{B} = 60^\circ$ و $a = 10, b = 8$ چند مثلث می توان رسم کرد؟
۲۱	قضیه کوسینوسها: در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع با مجموع مربعات اندازه های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب آن دو در کوسینوس زاویه بین آن ها مساوی است: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 
۲۲	طول اضلاع مثلثی $\sqrt{56}, 4\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$ است. بزرگترین زاویه مثلث را بیابید.
۲۳	در مثلث $\triangle ABC$ بین طول اضلاع، رابطه $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ برقرار است. زاویه $\hat{A}$ را بیابید
۲۴	دو قایق از یک نقطه در دریاچه ای با سرعت 60 km/h و 100 km/h و با زاویه ۱۲۰ درجه از هم دور می شوند. نیم ساعت بعد دو قایق در چه فاصله ای از هم هستند؟ 
۲۵	در مثلث ABC، $AB = 2\sqrt{2}$ و $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ و $\hat{A} = 60^\circ$: الف) طول ضلع BC را به کمک قضیه کوسینوس ها به دست آورید. ب) اندازه زاویه های $\hat{B}, \hat{C}$ را به کمک قضیه سینوس ها بدست آورید. 
۲۶	یک درخت کج از نقطه A روی زمین، که در فاصله ۱۵ متری نوک درخت است با زاویه ۶۰ درجه دیده می شود. اگر فاصله A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است: الف) طول درخت ب) سینوس زاویه ای که درخت با سطح زمین می سازد. پ) فاصله نوک درخت از زمین 

	۲۷ در مثلث متساوی الاضلاع $\triangle ABC$ به ضلع ۸ واحد اندازه اضلاع و زوایه خواسته شده را محاسبه کنید. $BD = \quad DE = \quad \hat{\alpha} =$	۲۷
	۲۸ یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر بر ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با ۳۰ درجه انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر بر ساعت به حرکت خود ادامه می دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در بندرگاه پهلوی می گیرد. فاصله بندرگاه از مبدا حرکت کشتی چند کیلومتر است؟	۲۸
	۲۹ قضیه میانه ها: در مثلث $\triangle ABC$ میانه AM را رسم کرده ایم ($MB = MC = \frac{a}{2}$). با نوشتن قضیه کوسینوس ها در دو مثلث AMB و AMC و b^2, c^2 را محاسبه کرده و با جمع کردن دو طرف تساوی حاصل درستی تساوی زیر را ثابت کنید: $b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2}$	۲۹
۳۰ در مثلث $\triangle ABC$ با اضلاع $AB = 2, AC = 2\sqrt{3}, BC = 4$ طول سه میانه را به دست آورید.		
۳۱ در مثلثی به اضلاع ۲ و ۳ و ۴ طول کوچکترین میانه را به دست آورید.		
۳۲ در شکل روبرو طول BC را بیابید.		
۳۳ در شکل روبرو مثلث متساوی الاضلاع $\triangle ABC$ به ضلع ۱۰ است. اگر $BD = \sqrt{76}$ باشد مقادیر x, y و کوسینوس زاویه α را بیابید. $x < 5$		

	۳۴ قضیه استوارت: در مثلث $\triangle ABC$، نقطه دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیه کوسینوس ها در دو مثلث ADC, ADB داریم: $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$	۳۴
	۳۵ قضیه نیم سازها: در هر مثلث نیم ساز زاویه داخلی، ضلع روبرو به آن زاویه را به نسبت اندازه های ضلع های آن زاویه تقسیم می کند. فرض: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ حکم: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$	۳۵
	۳۶ اثبات دوم قضیه نیم سازها: با توجه به شکل مقابل و محاسبه مساحت مثلث های ABC, ABD به دو طریق قضیه را اثبات کنید: $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} \times DH' \times \dots}{\frac{1}{2} \times DH \times \dots} \quad (1)$ $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} \times BD \times \dots}{\frac{1}{2} \times CD \times \dots} \quad (2)$ $(1), (2) \Rightarrow \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$	۳۶
	۳۷ در مثلث $\triangle ABC$، $AB = 7, AC = 5, BC = 8$ است. طول دو قطعه ای که نیم ساز زاویه $\hat{B}$ روی ضلع مقابل ایجاد می کند را محاسبه کنید.	۳۷
	۳۸ در شکل روبرو نیم ساز زاویه $\hat{C}$ را رسم کنید و طول دو قطعه ایجاد شده را به دست آورید.	۳۸
	۳۹ قضیه: نشان دهید در هر مثلث مربع اندازه نیمساز زاویه داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می کند. $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$	۳۹

	۴۰ در مثلث $\triangle ABC$، $AB = 3$، $AC = 5$، $BC = 7$ است. طول نیم ساز زاویه $\hat{A}$ که روی ضلع مقابل ایجاد می کند را محاسبه کنید.	۴۰
	۴۱ در مثلث $\triangle ABC$، $AB = 7$، $AC = 4$، $BC = 10$ است. طول نیم ساز زاویه $\hat{C}$ که روی ضلع مقابل ایجاد می کند را محاسبه کنید.	۴۱
	۴۲ در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) طول قطعات ایجاد شده توسط نیمساز زاویه داخلی زاویه قائمه روی وتر عبارتند از $\frac{30}{7}$، $\frac{40}{7}$ محیط مثلث را بیابید.	۴۲
	۴۳ در مثلث $\triangle ABC$، M وسط BC و MP و MQ نیم سازهای زوایای AMC و AMB هستند، ثابت کنید: $PQ \parallel BC$	۴۳
	۴۴ محیط مثلثی ۷۸ و اندازه پاره خط هایی که نیم ساز یکی از زاویه های داخلی، روی ضلع مقابلش پدید می آورد، برابر ۱۰ و ۲۰ است. طول اضلاع مثلث را بیابید.	۴۴
۴۵ مساحت مثلث با اضلاع به طول های ۱۴ و ۱۴ و ۱۵ را به دست آورید.		
	۴۶ چهار ضلعی $ABCD$ یک مزرعه کشاورزی را نشان می دهد که تنها دو ضلع آن برهم عمودند. طول اضلاع زمین به سادگی قابل اندازه گیری، و اندازه های آنها در شکل مشخص شده است. مساحت چهارضلعی را مشخص کنید.	۴۶

۴۷	مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۵ و ۷ مفروض است: الف) مساحت مثلث را با استفاده از دستور هرون محاسبه کنید. ب) اندازه زاویه منفرجه $\hat{A}$ را با استفاده از مساحت محاسبه کنید. 
۴۸	در مثلث ABC، $AB = 10$، $AC = 6$ و $\hat{A} = 60^\circ$: الف) طول BC را به دست آورید. ب) مساحت مثلث را تعیین کنید. پ) مقدار $\sin B$ را پیدا کنید.
۴۹	دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده اند. ابعاد زمین در شکل مشخص شده است. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شوند مساحت آن چقدر خواهد شد؟ نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه های برابر می سازد. 
۵۰	مساحت مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع a را با استفاده از دستور هرون محاسبه کنید. 
۵۱	در شکل مقابل: الف) طول ضلع BC را بدست آورید. ب) مساحت چهارضلعی $DECB$ را بیابید. 
۵۲	با استفاده از دستور مثلثاتی مساحت مثلث ABC نشان دهید $AD = \frac{2bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b+c}$ طول نیم ساز برابر: 

	۵۳ در مثلث به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی متر، نقطه ای که از اضلاع به طول های ۵ و ۶ به فاصله ۲ و ۳ سانتی متر است از ضلع بزرگتر چه فاصله ای دارد؟	۵۳
	۵۴ در شکل مقابل: الف) اندازه زاویه $\hat{A}$ را به دست آورید. ب) مساحت چهارضلعی ABCD را بیابید.	۵۴
	۵۵ نشان دهید مساحت هر متوازی الاضلاع برابر است با حاصلضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین آن ها $S = ab \sin \theta$	۵۵
	۵۶ نشان دهید در متوازی الاضلاع روبرو به اضلاع a, b و اقطار c, d رابطه مقابل برقرار است: $d^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2)$	۵۶
	۵۷ به کمک قضیه کوسینوس ها ثابت کنید در مثلث ABC: الف) $\hat{A} > 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 > b^2 + c^2$ ب) $\hat{A} < 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 < b^2 + c^2$ پ) $\hat{A} = 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 = b^2 + c^2$	۵۷
۵۸ با استفاده از معلومات داده شده در مثلث ABC نوع زاویه $\hat{A}$ را مشخص کنید. (تند، قائمه، منفرجه) الف) $AB = 10$, $AC = 6$, $BC = 10$ ب) $AB = 8$, $AC = 4$, $BC = 9$ پ) $AB = 8$, $AC = 15$, $BC = 17$		۵۸