



جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش و پرورش

اداره کل آموزش و پرورش استان یزد

اداره تکنولوژی و گردهمایی آموزشی دوره متوسطه

جزوه آموزشی

ریاضی (۳)

فصل دوم

پایه دوازدهم (تجربی)

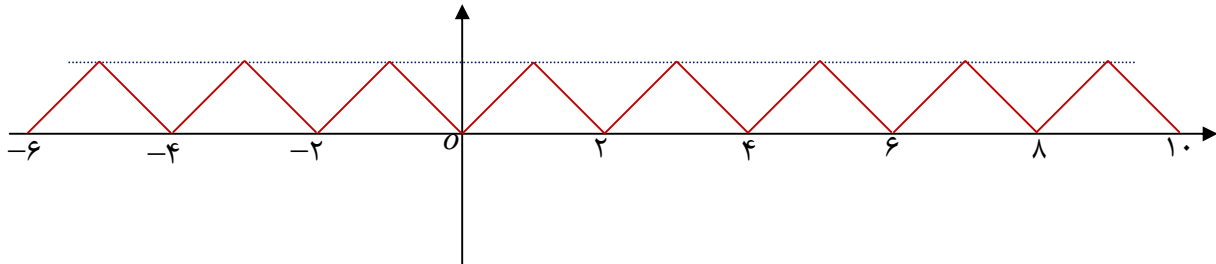
گروه آموزشی ریاضی با همکاری خانه ریاضیات یزد

سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲

مثلثات

تابع متناوب :

نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر می‌باشد. با کمی دقت متوجه می‌شوید که نمودار این تابع در بازه هایی به طول ۲، ۴، ۶ و ... تکرار می‌شود. این تابع را متناوب نامیده هر یک از اعداد ۲، ۴، ۶ و ... را یک دوره تناوب تابع و کوچکترین آنها را که عدد ۲ می‌باشد را دوره تناوب اصلی تابع گوییم.



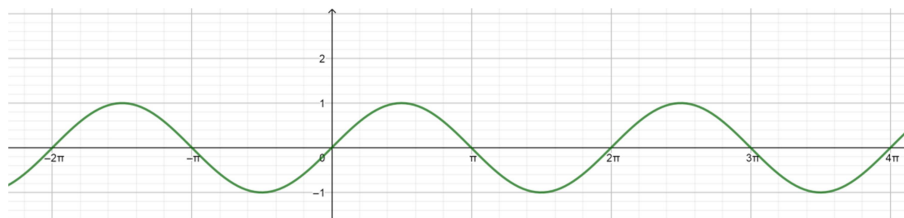
تابع متناوب : تابع f را متناوب گوییم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند c وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm c \in D_f$ و $f(x \pm c) = f(x)$.

اگر عدد c یک دوره تناوب تابع f باشد عدد kc ، $k \in \mathbb{Z}$ ، $k \neq 0$ نیز یک دوره تناوب f است.
اگر تابع f متناوب باشد کوچکترین دوره تناوب مثبت آن را در صورت وجود دوره تناوب اصلی f نامیده معمولاً با T نشان می‌دهیم.

مثال : نمودار توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \sin(2\pi x)$ را رسم نمایید و دوره تناوب هر یک را معین کنید.

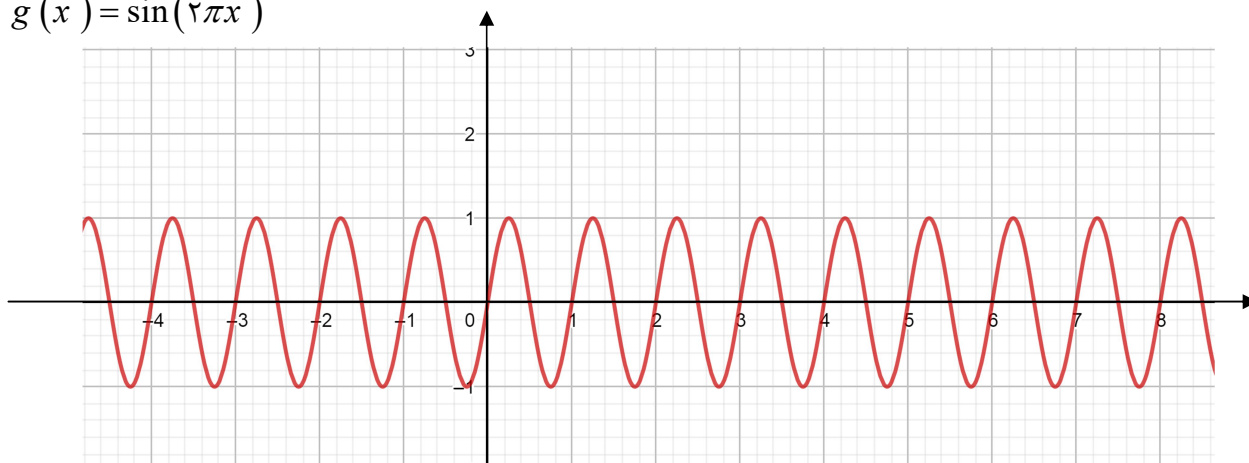
حل :

$$f(x) = \sin x$$



دوره تناوب 2π

$$g(x) = \sin(2\pi x)$$



دوره تناوب ۱

اگر T دوره تناوب $y = f(x)$ باشد، دوره تناوب تابع‌های $y = af(x \pm b) + c$ ، $a \neq 0$ ، نیز T است.
اگر f ، g دو تابع مثلثاتی به ترتیب با دوره‌های تناوب T_1 ، T_2 باشند، وقتی توابع $f \pm g$ متناوب هستند که عددی گویا باشد $\frac{T_1}{T_2}$.

اگر دوره‌های تناوب توابع f ، g به ترتیب T_1 ، T_2 و تابع‌های $f \pm g$ متناوب باشند، ک-م-م اعداد T_1 ، T_2 یک دوره تناوب تابع‌های $f \pm g$ است ولی ممکن است دوره تناوب اصلی آن‌ها نباشد.

مثال: با توجه به مثال قبل دوره تناوب هر یک از توابع $h(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 5$ و $k(x) = -5\sin(2\pi x + 9) - \pi$ را بیابید.

حل:

چون دوره تناوب $h(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 5$ برابر دوره تناوب $f(x) = \sin x$ است پس $T = 2\pi$.
چون دوره تناوب $k(x) = -5\sin(2\pi x + 9) - \pi$ برابر دوره تناوب $g(x) = \sin(2\pi x)$ است پس $T = 1$.

مثال: آیا $y = \sin(x) - \sin(2\pi x)$ متناوب است.

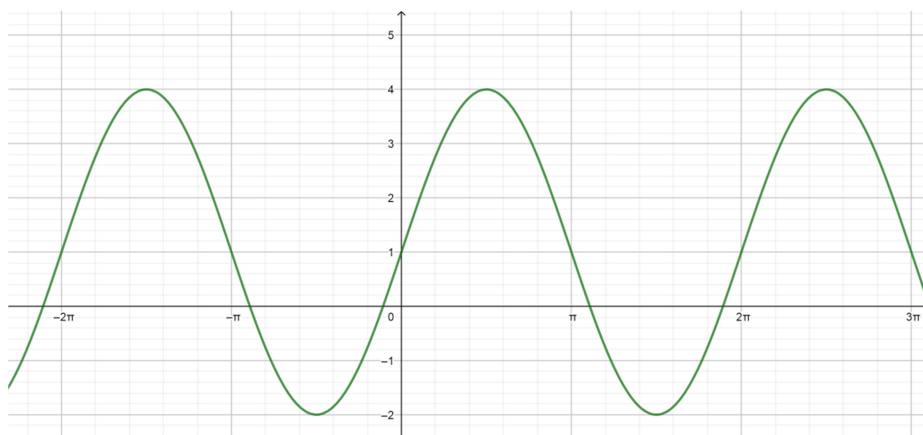
حل:

خیر زیرا دوره تناوب $f(x) = \sin x$ ، 2π و دوره تناوب $g(x) = \sin(2\pi x)$ ، ۱، است و $\frac{2\pi}{1}$ عدد گویا نیست.

مثال : نمودار توابع $f(x) = 3\sin x + 1$ و $g(x) = -3\cos(2\pi x) + 2$ را رسم نمایید و مقدار ماکزیمم و مینیمم هر یک را به کمک نمودار تعیین نمایید.

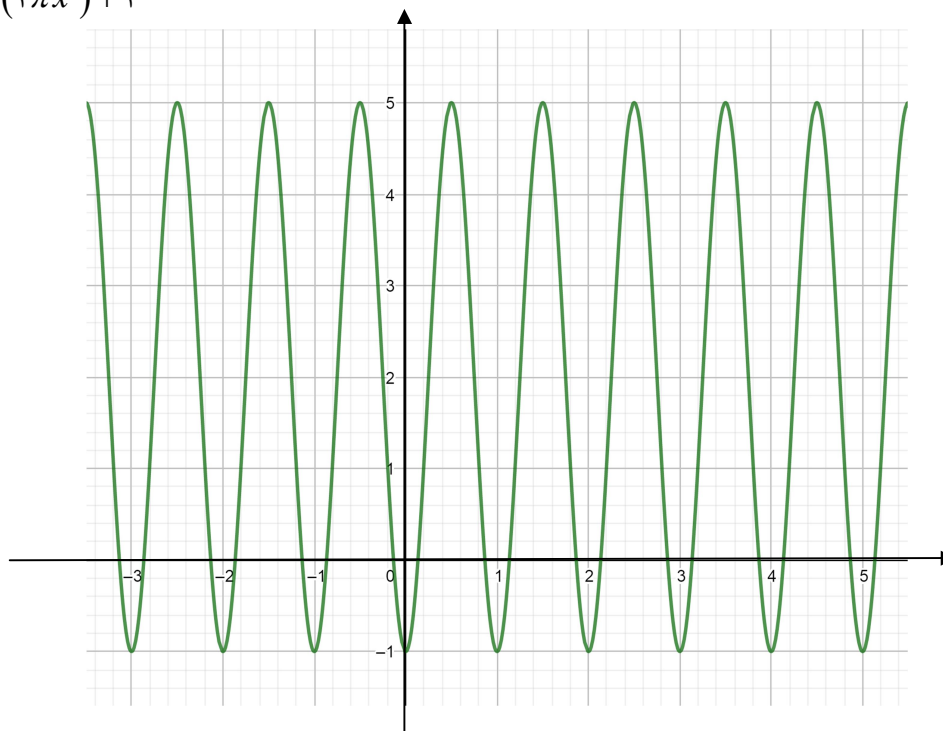
حل :

$$f(x) = 3\sin x + 1$$



مقدار ماکزیمم ۴ و مقدار مینیمم -۲ می باشد.

$$g(x) = -3\cos(2\pi x) + 2$$



مقدار ماکزیمم ۵ و مقدار مینیمم -۱ می باشد.

توابع $y = a \sin(bx) + c$ و $y = a \cos(bx) + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

مثال: بیشترین مقدار و کمترین مقدار $y = -5 \cos 2x - 1$ به ترتیب برابر است با -4 و -6 و

مثال: ضابطه تابعی را بنویسید که مقدار ماکزیمم و مینیمم آن به ترتیب ۵ و -7 و دوره تناوب آن ۳ باشد.

حل:

ضابطه این تابع به فرم $y = a \sin(bx) + c$ یا $y = a \cos(bx) + c$ می تواند باشد.

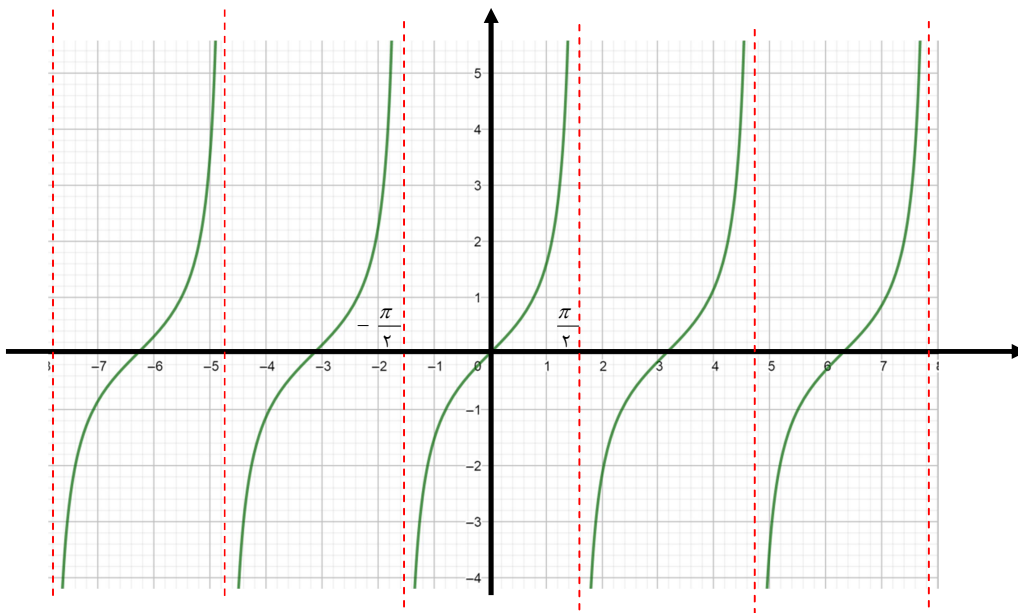
$$\begin{cases} |a| + c = 5 \\ -|a| + c = -7 \end{cases} \Rightarrow c = -1, a = \pm 6$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 3 \Rightarrow b = \pm \frac{2\pi}{3}$$

یکی از این ضابطه ها $y = 6 \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right) - 1$ می باشد.

تابع تانژانت

مثال: با توجه به نمودار تابع $y = \tan x$ که به صورت زیر می باشد. نتیجه می شود که:



الف) دامنه تابع $\left\{ x \mid x \in R, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z \right\}$ است.

ب) برد تابع R است.

پ) دوره تناوب تابع π است.

ت) تابع بیشترین مقدار ندارد و کمترین مقدار نیز ندارد.

ث) تابع اکیداً صعودی نیست.

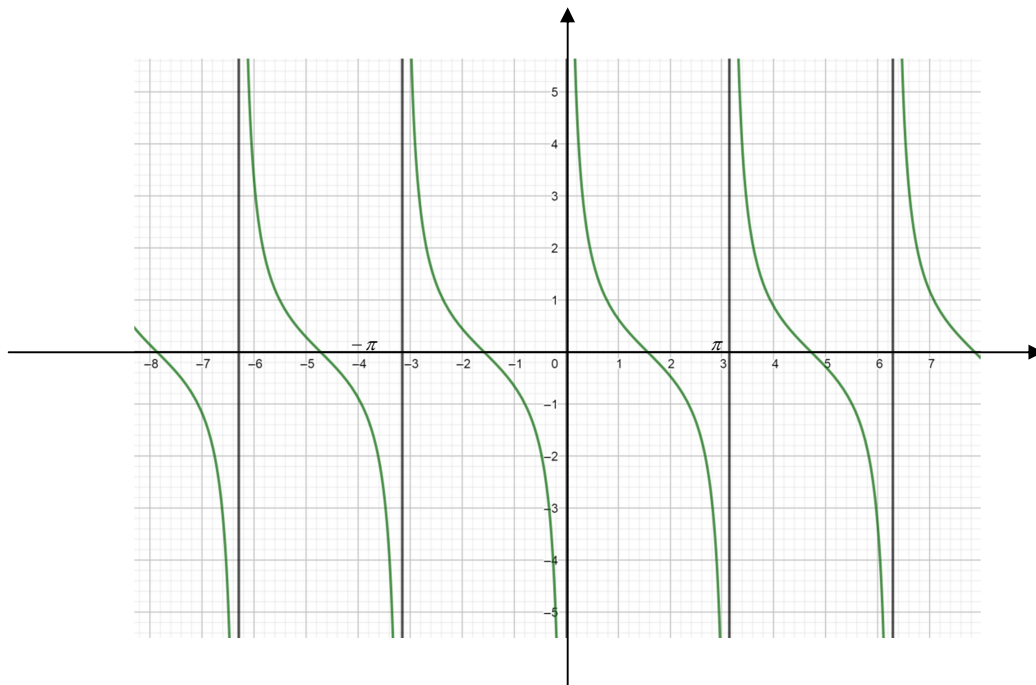
ج) تابع اکیداً نزولی نیست.

چ) تابع اکیداً یکنوا نیست.

ح) تابع در هر بازه‌ای که تعریف شده باشد اکیداً صعودی و اکیداً یکنوا است.

تابع کتانژانت

مثال: با توجه به نمودار تابع $y = \cot x$ که به صورت زیر می‌باشد. نتیجه می‌شود که:



الف) دامنه تابع $\{ x \mid x \in R, x \neq k\pi, k \in Z \}$ است.

ب) برد تابع R است.

پ) دوره تناوب تابع π است.

ت) تابع بیشترین مقدار ندارد و کمترین مقدار نیز ندارد.

ث) تابع اکیداً صعودی نیست.

ج) تابع اکیداً نزولی نیست.

چ) تابع اکیداً یکنوا نیست.

ح) تابع در هر بازه‌ای که تعریف شده باشد اکیداً نزولی و اکیداً یکنوا است.

دوره تناوب اصلی چند تابع :

تابع	دوره تناوب اصلی
$y = \sin ax$	$\frac{2\pi}{ a }$
$y = \cos ax$	$\frac{2\pi}{ a }$
$y = \tan ax$	$\frac{\pi}{ a }$
$y = \cot ax$	$\frac{\pi}{ a }$
$y = \sin ax $	$\frac{\pi}{ a }$
$y = \cos ax $	$\frac{\pi}{ a }$
$y = \sin^m ax$, زوج , $m \in N$	$\frac{\pi}{ a }$
$y = \cos^m ax$, زوج , $m \in N$	$\frac{\pi}{ a }$
$y = \sin^m ax$, فرد , $m \in N$	$\frac{2\pi}{ a }$
$y = \cos^m ax$, فرد , $m \in N$	$\frac{2\pi}{ a }$
$y = \tan ax \cot ax$	$\frac{\pi}{2 a }$
$y = \tan ax - \cot ax$	$\frac{\pi}{2 a }$
$y = \sin ax + \cos ax $	$\frac{\pi}{2 a }$
$y = \sin ax - \cos ax $	$\frac{\pi}{ a }$
$y = mx - [mx]$	$\frac{1}{ m }$

● نسبت‌های مثلثاتی 2α بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α :

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$	$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$	$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$	$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$	$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$

مثال: اگر $\sin x = -\frac{1}{3}$ باشد. مقدار $\cos 4x$ را به دست آورید.

$$\cos 2x = 1 - 2 \left(-\frac{1}{3} \right)^2 = 1 - \frac{2}{9} \Rightarrow \cos 2x = \frac{7}{9}$$

$$\cos 4x = 2 \left(\frac{7}{9} \right)^2 - 1 = \frac{98}{81} - 1 \Rightarrow \cos 4x = \frac{17}{81}$$

مثال: حاصل عبارت $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}$ را به دست آورید.

$$\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = \frac{\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} =$$

$$\frac{\frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\frac{1}{8} \sin \frac{8\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{\frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}$$

مثال: دوره تناوب $y = \sin x \cos^2 x - \cos x \sin^2 x$ را بیابید.

$$y = \sin x \cos^2 x - \cos x \sin^2 x = \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{2} \sin 2x (\cos 2x) = \frac{1}{4} \sin 4x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

● نسبت‌های مثلثاتی 2α بر حسب $\tan \alpha$:

$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$	$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$	$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$
--	--	--

مثال: اگر زاویه خط به معادله $y = 2x - 1$ با محور x ها، α باشد، حاصل عبارت $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha$ را به دست آورید.

مل: چون شیب خط برابر ۲ است بنابراین $\tan \alpha = 2$

$$\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \frac{1-4}{1+4} + \frac{4}{1+4} = \frac{-3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

• نسبت‌های مثلثاتی α بر حسب $\cos 2\alpha$:

$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$	$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$	$\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$
--	--	---

مثال: $\tan(22/5)^\circ$ را به دست آورید.

$$\tan^2 22/5 = \frac{1 - \cos 45}{1 + \cos 45} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{4 - 2} = 3 - 2\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^2 \Rightarrow$$

مل:

$$\tan 22/5 = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$$

• **مند فرمول دیگر:**

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$
$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$	$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$
$\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$	$\tan x - \cot x = -2 \cot 2x$

مثال: نشان دهید: $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} =$$

$$\frac{\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2 \sin 20^\circ} = \frac{\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{4 \sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \frac{1}{8}$$

مل:

مثال: نشان دهید دوره تناوب اصلی هر یک از توابع $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$ و $g(x) = 2\cos^2 x - 1$ برابر π است ولی ک-م-م آنها که π می باشد دوره تناوب اصلی $k(x) = f(x) - g(x)$ نیست.

حل:

$$f(x) = 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x \Rightarrow T_f = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$g(x) = 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x \Rightarrow T_g = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$k(x) = f(x) - g(x) = \cos 2x - \cos 2x = 0$$

تابع $k(x) = 0$ یک تابع ثابت است و عدد π دوره تناوب آن است ولی این تابع دوره تناوب اصلی ندارد.

تمرین:

- دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + 5$ را بیابید.
- دوره تناوب $f(x) = \frac{2}{3}x - \left[\frac{2}{3}x\right]$ را به دست آورید.
- درستی رابطه $\tan 20^\circ (1 + \cos 40^\circ) = \sin 40^\circ$ را بررسی نمایید.
- اگر $a + b = \frac{\pi}{4}$ ، درستی رابطه $\cos a \cos b \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin 4a$ را بررسی کنید.
- اگر $\sin x \cos x = \frac{1}{5}$ باشد، مقدار $\sin x - \cos x$ را بیابید.
- نشان دهید تابع $f(x) = x^2$ متناوب نیست.
- آیا تابع $f(x) = \sin \sqrt{x}$ متناوب است؟
- برد تابع $f(x) = 3\sin x - 4\cos x + 5$ را به دست آورید.

سوالات چهار گزینه‌ای:

- دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = 3x - [3x]$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$	(۲) $\frac{1}{3}$	(۳) ۲	(۴) ۳
-------------------	-------------------	-------	-------
- دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = 5 - \sin^2 4x$ کدام است؟

(۱) 4π	(۲) 2π	(۳) $\frac{\pi}{4}$	(۴) $\frac{\pi}{2}$
------------	------------	---------------------	---------------------
- دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \tan \frac{\pi}{6}x - \cot \frac{\pi}{6}x + 10$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$	(۲) ۱	(۳) ۳	(۴) ۶
-------------------	-------	-------	-------

۴. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + 1$ کدام است؟

- (۱) 4π (۲) 2π (۳) π (۴) $\frac{\pi}{2}$

۵. اگر دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \sin ax + \cos 2ax$ برابر با $\frac{\pi}{3}$ باشد، a کدام است؟

- (۱) ۱ یا -۱ (۲) ۲ یا -۲ (۳) ۶ یا -۶ (۴) ۳ یا -۳

۶. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \tan 2x \cot 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) π (۴) 2π

۷. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = |\sin 4x \cos 4x| + 5$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) π (۴) $\frac{\pi}{8}$

۸. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] - \frac{5x}{6}$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۶ (۳) ۲ (۴) ۳

۹. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \sin^2 2x \cos 2x - \cos^2 2x \sin 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) π (۴) 2π

۱۰. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = (-1)^{[5x]}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۱۱. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \cos(|3x|)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) π (۴) $\frac{2\pi}{3}$

۱۲. دوره تناوب اصلی تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi}{2} x & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) 2π (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) 4π

۱۳. اگر $\sin xf(x) + \cos xf(-x) = x$ باشد، $f(x)$ برابر است با :

- (۱) $x(\sin x + \cos x)$ (۲) $-x(\sin x + \cos x)$
(۳) $x(\sin x - \cos x)$ (۴) $-x(\sin x - \cos x)$

۱۴. اگر $\sin x \cos x = -\frac{1}{3}$ باشد، $\sin x + \cos x$ کدام است؟

- (۱) ± 1 (۲) $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\pm \sqrt{3}$ (۴) ± 2

۱۵. اگر $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$ و $0 < a < \frac{\pi}{2}$ ، حاصل $f(\sin a) + f(-\cos a)$ کدام است؟

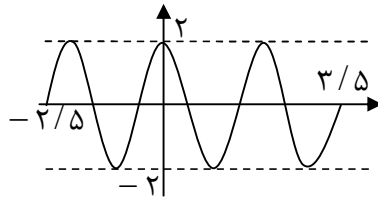
- (۱) $\cos 2a$ (۲) $-\cos 2a$ (۳) 1 (۴) -1

۱۶. حاصل عبارت $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$ برابر است با :

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{5}$

سؤالات کنکور سال‌های ۱۳۹۰ الی ۱۴۰۱ :

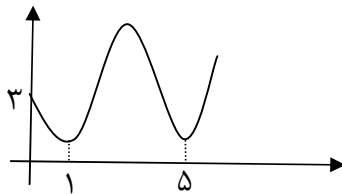
۱۷. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin \pi \left(\frac{1}{2} + bx \right)$ است. a, b کدام است؟ (ریاضی ۹۲)



- (۱) ۲
(۲) ۲/۵
(۳) ۳
(۴) ۳/۵

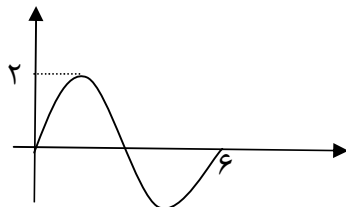
۱۸. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه $x = \frac{25}{3}$ ، کدام است؟

(تجربی ۹۳)



- (۱) ۲
(۲) ۲/۵
(۳) ۳
(۴) ۳/۵

۱۹. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟ (تجربی ۹۳ خارج)

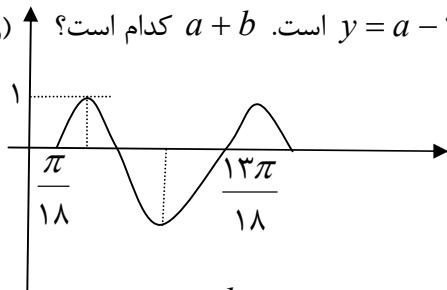


- (۱) $\frac{4}{3}$
(۲) $\frac{5}{3}$
(۳) $\frac{7}{3}$
(۴) $\frac{8}{3}$

۲۰. اگر $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1$ باشد، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟ (تجربی ۹۴ خارج)

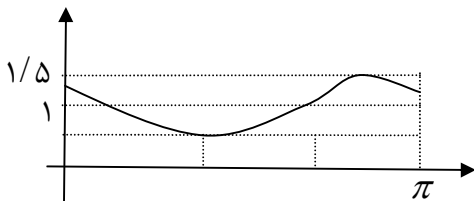
- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۲۱. شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$ است. $a + b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۵)



- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) ۱
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) ۲

۲۲. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = 1 + a \sin\left(bx - \frac{\pi}{6}\right)$ است. $a + b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۵ خارج)



- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) ۱
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) ۲

۲۳. اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

- (۱) $-\frac{3}{4}$
(۲) $-\frac{3}{8}$
(۳) $\frac{3}{8}$
(۴) $\frac{3}{4}$

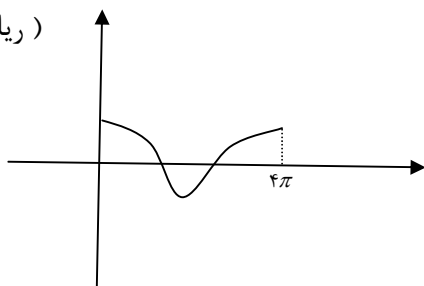
۲۴. اگر $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$ کدام است؟ (تجربی ۹۵ خارج)

- (۱) -۲
(۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) ۲

۲۵. اگر $\tan x = \frac{4}{3}$ باشد، مقدار $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

- (۱) $-\frac{3}{4}$
(۲) $-\frac{3}{2}$
(۳) $\frac{4}{3}$
(۴) $\frac{3}{2}$

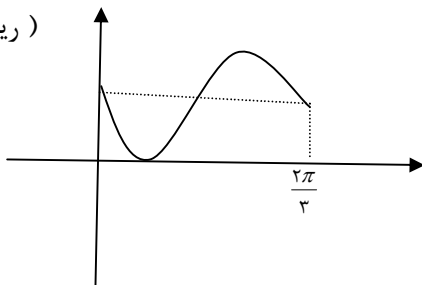
۲۶. شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx$ است. مقدار تابع در نقطه $x = \frac{16\pi}{3}$ ، کدام است؟ (ریاضی ۹۶)



- (۱) $-\frac{1}{2}$
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) ۱
(۴) ۰

۲۷. شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطه $x = \frac{7\pi}{6}$ ، کدام است؟

(ریاضی ۹۶ خارج)



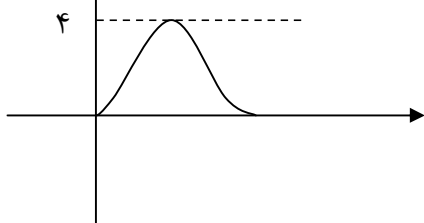
(۱) صفر

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۴) ۲

۲۸. شکل زیر نمودار تابع $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ در بازه $(0, 4)$ است. b کدام است؟ (ریاضی ۹۷)



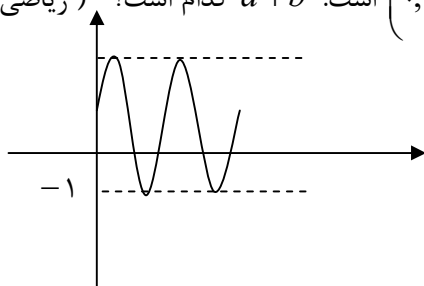
(۱) -۲

(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) ۲

۲۹. شکل زیر نمودار تابع $y = 1 + a \sin(b\pi x)$ در بازه $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ است. $a + b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۷ خارج)



(۱) ۳

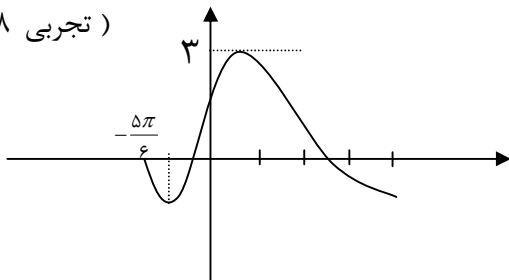
(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

۳۰. شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ است. مقدار تابع در نقطه $x = \frac{\pi}{6}$ ، کدام است؟

(تجربی ۹۸)



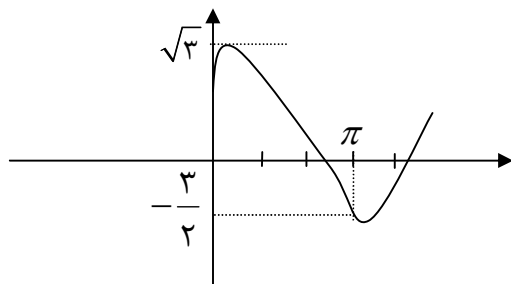
(۱) ۱/۵

(۲) ۲

(۳) ۲/۵

(۴) $1 + \sqrt{3}$

۳۱. شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ است. b ، کدام است؟ (تجربی ۹۸ خارج)



(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

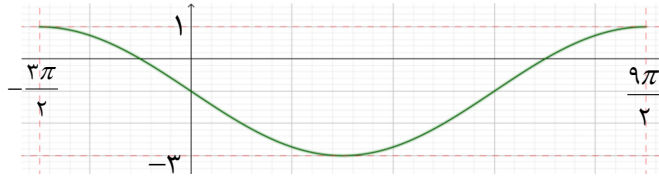
(۲) $\frac{3}{2}$

(۳) $\sqrt{3}$

(۴) ۲

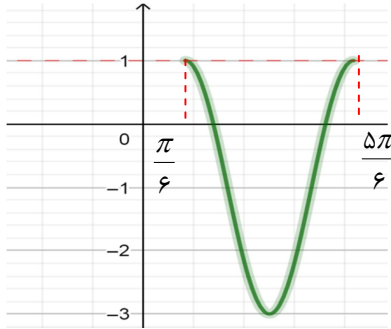
۳۲. شکل زیر نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ را در یک بازه تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$ ، کدام است؟

(تجربی ۹۹)



- (۱) -۲
- (۲) -۳
- (۳) -۴
- (۴) -۶

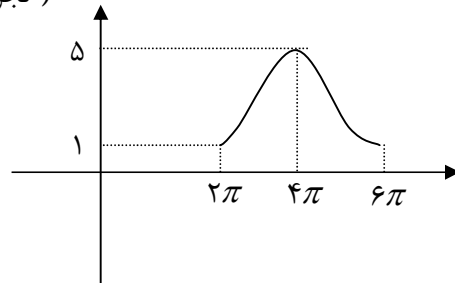
۳۳. شکل زیر نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ را در یک بازه تناوب است. مقادیر b و c ، کدام است؟
(تجربی ۹۹ خارج)



- (۱) $b = 3, c = -1$
- (۲) $b = 3, c = -2$
- (۳) $b = \frac{3}{2}, c = -2$
- (۴) $b = \frac{3}{2}, c = -1$

۳۴. شکل زیر، نمودار تابع $y = c + a \cos bx$ را در یک دوره تناوب نشان می‌دهد. مقدار c ، کدام است؟

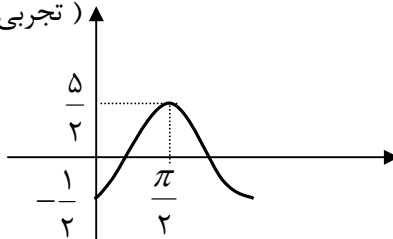
(تجربی ۱۴۰۱)



- (۱) ۵
- (۲) ۴
- (۳) ۳
- (۴) ۱

۳۵. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = c + a \cos bx$ را نشان می‌دهد. مقدار ac ، کدام است؟

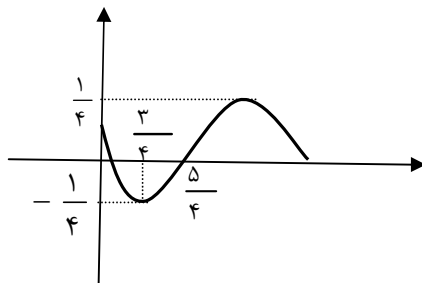
(تجربی ۱۴۰۱ خارج)



- (۱) -۵
- (۲) -۳
- (۳) $-\frac{5}{2}$
- (۴) $-\frac{3}{2}$

۳۶. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a \cos(bx + c)$ را نشان می‌دهد. اگر $b > 0$ و $0 < c < \pi$ باشد، مقدار

(ریاضی ۱۴۰۱)



کدام است؟ $\frac{ac}{b}$

(۱) $\frac{1}{16}$

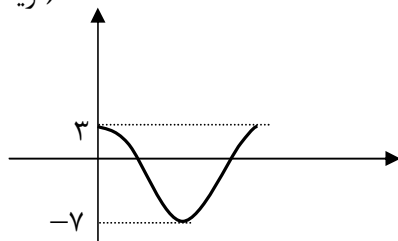
(۲) ۱

(۳) $\frac{1}{4\pi}$

(۴) π

۳۷. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos x + b$ را نشان می‌دهد. مقدار $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ کدام است؟

(ریاضی ۱۴۰۱ خارج)



(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{11}{2}$

(۳) $-\frac{1}{2}$

(۴) $-\frac{11}{2}$

پاسخنامه

شماره	پاسخ	شماره	پاسخ	شماره	پاسخ	شماره	پاسخ	شماره	پاسخ
۱	۲	۲	۳	۳	۳	۴	۴	۵	۳
۶	۲	۷	۴	۸	۲	۹	۲	۱۰	۲
۱۱	۴	۱۲	۲	۱۳	۳	۱۴	۲	۱۵	۲
۱۶	۲	۱۷	۱	۱۸	۲	۱۹	۳	۲۰	۳
۲۱	۴	۲۲	۳	۲۳	۱	۲۴	۱	۲۵	۲
۲۶	۱	۲۷	۴	۲۸	۱	۲۹	۳	۳۰	۲
۳۱	۳	۳۲	۴	۳۳	۱	۳۴	۳	۳۵	۴
۳۶	۱	۳۷	۱	۳۸		۳۹		۴۰	

معادلات مثلثاتی

• معادلات مثلثاتی:

برای حل هر معادله مثلثاتی ابتدا به کمک روابط جبری و مثلثاتی آن را به یک یا چند معادله ساده $\sin x = a$ ، $\cos x = b$ ، $\tan x = c$ یا $\cot x = d$ تبدیل می‌کنیم و سپس هر یک از معادلات ساده بدست آمده را حل می‌نماییم، اجتماع جواب‌های این معادلات که در دامنه متغیر معادله اصلی باشد، مجموعه جواب معادله می‌باشد.

الف) حل معادله $\sin x = a$:

اگر $-1 \leq a \leq 1$ باشد زاویه‌ای مانند α وجود دارد که $\sin \alpha = a$ و در نتیجه $\sin x = \sin \alpha$ و جواب‌های معادله به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ ، $x = 2k\pi + \pi - \alpha$ ، $k \in Z$ می‌باشد.

مثال: معادله $2 \sin x = 1$ را حل کنید.

$$2 \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

حل:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

مثال: معادله $\sin 5x - 2 \sin x \cos x = 0$ چند ریشه در بازه $[0, \pi]$ دارد؟

حل:

$$\sin 5x - 2 \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin 5x = \sin 2x \Rightarrow$$

$$5x = 2k\pi + 2x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \Rightarrow x = 0, \frac{2\pi}{3}$$

$$5x = 2k\pi + \pi - 2x \Rightarrow 7x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi + \pi}{7} \Rightarrow x = \frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \pi$$

ب) حل معادله $\cos x = b$:

اگر $-1 \leq b \leq 1$ باشد زاویه‌ای مانند α وجود دارد که $\cos \alpha = b$ و در نتیجه $\cos x = \cos \alpha$ و جواب‌های معادله به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ ، $x = 2k\pi - \alpha$ ، $k \in Z$ می‌باشد.

مثال: معادله $2 \cos^3 x + 1 = 0$ را حل کنید.

$$2 \cos^3 x + 1 = 0 \Rightarrow \cos^3 x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos^3 x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow$$

حل:

$$3x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9}$$

مثال: جواب‌های معادله $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$ در بازه $[\pi, 2\pi]$ را بیابید.

حل:

$$2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -1, \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \pi$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{3}$$

مثال: معادله $4\cos^2 x - 3 = 0$ را حل کنید.

حل:

$$4 \times \frac{1 + \cos 2x}{2} - 3 = 0 \Rightarrow 2\cos 2x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2\cos 2x = 1 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

مثال: حالت‌های خاص:

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$	$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$
$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$	$\cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi$

توجه:

ریشه معادلات $\sin x = 1$, $\sin x = -1$, $\cos x = 1$ و $\cos x = -1$ مضاعف می‌باشد.

مثال: معادله $\sin^2 x = \sin x$ را حل کنید.

حل:

$$\sin^2 x = \sin x \Rightarrow \sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

مثال: معادله $\cos 4x - \sin x = 0$ را حل کنید.

حل: $\cos 4x - \sin x = 0 \Rightarrow \cos 4x = \sin x \Rightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow$

$$4x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}, x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$$

مثال: معادله $2\cos^2 x - \sin x = 1$ را حل کنید.

حل: $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0 \Rightarrow 2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

تمرین:

۱. هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2\sin^2 x = \sin x$

ب) $2\sin^2 x - 5\sin x + 3 = 0$

پ) $\sin x + \tan x \cos(2\pi - x) = 1$

ت) $2\sin^2 x + 3\cos x = 3$

۲. هر یک از معادلات زیر را حل کنید و جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ هر یک را بیابید.

الف) $\tan x = 2\sin x$

ب) $2\sin x \cos x + \sqrt{3} \cos x = 0$

پ) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

سوالات چهار گزینه‌ای:

۱. معادله $\sin 5x - 2\sin x \cos x = 0$ چند ریشه در بازه $[0, \pi]$ دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۲. جواب کلی معادله $2\sin^2 x - \sin 2x = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۳. معادله $\sin 5x - \sin 3x = 0$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۴. اگر معادله $\cos 2x + 2\cos x = m$ ریشه مضاعف داشته باشد، مجموع مقادیر m چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

۵. خط به معادله $y = 2$ نمودار منحنی $f(x) = \frac{1 + 3 \sin x}{1 - 2 \sin x}$ را در بازه $[0, 2\pi]$ در چند نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) ۰ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۶. جواب کلی معادله $\sin 3x + \sin x = 0$ مثلثاتی کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2}$ (۲) $k\pi$ (۳) $k\pi + \frac{5\pi}{4}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

۷. مجموع جواب‌های متمایز معادله $2 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0$ در بازه $[\pi, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{8\pi}{3}$ (۲) $\frac{10\pi}{3}$ (۳) 3π (۴) $\frac{11\pi}{3}$

سؤالات کنکور سال‌های ۱۳۹۰ الی ۱۴۰۱ :

۸. جواب کلی معادله $\sin(\pi + x) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 \sin(\pi - x) + 1 = 0$ (که $k \in \mathbb{Z}$) کدام است؟

(تجربی ۹۰)

- (۱) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

۹. جواب کلی معادله $(\sin x - \tan x) \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos \frac{4\pi}{3}$ (تجربی ۹۰ خارج) کدام است؟

- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۱۰. جواب کلی معادله $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۱)

- (۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۱۱. نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$ بر روی دایره‌ی مثلثاتی رأس‌های کدام چند

ضلعی است؟ (ریاضی ۹۱ خارج)

- (۱) مثلث متساوی‌الساقین (۲) مستطیل (۳) مثلث قائم‌الزاویه (۴) مربع

۱۲. نمودار تابع $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\pi x\right)$ روی بازه $[-1, 1]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟ (تجربی ۹۱)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۳. نمودار تابع $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ روی بازه $\left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ در چند نقطه محور x ها را قطع می‌کند؟

(تجربی ۹۱ خارج)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۴. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۲)

(۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۱۵. مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$ ، در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (تجربی ۹۲ خارج)

(۱) 8π (۲) 9π (۳) 10π (۴) 11π

۱۶. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos 2x = \cot x (4\sin x + \tan x)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲ خارج)

(۱) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۱۷. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = 1$ ، به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۳ خارج)

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

۱۸. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$ ، به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۴)

(۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۱۹. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟ (تجربی ۹۴ خارج)

(۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

۲۰. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۵)

(۱) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$

۲۱. مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^4 x = \sin^4 x - \cos^4 x$ ، در بازهٔ $[0, \pi]$ کدام است؟ (ریاضی ۹۵)

(۱) $\frac{7\pi}{4}$ (۲) $\frac{9\pi}{4}$ (۳) $\frac{5\pi}{2}$ (۴) $\frac{11\pi}{3}$

۲۲. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$ ، در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(ریاضی ۹۵ خارج)

(۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{5\pi}{4}$ (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{7\pi}{4}$

۲۳. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۶)

(۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۲۴. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ ، در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (تجربی ۹۶ خارج)

(۱) $\frac{14\pi}{3}$ (۲) 4π (۳) $\frac{9\pi}{2}$ (۴) 5π

۲۵. جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۷ خارج)

(۱) $\frac{k\pi}{5}$ (۲) $\frac{2k\pi}{5}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{5}$ (۴) $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

۲۶. جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

(۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

۲۷. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \sin x = 1$ ، در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(تجربی ۹۸ خارج)

(۱) $\frac{5\pi}{2}$ (۲) 3π (۳) 4π (۴) 5π

۲۸. جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ، با شرط $x \neq k\pi$ که در آن k یک عدد صحیح است. کدام است؟ (تجربی ۹۹)

(۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۳) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

۲۹. تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin(3x) \cos(3x) = 1$ ، در بازه $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ، کدام است؟

(تجربی ۹۹ خارج)

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۰. تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos^2 x - \sin^2 x \cos(2x) = 1$ ، در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶

۳۱. تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^2 x + 2\cos(3x) = -2$ ، در بازه $[-\pi, \pi]$ کدام است؟

(تجربی خارج ۱۴۰۰)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴) ۷

۳۲. تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $8\cos x - \tan^2 x = 1$ ، در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

(۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۳۳. تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ ، در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(تجربی ۱۴۰۱ خارج)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۴. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$ ، در بازه $[-\pi, 2\pi]$ کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

(۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{7\pi}{3}$ (۳) $\frac{9\pi}{4}$ (۴) $\frac{11\pi}{6}$

۳۵. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ ، در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(ریاضی ۱۴۰۱ خارج)

$$\frac{5\pi}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (۱)$$

پاسخ‌نامه

شماره	پاسخ	شماره	پاسخ	شماره	پاسخ	شماره	پاسخ	شماره	پاسخ
۱	۳	۲	۱	۳	۳	۴	۱	۵	۳
۶	۱	۷	۱	۸	۳	۹	۳	۱۰	۲
۱۱	۳	۱۲	۲	۱۳	۴	۱۴	۴	۱۵	۴
۱۶	۳	۱۷	۴	۱۸	۱	۱۹	۱	۲۰	۱
۲۱	۳	۲۲	۱	۲۳	۳	۲۴	۴	۲۵	۲
۲۶	۲	۲۷	۴	۲۸	۴	۲۹	۳	۳۰	۴
۳۱	۲	۳۲	۴	۳۳	۲	۳۴	۳	۳۵	۲