



نمونه سوالات فصل دوم

# تبدیل های هندسی و کاربردها

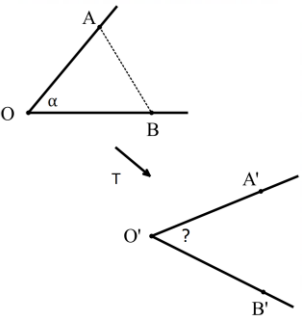
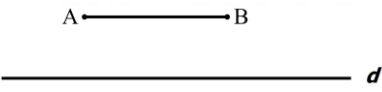
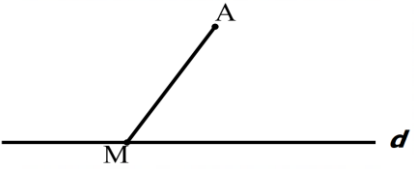
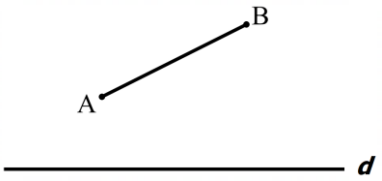
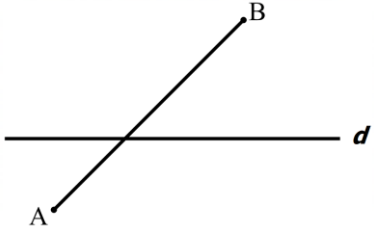
کتاب هندسه ۲

به کوشش: مرتضی معینی

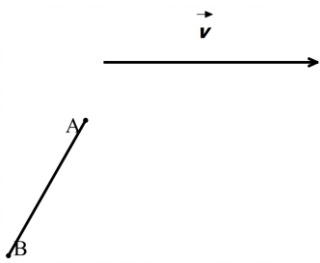


بهار ۹۹

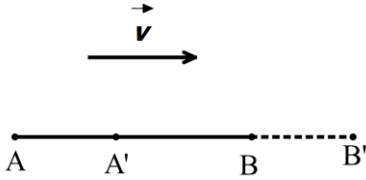
گروه ریاضی آموزش و پرورش ناحیه دو کرج

|  | ردیف                    |                       |                            |                            |                           |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |       |  |  |  |  |  |       |   |
|--|-------------------------|-----------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------|--|--|--|--|--|--|--------|--|--|--|--|--|--------|--|--|--|--|--|-------|--|--|--|--|--|-------|---|
| <p>مفاهیم زیر را تعریف کنید.<br/>                     الف) تبدیل هندسی (ب) تبدیل ایزومتري (پ) نقطه ثابت تبدیل (ت) تبدیل همانی</p>  | ۱                       |                       |                            |                            |                           |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |       |  |  |  |  |  |       |   |
| <p>جدول زیر را کامل کنید.</p> <table border="1" data-bbox="92 297 1417 624"> <thead> <tr> <th>مساحت شکل را حفظ می کند</th> <th>جهت شکل را حفظ می کند</th> <th>شیب خط را حفظ می کند</th> <th>اندازه زاویه را حفظ می کند</th> <th>طول پاره خط را حفظ می کند</th> <th></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>بازتاب</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>انتقال</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>دوران</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>تجانس</td> </tr> </tbody> </table>                                | مساحت شکل را حفظ می کند | جهت شکل را حفظ می کند | شیب خط را حفظ می کند       | اندازه زاویه را حفظ می کند | طول پاره خط را حفظ می کند |  |  |  |  |  |  | بازتاب |  |  |  |  |  | انتقال |  |  |  |  |  | دوران |  |  |  |  |  | تجانس | ۲ |
| مساحت شکل را حفظ می کند  | جهت شکل را حفظ می کند   | شیب خط را حفظ می کند  | اندازه زاویه را حفظ می کند | طول پاره خط را حفظ می کند  |                           |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |       |  |  |  |  |  |       |   |
|  |                         |                       |                            |                            | بازتاب                    |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |       |  |  |  |  |  |       |   |
|  |                         |                       |                            |                            | انتقال                    |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |       |  |  |  |  |  |       |   |
|  |                         |                       |                            |                            | دوران                     |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |       |  |  |  |  |  |       |   |
|  |                         |                       |                            |                            | تجانس                     |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |       |  |  |  |  |  |       |   |
| <p>ثابت کنید در هر تبدیل طولیا، تبدیل یافته هر زاویه، زاویه ای هم اندازه آن است.</p>    | ۳                       |                       |                            |                            |                           |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |       |  |  |  |  |  |       |   |
| <p>قضیه: ثابت کنید در هر بازتاب، اندازه هر پاره خط و اندازه تصویر آن با هم برابر است.<br/>                     الف) پاره خط با محور بازتاب موازی است.</p>  <p>ب) انتهای پاره خط با محور بازتاب اشتراک دارد.</p>  <p>پ) پاره خط با محور بازتاب نه موازی است و نه متقاطع</p>  <p>ت) پاره خط محور بازتاب را قطع کند.</p>  | ۴                       |                       |                            |                            |                           |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |       |  |  |  |  |  |       |   |

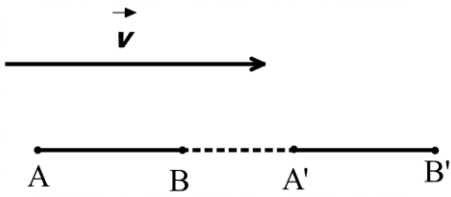
قضیه: در هر انتقال، اندازه هر پاره خط و اندازه تصویر آن با هم برابرند.  
الف) پاره خط  $AB$  دلخواه با بردار  $\vec{V}$  موازی نباشد.



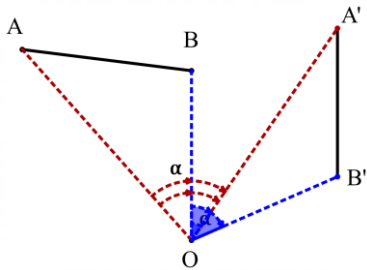
ب) پاره خط  $AB$  دلخواه با بردار  $\vec{V}$  موازی باشد.  
(۱) اندازه  $\vec{V}$  از طول پاره خط  $AB$  کمتر باشد.



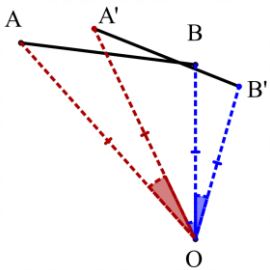
(۲) اندازه  $\vec{V}$  از طول پاره خط  $AB$  بیشتر باشد.



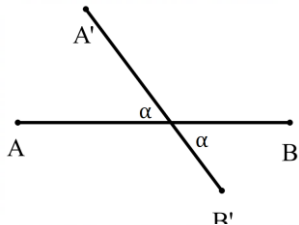
قضیه: نشان دهید دوران تبدیلی طولپا است.  
الف) مرکز دوران  $O$  بر پاره خط  $AB$  و امتداد آن واقع نباشد:



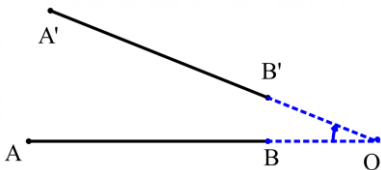
ب) اگر  $O$  بر پاره خط  $AB$  واقع نباشد ولی زاویه دوران از زاویه  $\hat{AOB}$  کمتر باشد:



پ) اگر نقطه  $O$  روی پاره خط  $AB$  باشد:



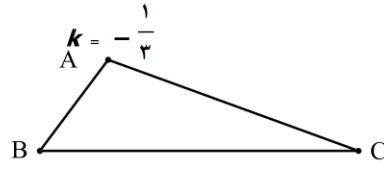
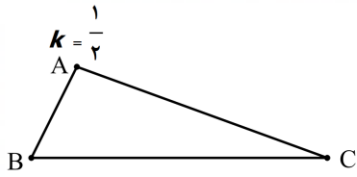
ت) اگر نقطه  $O$  روی امتداد پاره خط  $AB$  باشد:



در حالتی که پاره خط  $AB$  در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر  $A'B'$  بازتاب  $AB$  باشد،  $A'B'$  و  $AB$  هم اندازه اند.

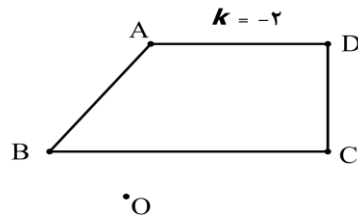
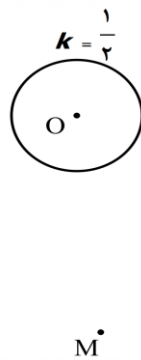
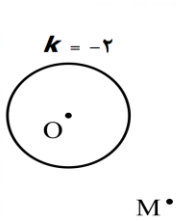
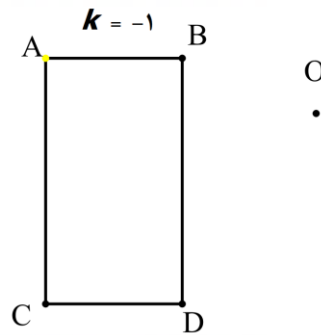
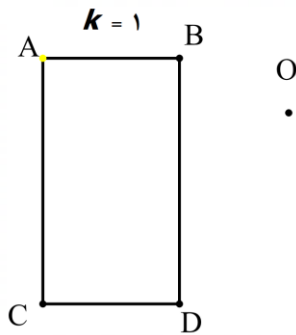
|  |  |
|--|--|
|  | <p>۸ آیا در بازتاب زیر جهت شکل حفظ شده است؟ دلیل بیاورید.</p>  |
|  | <p>۹ الف) در شکل مقابل نقطه <math>A'</math> دوران یافته نقطه <math>A</math> در دوران به مرکز <math>O</math> و زاویه <math>\alpha</math> است. نشان دهید عمود منصف <math>AA'</math> از نقطه <math>O</math> می‌گذرد.<br/>ب) اگر بدانیم <math>A'B'C'</math> دوران یافته <math>ABC</math> است، چگونه می‌توان مرکز دوران را مشخص کرد؟</p>  |
|  | <p>۱۰ در شکل، <math>d_1</math> به موازات <math>d_2</math> و به فاصله <math>m</math> از آن قرار دارد و مثلث <math>A'B'C'</math> بازتاب مثلث <math>ABC</math> نسبت به خط <math>d_1</math> است. بازتاب مثلث <math>A'B'C'</math> را نسبت به خط <math>d_2</math> رسم کنید و آن را <math>A''B''C''</math> بنامید.<br/>الف) نشان دهید: <math>AA'' = 2m</math><br/>ب) اندازه <math>BB''</math> و <math>CC''</math> چقدر است؟<br/>پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث <math>A''B''C''</math> را تصویر <math>ABC</math> دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟</p>                                    |
|  | <p>۱۱ در شکل دو خط <math>d_1</math> و <math>d_2</math> با زاویه <math>\theta</math> یکدیگر را قطع کرده‌اند. مثلث <math>A'B'C'</math> بازتاب مثلث <math>ABC</math> نسبت به خط <math>d_1</math> است. بازتاب مثلث <math>A'B'C'</math> را نسبت به خط <math>d_2</math> رسم کنید و آن را <math>A''B''C''</math> بنامید.<br/>الف) نشان دهید: <math>\angle A''OA = 2\theta</math><br/>ب) اندازه <math>\angle B''OB</math> و <math>\angle C''OC</math> چقدر است؟<br/>پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث <math>A''B''C''</math> را تصویر <math>ABC</math> دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟</p> |
| <p>۱۲ نقطه <math>A</math> به فاصله <math>2\sqrt{6}</math> از خط <math>d</math> قرار دارد. تصویر نقطه <math>A</math> را تحت بازتاب نسبت به خط <math>d</math>، نقطه <math>A'</math> می‌نامیم. نقطه <math>A</math> را حول نقطه <math>A'</math> به اندازه <math>120^\circ</math> درجه دوران می‌دهیم تا نقطه <math>A''</math> حاصل شود. طول پاره خط <math>AA''</math> را محاسبه کنید.</p> |  |
| <p>۱۳ نقطه <math>A'</math> تصویر نقطه <math>A</math> در بازتاب نسبت به خط <math>l</math> است. اگر <math>AA' = 16</math> و نقطه <math>O</math> روی خط <math>l</math> و <math>OA = 10</math> باشد، فاصله نقطه <math>A</math> از خط <math>OA'</math> چقدر است؟</p>  |  |

در هریک از حالت های زیر مجانس را رسم کنید.



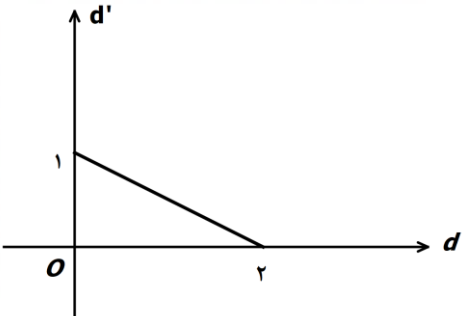

O •

O •



با استفاده از خصوصیات تجانس جدول زیر را کامل کنید.

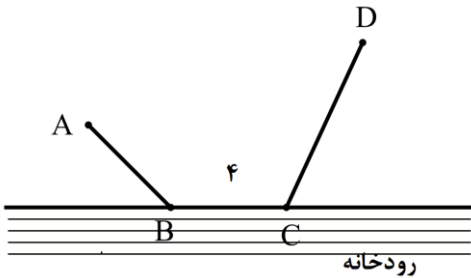
| مساحت شکل<br>حفظ می شود. | جهت شکل حفظ<br>می شود. | شیب خط حفظ<br>می شود. | اندازه زاویه<br>حفظ می شود. | طول<br>پاست  |         |       |
|--------------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------------|--------------|---------|-------|
|                          |                        |                       |                             | $k > 1$      | $k > 0$ | تجانس |
|                          |                        |                       |                             | $k = 1$      |         |       |
|                          |                        |                       |                             | $0 < k < 1$  |         |       |
|                          |                        |                       |                             | $-1 < k < 0$ | $k < 0$ |       |
|                          |                        |                       |                             | $k = -1$     |         |       |

|   |   |  |  |  |  |  |  |  |    |
|---|---|--|--|--|--|--|--|--|----|
|   |   |  |  |  |  |  |  |  |    |
|   | <p>در جاهای عبارت مناسب بنویسید.<br/>                 الف) شرط اینکه تجانس طول پا باشد، این است که .....<br/>                 ب) خطوطی که نقاط را به تصویر متناظر خود متصل می کنند.....<br/>                 پ) اگر <math>k &gt; 0</math> تجانس را ..... می نامیم.<br/>                 ت) اگر <math>k &lt; 0</math> تجانس را ..... می نامیم.<br/>                 ث) اگر <math> k  &lt; 1</math> تصویر ..... می شود و آن را ..... می نامیم.<br/>                 ج) اگر <math> k  &gt; 1</math> تصویر ..... می شود و آن را ..... می نامیم.</p> |  |  |  |  |  |  |  | ۱۶ |
|   | <p>اگر <math>\triangle A'B'C'</math> مجانس <math>\triangle ABC</math> باشد، مرکز تجانس را چگونه می توان پیدا کرد؟</p>   |  |  |  |  |  |  |  | ۱۷ |
|   | <p>ثابت کنید در تجانس شیب خط حفظ می شود.</p>  |  |  |  |  |  |  |  | ۱۸ |
|   | <p>ثابت کنید در تجانس اندازه زاویه حفظ می شود.</p>  |  |  |  |  |  |  |  | ۱۹ |
|   | <p>فرض کنید پاره خط <math>A'B'</math> مجانس پاره خط <math>AB</math> در تجانس به مرکز <math>O</math> و نسبت <math>k</math> باشد، نشان دهید: <math>\frac{A'B'}{AB} =  k </math></p>   |  |  |  |  |  |  |  | ۲۰ |
|   | <p>اگر <math>n</math> ضلعی <math>A'_1, A'_2, \dots, A'_n</math> مجانس <math>n</math> ضلعی <math>A_1, A_2, \dots, A_n</math> باشد، نشان دهید این دو <math>n</math> ضلعی با هم متشابه اند.</p>  |  |  |  |  |  |  |  | ۲۱ |
|   | <p>با مثال نقض نشان دهید دو شکل متشابه الزاماً متجانس نیستند.</p>   |  |  |  |  |  |  |  | ۲۲ |
|   | <p>در چه شرایطی، انتقال، دوران و تجانس می توانند تبدیل همانی باشند؟</p>   |  |  |  |  |  |  |  | ۲۳ |
|   | <p>یک مربع را در تجانسی با نسبت <math>\frac{2}{3}</math> و به مرکز محل تلاقی قطرهای تصویر کرده ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ باشد. محیط مربع اولیه را محاسبه کنید.</p>   |  |  |  |  |  |  |  | ۲۴ |
|   | <p>در شکل روبرو اگر خط <math>l</math> را در تجانس به مرکز <math>O</math> و نسبت تجانس <math>\frac{7}{4}</math> تصویر کنیم و آن را <math>l'</math> بنامیم، مساحت بین خط <math>l</math> و <math>l'</math> خطوط <math>d</math> و <math>d'</math> چقدر است؟</p>   |  |  |  |  |  |  |  | ۲۵ |
|   | <p>فرض کنید <math>G</math> محل برخورد میانه های مثلث <math>ABC</math> (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث <math>A'B'C'</math> مجانس مثلث <math>ABC</math> در تجانس به مرکز <math>G</math> و نسبت <math>k = -\frac{1}{4}</math> باشد.<br/>                 الف) جایگاه راس های <math>A', B', C'</math> نسبت به مثلث <math>ABC</math> کجاست؟<br/>                 ب) مساحت مثلث <math>A'B'C'</math> چه کسری از مساحت مثلث <math>ABC</math> است؟</p>   |  |  |  |  |  |  |  | ۲۶ |
|   | <p>در کدام یک از تبدیلات زیر نقطه ثابت تبدیل وجود دارد؟<br/>                 الف) انتقال غیر همانی      ب) دوران غیر همانی      پ) تجانس غیر همانی</p>  |  |  |  |  |  |  |  | ۲۷ |
|  | <p>مساله کوتاهترین مسیر:<br/>                 مردی می خواهد برای برداشتن آب از خانه به ساحل رودخانه ای که لبه مستقیمی دارد برود و بعد سطل آب را به اسطبل ببرد. که در همان سمت رودخانه است. او از کدام نقطه ساحل رودخانه برود و از</p>   |  |  |  |  |  |  |  | ۲۸ |

۲۹

مساله کوتاهترین مسیر:

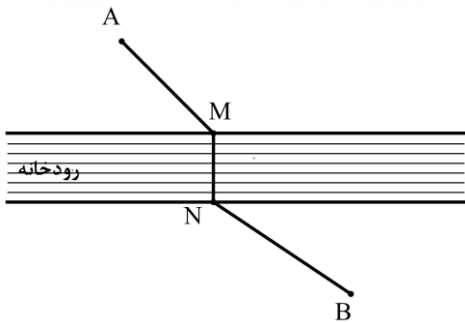
دو شهر  $A$  و  $B$  مطابق شکل در یک طرف رودخانه ای واقع اند. می خواهیم جاده ای بسازیم به طوری که ۴ کیلومتر از جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این ۴ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر  $ABCD$  کوتاهترین مسیر ممکن باشد؟



۳۰

مساله کوتاهترین مسیر:

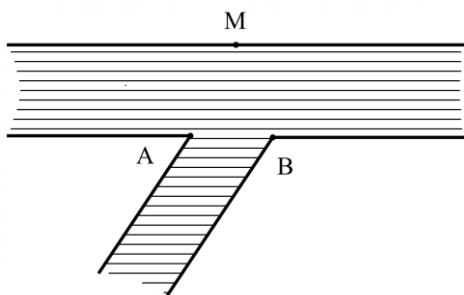
اگر دو شهر  $A$  و  $B$  دو طرف رودخانه اب باشند و بخواهیم جاده ای از  $A$  و  $B$  بسازیم به طوری که پل  $MN$  بر راستای رودخانه عمود باشد، محل احداث پل را کجا در نظر بگیریم که مسیر  $AMNB$  کوتاهترین مسیر باشد؟



۳۱

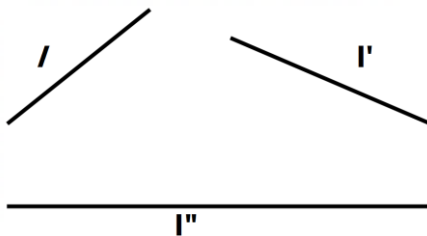
مساله کوتاهترین مسیر:

می خواهیم کنار رودخانه ها ۳ اسکله بسازیم. جای دو اسکله  $A$  و  $B$  در شکل مشخص است. اسکله  $M$  را در چه نقطه ای از ساحل رودخانه بسازیم که قایق ها هنگام طی مسیر  $MABM$  کوتاه ترین مسیر را طی کنند؟



۳۲

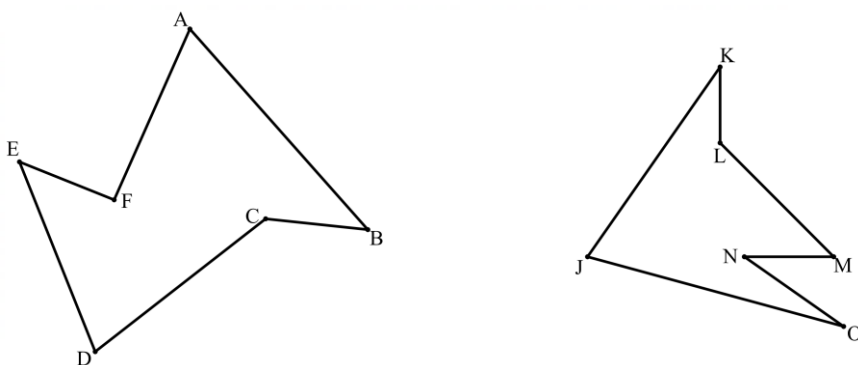
سه خط دو به دو ناموازی  $l, l', l''$  در صفحه مفروض اند. پاره خطی به طول ۵ سانتی متر رسم کنید که دو سر آن روی  $l, l'$  و موازی  $l''$  باشد.



۳۳

مساله کوتاهترین مسیر:

دور زمین هایی مطابق شکل حصارکشی شده است. چطور می توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد؟



۳۴

زمینی به شکل زیر داریم، می خواهیم بدون آن که محیط این زمین تغییر کند مساحت را افزایش دهیم در هر مورد میزان افزایش مساحت را حساب کنید.

