

بسمه تعالی

مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه	ساعت شروع: ۱۰ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	سوالات امتحان نهایی درس: ریاضی ۳
تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان:	نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه
معاونت متوسطه آموزش و پرورش استان گیلان		دانش آموزان روزانه سراسر استان گیلان ۱۳۹۷	
ردیف	سوالات - صفحه یک		ردیف
۰/۷۵	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. الف- با فرض $c \in D_f$، نقطه $(c, f(c))$، یک نقطه ماکزیمم نسبی برای تابع f است هرگاه برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. ☐ درست ☐ نادرست ب- شکل حاصل از دوران یک پاره خط، حول پاره خطی دیگر که بر آن عمود است، یک استوانه می باشد. ☐ درست ☐ نادرست پ- اگر A_1 و A_2 پیشامدهایی باشند که فضای نمونه S را افراز می کنند و B پیشامد دلخواهی از این فضای نمونه باشد، بنا به قانون احتمال کل داریم: $P(B) = P(A_1)P(A_1 B) + P(A_2)P(A_2 B)$. ☐ درست ☐ نادرست		۱
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف- اگر برد تابع $y = f(x)$ به صورت بازه $[-2, 5]$ باشد، برد تابع $y = -2f(x)$ برابر است با ب- شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می شود آن نامیده می شود. پ- هرگاه دو پیشامد A و B ناسازگار باشند آن گاه احتمال وقوع پیشامد $A \cup B$ برابر است با ت- اگر در یک بازه از دامنه f، مقدار f' موجود و مثبت باشد، آن گاه تابع f در آن بازه است.		۲
۱	اگر $f = \{(0, 1), (2, -1), (3, 2), (4, 0)\}$ و $g = \{(2, 4), (0, 5), (1, 2), (-1, 5)\}$ باشند، تابع $f \circ g$ را به صورت زوج مرتبی نمایش دهید.		۳
۰/۷۵	نمودار تابعی را رسم کنید که در بازه $(-\infty, -1)$ اکیدا صعودی، در بازه $[-1, 3]$ ثابت و در بازه $(3, +\infty)$ اکیدا نزولی باشد.		۴
۱	معادله زیر را حل کنید. $4 \cos x \sin x = 1$		۵
۱	اگر مقدار ماکزیمم تابع $y = a \sin x + 2a$ برابر یک باشد، مقدار a را بیابید.		۶
۱ ۰/۵ ۰/۵	حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 5x + 6}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x^3}{(2x - 1)^3}$ پ) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1}{\sin x}$ ادامه سوالات صفحه بعد		۷

ردیف	سؤالات - صفحه دو	نمره
۸	مشتق پذیری تابع $f(x) = x^2 - 9 $ را به کمک تعریف مشتق در $x = 3$ بررسی کنید.	۱/۵
۹	با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{2x+1}$ را در نقطه ای به طول $x = 4$ بیابید.	۱
۱۰	معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - 5t + 10$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (بر حسب ثانیه) داده شده است. در چه زمانی سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟	۱/۵
۱۱	مشتق تابع زیر را بیابید. $f(x) = \left(\frac{3x+7}{x^2-2x} \right)^6$	۱
۱۲	مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 + x^2 - x - 2$ را در بازه $[-2, 1]$ بدست آورید.	۱/۵
۱۳	طول و عرض مستطیلی را بیابید که در بین تمام مستطیل های با محیط ثابت ۲۰ سانتی متر دارای بیشترین مساحت ممکن باشد.	۱/۵
۱۴	در یک بیضی افقی خروج از مرکز آن برابر $\frac{5}{13}$ است. اگر طول قطر کوچک آن برابر ۲۴ باشد: الف - طول قطر کانونی و فاصله کانونی بیضی را محاسبه کنید. ب - اگر مرکز بیضی نقطه ای به مختصات $(2, -3)$ باشد مختصات نقاط کانونی بیضی را بیابید.	۱/۵
۱۵	معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه ای به مختصات $(-1, -1)$ باشد و با دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ مماس بیرون باشد.	۱/۵
۱۶	دو جعبه داریم. درون یکی از آن ها ۲۰ لامپ قرار دارد که ۸ تا از آن ها معیوب است و درون جعبه ی دیگر ۱۰۰ لامپ داریم که ۵ تا از آن ها معیوب اند. به تصادف جعبه ای انتخاب کرده و یک لامپ از آن بیرون می آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر سالم باشد؟	۱/۵
۲۰	موفق و سربلند باشید	جمع نمرات

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان ریاضی ۳ خرداد ماه		رشته: تجربی
سال..... آموزش متوسطه	تاریخ امتحان	تعداد صفحه ۴
استان گیلان	مرکز سنجش آموزش و پرورش	http://aee.medu.ir

ردیف	راهنمای تصحیح- صفحه ۱	نمره
------	-----------------------	------

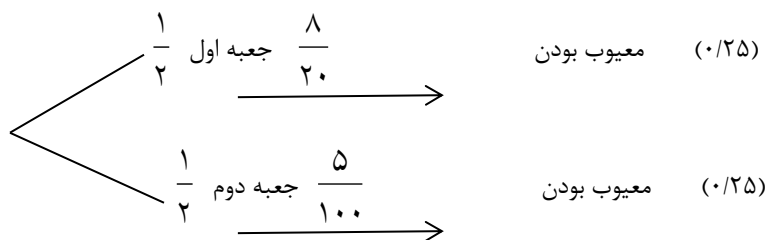
	«با عرض سلام و خسته نباشید ، همکار گرامی در صورت ارائه پاسخ صحیح مشابه، لطفاً نمره سؤال را منظور فرمایید.»	
۱	الف) نادرست (۰/۲۵)؛ ب) نادرست (۰/۲۵)؛ پ) نادرست (۰/۲۵)	۰/۲۵
۲	الف) $(-1, 4]$ (۰/۲۵)؛ ب) سطح مقطع (۰/۲۵)؛ پ) $P(A) + P(B)$ (۰/۲۵)؛ ت) اکیداً صعودی (۰/۲۵)	۱
۳	$\left. \begin{aligned} f \circ g(2) &= f(g(2)) = f(4) = 0 \\ f \circ g(1) &= f(g(1)) = f(2) = -1 \end{aligned} \right\} (0/5) \Rightarrow f \circ g = \{(2, 0), (1, -1)\} (0/5)$	۱
۴	سؤال باز پاسخ است. هر نموداری که شرایط مسأله را داشته باشد، قابل قبول است. به عنوان نمونه، نمودار زیر که برای هر قسمت آن ۰/۲۵ نمره اختصاص می یابد.	۰/۲۵
۵	$4 \cos x \sin x = 1 \Rightarrow 2 \cos x \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow$ $\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ \text{یا} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (0/25)$	۱
۶	$\max(y) = a + 2a \Rightarrow a + 2a = 1 \Rightarrow a = 1 - 2a \quad (0/25)$ $\Rightarrow \begin{cases} 1 - 2a > 0 \Rightarrow a < \frac{1}{2} \\ a = 1 - 2a \Rightarrow a = \frac{1}{3} \quad \text{ق ق} \\ -a = 1 - 2a \Rightarrow a = 1 \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \quad (0/25)$ (ادامه در صفحه بعد)	۱

ردیف	راهنمای تصحیح - صفحه ۲	نمره
------	------------------------	------

۷	الف) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x-2)(x+2)}{(x+3)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x-2)\cancel{(x+2)}}{(x+3)\cancel{(x+2)}} = 8 \quad (0/25)$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x^3}{(2x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^3}{8x^3} = \frac{-3}{8} \quad (0/25)$ پ) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{-} = -\infty \quad (0/25)$	۱
۸	$f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{ x^2 - 9 }{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x^2 - 9)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x-3)(x+3)}{x-3} = -6 \quad (0/5)$ $f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{ x^2 - 9 }{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = 6 \quad (0/5)$ چون $f'_-(3) \neq f'_+(3)$، بنابراین در $x = 3$ مشتق پذیر نیست. $(0/5)$	۱/۵
۹	$f(4) = \sqrt{2x+1} = 3 \quad (0/25)$ $f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x - 4} \times \frac{\sqrt{2x+1} + 3}{\sqrt{2x+1} + 3}$ $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1-9}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \frac{1}{3} \quad (0/25)$	۱
۱۰	$\bar{V} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{25}{5} = 5 \frac{m}{s} \quad (0/5)$ سرعت متوسط: $V = f'(t) = 4t - 5 \quad (0/5)$ سرعت لحظه ای: $4t - 5 = 5 \quad (0/25) \rightarrow 4t = 10 \rightarrow t = \frac{10}{4} = 2.5 \text{ s} \quad (0/25)$	۱/۵
۱۱	$f(x) = \left(\frac{3x+7}{x^2-2x} \right)^6 \Rightarrow$ $f'(x) = 6 \left(\frac{3x+7}{x^2-2x} \right)^5 \left(\frac{3x+7}{x^2-2x} \right)' = 6 \left(\frac{3(x^2-2x) - (3x+7)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} \right) \left(\frac{3x+7}{x^2-2x} \right)^5$	۱

ردیف	راهنمای تصحیح - صفحه ۳	نمره												
۱۲	$f(x) = x^3 + x^2 - x - 2 \Rightarrow f'(x) = \underbrace{3x^2 + 2x - 1}_{(۰/۲۵)} = 0 \Rightarrow x = -1 \quad \text{یا} \quad x = \underbrace{\frac{1}{3}}_{(۰/۵)}$ $\left. \begin{aligned} f(-1) &= -1, & f(-2) &= -4 \\ f\left(\frac{1}{3}\right) &= -\frac{59}{27}, & f(1) &= -1 \end{aligned} \right\} \quad (۰/۵)$ مقدار مینیمم مطلق برابر ۴- و مقدار ماکزیمم مطلق برابر ۱- است. (۰/۲۵)	۱/۵												
۱۳	y x $2(x+y) = 20 \Rightarrow x+y = 10 \Rightarrow y = 10-x \quad (۰/۲۵)$ $S(x) = \underbrace{xy = x(10-x)}_{(۰/۲۵)} = -x^2 + 10x, \quad x \in [0, 10] \quad (۰/۲۵)$ $S'(x) = -2x + 10 = 0 \Rightarrow x = 5 \quad (۰/۲۵)$ <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">۰</td> <td style="padding: 5px;">۵</td> <td style="padding: 5px;">۱۰</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$S'(x)$</td> <td style="padding: 5px;">+</td> <td style="padding: 5px;">۰</td> <td style="padding: 5px;">-</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$S(x)$</td> <td style="padding: 5px;">۰</td> <td style="padding: 5px;">۲۵</td> <td style="padding: 5px;">۰</td> </tr> </table> بیشترین مساحت ممکن $S(5) = 25$ است و وقتی این اتفاق می افتد که $x = y = 5$. (۰/۲۵)	x	۰	۵	۱۰	$S'(x)$	+	۰	-	$S(x)$	۰	۲۵	۰	۱/۵
x	۰	۵	۱۰											
$S'(x)$	+	۰	-											
$S(x)$	۰	۲۵	۰											
۱۴	$2b = 24 \Rightarrow b = 12, \quad \frac{c}{a} = \frac{5}{13} \Rightarrow c = \frac{5}{13}a \quad (۰/۲۵)$ $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 144 + \frac{25}{169}a^2 \Rightarrow a^2\left(1 - \frac{25}{169}\right) = 144 \Rightarrow \frac{144}{169}a^2 = 144 \Rightarrow a^2 = 169$ $a = 13, \quad c = \frac{5}{13} \times 13 = 5 \quad (۰/۵)$ الف- $2a = 2 \times 13 = 26$ قطر کانونی و $2c = 2 \times 5 = 10$ فاصله کانونی (۰/۲۵) ب- $\left. \begin{aligned} F \begin{vmatrix} 2-5 \\ -3 \end{vmatrix} &\Rightarrow F \begin{vmatrix} -3 \\ -3 \end{vmatrix} \\ F' \begin{vmatrix} 2+5 \\ -3 \end{vmatrix} &\Rightarrow F' \begin{vmatrix} 7 \\ -3 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (۰/۵)$	۱/۵												
۱۵	$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16 \quad (۰/۵)$ $d = \sqrt{(2-(-1))^2 + (3-(-1))^2} = 5 \quad (۰/۲۵)$ شعاع دایره و $r' = 4$ مرکز دایره O' برای این که دو دایره مماس باشند باید $d = r + r'$ بنابراین $r = d - r' = 5 - 4 = 1 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1 \quad (۰/۲۵)$	۱/۵												

۱۶

 A پیشامد معیوب بودن لامپ انتخابی

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{20} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{100} = \frac{8}{40} + \frac{1}{40} = \frac{9}{40} \quad (0/5)$$

 A' پیشامد سالم بودن لامپ انتخابی

$$P(A') = 1 - \frac{9}{40} = \frac{31}{40} \quad (0/5)$$