

محتوای نوشتاری کتاب هندسه دهم	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران معاونت آموزش متوسطه ۲ اداره تکنولوژی گروههای آموزش گروه ریاضی	فصل دوم درس سوم: تشابه درس نامه: محبوبه شاه مرادی
سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱		

اهداف درس سوم: تشابه مثلث ها

- ۱- دانش آموزان با مفهوم تشابه دو مثلث و رابطه بین زاویه ها و اضلاع دو مثلث متشابه آشنا شوند.
- ۲- آشنایی با قضیه اساسی تشابه مثلث ها و فراگیری حالت های مختلف تشابه مثلث ها و تسلط بر آنها با ارائه مثال های مناسب
- ۳- دانش آموز بتواند مسایل کاربردی را با کمک مفهوم تشابه حل کند
- ۴- دانش آموز با کاربردهای تشابه در علوم مختلف آشنا شود.

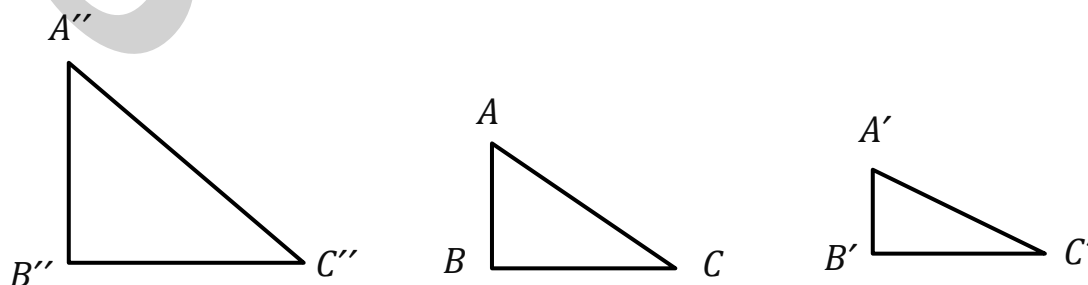
انتظارات یادگیری:

انتظار می رود در پایان درس:

- ۱- دانش آموز بتواند قضیه معروف فیثا غورث را که در گذشته بارها آن را بکار برده است به کمک تشابه مثلث ها اثبات کند
- ۲- دانش آموز بتواند رابطه های طئلی اضلاع یک مثلث قائم الزاویه و پازه خط هایی که توسط ارتفاع وارد بر وتر آن مثلث حاصل می شوند را درک و بیان کند
- ۳- دانش آموز بتواند مثال هایی از تشابه را در دنیای اطراف و طبیعت بیان کند.

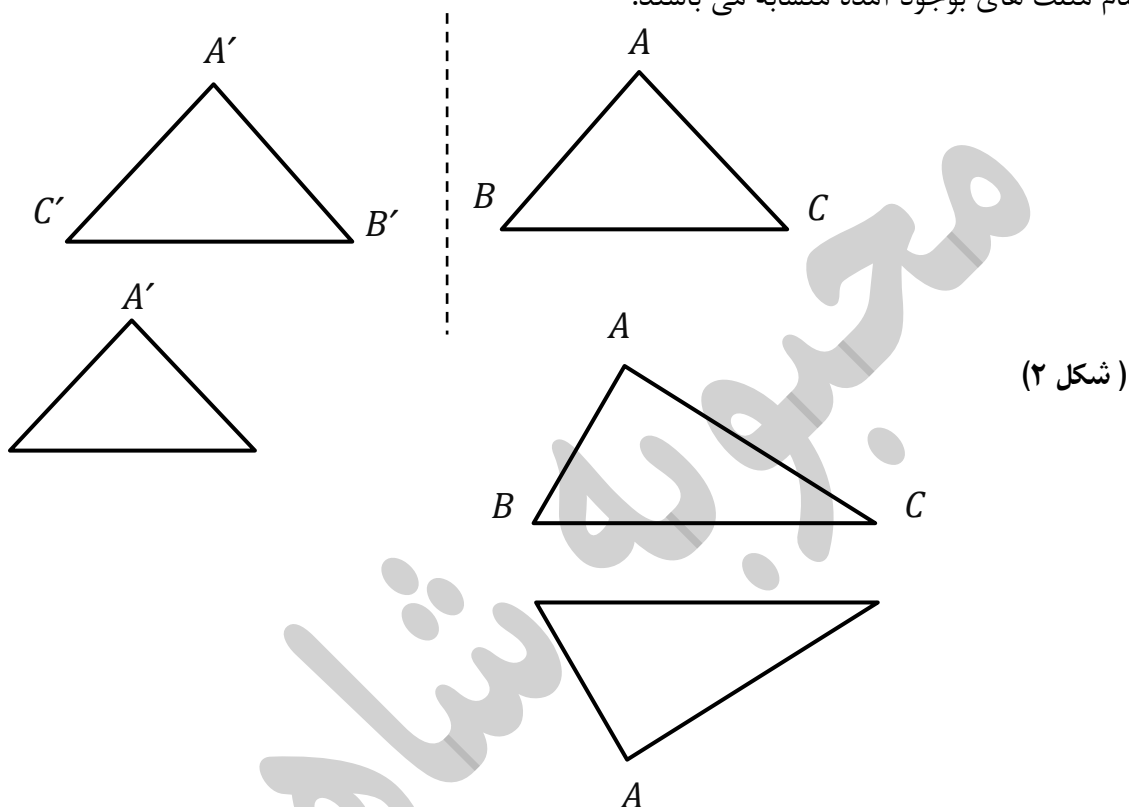
« تشابه مثلث ها »

قبل از شروع بررسی مبحث تشابه مثلث ها به صورت ریاضی ابتدا به صورت شهودی با تشابه مثلث ها آشنا می شویم.
شهود ۱: اگر یک مثلث ABC را داشته باشیم این مثلث را چه بزرگ کنیم و چه کوچک، مثلث های متشابه به وجود می آیند.



محتوای نوشتاری کتاب هندسه دهم	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران معاونت آموزش متوسطه ۲ اداره تکنولوژی گروههای آموزش گروه ریاضی	فصل دوم درس سوم: تشابه درس نامه: محبوبه شاه مرادی
سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱		

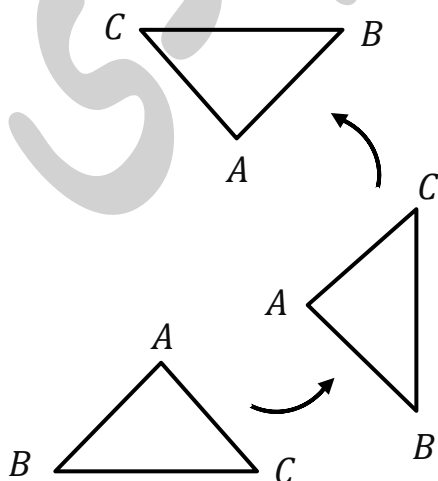
شهود ۲: اگر مثلث ABC را نسبت به هر خطی بازتاب کنیم و یا آینه ای کنیم و این مثلث حاصل مجدد بزرگ یا کوچک شودف تمام مثلث های بوجود آمده متشابه می باشند.



شهود ۳: چرخش مثلث می تواند مثلث های متشابه ایجاد کند.

(اندازه زاویه ها یکی باشد ولی اندازه اضلاع می تواند

متفاوت ولی به یک نسبت کوچک شود.)



محتوای نوشتاری کتاب هندسه دهم	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران معاونت آموزش متوسطه ۲ اداره تکنولوژی گروههای آموزش گروه ریاضی	فصل دوم درس سوم: تشابه درس نامه : محبوبه شاه مرادی
سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱		

شهود ۴ : بنابراین می توان گفت، وقتی دو مثلث متشابه هستند که بتوان آن ها را با انتقال، چرخش و بزرگ و کوچک کردن و آنه ای کردن بر روی هم انداخت.

– حال می خواهیم به صورت ریاضی به بررسی تشابه مثلث ها بپردازیم.

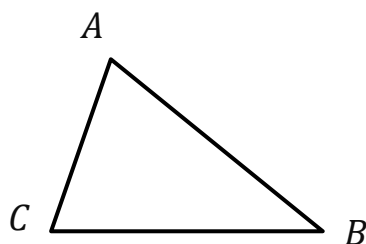
سؤال : چه وقت دو مثلث متشابه اند؟

پاسخ :

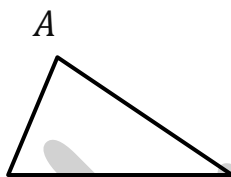
نکته ۱: هرگاه دو شرط زیر بین دو مثلث برقرار باشد :

۱- تمام زوایا ثابت باشند.

۲- اضلاع با یک ضریب تناسب کوچک یا بزرگ شده باشند.



$$\hat{A} = \hat{A}$$



$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

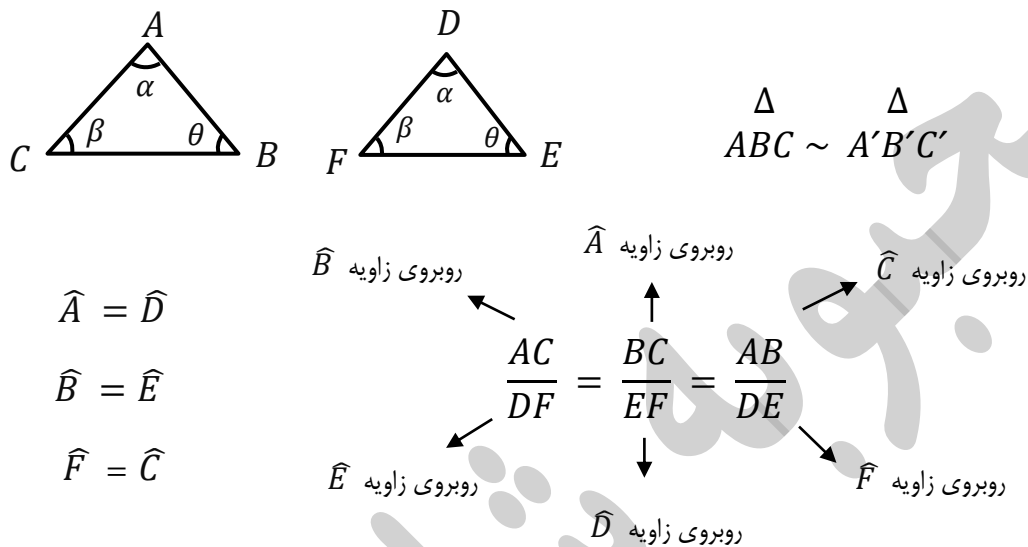
در این صورت به زبان ریاضی بیان می کنیم :

بنا بر قرارداد نسبت اضلاع متناظر را نسبت تشابه دو مثلث می نامند. ($K =$ نسبت تشابه)

محتوای نوشتاری کتاب هندسه دهم	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران معاونت آموزش متوسطه ۲ اداره تکنولوژی گروههای آموزش گروه ریاضی	فصل دوم درس سوم: تشابه درس نامه: محبوبه شاه مرادی
سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱		

نوشتن نسبت تشابه در دو مثلث متشابه:

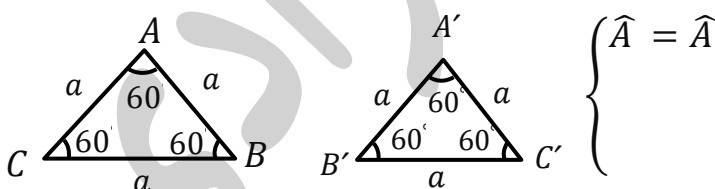
اگر بدانیم دو مثلث متشابه اند، برای نوشتن نسبت تشابه باید نسبت اضلاعی را که روبرو به زوایای هم اندازه هستند بنویسیم.



نکته ۲: اضلاع روبرو به زاویه های مساوی در یک نسبت قرار می گیرند. دقت کنید اگر اضلاع مثلث ABC در صورت یک نسبت قرار می گیرد در سایر نسبت ها نیز باید این اضلاع مثلث ABC در صورت کسر قرار گیرد.

مثال ۱) ثابت کنید هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابه هستند. (امتحان داخلی دی ماه ۱۳۹۵)

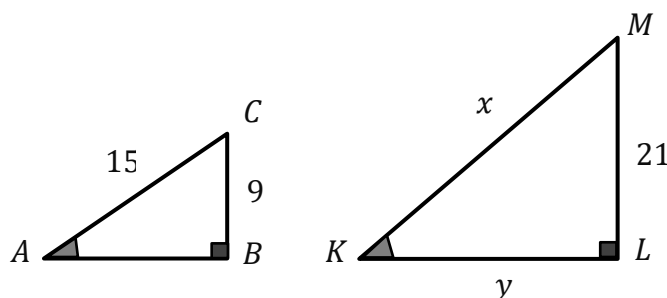
پاسخ:



چون زوایا همه با هم برابرند در هر دو مثلث بنابراین هر دو زاویه در مثلث و هر دو ضلع را می توان نظیر هم گرفت.

محتوای نوشتاری کتاب هندسه دهم	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران معاونت آموزش متوسطه ۲ اداره تکنولوژی گروههای آموزش گروه ریاضی	فصل دوم درس سوم: تشابه درس نامه: محبوبه شاه مرادی
سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱		

مثال ۲) در شکل زیر دو مثلث متشابه اند و $\widehat{A} = \widehat{K}$ می باشد. $x + y$ کدام است؟ (امتحان داخلی دی ماه ۱۳۹۷)



الف) ۵۳ ج) ۶۴

ب) ۶۳ د) ۵۴

پاسخ: زوایای نظیر در دو مثلث عبارتند از $\widehat{A} = \widehat{K}$ و $\widehat{A} = \widehat{L} = 90^\circ$ و $\widehat{M} = \widehat{C}$ بنابراین نسبت تشابه عبارت است از: (اضلاع روبرو به زوایای مساوی را در یک نسبت قرار می دهیم و تناسب را می نویسیم)

$$\frac{MK}{AC} = \frac{ML}{BC} = \frac{KL}{AB} \quad \xrightarrow{AB = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12} \quad \frac{x}{15} = \frac{21}{a} = \frac{y}{12}$$

$$\begin{cases} x = 15 \times \frac{21}{9} = 15 \times \frac{7}{3} = 35 \\ y = 12 \times \frac{21}{9} = 12 \times \frac{7}{3} = 28 \end{cases}$$

در نتیجه $x + y = 35 + 28 = 63$ و گزینه ۲ صحیح است.

ویژگی های تشابه:

نکات مهم:

۱- هر دو مثلث همنشت متشابه هستند و نسبت تشابه آن ها یک است.

۲- هر مثلث با خودش متشابه است.
 $\triangle ABC \sim \triangle ABC$

۳- اگر یک مثلث با مثلث دومی متشابه باشد، آن گاه مثلث دوم با مثلث اول متشابه است.

محتوای نوشتاری کتاب هندسه دهم	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران معاونت آموزش متوسطه ۲ اداره تکنولوژی گروههای آموزش گروه ریاضی	فصل دوم درس سوم: تشابه درس نامه: محبوبه شاه مرادی
سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱		

$$\triangle DEF \sim \triangle ABC \iff \triangle ABC \sim \triangle DEF \quad \text{یعنی اگر}$$

۴- اگر دو مثلث با مثلث دیگری متشابه باشند آن دو مثلث هم متشابه هستند.

$$\triangle ABC \sim \triangle GHI \quad \text{آن گاه} \quad \triangle DEF \sim \triangle ABC \quad \text{و} \quad \triangle ABC \sim \triangle DEF \quad \text{یعنی اگر}$$

سؤال: آیا برای بررسی تشابه دو مثلث باید همه شرایط تساوی زوایا و تساوی نسبت اضلاع در دو مثلث مورد بررسی قرار

گیرد؟ یا راه ساده تری با بررسی شرایط محدودتر وجود دارد؟

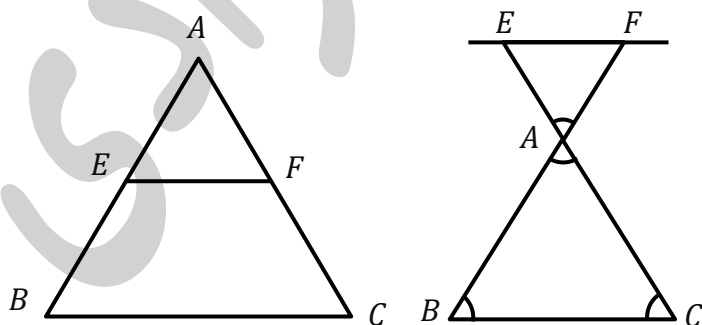
پاسخ: خبر خوب این است که می توان با بررسی شرایط محدودتر به بررسی تشابه مثلث ها پرداخت.

- ابتدا یک قضیه را بیان می کنیم و به کمک آن شرایط را محدود تر می کنیم.

«قضیه اساسی تشابه مثلث ها»

اگر خطی موازی یک ضلع مثلث دو ضلع دیگر (یا امتداد آن ها) را قطع کند. مثلثی ایجاد می شود که با مثلث مفروض متشابه است.

اثبات:



در شکل های مقابل $EF \parallel BC$ می خواهیم

ثابت کنیم $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ بنابر قضیه ی

خطوط موازی و مورب زوایای نظیر در دو مثلث

AEF و ABC برابر هستند. هم چنین بنابر

نتیجه اساسی قضیه تالس $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$ پس دو مثلث متشابه هستند.

محتوای نوشتاری کتاب هندسه دهم	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران معاونت آموزش متوسطه ۲ اداره تکنولوژی گروههای آموزش گروه ریاضی	فصل دوم درس سوم: تشابه درس نامه : محبوبه شاه مرادی
سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱		

$$\hat{A} = \hat{A}$$

$$\hat{B} = \hat{E} \quad \text{و} \quad \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC$$

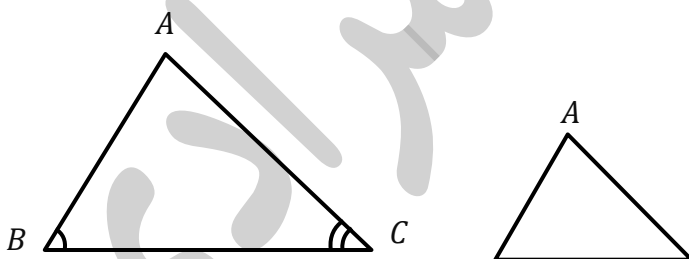
$$\hat{C} = \hat{F}$$

حال با توجه به قضیه اساسی تشابه مثلث ها می توانیم سه قضیه اصلی را که حالت های مختلف تشابه مثلث ها را بیان می کند (مانند حالت های هم نهشتی مثلث ها) اثبات کنیم.

راهبرد کلی ما برای اثبات این سه قضیه، این است که روی اضلاع AB و AC از مثلث بزرگتر، AM و AN را هم اندازه دو ضلع نظیر $A'B'$ و $A'C'$ جدا و ثابت کنیم MN موازی BC است.

قضیه ۱ (حالت اول تشابه):

اگر دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلث دیگر هم اندازه باشند آن گاه دو مثلث متشابه هستند.



اثبات : روی ضلع های AB و AC پاره خط های

AM و AN را به ترتیب و هم اندازه با $A'B'$ و $A'C'$

جدا می کنیم. طبق فرض داریم : $B = B'$ و $C = C'$

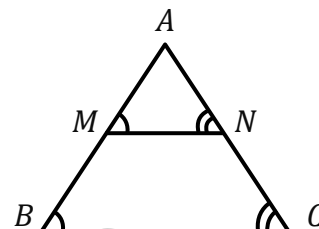
و چون مجموع زوایا در مثلث 180° می باشد. بنابراین

$$\hat{A} = \hat{A'} \quad \text{یعنی} \quad \hat{A'} + \hat{B'} + \hat{C'} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180$$

بنابراین شرط اول تشابه برقرار می شود تساوی زوایا. و اما داریم :

محتوای نوشتاری کتاب هندسه دهم	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران معاونت آموزش متوسطه ۲ اداره تکنولوژی گروههای آموزش گروه ریاضی	فصل دوم درس سوم: تشابه درس نامه: محبوبه شاه مرادی
سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱		

$$\left. \begin{array}{l} AM = A'B' \\ AN = A'C' \\ \angle A = \angle A' \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle AMN \cong \triangle A'B'C'$$



$$\Rightarrow MN = B'C' \quad \text{و} \quad \angle M = \angle B' \quad \text{و} \quad \angle N = \angle C'$$

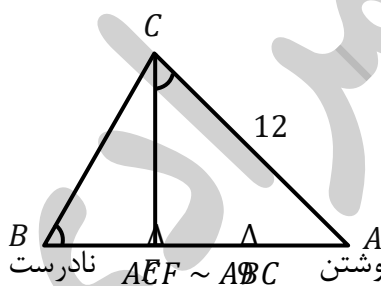
$$\angle M = \angle B' \quad \text{و} \quad \angle B = \angle B' \Rightarrow \angle M = \angle B \Rightarrow MN \parallel BC$$

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC \quad \text{و در نتیجه} \quad \triangle AMN \sim \triangle ABC \quad \text{و طبق قضیه اساسی تشابه}$$

مثال ۳) در شکل روبرو $AF = 9$ و $AC = 12$ و $\triangle ACF = \triangle B$ ، طول پاره خط BF کدام است؟

(داخلی دی ماه ۱۳۹۸)

پاسخ:



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{ACF} = \hat{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{CF}{BC}$$

توجه کنید که در نوشتن $\triangle ACF \sim \triangle ABC$ ، باید رأس های نظیر نوشته شوند، مثلاً نوشتن $\triangle ACF \sim \triangle ABC$ نادرست

است با توجه به داده های مسأله نسبت $\frac{CF}{BC}$ را نیاز داریم.

بنابراین:

$$\frac{12}{AB} = \frac{9}{12} \Rightarrow AB = \frac{144}{9} = 16 \Rightarrow BF = AB - AF = 16 - 9 = 7$$

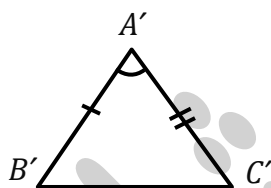
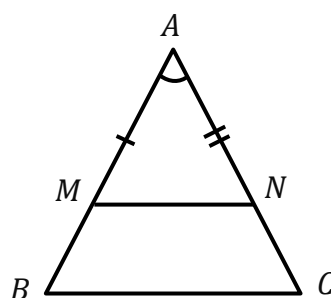
فصل دوم	به نام خدا	محتوای نوشتاری
درس سوم: تشابه	اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران	کتاب هندسه دهم
درس نامه : محبوبه شاه مرادی	معاونت آموزش متوسطه ۲	سال تحصیلی
	اداره تکنولوژی گروههای آموزش	۱۴۰۰-۱۴۰۱
	گروه ریاضی	

بنابراین طول BF برابر ۷ می باشد.

قضیه ۲) هرگاه اندازه های دو ضلع از مثلثی با اندازه های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین

آنها، هم اندازه باشند. دو مثلث متشابه اند. (حالت دوم تشابه)

$$\angle A = \angle A' \quad \text{و} \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$



اثبات :

فرض می کنیم $\hat{A} = \hat{A}'$ و $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$
 ثابت می کنیم $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ نقاط M و N را

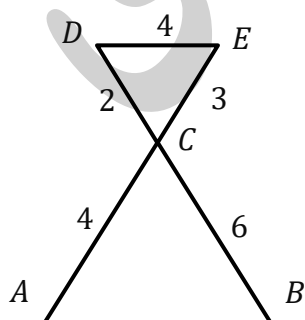
روی اضلاع AB و AC انتخاب می کنیم به طوریکه $AM = A'B'$

و $AN = A'C'$ ، دو مثلث AMN و $A'B'C'$ به حالت (ض ض) هم نهشت هستند و داریم :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} MN \parallel BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$$

$$\Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

مثال ۴) الف : ثابت کنید دو مثلث $\Delta AEC \sim \Delta ABC$ در شکل زیر متشابه هستند. و اندازه AB را بیابید.



ب : آیا DE با AB موازی است؟ چرا؟ (خرداد ۱۳۹۹)

پاسخ :

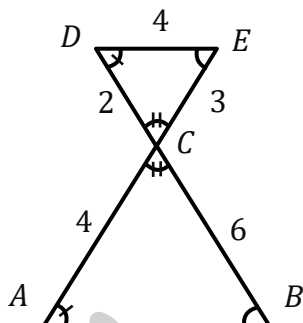
محتوای نوشتاری کتاب هندسه دهم	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران معاونت آموزش متوسطه ۲ اداره تکنولوژی گروههای آموزش گروه ریاضی	فصل دوم درس سوم: تشابه درس نامه: محبوبه شاه مرادی
سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱		

الف) دو زاویه $\hat{ACB}$ و $\hat{DCE}$ متقابل به رأس هستند. پس برابرند و اضلاع این دو زاویه متناسبند. $\frac{BC}{CE} = \frac{AC}{CD} = 2$. بنابراین دو مثلث متشابه هستند و می توان آن را به صورت زیر نوشت. (نسبت تشابه به ۲ یا $\frac{1}{2}$ است)

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{ACB} = \hat{DCE} \\ \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CE} = 2 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{حالت دوم تشابه}} \Delta ABC \sim \Delta DEF \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{E} \\ \hat{A} = \hat{D} \\ \frac{AB}{DE} = 2 \Rightarrow AB = 2 \times 4 = 8 \end{array} \right.$$

دقت شود ضلع AC با CD نظیر است و زاویه روبه رو به AC در مثلث ABC برابر $\hat{B}$ و در مثلث DEC زاویه ی روبه رو به ضلع CD برابر $\hat{E}$ می باشد. پس این دو زاویه نظیر هم هستند و در نتیجه $\hat{B} = \hat{E}$ می شود.

ب) خیر، اگر DE با AB موازی باشد. در این صورت $\hat{A} = \hat{E}$ و $\hat{B} = \hat{D}$ که نتیجه می شود $\frac{CD}{BC} = \frac{CE}{AC}$ و این تناسب در این پرسش برقرار نیست، پس DE نمی تواند موازی با AB باشد.



قضیه ۳:

(حالت سوم تشابه): اگر سه ضلع مثلثی متناظراً با سه ضلع مثلث دیگر متناسب باشند. آن گاه دو مثلث

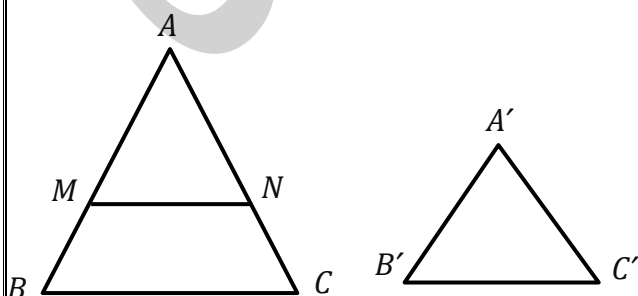
متشابه اند.

اثبات:

فرض کنیم $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$ ، می خواهیم ثابت کنیم

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \quad \text{نقاط } M \text{ و } N \text{ را روی اضلاع } AB$$

و AC چنان انتخاب می کنیم که $AM = A'B'$ و $AN = A'C'$



فصل دوم	به نام خدا	محتوای نوشتاری
درس سوم: تشابه	اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران	کتاب هندسه دهم
درس نامه : محبوبه شاه مرادی	معاونت آموزش متوسطه ۲	سال تحصیلی
	اداره تکنولوژی گروههای آموزش	۱۴۰۰-۱۴۰۱
	گروه ریاضی	

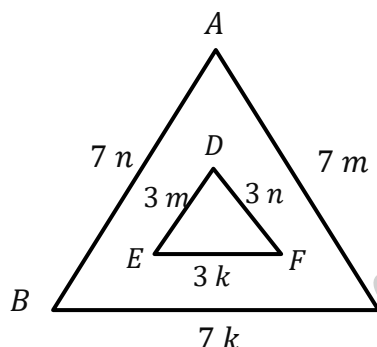
با توجه به فرض داریم :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} MN \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \Delta AMN \sim \Delta ABC$$

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \xrightarrow{AM=A'B'} \frac{MN}{BC} = \frac{A'B'}{AB} \xrightarrow{\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}} \frac{MN}{BC} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow MN = B'C'$$

در نتیجه $A'B'C' \sim \Delta AMN$ و $A'B'C' \sim \Delta ABC$: هم نهشت هستند پس :

مثال ۵) در شکل مقابل $\widehat{D} + \widehat{F} = 146^\circ$ ، اندازه زاویه C چند درجه است؟



(خرداد ۱۳۹۸)

الف) ۴۶ ج) ۳۴

ب) ۲۴ د) ۳۶

پاسخ :

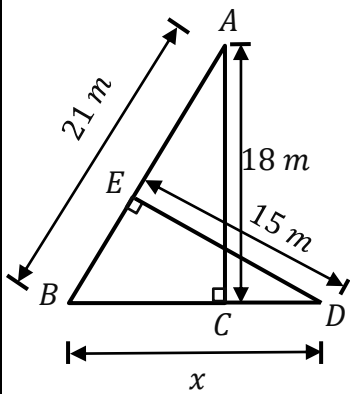
$$\frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{DE}{AB} = \frac{3}{7} \Rightarrow \Delta DEF \sim \Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} \widehat{E} = \widehat{C} \\ \widehat{D} = \widehat{A} \\ \widehat{F} = \widehat{B} \end{cases}$$

$$\widehat{D} + \widehat{F} = 146^\circ \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} = 146^\circ \Rightarrow 180 - \widehat{C} = 146^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 34^\circ$$

فصل دوم	به نام خدا	محتوای نوشتاری
درس سوم: تشابه	اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران	کتاب هندسه دهم
درس نامه : محبوبه شاه مرادی	معاونت آموزش متوسطه ۲	سال تحصیلی
	اداره تکنولوژی گروههای آموزش	۱۴۰۰-۱۴۰۱
	گروه ریاضی	

(مثال های کتاب)

مثال ۶) مطابق شکل روبرو، یک تیر (دکل) انتقال برق به ارتفاع ۲۱ متر در اثر وزش باد خم شده است و در موقعیت جدید، نوک آن از زمین ۱۸ متر فاصله دارد. می خواهیم با قرار دادن یک تیر فلزی به طول ۱۵ متر، عمود بر آن، آن را به طور موقت سرپا نگه داریم. پای این تیر فلزی را باید در چه فاصله ای از پای تیر انتقال برق محکم کنیم؟
حل :

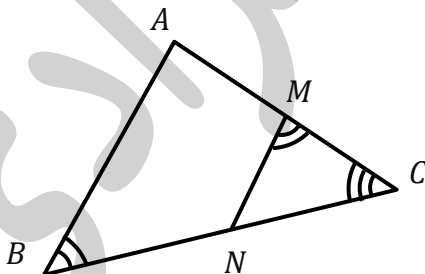


$$\begin{cases} \angle B = \angle B \\ \angle C = \angle E = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle BDE \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{15}{18} \Rightarrow \frac{BD}{21} \Rightarrow BD = \frac{21 \times 15}{18} = 17/5 \text{ m}$$

یعنی باید پای تیر فلزی را در فاصله ۱۷/۵ متری از پای دکل برق محکم کرد.

مثال ۷) در مثلث ABC، از نقطه M وسط AC، زاویه NMC را مساوی زاویه B جدا کرده ایم. اگر NC = 2 و NB = 4، طول AC را بدست آورید.



فصل دوم	به نام خدا	محتوای نوشتاری
درس سوم: تشابه	اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران	کتاب هندسه دهم
درس نامه : محبوبه شاه مرادی	معاونت آموزش متوسطه ۲	سال تحصیلی
	اداره تکنولوژی گروههای آموزش	۱۴۰۰-۱۴۰۱
	گروه ریاضی	

حل :

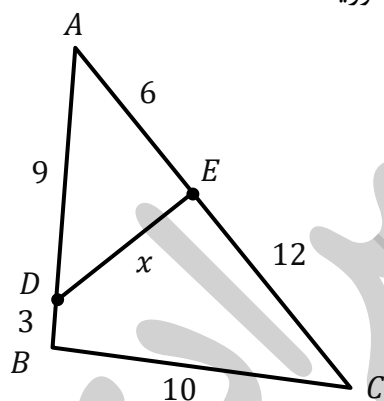
اگر خوب دقت کنیم مشاهده می کنیم که مثلث های ABC و MNC دو زاویه مساوی دارند $\widehat{M} = \widehat{B}$ و زاویه $\widehat{C}$ نیز مشترک هست. بنابراین این دو مثلث ABC و MNC متشابه اند.

بنابراین داریم : $\frac{MC}{BC} = \frac{MN}{AB} = \frac{NC}{AC}$ و به جای MC ، $\frac{AC}{2}$ را قرار می دهیم.

$$\frac{AC}{2BC} = \frac{NC}{AC} \Rightarrow AC^2 = 2NC \cdot BC = 2NC(NC + NB) \Rightarrow AC^2 = 2 \times 2(2 + 4) = 24$$

$$\Rightarrow AC = 2\sqrt{6}$$

مثال ۸) در شکل مقابل اندازه هر پاره خط روی آن نوشته شده است. اندازه x را بدست آورید.



حل : به کمک مقادیر مشخص شده روی اضلاع داریم :

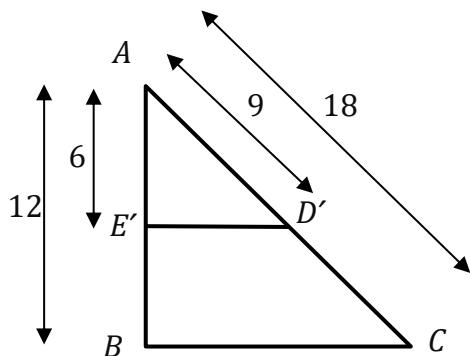
$$\begin{cases} \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2} \\ \text{مشتک } A \text{ و} \end{cases} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

سوال : در شکل ، روی AC ، AD' را هم اندازه AD و روی AB ، AE' را هم اندازه AE جدا کنید. چرا $D'E' \parallel BC$ ؟

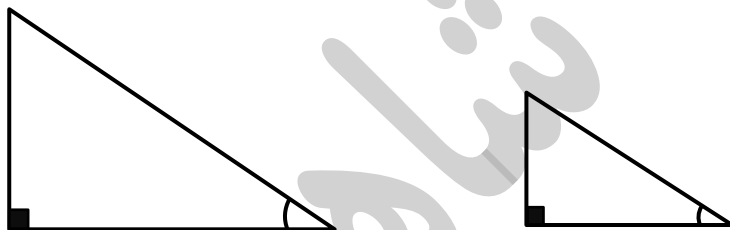
فصل دوم	به نام خدا	محتوای نوشتاری
درس سوم: تشابه	اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران	کتاب هندسه دهم
درس نامه : محبوبه شاه مرادی	معاونت آموزش متوسطه ۲	سال تحصیلی
	اداره تکنولوژی گروههای آموزش	۱۴۰۰-۱۴۰۱
	گروه ریاضی	

$$\frac{AE'}{E'B} = \frac{AD'}{D'C} = \frac{1}{2} \xRightarrow{\text{تالس}} E'D' \parallel BC$$

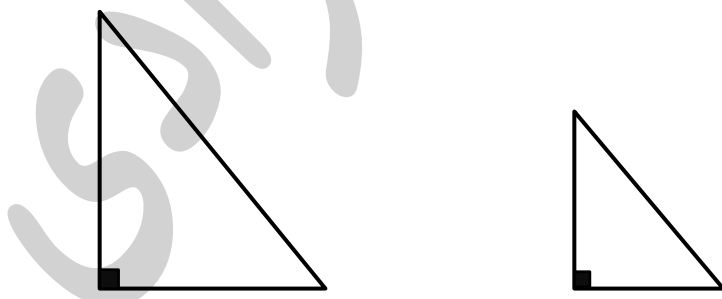


حالت های تشابه مثلث های قائم الزاویه

الف) اگر یک زاویه حاده از مثلث قائم الزاویه ای با یک زاویه حاده از مثلث قائم الزاویه ی دیگری برابر باشند، دو مثلث متشابه اند.

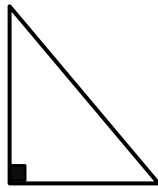
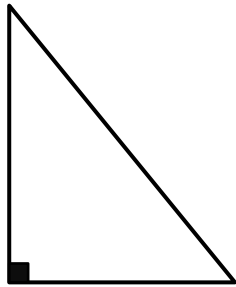


ب) اگر دو ضلع زاویه ی قائمه ی یک مثلث قائم الزاویه با دو ضلع زاویه قائمه از مثلث قائم الزاویه ی دیگری متناسب باشند، دو مثلث متشابه هستند.



محتوای نوشتاری کتاب هندسه دهم	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران معاونت آموزش متوسطه ۲ اداره تکنولوژی گروههای آموزش گروه ریاضی	فصل دوم درس سوم: تشابه درس نامه: محبوبه شاه مرادی
سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱		

پ) اگر وتر و یک ضلع قائمه از مثلث قائم الزاویه ای با وتر و یک ضلع قائمه در مثلث قائم الزاویه ی دیگری متناسب باشند، دو مثلث متشابه اند.



$$c'^2 = a'^2 - b'^2$$

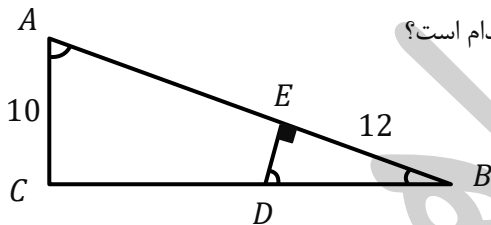
$$\begin{pmatrix} a' = ka \\ b' = kb \end{pmatrix}$$

$$c'^2 = (ka)^2 - (kb)^2$$

$$c'^2 = k^2(a^2 - b^2)$$

$$c'^2 = k^2 \cdot c^2 \Rightarrow c' = kc$$

بنابراین $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ ، یعنی دو مثلث متشابه هستند



مثال ۹) در مثلث قائم الزاویه ی ABC ، $(\hat{C} = 90^\circ)$ مطابق شکل طول CD کدام است؟

دو مثلث قائم الزاویه ی $\triangle BAC$ و $\triangle BDE$ به حالت برابری یک زاویه حاده

$(\hat{B} = \hat{B})$ متشابه اند.

با نوشتن نسبت تشابه، ابتدا BD و سپس CD را می یابیم.

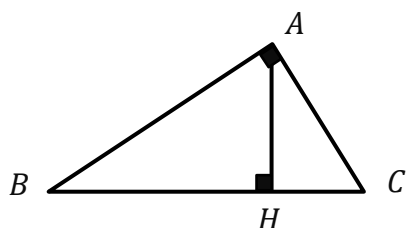
$$\frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{BD}{26} = \frac{12}{\sqrt{26^2 - 10^2}} \Rightarrow BD = \frac{26 \times 12}{\sqrt{16 \times 36}} = \frac{26 \times 12}{4 \times 6} = 13$$

$$CD = BC - BD \Rightarrow CD = 4 \times 6 - 13 \Rightarrow CD = 24 - 13 \Rightarrow CD = 11$$

محتوای نوشتاری کتاب هندسه دهم	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران معاونت آموزش متوسطه ۲ اداره تکنولوژی گروههای آموزش گروه ریاضی	فصل دوم درس سوم: تشابه درس نامه: محبوبه شاه مرادی
سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱		

« اثبات قضیه فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم الزاویه »

فرض کنیم مثلث قائم الزاویه ABC را داشته باشیم، ارتفاع وارد بر وتر BC را رسم می کنیم. بنابراین در دو مثلث ABH و ACH



ΔABC

داریم:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{H} \\ \hat{B} = \hat{B} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ABH \quad (1) \quad (z)$$

و هم چنین در دو مثلث ACH و ABC داریم:

$$\begin{cases} \hat{C} = \hat{C} \\ \hat{A} = \hat{H} \end{cases} \Rightarrow \Delta ACH \sim \Delta ABC \quad (2) \quad (z)$$

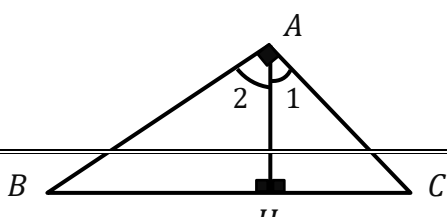
از رابطه ① و ② می توان نتیجه گرفت که مثلث ABH نیز با مثلث ACH متشابه است. زیرا هر دو این مثلث ها با مثلث ABC متشابه اند.

بنابراین می توان نتیجه گرفت:

نکته مهم:

✓ در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم الزاویه تفکیک می کند که هر دو با هم با مثلث اصلی متشابه اند.

به کمک تشابه مثلث های ABH و ACH و ABC می توان به روابط طولی



محتوای نوشتاری کتاب هندسه دهم	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران معاونت آموزش متوسطه ۲ اداره تکنولوژی گروههای آموزش گروه ریاضی	فصل دوم درس سوم: تشابه درس نامه: محبوبه شاه مرادی
سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱		

در مثلث قائم الزاویه دست یافت :

۱- از تشابه دو مثلث ΔABH و ΔABC می توان نتیجه گرفت ضلع AB

واسطه هندسی بین دو ضلع BC و BH می باشد.

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{H} = 90^\circ \\ \hat{B} = \hat{B} \end{cases} \Rightarrow \Delta ACH \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \boxed{AB^2 = BH \times BC}$$

۲- از تشابه دو مثلث ΔABC و ΔACH می توان نتیجه گرفت ضلع AC واسطه هندسی بین دو ضلع CH و BC می باشد.

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{H} \\ \hat{C} = \hat{C} \end{cases} \Rightarrow \Delta AHC \sim \Delta ABC \quad (ز ز) \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{BC} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow AC^2 = BC \times HC$$

۳- از دو رابطه فوق می توان رابطه فیثاغورس را ثابت کرد.

$$AB^2 + AC^2 = BH \times BC + HC \times BC \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC(BH + HC)$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC(BC) = BC^2$$

✓ بنابراین در مثلث قائم الزاویه ABC روابط مهم زیر برقرار هستند.

$$1) AB^2 = BC \cdot BH$$

فصل دوم	به نام خدا	محتوای نوشتاری
درس سوم: تشابه	اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران	کتاب هندسه دهم
درس نامه : محبوبه شاه مرادی	معاونت آموزش متوسطه ۲	سال تحصیلی
	اداره تکنولوژی گروههای آموزش	۱۴۰۰-۱۴۰۱
	گروه ریاضی	

$$2) AC^2 = BC \cdot CH$$

$$3) BC^2 = AB^2 \cdot AC^2$$

$$4) AH^2 = BH \cdot CH$$

$$5) AH \times BC = AB \times AC$$

روابط ۱، ۲، و ۳ اثبات شد. به اثبات روابط ۴ و ۵ می پردازیم :

اثبات رابطه ۴ :

ابتدا ثابت می کنیم دو مثلث ΔAHC و ΔABH متشابه اند : زیرا

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} + C = 90^\circ \\ C + A_1 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{A}_1 \\ H_1 = H_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta AHC \sim \Delta ABH \quad \left(\begin{array}{c} \Delta \\ \Delta \\ \text{ز ز} \end{array} \right) \Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{BH}{AH} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow$$

$$AH^2 = BH \times HC$$

اثبات رابطه ۵ :

می دانیم مساحت مثلث ABC به دو صورت زیر قابل بیان می باشد.

$$\textcircled{1} \quad S = AB \times AC \times \frac{1}{2}$$

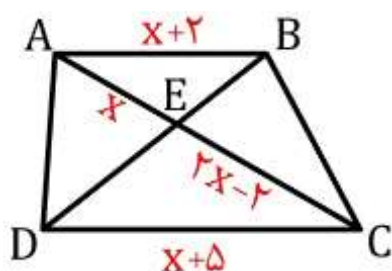
$$\textcircled{2} \quad S = AH \times BC \times \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{1} = \textcircled{2} \Rightarrow AB \times AC \times \frac{1}{2} = AH \times BC \times \frac{1}{2} \Rightarrow AB \times AC = AH \times BC$$

فصل دوم	به نام خدا	محتوای نوشتاری
درس سوم: تشابه	اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران	کتاب هندسه دهم
درس نامه : محبوبه شاه مرادی	معاونت آموزش متوسطه ۲	سال تحصیلی
	اداره تکنولوژی گروههای آموزش	۱۴۰۰-۱۴۰۱
	گروه ریاضی	

نمونه سوالات امتحانی :

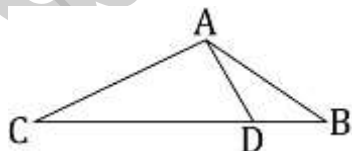
۱- در ذوزنقه زیر، مقدار x را پیدا کنید.



دو مثلث ABE و CDE بنابر رز متشابه‌اند، پس:

$$\begin{aligned}\frac{AB}{CD} &= \frac{AE}{CE} \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} = \frac{x}{2x-2} \\ \Rightarrow x^2 + 5x &= 2x^2 + 2x - 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \\ \Rightarrow x &= 4, -1 \xrightarrow{x>0} x = 4\end{aligned}$$

۲- در شکل زیر، $AB=10$ ، $BD=5$ ، $CD=15$ و $\angle ADC = 60^\circ$ است. اندازه زاویه BAC را پیدا کنید.



نشان می‌دهیم دو مثلث ABD و ABC متشابه‌اند:

$$\left. \begin{aligned}\frac{AB}{BC} &= \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \\ \frac{BD}{AB} &= \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\ B &= B\end{aligned}\right\} \Rightarrow ABD \sim ABC \Rightarrow BAC = ADC = 180 - 60 = 120$$

محتوای نوشتاری کتاب هندسه دهم	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران معاونت آموزش متوسطه ۲ اداره تکنولوژی گروههای آموزش گروه ریاضی	فصل دوم درس سوم: تشابه درس نامه: محبوبه شاه مرادی
سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱		

۳- جاهای خالی را پر کنید:

الف) اگر دو زاویه یک مثلث با دو زاویه یک مثلث دیگر برابر باشد، آن گاه دو مثلث هستند.

ب) اگر نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر با ۲۵ باشد، آن گاه نسبت محیط مثلث کوچکتر به محیط مثلث بزرگتر برابر با است

الف) متشابه

بنابر «ز» متشابه هستند.

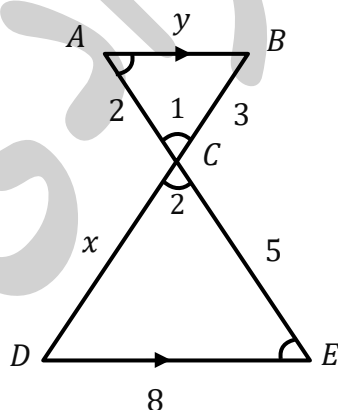
ب) $\frac{1}{5}$

نسبت مساحت برابر با مجذور نسبت تشابه و نسبت محیط برابر با خود نسبت تشابه است.

تمرین صفحه ۴۲:

۱- در هر یک از شکل های زیر، تشابه مثلث ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر x و y را مشخص کنید:

الف)



پاسخ الف)

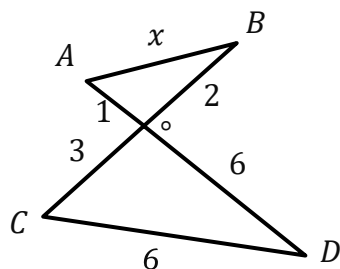
$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{E} & \text{موازی و مورب} \\ \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 & \text{متقابل به رأس} \end{cases} \Rightarrow \Delta AHC \sim \Delta ABC \quad \left(\begin{smallmatrix} \Delta \\ \Delta \end{smallmatrix} \right) \quad \left(\begin{smallmatrix} z \\ z \end{smallmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{BC} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 7.5$$

ب)

فصل دوم	به نام خدا	محتوای نوشتاری
درس سوم: تشابه	اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران	کتاب هندسه دهم
درس نامه: محبوبه شاه مرادی	معاونت آموزش متوسطه ۲	سال تحصیلی
	اداره تکنولوژی گروههای آموزش	۱۴۰۰-۱۴۰۱
	گروه ریاضی	

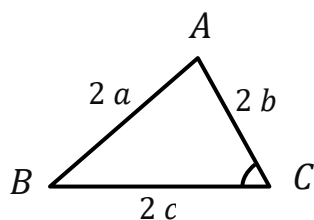
پاسخ ب):



$$\begin{cases} \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{1}{3} \\ \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \text{ متقابل به رأس} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \Delta \\ AOB \end{matrix} \sim \begin{matrix} \Delta \\ COD \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{matrix} \text{نسبت دو ضلع و زاویه بین} \end{matrix} \right)$$

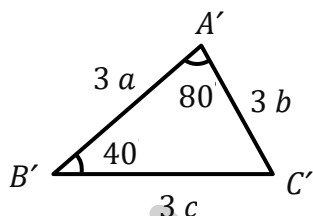
$$\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{6.6} \Rightarrow x = 2.2$$

ج)



پاسخ ج):

$$\frac{2a}{3a} = \frac{2b}{3b} = \frac{2c}{3c} \Rightarrow \begin{matrix} \Delta \\ ABC \end{matrix} \sim \begin{matrix} \Delta \\ A'B'C' \end{matrix} \left(\begin{matrix} \text{تناسب سه ضلع} \end{matrix} \right)$$



$$C' = 180 - (80 + 40) \Rightarrow C' = 180 - 120 \Rightarrow C' = 60^\circ$$

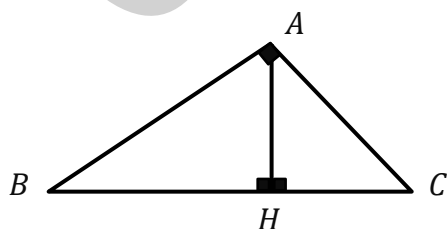
$$\Rightarrow \begin{cases} A = A' = 80^\circ \\ B = B' = 40^\circ \\ C = C' = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 60^\circ$$

۲- در مثلث قائم الزاویه ABC ($\widehat{A} = 90^\circ$) ارتفاع AH را رسم کرده ایم. به کمک رابطه طولی در مثلث قائم الزاویه در هر یک از

موارد زیر با توجه به مفروضات داده شده مقادیر مجهول را محاسبه کنید:

$$۱) BH = 9 \quad CH = 4 \quad AH = ? \quad BA = ? \quad AC = ?$$

پاسخ ۱):



$$AH^2 = BH \times HC \rightarrow AH^2 = 9 \times 4 = 36 \rightarrow AH = 6$$

$$BH + HC = BC \rightarrow 9 + 4 = 13$$

فصل دوم	به نام خدا	محتوای نوشتاری
درس سوم: تشابه	اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران	کتاب هندسه دهم
درس نامه : محبوبه شاه مرادی	معاونت آموزش متوسطه ۲	سال تحصیلی
	اداره تکنولوژی گروههای آموزش	۱۴۰۰-۱۴۰۱
	گروه ریاضی	

$$AB^2 = BH \times BC \rightarrow AB^2 = 9 \times 13 = 127 \rightarrow AB = \sqrt{127}$$

$$AC^2 = CH \times BC \rightarrow AC = 4 \times 13 = 52 \rightarrow AC = \sqrt{52}$$

$$۲) AB = 8 \quad AC = 6 \quad BH = ? \quad CH = ?$$

پاسخ (۲):

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

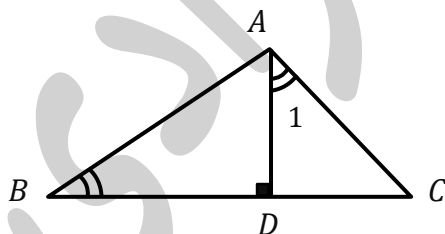
$$BC^2 = 64 + 36 \rightarrow BC^2 = 100 \rightarrow BC = 10$$

$$AB^2 = BH \times BC \rightarrow 64 = BH \times 10 \rightarrow BH = 6.4$$

$$AC^2 = CH \times BC \rightarrow 36 = CH \times 10 \rightarrow CH = 3.6$$

۳- در شکل روبرو $\angle A_1 = \angle B$ و $AC = 4$ و $BD = 6$ طول BC را بدست آورید.

پاسخ:



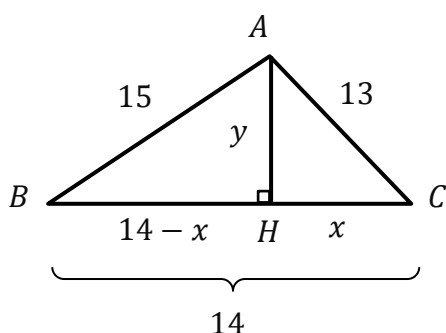
$$\begin{cases} \widehat{C} = \widehat{C} \\ \widehat{A_1} = \widehat{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \Delta ADC \sim \Delta ABC \\ \text{(در حالت (ز ز) متشابه اند)} \end{matrix} \Rightarrow \frac{DC}{AC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow$$

$$AC^2 = DC \times AB \Rightarrow 16 = x(6 + x) \Rightarrow 16 = 6x + x^2 \Rightarrow (x + 8)(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow BC = 2$$

محتوای نوشتاری کتاب هندسه دهم	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران معاونت آموزش متوسطه ۲ اداره تکنولوژی گروههای آموزش گروه ریاضی	فصل دوم درس سوم: تشابه درس نامه: محبوبه شاه مرادی
سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱		

۴- در شکل مقابل، مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیه فیثاغورث در مثلث های ABH و ACH ، مقادیر x و y را بدست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.



پاسخ:

در مثلث $\triangle ABC$ داریم:

$$15^2 = y^2 + (14-x)^2 \Rightarrow 225 = y^2 + (14-x)^2 \quad (1)$$

در مثلث $\triangle AHC$ داریم:

$$13^2 = y^2 + x^2 \Rightarrow 169 = y^2 + x^2 \Rightarrow y^2 = 169 - x^2 \quad (2)$$

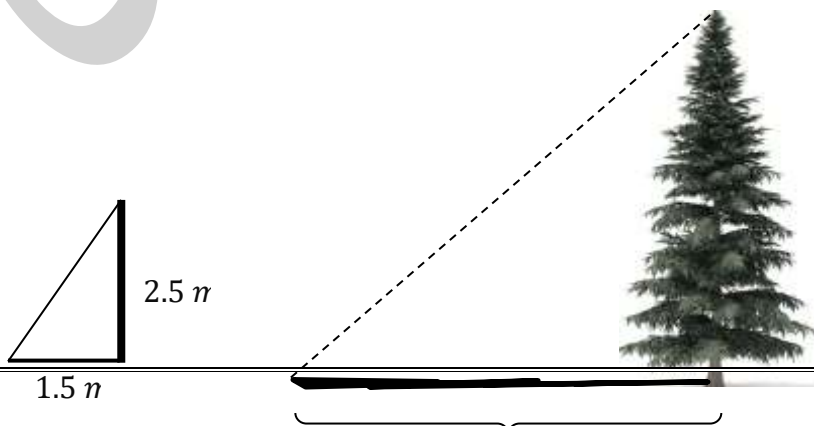
$$225 = 169 - x^2 + (14-x)^2 \Rightarrow x = 5$$

با جایگزینی ۲ در ۱ داریم:

۵- در حیاط یک دبیرستان، دو درخت بلند وجود دارد. معلم هندسه از دانش آموزان خواست که برای تعیین ارتفاع این دو درخت روشی را ارائه کنند. در اینجا روش دو دانش آموز را می بینید.

الف) روش ترانه: ترانه یک چوب ۲.۵ متری را به صورت عمودی روی زمین در جایی محکم کرد. طول سایه چوب در آن زمان ۱.۵ متر بود. هم زمان طول سایه درخت ۱۲ متر بود. با توجه به شکل ارتفاع درخت چند متر است؟

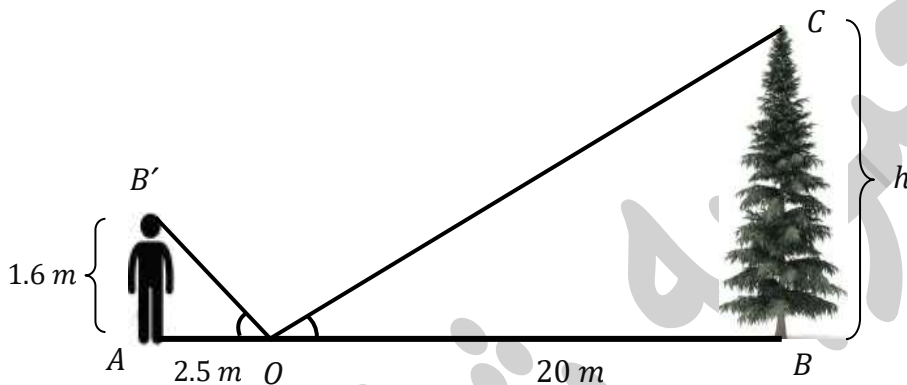
پاسخ:



$$\frac{h}{2.5} = \frac{12}{1.5} \Rightarrow h = 20 \text{ m}$$

محتوای نوشتاری کتاب هندسه دهم	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران معاونت آموزش متوسطه ۲ اداره تکنولوژی گروههای آموزش گروه ریاضی	فصل دوم درس سوم: تشابه درس نامه: محبوبه شاه مرادی
سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱		

ب) روش شهرزاد: شهرزاد آینه ای کوچک را که در مقیاس بزرگ می توان یک نقطه در نظر گرفت (نقطه O در شکل) روی زمین و در مسیر خط راستی که از پای درخت تا پای خودش کشیده است قرار داد. پس روی این خط آنقدر به جلو و عقب حرکت کرد تا بتواند، تصویر نوک درخت را در آینه ببیند. چگونه می توان با داشتن AO و BO و قد شهرزاد ارتفاع درخت را بدست آورد. قد شهرزاد 160 cm و فاصله پای او از آینه ۲.۵ متر و فاصله آینه از پای درخت ۲۰ متر می باشد. ارتفاع درخت چند متر است؟



پاسخ:

$$\begin{aligned} \triangle AB'O \text{ و } \triangle CBO & \text{ متشابه اند (ز ز) زیرا} \\ & \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} = \hat{A} = 90^\circ \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ زوایای تابش و انعکاس} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\frac{AO}{BO} = \frac{B'A}{BC} = \frac{B'O}{CO} \Rightarrow \frac{1.6}{h} = \frac{2.5}{20} \Rightarrow h = 12.8 \text{ m}$$

۶- با قضیه فیثاغورس آشنا شدید. این قضیه می گوید اگر زاویه A از مثلثی

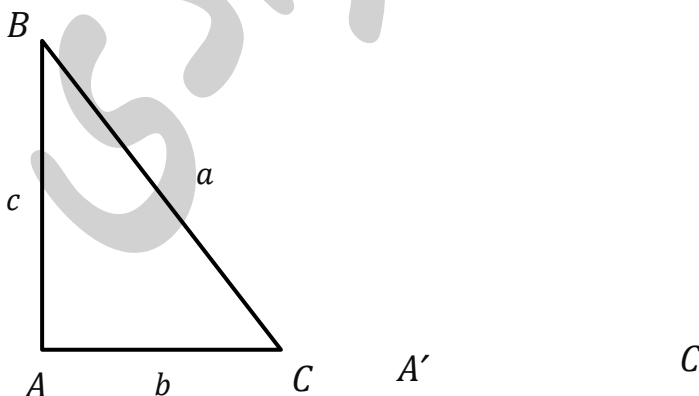
مانند ABC، قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید.

پاسخ:

در یک مثلث اگر داشته باشیم $a^2 = b^2 + c^2$

در این صورت مثلث در رأس A قائم الزامیه است.



محتوای نوشتاری کتاب هندسه دهم	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران معاونت آموزش متوسطه ۲ اداره تکنولوژی گروههای آموزش گروه ریاضی	فصل دوم درس سوم: تشابه درس نامه: محبوبه شاه مرادی
سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱		

ب) با انجام دادن مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

(۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازه طول های اضلاع آن برقرار است.

(۲) پاره خط های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به گونه ای در نظر بگیرید که $\hat{A}' = 90^\circ$ و $A'C' = AC$ و $A'B' = AB$

(۳) با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$ ، اندازه پاره خط $B'C'$ را به دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.

پاسخ: $B'C' = BC \Rightarrow$ فرض و $B'C' = b^2 + c^2$

(۴) توضیح دهید چرا $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ، و نتیجه بگیرید $\hat{A} = 90^\circ$.

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیه دو شرطی بین نمایید.

پاسخ: مثلث قائم الزامیه است اگر و تنها اگر مربع یک ضلع برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد.

منابع:

۱- هندسه مقدماتی از دیدگاه پیشرفته تالیف ادوین ا- موئیز ترجمه دکتر امیر خسروی - محمود نصیری

۲- هندسه ۱ کتاب درسی آموزش و پرورش دفتر تالیف ۱۳۶۹-۱۳۹۹

3-METHODS FOR EUCLIDEAN GEOMETRY

OWEN BYER -FELIX LAZBNIK-DEIRDEL.SMELTZER MAA 2010

محتوای نوشتاری کتاب هندسه دهم	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران معاونت آموزش متوسطه ۲ اداره تکنولوژی گروههای آموزش گروه ریاضی	فصل دوم درس سوم: تشابه درس نامه : محبوبه شاه مرادی
----------------------------------	---	--

محبوبه شاه مرادی