



نمونه سوالات فصل

مشتق و کاربرد مشتق

کتاب ریاضی ۳

به کوشش: مرتضی معینی



بهار ۹۹

گروه ریاضی آموزش و پرورش ناحیه دو کرج

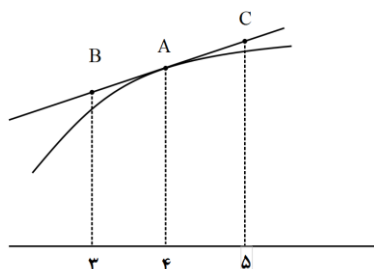
با استفاده از تعریف مشتق، مشتق توابع زیر را در نقاط داده شده محاسبه کنید.

الف) $f(x) = -x^2 + 10x, x = 2$

ب) $g(x) = x^2 + 3, x = -2$

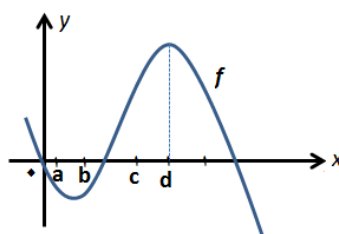
با استفاده از تعریف مشتق، معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ در نقطه ای به طول ۲ واقع بر آن را بنویسید.

برای تابع f در شکل روبرو داریم $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 24$ با توجه به شکل، مختصات نقاط A, B و C را بیابید.



با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول های a و b و c و d را با مشتق های داده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
	۰
	$1/5$
	۲
	$-1/5$



نقاط A, B, C, D, E, F, G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید بطوریکه:

الف) نقطه ای روی نمودار که شیب آن منفی است.

ب) نقطه ای روی نمودار تابع که مقدار تابع و مقدار مشتق در این نقطه منفی است.

پ) نقطه ای روی نمودار تابع که مقدار تابع در آن صفر است و مقدار مشتق در این نقطه مثبت است.

ت) نقطه ای روی نمودار تابع که مقدار مشتق در این نقطه صفر است.

ث) نقاط F, E متفاوت هستند و مشتق یکسانی دارند.

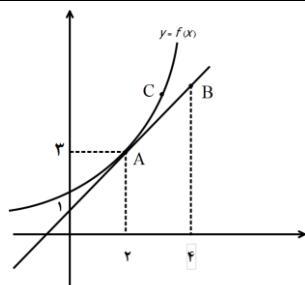
س) نقطه ای روی نمودار تابع که مقدار تابع در آن مثبت است و مقدار مشتق در این نقطه منفی است.

در شکل روبرو نمودار تابع f و خط مماس بر منحنی آن در نقطه ای $x = 2$ داده شده است:

الف) مشتق تابع f را در نقطه ای $x = 2$ را بیابید.

ب) عرض نقطه B چقدر است؟

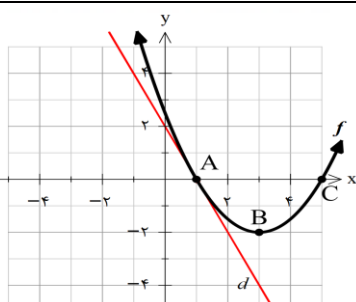
پ) شیب نمودار منحنی در نقطه C روی منحنی را با شیب خط $y = x$ مقایسه کنید.

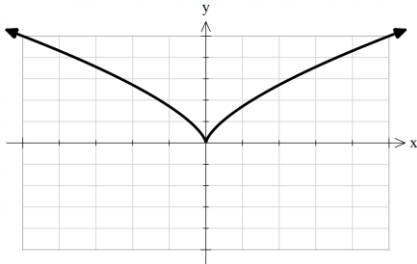
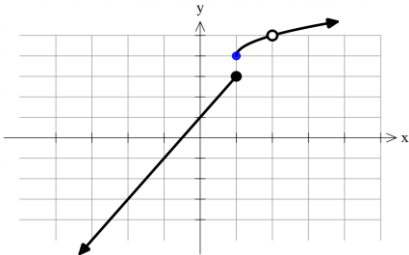
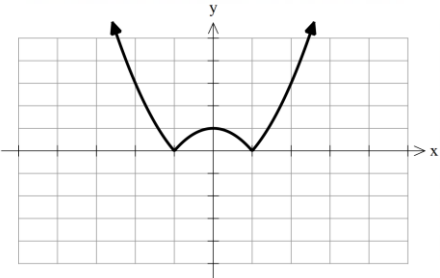
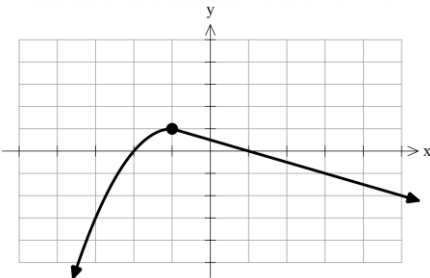
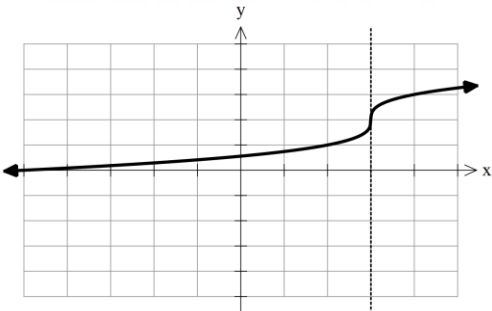
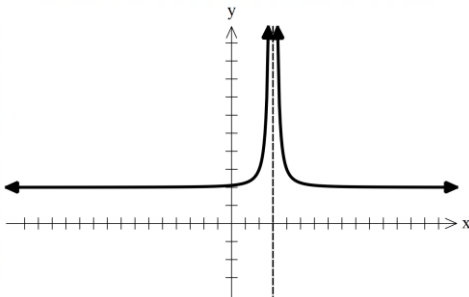


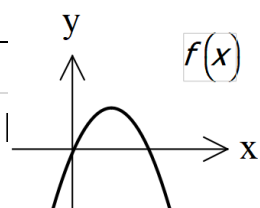
در نمودار مقابل خط d در نقطه $x = 1$ بر نمودار f مماس شده است:

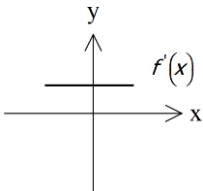
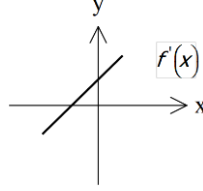
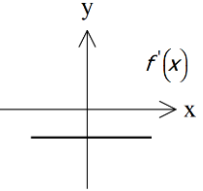
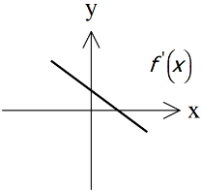
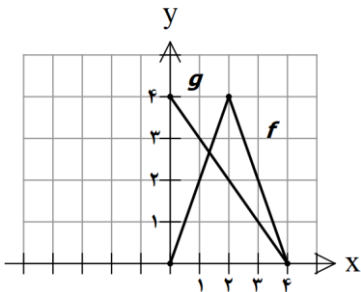
الف) مشتق تابع f را در نقطه $x = 1$ محاسبه کنید.

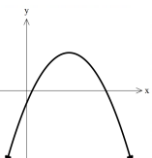
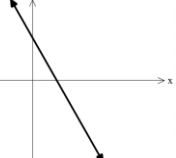
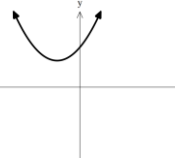
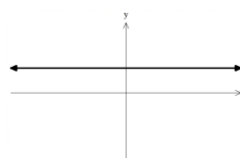
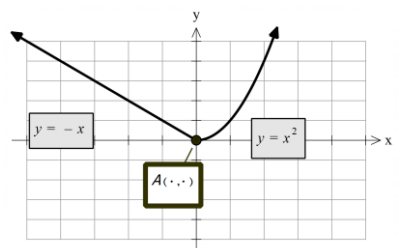
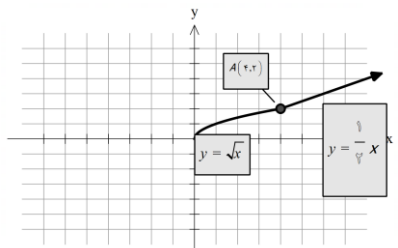
ب) شیب نمودار را در نقاط C, B مقایسه کنید.



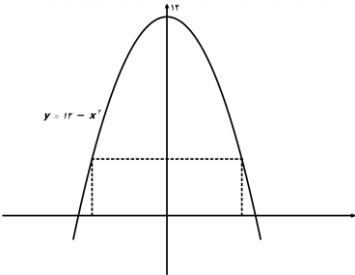
۸	الف) مشتق پذیری تابع $f(x) = x^2 - 1 $ را در $x = 1, x = -1$ بررسی کنید. ب) معادله نیم مماسهای چپ و راست را در نقطه $x = 1$ بدست آورید.
۹	مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در $x = 0$ بررسی کنید.
۱۰	مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ را در $x = 1$ بررسی کنید.
۱۱	تابع f تحت چه شرایطی در $x = a$ مشتق پذیر نیست؟
۱۲	نمودار یک تابع به صورت مقابل است. الف) مقدار مشتق در نقطه b چقدر است؟ ب) مشتق پذیری تابع را در نقاط a, c بررسی کنید. پ) آیا این تابع در بازه $[b, c]$ مشتق پذیر است؟
۱۳	در شکل های زیر، مشتق پذیری نقاط مشخص شده را بررسی کنید. الف) (ب)
	 
	ت) (ت)
	 
	ث) (ج)
	 
۱۴	اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، آنگاه نمودار تابع مشتق آن کدام است؟



(الف)  (ب)  (ج)  (د) 	
۱۵ $f(x) = \begin{cases} 5x & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.	
۱۶ $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ اگر نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.	
۱۷ مشتق پذیری تابع مقابل را در نقطه $x = -1$ بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq -1 \\ 2x + 6 & x < -1 \end{cases}$	
۱۸ $f(x) = \begin{cases} 5x - 4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x + 6 & x > 3 \end{cases}$ تابع داده شده است: الف) نمودار تابع f را رسم کنید. ب) نشان دهید $f'(0)$, $f'(3)$ وجود ندارند. پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید. ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.	
۱۹ مشتق تابع زیر را حساب کنید. (ساده کردن الزامی نمی باشد) الف) $f(x) = \left(\frac{2x-1}{\sqrt{x+3}}\right)^5$ ب) $g(x) = \frac{x}{2x^2 + x - 1}$ پ) $h(x) = (\sqrt{3x+2})(x^2+1)$	
۲۰ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $f(x) = (x^2 + 2x + 1)^5$ ب) $g(x) = \frac{5x^2 - x}{\sqrt{x}}$ پ) $f(x) = (x^2 + 1)^3(5x - 1)$ ت) $g(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$	
۲۱ نمودار تابع f, g را در شکل مقابل در نظر بگیرید: الف) اگر $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ باشد، $h'(1), h'(2), h'(3)$ را بیابید. ب) اگر $k(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $k'(1), k'(2), k'(3)$ 	
۲۲ اگر توابع f, g مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3, f'(2) = 5, g(2) = 8, g'(2) = -6$ مقادیر $(fg)'(2)$ و $(\frac{f}{g})'(2)$ را به دست آورید.	
۲۳ اگر توابع f, g مشتق پذیر باشند و $f'(1) = 3, g'(1) = 5$ مقادیر $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$ را به دست آورید.	
۲۴ نمودار مشتق توابع زیر را رسم کنید.	

	(الف)  (ب)  (ت)  (پ)  (ث) 
۲۵	با محاسبه مشتق چپ و راست در نقطه A، نشان دهید که در نقطه مشتق موجود نیست. (الف)  (ب) 
۲۶	تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ متوسط قد کودکان تا شصت ماهگی را نشان می دهد که در آن x مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است. الف) آهنگ تغییر متوسط رشد در بازه ی زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟ ب) آهنگ لحظه ای تغییر قد در ۴۹ ماهگی چقدر است؟
۲۷	تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازه ی زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟
۲۸	جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می کنیم. جهت حرکت را به طرف بالا مثبت در نظر می گیریم. ارتفاع از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می آید: الف) سرعت متوسط را در بازه $[5, 8]$ به دست آورید. ب) سرعت جسم در لحظه برخورد به زمین را به دست آورید. پ) مشخص کنید در چه لحظه ای سرعت جسم $35m/s$، $-35m/s$ است.
۲۹	معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه $[0, 5]$ (بر t حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟
۳۰	یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^2$ گرم است. الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می یابد؟ ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t = 3$ چقدر است؟
۳۱	گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر است. در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 40(1 - \frac{t}{100})^2$ به دست می آید: الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0, 1]$ چقدر است؟ ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می شود؟
۳۲	تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در چه بازه هایی اکیدا صعودی و در کدام بازه ها اکیدا نزولی است؟
۳۳	بزرگترین بازه از $\square$ که تابع $f(x) = x^3 - 12x + 4$ در آن نزولی اکید باشد، کدام است؟ چرا؟
۳۴	با تشکیل جدول تغییرات تابع $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ مشخص کنید تابع در چه بازه هایی صعودی اکید و در چه بازه هایی نزولی اکید است؟
۳۵	نوع اکسترم های نسبی زیر را در نقاط مشخص شده بیابید.

۳۶ الف) نقطه بحرانی را تعریف کنید. ب) نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. الف) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ب) $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ پ) $h(x) = \sqrt[3]{x}$	
۳۷ در تابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و می نیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$	
۳۸ در نمودار تابع مقابل نقاط a, b, c را در نظر بگیرید. الف) نقاط a, b, c کدام نقاط بحرانی هستند؟ ب) نقاط a, b, c کدام نقاط اکسترمم نسبی هستند؟ پ) نقاط a, b, c کدام نقاط اکسترمم مطلق می باشند؟ نوع اکسترمم را تعیین کنید.	
۳۹ تابع $f(x) = x^2 - 1$ در بازه $[-2, 3]$ رسم کرده و با توجه به نمودار نقاط بحرانی و اکسترمم های مطلق آن را تعیین کنید.	
۴۰ اکسترمم های مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه $[-1, 3]$ مشخص کنید.	
۴۱ نقطه $(2, 1)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b, d را به دست آورید.	
۴۲ نشان دهید در بین تمام مستطیل هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، مستطیلی بیش ترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم اندازه باشند.	
۴۳ ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع 30cm را در نظر بگیرید. مطابق شکل می خواهیم از چهار گوشه آن مربع کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن در امتداد خط چین های مشخص شده در شکل، یک جعبه در باز بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی حداکثر مقدار ممکن گردد؟	
۴۴ هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت 32cm^2 خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه های بالا و پایین هر صفحه 2cm و حاشیه های کناری هر کدام یک سانتیمتر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.	
۴۵ اگر بین دو عدد حقیقی x و y رابطه $y = 10x - 5$ باشد، مقادیر x و y را طوری به دست آورید که حاصل ضرب این دو عدد مینیمم	
۴۶ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.	
۴۷ غلظت یک داروی شیمیایی در خون پس از t ساعت تزریق از رابطه $C(t) = \frac{3t}{t^3 + 27}$ به دست می آید. چند ساعت پس از تزریق دارو، غلظت آن در خون، بیش ترین مقدار ممکن خواهد بود؟	

۴۸	الف) می خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی الساقین را نرده کشی کنیم. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم. در این صورت بیش ترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر است؟ ب) بدون استفاده از مشتق نیز این مساله را حل کنید.
۴۹	ابعاد مستطیلی با بیش ترین مساحت را تعیین کنید که دو راس آن روی محور x ها و دو راس دیگر آن بالای محور x ها و روی سهمی $y = 12 - x^2$ باشند؟ 
۵۰	کشاورزی می خواهد دور یک مزرعه مستطیل به مساحت ثابت $10000m^2$ را دیوار کشی کند. هزینه هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی ۲ میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است. الف) هزینه مورد نیاز برای انجام این کار را به صورت یک تابع بنویسید. ب) ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوار کشی حداقل مقدار ممکن برسد؟
۵۱	آروین می خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۲۰۰ متری غرب و ۶۰ متری شمال موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد. او می تواند با سرعت ۳ متر بر ثانیه از پیاده رو کنار پارک به سمت غرب برود. همچنین می تواند از درون پارک و تنها با سرعت $2m/s$ عبور کند. با توجه به شکل، مقدار x را طوری تعیین کنید که او در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد. 