



۱ یکی از اضلاع مربعی بر خط $L: y = 2x - 1$ واقع است. اگر $A(3, 0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.

۲ اگر $A(-1, 2)$ ، $B(3, 0)$ و $C(1, -2)$ سه رأس مثلث ABC باشند، آن گاه:
الف) معادله‌ی ارتفاع AH را به دست آورید.
ب) طول ارتفاع AH را بیابید.

۳ قرینه‌ی نقطه‌ی $A(1, 4)$ نسبت به نقطه‌ی $B(b, 2a + 1)$ برابر $A'(7, 2)$ است. a و b را حساب کنید.

۴ در صورتی که $A(2, 3)$ رأس یک مربع و معادله‌ی یک ضلع آن $2x - 5y = 3$ باشد، مساحت مربع چه قدر است؟

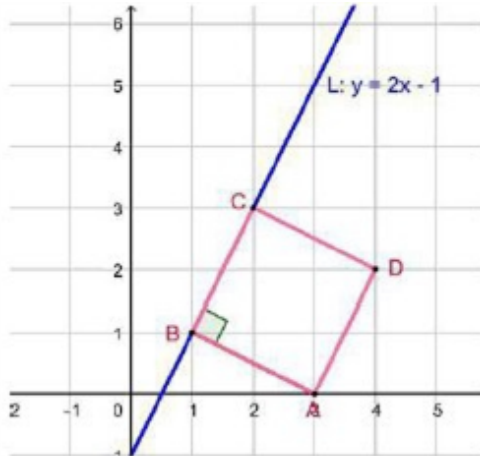
۵ فاصله‌ی نقطه‌ی $A(1, -2)$ از خط $6x + 8y = k$ برابر ۳ است. مقدار k را به دست آورید.

۶ اگر طول پاره‌خط AB برابر ۵ باشد m را حساب کنید.
 $A \left| \begin{matrix} 4 \\ 2m + 1 \end{matrix} \right|, B \left| \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \right|$

۷ دو خط به معادله‌های $2x + 3y = 5$ و $ax - 2y = 3$ را در نظر بگیرید. a را طوری بیابید که:
الف) این دو خط با هم موازی باشند.
ب) این دو خط بر هم عمود باشند.

۸ مثلث با رئوس $A \left| \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right|, B \left| \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right|, C \left| \begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix} \right|$ مفروض است. معادله میانه CM را به دست آورید.

نقطه‌ی A روی خط قرار ندارد بنابراین از A بر خط L عمود می‌کنیم. فاصله‌ی این نقطه از خط طول ضلع مربع است.

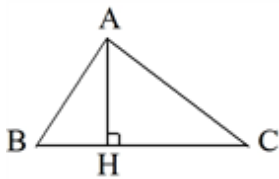


$$A(3, 0), 2x - y - 1 = 0$$

$$AB = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow AB = \frac{|2 \times 3 + (-1) \times 0 + (-1)|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$S = AB^2 \Rightarrow S = 5$$

الف) مطابق شکل فرض روبه‌رو، AH خطی است با دو ویژگی زیر:



(۱) بر BC عمود است، پس $m_{AH} \cdot m_{BC} = -1$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-2 - 0}{1 - 3} = \frac{-2}{-2} = 1 \Rightarrow m_{AH} = -1$$

(۲) از نقطه‌ی A می‌گذرد، بنابراین باید معادله‌ی خط به شیب $m_{AH} = -1$ گذرنده از نقطه‌ی $A(-1, 2)$ را بنویسیم:

$$AH: y - y_A = m_{AH}(x - x_A) \Rightarrow AH: y - 2 = -1(x + 1) \Rightarrow AH: y = -x + 1$$

ب) طول ارتفاع AH برابر با فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط گذرنده از B و C است، ابتدا معادله‌ی این خط را به دست می‌آوریم. همان‌طور که در قسمت قبل محاسبه کردیم، $m_{BC} = 1$ پس می‌توان گفت:

$$BC: y - y_B = m_{BC}(x - x_B) \Rightarrow BC: y = 1(x - 3) \Rightarrow BC: y = x - 3$$

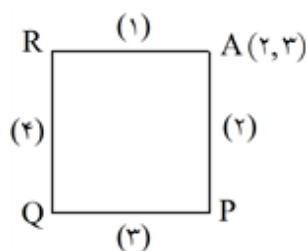
$$\Rightarrow AH = \frac{|y_A - x_A + 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{|2 + 1 + 3|}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

اگر A' قرینه‌ی A نسبت به B باشد، باید B در وسط A و A' قرار داشته باشد.

$$x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow b = \frac{1 + 7}{2} \Rightarrow b = 4$$

$$y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow 2a + 1 = \frac{4 + 2}{2} \Rightarrow 2a + 1 = 3 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

نقطه‌ی $A(2, 3)$ در معادله‌ی $2x - 5y = 3$ صدق نمی‌کند، پس انتظار داریم که طبق شکل زیر معادله‌ی خط موردنظر مربوط به ضلع‌های ۳ یا ۴ باشد.



$$(2, 3) : 2(2) - 5(3) = 3 \Rightarrow -11 = 3$$

$$AP = AR = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 - 15 - 3|}{\sqrt{4 + 25}} = \frac{16}{\sqrt{29}}$$

$$= \frac{16}{\sqrt{29}} \times \frac{16}{\sqrt{29}} = \frac{196}{29}$$

$$ax + by = k \Rightarrow \begin{matrix} a & b & c \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 6x + 11y = k \end{matrix}$$

$$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|6(1) + 11(-2) - k|}{\sqrt{6^2 + 11^2}} = \frac{|-10 - k|}{10}$$

$$\xrightarrow{AH=2} \frac{|-10 - k|}{10} = 2 \Rightarrow |k + 10| = 20 \Rightarrow \begin{cases} k + 10 = 20 \Rightarrow k = 10 \\ k + 10 = -20 \Rightarrow k = -30 \end{cases}$$

در محاسبات بالا از دو ویژگی قدرمطلق استفاده کردیم:

$$(1) \quad |-a| = |a|, (2) \quad |x| = a \Rightarrow x = \pm a$$

$$AB = 5 \Rightarrow \sqrt{\underbrace{(2-1)^2}_9 + \underbrace{(2m+1-2)^2}_{(2m-3)^2}} = 5 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}}$$

$$9 + (2m - 3)^2 = 25 \Rightarrow (2m - 3)^2 = 16 \Rightarrow 2m - 3 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} 2m - 3 = 4 \Rightarrow m = \frac{7}{2} \\ 2m - 3 = -4 \Rightarrow m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$L_1 : 2x + 3y = 5 \Rightarrow 3y = -2x + 5 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow m_1 = -\frac{2}{3}$$

$$L_2 : ax - 2y = 3 \Rightarrow -2y = -ax + 3 \Rightarrow y = \frac{a}{2}x - \frac{3}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{a}{2}$$

الف) باید شیب‌های L_2, L_1 با هم برابر باشد تا این دو خط با هم موازی باشند:

$$m_1 = m_2 \Rightarrow -\frac{2}{3} = \frac{a}{2} \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$$

ب) باید حاصل ضرب شیب‌های L_2, L_1 برابر (-1) باشد تا این دو خط بر هم عمود باشند:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right) \left(\frac{a}{2}\right) = -1 \Rightarrow \frac{a}{3} = 1 \Rightarrow a = 3$$



$$M = \begin{cases} \frac{1+\gamma}{\gamma} = \gamma \\ \frac{1-1}{\gamma} = \cdot \end{cases} \Rightarrow m_{MC} = \frac{y_C - y_M}{x_C - x_M} = \frac{\gamma - \cdot}{-1 - \gamma} = -1$$

$$y - y_M = m(x - x_M) \Rightarrow y - \cdot = -1(x - \gamma) \Rightarrow y = -x + \gamma$$

