

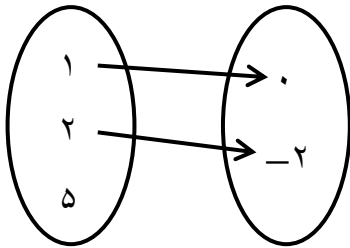
تابع و مروری بر گذشته:

تابع مجموعه ای زوج های مرتب می باشد که هیچ دوزوجی از آن دارای مؤلفه های اول یکسان نیستند. اگر مؤلفه های اول برابر باشند، مؤلفه دوم نیز باید برابر باشند.

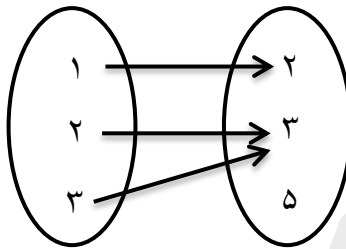
(به هر عضو دامنه، عضو منحصر بفردی از برد نسبت داده می شود.)

تابع با هر کدام از صورت های زیر ظاهر می شود:

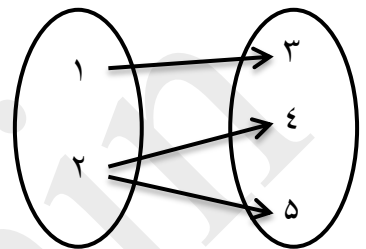
بصورت نمودار پیکانی: در این حالت وقتی تابع است که از هر عضو دامنه دقیقاً یک پیکان خارج شود.



تابع نیست



تابع است



تابع نیست

بصورت جدولی:

x	2	3	-2	1
y	4	3	4	5

تابع است

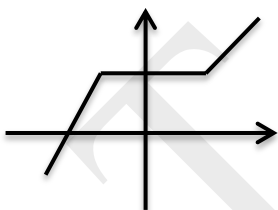
x	y
3	-2
$\sqrt{9}$	5
0	1

تابع نیست

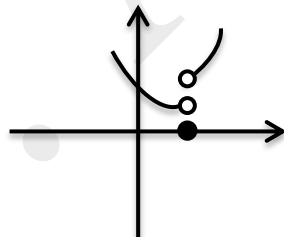
x	$\sqrt{4}$	2	5	3
y	3	3	13	0

تابع است

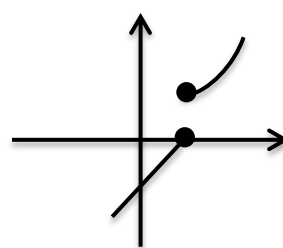
بصورت نمودار مختصاتی: یک نمودار وقتی تابع است که هر خطی موازی محور y ها آن را در حداکثر در یک نقطه قطع کند.



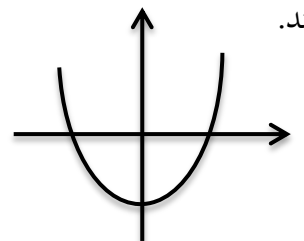
تابع است



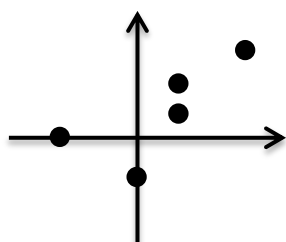
تابع نیست



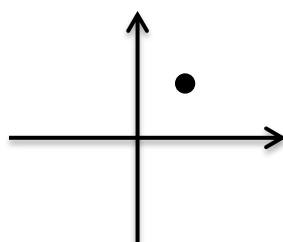
تابع نیست



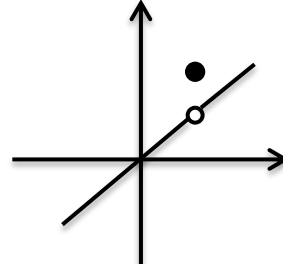
تابع است



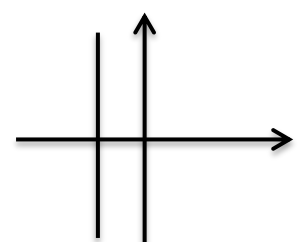
تابع نیست



تابع است



تابع است



تابع نیست

بصورت ضابطه:

رابطه ی $y = f(x)$ وقتی ضابطه یک تابع است که به ازای هر عددی که به x بدهیم حداکثر یک جواب برای y بدست آید.
نکته: یک رابطه ی چند ضابطه ای در صورتی تابع است که دامنه ضابطه ها اشتراکی نداشته باشند و هر کدام از ضابطه ها در دامنه خود تابع باشند. (در صورت وجود اشتراک، مقدار تابع در آن نقاط اشتراک برابر باشد).

نکته: تهی تابع است.

نمونه هایی از تابع:

توابع چند ضابطه ای، تابع چند جمله ای، توابع خاص چند جمله ای (تابع ثابت، تابع همانی، تابع خطی)، توابع قدر مطلق، توابع گویا (کسری)، توابع رادیکالی، توابع جزء صحیح، توابع مثلثاتی، توابع لگاریتمی و

دامنه برخی توابع:

نکته: دامنه تابع قبل از ساده کردن محاسبه می گردد. همچنین برد یک تابع با توجه به دامنه آن بررسی می شود.

صورت کلی تابع چندجمله ای $D_f = \mathbb{R}$
 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
 (بطور کلی هر رابطه به شکل یک چند جمله ای را تابع چند جمله ای می نامیم).
 (برد تابع چند جمله ای درجه فرد برابر $\mathbb{R}$ است).

$f(x) = x$ (تابع همانی) $D_f = \mathbb{R}$
 $f(x) = a$ (تابع ثابت) (عدد ثابت) $D_f = \mathbb{R}$ $R_f = \{a\}$
 مجموعه ی مؤلفه های دوم R_f مجموعه ی مؤلفه های اول D_f مجموعه ای از زوج مرتب ها با شرایط تابع f

نکته: اگر نمودار تابع را داشته باشیم، به تصویر تمام نقاط روی محور x ها دامنه تابع و به تصویر همه نقاط نمودار روی محور y ها برد تابع می گوئیم.

۳: $f(x)$ تابعی چند ضابطه ای
 (اجتماع محدوده های ارائه شده برای x) $D_f =$
 برد تابع چند ضابطه ای با توجه به دامنه آن بررسی می شود $R_f =$

۴: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ $D_f = \mathbb{R}$
 (تابع قدر مطلق)

۵: $f(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ عدد ثابت $q(x) \neq 0$ $P(x), q(x)$ دو چند جمله ای اند.
 (تابع گویا)

$D_f = \mathbb{R} - \{\text{جوابهای صفر کننده مخرج}\}$

توابع رادیکالی ۶:

$$y = \sqrt[n+1]{f(x)} \quad (\text{فرجه فرد}) \quad D = D_f$$

$$y = \sqrt[n]{f(x)} \quad (\text{فرجه زوج}) \quad \text{بدست آوردن دامنه} \rightarrow f(x) \geq 0$$

۷: دامنه ی توابع مانند $\sqrt[n+1]{f}, f^n, kf, |f|$ همان دامنه ی تابع f می باشد.

۸: $y = \sqrt[n]{\frac{f}{g}}$ دامنه = جواب این نامعادله $\rightarrow \frac{f}{g} \geq 0$: روش بدست آوردن دامنه

۹: $y = \frac{\sqrt[n]{f}}{g}$ $\{x | g(x) = 0\}$ - جواب نامعادله = دامنه $\rightarrow f \geq 0$: روش بدست آوردن دامنه

۱۰: $y = \frac{f}{\sqrt[n]{g}}$ جواب این نامعادله = دامنه $\rightarrow g > 0$: روش بدست آوردن دامنه

۱۱: $y = \frac{\sqrt[n]{f}}{\sqrt[n]{g}}$ اشتراک جواب های دو نامعادله = دامنه $\rightarrow f \geq 0, g > 0$: روش بدست آوردن دامنه

نکته: در موارد بالا اگر فرجه رادیکال فرد باشد، با حذف رادیکال فرجه فرد، دامنه برابر دامنه ی باقیمانده عبارت می باشد.

۱۲: دامنه ی توابع بصورت $f + g, f - g, f \times g$ برابر $D_f \cap D_g$ است.

۱۳: دامنه ی توابع بصورت $\frac{f}{g}$ برابر $D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$ است.

۱۴: دامنه تابع مثلثاتی $y = \sin(f(x)), y = \cos(f(x))$ برابر دامنه ی تابع f است.

۱۵: دامنه توابع مثلثاتی بصورت $y = \tan(f(x))$ برابر $\{x \in D_f | f(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ است.

۱۶: دامنه توابع مثلثاتی بصورت $y = \cot(f(x))$ برابر $\{x \in D_f | f(x) \neq k\pi\}$ است.

۱۷: دامنه توابع لگاریتمی بصورت $y = \log_{g(x)} f(x)$ برابر اشتراک دو نامعادله ی $f(x) > 0, g(x) > 0$ و شرط $g(x) \neq 1$ می باشد.

تمرینات:

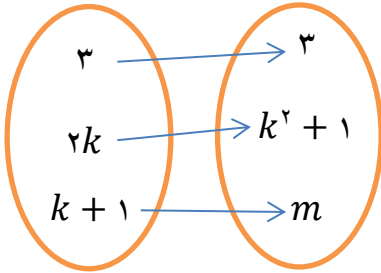
(۱) مقادیر صحیح a, b در تابع $f = \{(1, 3), (2, 2), (1, a - 2b), (2, a^2 - b)\}$ کدامند؟ $a = 1, b = -1$ ج:

(۲) اگر دو زوج مرتب $(13, xy), (-6, x^2 + y^2)$ برابر باشد. مقدار x, y کدامند؟ ۳ - و ۲ ج:

۳) اگر $g = \{(2, 4), (3, -1), (5, -1), (2, a^2 + 3a)\}$ تابع باشد. مقدار a کدام است؟

۴) اگر g بصورت روبرو تابع باشد. مقدار m, k کدامند؟

ج: ۱, ۲



۵) مقدار a, b را طوری بدست آورید که رابطه f بصورت زیر تابع باشد.

$$f = \left\{ (a^2 + a, 1), (0, b + 4), (1, a^2 + 2b), (0, a^2 + b), \left(\frac{2-a}{4}, a-b \right) \right\}$$

ج: $a = 2, b = -1$ $a = -2, b = -2$

۶) کدامیک از رابطه های زیر می تواند ضابطه یک تابع باشد؟

الف) $x^2 + 4y^2 = 1$ ×

ب) $\sqrt{x-1} + |y^2 - 1| = 0$ ×

پ) $2x^2 + (y-1)^2 = 0$ ✓

ت) $2^{2x+y} = 1$ ✓

ث) $1^{x+3} = 1$ ×

ج) $|x+2| + |y-3| = 2$ ×

چ) $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x}$ ✓

ح) $y^3 + x^2y = 0$ ✓

خ) $y = 2x + x^2$ ✓

د) $xy = 2x^2 - 1$ ✓

ذ) $y = \begin{cases} 2x^2 - 1 & x \geq 1 \\ |x - 2| & x \leq 1 \end{cases}$ ✓

ر) $y^2 + x^2 - 6y + 9 = 0$ ✓

ز) $x + x^2 = |y| + 1$ ✗

ژ) $(-1)^{2y+3} = 1$ ✗

س) $x^2 + y^2 - 2x = -1$ ✓

ش) $xy - 1 = 0$ ✓

ص) $x^2 + xy = 0$ ✗

ض) $xy = 0$ ✗

ط) $y = \sqrt{x} \pm \sqrt{x+1}$ ✗

ظ) $y = \begin{cases} 2x - 1 & x < 2 \\ x^2 + 3 & x > 3 \end{cases}$ ✗

ک) $x^2 - 2x + 1 = 0$ ✗

گ) $y^2 + 4y + 4 = 0$ ✓

ج) $y^2 + 2y - xy = x$ ✗

(۷) دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = -2x^3 + x^2 - x + 7$

ب) $g(x) = -3$

پ) $y = \frac{x+1}{x+1}$

ت) $y = \frac{|x|}{x}$

ج) $y = \frac{x^2 - 2x}{|x| - x}$

چ) $y = \frac{2x + x^2}{|x| + x}$

ح) $y = \frac{x-1}{|x|-1}$

خ) $y = \frac{x+1}{|x|+1}$

د) $y = \frac{3x-1}{2x-x^2}$

ذ) $y = \frac{|x+2|}{x-9x^2}$

ر) $y = \frac{2x}{1+x^2}$

ز) $y = \frac{x}{x^4+8x}$

$$y = \frac{2x^3 - x}{|x + 1| - 2} \quad \text{ژ)}$$

$$y = \frac{x + 5}{|x + 2| + 1} \quad \text{س)}$$

$$y = \frac{|x|}{3 - |x|} \quad \text{ش)}$$

$$y = \frac{1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} \quad \text{ص)}$$

$$y = \frac{2}{2 + \frac{1}{x}} \quad \text{ض)}$$

ج: $-1, -2$

۸) دامنه ی تابع $f(x) = \frac{x+3}{x^2-ax+b}$ برابر $\mathbb{R} - \{1, -2\}$ است. مقدار a, b کدامند؟

ج: $(-4, 4)$

۹) اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{1-3x}{x^2+mx+4}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد. حدود m کدام است؟

دامنه ی توابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}} \quad \text{۱۰)}$$

ج: $[-2, 2]$

$$g(x) = \sqrt{\frac{|1+x|}{2x^2-x-1}} \quad \text{۱۱)}$$

ج: $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$

$$۱۲) f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 3x + 2}{|2x - 1| - 1}}$$

ج: $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$$۱۳) f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{5 - x}}$$

ج: $[1, 5]$

$$۱۴) g(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 + x}}$$

ج: $[-1, 0]$

$$۱۵) f(x) = \sqrt{\frac{2 - |x + 2|}{1 + x^2}}$$

ج: $[-4, 0]$

$$۱۶) g(x) = \sqrt{2 - \sqrt{1 - x}}$$

ج: $[-3, 1]$

$$۱۷) f(x) = \sqrt{(x + 2)^2(x - 3)}$$

ج: $[3, +\infty) \cup \{-2\}$

$$۱۸) g(x) = \frac{3x - 1}{\sqrt{x^4 - 5x^2 + 4}}$$

ج: $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$

$$۱۹) f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{1 + x - 2x^2}}$$

ج: $(-\frac{1}{2}, 1)$

$$۲۰) g(x) = \sqrt[4]{\frac{|1+x|}{2x^2-x-1}}$$

$$\text{ج: } (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$$

$$۲۱) f(x) = \sqrt{\frac{-x^2-x+2}{|x+2|}}$$

$$\text{ج: } (-2, 1]$$

$$۲۲) g(x) = \sqrt{1-|x+3|} + \sqrt{\frac{3x}{2x^2+4x}}$$

$$\text{ج: } D = \phi$$

$$۲۳) f(x) = \sqrt{1 - \left| \frac{x+1}{2x-1} \right|}$$

$$\text{ج: } (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

$$۲۴) g(x) = \frac{5x}{\sqrt{|x|-x}} + \sqrt{x+1}$$

$$\text{ج: } [-1, 0)$$

$$۲۵) f(x) = \sqrt{|x|+x} - \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{ج: } [-1, 1]$$

دامنه توابع زیر را بدست آورید.

$$۲۶) g(x) = \sqrt{1+x^2} \times \sqrt{x^2-x^3}$$

$$\text{ج: } (-\infty, 1]$$

$$۲۷) f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{3x-2x^2-1}}$$

$$\text{ج: } \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$28) g(x) = \sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{\frac{-2x^2}{x^2 + 2x}}$$

ج: ϕ

$$29) f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x+3}}$$

ج: $[-3, -2]$

$$30) g(x) = \sqrt{\frac{1 - 4x^2}{x^2 + x + 4}}$$

ج: $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$

$$31) f(x) = \sqrt[4]{\frac{3x - x^2}{1 - x^2}}$$

ج: $(-\infty, -1) \cup [0, 1) \cup [3, +\infty)$

$$32) g(x) = \sqrt[3]{\frac{2x-5}{2x-5}} - \sqrt{6x-8-x^2}$$

ج: $[2, 4] - \left\{\frac{5}{2}\right\}$

$$33) f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x}$$

ج: $[0, +\infty)$

$$34) g(x) = \frac{|x| - 1}{\sqrt{|x| - 1}}$$

ج: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$$۳۵) f(x) = \sqrt{\frac{۲|x| - ۳}{|x - ۱|}}$$

$$\text{ج: } (-\infty, -\frac{۳}{۲}] \cup [\frac{۳}{۲}, +\infty) - \{۱\}$$

$$۳۶) g(x) = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{x+1}{۲}}}$$

$$\text{ج: } [-۱, ۱]$$

$$۳۷) f(x) = \frac{۳x - ۱}{\sqrt{|x| - x}}$$

$$\text{ج: } (-\infty, ۰)$$

$$۳۸) g(x) = \sqrt{۵ - x} + \sqrt{x - ۵}$$

$$\text{ج: } \{۵\}$$

$$۳۹) f(x) = \sqrt{\sqrt[۳]{\frac{۱}{x^۲}} - \frac{۹}{۴}}$$

$$\text{ج: } [-\frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۳}] - \{۰\}$$

$$۴۰) g(x) = \sqrt[۳]{۱ - x} + \sqrt[۴]{x - ۱}$$

$$\text{ج: } [۱, +\infty)$$

$$۴۱) f(x) = \sqrt{\frac{۳x - ۲}{x^۲ - ۸x + ۱۵}}$$

$$\text{ج: } [\frac{۲}{۳}, ۳) \cup (۵, +\infty)$$

دامنه ی توابع زیر را بدست آورید.

$$۴۲) g(x) = x^2 + \frac{|x|}{x} + \sqrt{-x^2}$$

$$۴۳) f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x\sqrt{x}+1}$$

$$۴۴) g(x) = \begin{cases} x^2 & 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x} & x \leq 1 \end{cases}$$

$$۴۵) f(x) = \frac{2x-3}{x^2-4|x|-21}$$

$$ج: D = \mathbb{R} - \{\pm 7\}$$

$$۴۶) g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^3}}$$

$$ج: D = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$$

$$۴۷) f(x) = \sqrt{3^x - 4^x}$$

$$ج: D = (-\infty, 0]$$

$$۴۸) g(x) = \sqrt{|x|(x^2-1)}$$

$$ج: D = (-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty)$$

$$۴۹) f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - 16x^2}}$$

$$ج: D = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$$

$$50) g(x) = \frac{x + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{x + |x|}}$$

$$ج: D = (0, 1]$$

$$51) f(x) = \frac{x^{10} + 2}{2 - x^{10}}$$

$$ج: D = \mathbb{R} - \{\sqrt[10]{2}\}$$

$$52) f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}}$$

$$ج: D = [-2, 2]$$

$$53) g(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}}$$

$$ج: D = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$$

$$54) f(x) = \sqrt{3 - ||x + 1| - 2|}$$

$$ج: D = [-6, 4]$$

$$55) g(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x} - 2}$$

$$ج: D = \mathbb{R}^+$$

$$56) f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x - 1}} + \sqrt[3]{\frac{x + 1}{1 + x^2}}$$

$$ج: D = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$57) g(x) = \frac{1 + \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x - 1} - 1}$$

$$ج: D = [1, +\infty) - \{2\}$$

$$58) f(x) = \sqrt{\frac{-x^3 - 2x^2}{(x+1)(x+2)}}$$

$$\text{ج: } D = \{0\} \cup (-\infty, -1) - \{-2\}$$

$$59) g(x) = \sqrt{\frac{1-|x|}{1+|x|}}$$

$$\text{ج: } D = [-1, 1]$$

$$60) f(x) = \frac{\sqrt{x(x^2-1)}}{\sqrt{|x|+x}}$$

$$\text{ج: } D = [1, +\infty)$$

$$61) f(x) = \sqrt{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+6}}$$

$$\text{ج: } D = \phi$$

$$62) f(x) = \sqrt{2x - \sqrt{3+x}}$$

$$\text{ج: } D = [1, +\infty)$$

$$\text{ج: } D = [0, 2] \rightarrow \text{ج: } 2$$

$$63) \text{ دامنه ی تابع } f(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x^2-16} \text{ شامل چند عدد طبیعی است؟}$$

$$\text{ج: } D = (-2 \text{ و } 2) \rightarrow \text{ج: } 3$$

$$64) \text{ دامنه ی تابع } g(x) = \frac{1-3x}{\sqrt{2-|x|}} \text{ چند عدد صحیح را شامل می شود؟}$$

یکی ج

$$65) \text{ دامنه ی تابع } f(x) = \sqrt{\frac{5-x^2}{x-1}} \text{ شامل چند عدد صحیح می باشد؟}$$

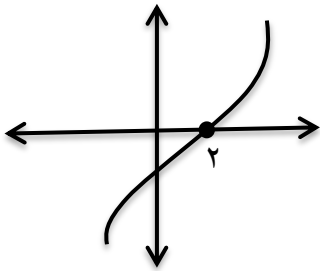
(۶۶) به ازای چه مقدار m تابع $f(x) = \sqrt{(m+2)x^2 - 2mx + m-1}$ دامنه f برابر $\mathbb{R}$ است؟ $m \in (2, +\infty)$ ج:

(۶۷) دامنه ی تابع $\frac{2y+1}{y-2} = \frac{x+2}{3x-1}$ کدام است؟ $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}, \frac{4}{5}\right\}$ ج:

(۶۸) اگر تابع $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c - 2}{x^2 - x + 1}$ همانی باشد. مقدار $2a + b - c$ کدام است؟ -3 ج:

ج: $[-2, +\infty]$

(۶۹) اگر $g(x) = \sqrt{(x^2 - 4)f(x)}$ باشد. دامنه ی تابع g کدام است؟



(۷۰) در دامنه ی تابع $y = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x^2}}{\frac{2x}{x^2} - 3}$ چند عدد صحیح وجود ندارد؟

(۷۱) چه تعداد از توابع زیر تابع اند؟ دو مورد ج:

$$|y-1| + \sqrt[3]{\sqrt{x}} = 0, \quad (-2)^x = 1^{y+1}, \quad 6y + x^2 = 2x - 1, \quad y + |y| = x^2 - 1$$

ج: $2, -\frac{1}{4}$

(۷۲) اگر f بصورت زیر تابع باشد. مقدار m کدام است؟

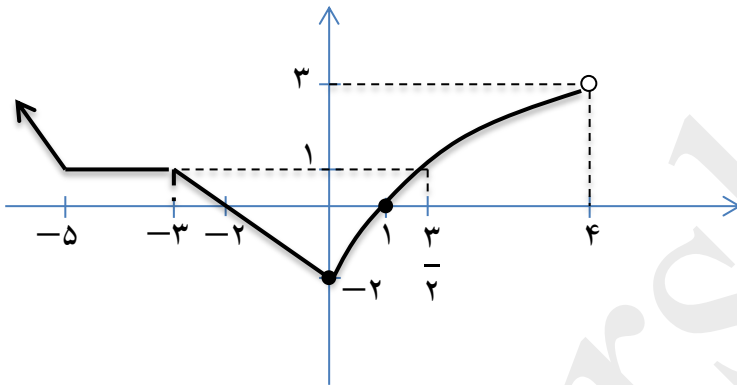
$$f\left\{(2,1), (-1,m), (m, -m+3), (3, m^2-1), \left(3, \frac{3}{4}m\right)\right\}$$

(۷۳) اگر f بصورت $f = \{(-2, \alpha^2 - 3\alpha), (-3, -3), (\beta, \alpha - 1)\}$ تابعی همانی باشد. مقادیر طبیعی β, α کدامند؟
ج: $\alpha = 2, \beta = 1$

(۷۴) اگر f تابع باشد مقدار m و n کدامند؟

$$f = \{(1, m^2 + m), (1, n^2 + n), (m, 1), (-2, n), (1, 2)\}$$

(۷۵) با توجه به نمودار تابع f بصورت زیر دامنه ی توابع را بدست آورید.



الف) $y = \sqrt{f(x)}$ ج: $(-\infty, -2] \cup [1, 4)$

ب) $y = \sqrt{f(x) - 1}$ ج: $(-\infty, -3] \cup \left[\frac{3}{2}, 4\right)$

پ) $y = \sqrt{\frac{3}{2} - \left|f(x) + \frac{1}{2}\right|}$ ج: $\left[-5, \frac{3}{2}\right]$

ت) $y = \sqrt{\frac{x}{f(x)}}$ ج: $(-2, 0] \cup (1, 4]$

ث) $y = \sqrt{-x f(x)}$ ج: $(-\infty, -2] \cup [0, 1]$

نکته : اگر دامنه ی تابع f بازه ی $[a, b]$ باشد، برای بدست آوردن دامنه ی تابع $f(cx + d)$ کافی است جواب نامعادله ی $a < cx + d \leq b$ را بدست آوریم.

(۷۶) اگر دامنه ی تابع f بازه ی $[-1, 2]$ باشد. دامنه ی تابع $f\left(\frac{x-2}{3}\right)$ کدام است؟
ج: $(-1, 8)$

(۷۷) الف) اگر دامنه ی تابع f بازه ی $(-۲, ۴)$ باشد. دامنه تابع $f(۲x - ۱)$ کدام است؟ ج: $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$

ب) اگر $\sqrt{2x - x^2} f(x)$ باشد. دامنه تابع $f(۳ - x)$ کدام است؟ ج: $[۱, ۳]$

(۷۸) اگر دامنه ی تابع f بازه ی $[-۲, ۳]$ باشد. دامنه ی تابع $y = ۲ - ۳f(۲ - x)$ کدام است؟ ج: $(-۱, ۴]$

(۷۹) اگر $D_f = [۲, ۴]$ و $D_g = [۱, ۲]$ باشد. دامنه تابع $y = g(\frac{x}{۲}) + ۲f(۲x)$ کدام است؟ ج: $[۱, ۲)$

(۸۰) اگر تابع $f(x) = \sqrt{۲ - x - x^2}$ مقدار $f(f(-۱))$ کدام است؟ تعریف نشده ج:

(۸۱) اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد. چند تابع از A به B می توان نوشت؟

(۸۲) اگر $A = \{a, b, c\}$, $B = \{۱, ۲, ۳, ۵\}$ باشند. چند تابع از A به B می توان نوشت؟

(۸۳) اگر $f(x) = \sqrt{2x^2 - ۱}$ و $f(x) = k(x - ۱)$ و $g(x) = k(x - ۱)$ و $f(\sqrt{2k}) + g(-۱) = ۰$ باشند مقدار k کدام است؟ ج: $\frac{1}{2}$

(۸۴) در تابع خطی f که $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{1-\sqrt{2}}$ و $f(۱ - \sqrt{2}) = \sqrt{2}$ باشد. حاصل $f(\frac{1}{2})$ کدام است؟ ج: $-\frac{1}{2}$

تساوی دو تابع:

دو تابع f و g را مساوی گویند اگر:

$$D_f = D_g \quad (\text{الف})$$

(ب) برای هر x در دامنه ی f و g داشته باشیم $f(x) = g(x)$

سؤال: کدامیک از جفت تابع زیر با هم مساوی اند؟

$$85) f(x) = \sqrt{1+x^2} \quad g(x) = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}} \quad \checkmark$$

$$86) f(x) = \sqrt{-x^2} \quad g(x) = \{(.,.)\} \quad \checkmark$$

$$87) f(x) = 2 \quad g(x) = \frac{3x^2+6}{x^2+3} \quad \checkmark$$

$$88) f(x) = |x| - 3 \quad g(x) = \frac{x^2+9}{|x|+3} \quad \checkmark$$

$$89) f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad g(x) = \tan x \quad \checkmark$$

$$90) f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, \quad g(x) = x+2 \quad \times$$

$$91) f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad \checkmark$$

$$92) f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}, \quad g(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} \quad \times$$

$$93) f(x) = \frac{x+3}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{\frac{x}{x+3}} \quad \times$$

$$94) f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, \quad g(x) = \tan x \cot x \quad \times$$

$$95) f(x) = x\sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt{x^3} \quad \checkmark$$

$$96) f(x) = \sqrt{4-x^2}, \quad g(x) = \sqrt{x+2} \times \sqrt{2-x} \quad \checkmark$$

$$97) f(x) = x+2, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$98) f(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad g(x) = \sqrt{1+\tan^2 x} \quad \times$$

99) مقدار a را طوری بدست آورید که توابع f, g برابر باشند.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x+4} & x \neq -4 \\ a+1 & x = -4 \end{cases} \quad g(x) = x-4$$

100) مقدار a را طوری بدست آورید که دو تابع f, g مساوی باشند.

$$f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{2x+6} & x = 5 \\ \frac{x^2-6x+5}{x-5} & x \neq 5 \end{cases} \quad g(x) = x-1$$

(۱۰۱) اگر دو تابع f, g مساوی باشند. مقدار m, n را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 2m - n & x = -4 \\ \frac{x^2 + 3x - 4}{x + 4} & x \neq -4 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} m + n & x = 3 \\ \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & x \neq 3 \end{cases}$$

(۱۰۲) اگر $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 1}{2x + 1} & x \neq -\frac{1}{2} \\ 1 - k & x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ باشند. k را طوری بیابید که به ازای هر x دو تابع f و g برابر باشند.

(۱۰۳) اگر دو تابع $f(x) = x - 2$, $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} & x \neq a \\ a & x = a \end{cases}$ با هم برابر باشند. $a + b$ کدام است؟

نکته:

رسم توابع چند جمله ای و قدر مطلق و رادیکال معمولاً از روش انتقال و گاهی از روش نقطه یابی انجام می گیرد.

(۱۰۴) تابع $y = x^2$, $y = |x|$ را در این دامنه ها رسم کنید.

الف) $D = R - \{0\}$

ب) $D = [-2, 2]$

پ) $D = (0, +\infty)$

ت) $D = R - (-1, 1]$

نکاتی در مورد رسم توابع با استفاده از روش انتقال:

- ۱- هرگاه از روی نمودار $f(x)$ خواستیم نمودار $f(x \pm a)$ را رسم کنیم تابع f را a واحد به چپ $(+)$ و راست $(-)$ منتقل می کنیم.
- ۲- هرگاه از روی نمودار $f(x)$ خواستیم نمودار $f(x) \pm a$ را رسم کنیم تابع f را a واحد به بالا $(+)$ و پایین $(-)$ منتقل می کنیم.
- ۳- هرگاه از روی نمودار $f(x)$ خواستیم نمودار $-f(x)$ را رسم کنیم تابع f را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم.
- ۴- هرگاه از روی نمودار $f(x)$ خواستیم نمودار $f(-x)$ را رسم کنیم تابع f را نسبت به محور y ها قرینه می کنیم.
- ۵- هرگاه از روی نمودار $f(x)$ خواستیم نمودار $|f(x)|$ را رسم کنیم. جاهایی از نمودار f که بالای محور x هاست را بدون تغییر نگه داشته اما جاهایی که زیر محور x هاست را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم.
- ۶- هرگاه از روی نمودار $f(x)$ خواستیم نمودار $f(|x|)$ را رسم کنیم، به قسمت هایی از نمودار که جلوی (سمت راست) محور y هاست کاری نداریم اما قسمتی از نمودار که قبل از محور y هاست (سمت چپ) را حذف می کنیم و سپس به نمودار باقی مانده، قرینه اش نسبت به محور y ها را می افزاییم.
- ۷- برای رسم دو تابع بصورت جمع یا تفریق دو تابع قدر مطلق، ابتدا آنها را بصورت تابع چند ضابطه ای در می آوریم و سپس رسم می کنیم.

۸- هرگاه از روی نمودار $f(x)$ خواستیم نمودار $af(x)$ را رسم کنیم دو حالت بوجود می آید:

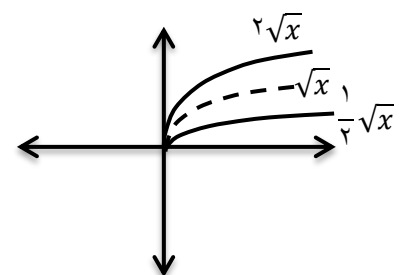
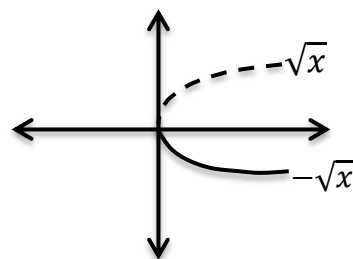
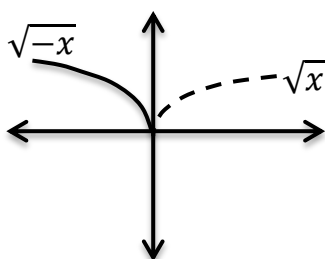
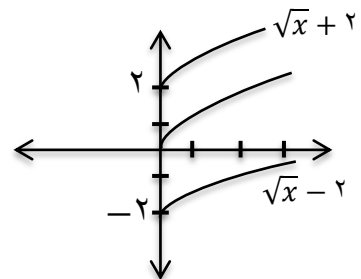
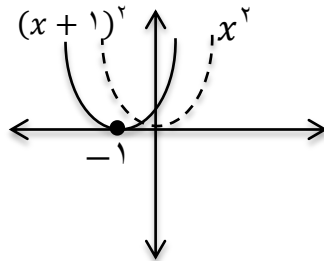
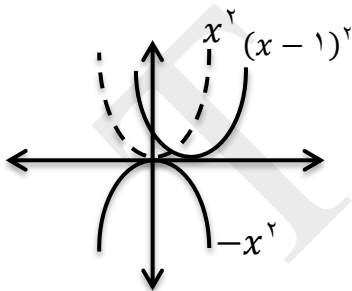
الف) اگر $a > 1$ باشد، نمودار f را در امتداد محور y ها با ضریب a کشیده می شود.

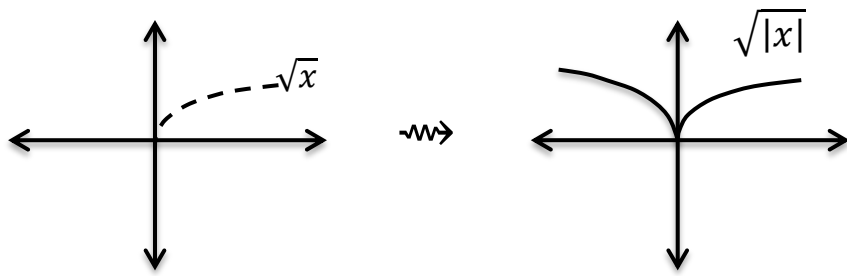
ب) اگر $0 < a < 1$ باشد، نمودار f را در امتداد محور y ها با ضریب a فشرده تر می شود.

۹- هرگاه از روی نمودار $f(x)$ خواستیم نمودار $f(ax)$ را رسم کنیم دو حالت بوجود می آید:

الف) اگر $a > 1$ باشد، نمودار f در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{a}$ فشرده می شود.

ب) اگر $0 < a < 1$ باشد، نمودار f در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{a}$ کشیده می شود.





۱۰۵) اگر دامنه ی تابع $y = -|x + 3|$ برابر $[-4, 3]$ باشد. برد آن کدام است؟

ج: $(-6, 0]$

۱۰۶) مساحت ناحیه محدود بین توابع $y = -|x|$ ، $y = |x| - 4$ ، کدام است؟

ج: ۸

۱۰۷) چه تعداد از گزاره های زیر درست است؟

الف) نمودار تابع $y = -\frac{1}{x}$ محورهای مختصات را قطع نمی کند.

ب) تابع $y = -\frac{1}{x}$ و معکوشش نمودار یکسانی دارند.

۱۰۸) اگر $2 < x < 3$ باشد. نمودار تابع $y = |x - 2| + |4 - x| + |-2x + 3|$ بر نمودار کدام تابع خطی منطبق است؟

ج: $y = 2x - 1$

توابع زیر را رسم کنید.

۱۰۸) $y = \frac{1}{2-x}$

۱۰۹) $y = \frac{1}{x-2}$

۱۱۰) $y = \frac{1}{|x|+1}$

$$۱۱۱) y = \frac{1}{1 - |x|}$$

$$۱۱۲) y = |x^2 - 1|$$

$$۱۱۳) y = |\sqrt{x} - 1|$$

$$۱۱۴) y = |-x^2 + 1|$$

$$۱۱۵) y = |x^2 + 2x|$$

$$۱۱۶) y = ||x| - 3|$$

$$۱۱۷) y = ||x| - 1| - 1|$$

$$۱۱۸) y = \left| \frac{1}{2}x + 1 \right|$$

$$۱۱۹) y = |3x - 1|$$

$$۱۲۰) y = |x^2 - 2x|$$

$$۱۲۱) y = 2^{|x|} - 1$$

$$۱۲۲) y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} + 1$$

$$۱۲۳) y = \sqrt{|x|} + ۱$$

$$۱۲۴) y = \sqrt{|x| + ۱}$$

$$۱۲۵) y = |x + ۲| - ۱$$

$$۱۲۶) y = ۲ - |x - ۱|$$

$$۱۲۷) y = ۱ - \sqrt{۲ - x}$$

$$۱۲۸) y = -\frac{۱}{x}$$

$$۱۲۹) y = \sqrt{۱ - |x|}$$

$$۱۳۰) y = ۱ - \sqrt{|x| + ۱}$$

$$۱۳۱) y = x^r - ۱$$

$$۱۳۲) y = (x - ۱)^r$$

$$۱۳۳) y = (|x| - ۱)^r$$

$$۱۳۴) y = \frac{۱}{|x|}$$

$$۱۳۵) y = -\frac{۱}{|x|}$$

نکته ۱۰: رسم سریع تابع آبخاری و گلدانی

برای رسم توابعی بصورت تفاضل دو عبارت قدر مطلقى بادرجه ۱ و ضریب x یکسان (سرسره ای یا آبخاری) می توان ریشه های صفرکننده دو قدر مطلق را به تابع داد و دو نقطه بدست آمده را در دستگاه مختصات بهم متصل و سپس دو خط افقی کناری را طوری رسم می کنیم که تصویر یک سرسره ظاهر شود. برای رسم توابعی بصورت مجموع دو عبارت قدر مطلقى با درجه ۱ و ضریب x یکسان (گلدانی) می توان ریشه های صفرکننده دو قدر مطلق را به تابع داد و دو نقطه بدست آمده را در دستگاه مختصات بهم متصل و سپس دو خط کناری را یکی با شیب مجموع ضرائب x در دو قدر مطلق و دیگری هم با شیب قرینه مجموع ضرائب x رسم تا تصویر گلدان ظاهر شود.

$$۱۳۶) y = |x + ۳| - |x - ۱|$$

$$۱۳۷) y = |x + ۱| - \left| x - \frac{۱}{۲} \right|$$

$$۱۳۸) y = |۲x - ۲| + |۲x + ۳|$$

$$۱۳۹) y = |x| + |x - ۲|$$

$$۱۴۰) y = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - ۴x + ۴}$$

نکته ۱۱: برای رسم توابعی بصورت های زیر بهتر آن است که از نقطه یابی کمک بگیرید. به این ترتیب که جواب صفرکننده داخل قدرمطلق را در تابع گذاشته که همان رأس بدست می آید و سپس ۲ نقطه کمکی در دو طرف رأس به تابع می دهیم.

$$۱۴۱) y = -\frac{۱}{۲} |۲x + ۴| + ۱$$

$$۱۴۲) y = -\frac{۱}{۲} (۲x - ۴)^2 + ۱$$

$$۱۴۳) y = ۲(۳x - ۱)^۲ - ۱$$

$$۱۴۴) y = ۲\left|\frac{x}{۳} + ۱\right| - ۱$$

نکته:

برای رسم توابع دیگری به جز آن که در ۱۱ نکته قبل گفته شد، اگر به شکل زیر باشند، می بایست آن را از حالت قدر مطلق دریاوریم و سپس رسم کنیم.

$$۱۴۵) y = x|x| + ۱$$

$$۱۴۶) y = x|x| + \frac{x}{|x|}$$

$$۱۴۷) y = x - ۲|x|$$

$$۱۴۸) y = x + |x - ۲|$$

$$۱۴۹) y = x + \frac{|x - ۳|}{x - ۳}$$

$$۱۵۰) y = |۲x + ۱| - |x - ۱|$$

$$۱۵۱) y = |۲x - ۱| + |x + ۱|$$

تابع یک به یک:

۱- اگر تابع بصورت زوج مرتب باشد در صورتی یک به یک است که هیچ دو زوج مرتب متمایز با مولفه های دوم یکسان در آن یافت نشود.

۲- ضابطه تابع f یک به یک است در صورتی که به ازای x_1, x_2 از دامنه f داشته باشیم:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

۳- اگر نمودار تابع را داشته باشیم در صورتی نمایش یک تابع یک به یک است که هر خط موازی با محور x ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

۴- تابع f یا ضابطه $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in D_1 \\ h(x) & x \in D_2 \end{cases}$ در صورتی یک به یک است که :
اولاً: g در D_1 و h در D_2 یک به یک باشند.
ثانیاً: برد g و h با هم اشتراک نداشته باشند.

۱۵۲) در تابع یک به یک f بصورت $f = \{(-2, 2), (b, 3), (-1, 3), (b, a)\}$ مقدار a چه می تواند باشند.

۱۵۲) اگر تابع $f = \{(2, a), (4, a^2), (a, b-1)\}$ یک به یک باشد و $f(4) - 3f(2) = -2$ مقدار $b + a$ کدام است؟
ج: ۵

۱۵۳) به ازای چه مقدار a, b تابع $f = \{(8, 11), (2a, 5), (3, b^2), (-3, 7), (3, a+5), (3a-4, 5)\}$ یک به یک است؟

۱۵۴) کدام زوج مرتب به تابع $f = \{(1, a), (a-1, 1), (0, 1), (2, 1)\}$ اضافه شود تا f یک به یک بماند؟
۱) $(0, 3)$ ۲) $(-4, 1)$ ۳) $(1, 1)$ ۴) $(3, 2)$ ✓

۱۵۵) اگر f تابعی یک به یک و دامنه f بصورت $\{a^2, -2, \pm 1\}$ و برد آن $\{2, \pm 1\}$ باشند. حداکثر چند مقدار برای a می توان یافت؟
ج: ۲

۱۵۶) اگر رابطه $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ یک به یک باشد (a, b) کدامند؟
ج: $(2, 3)$

(۱۵۷) اگر تابع روبرو یک به یک باشد. مقدار $a + b$ را بیابید. $g = \{(3, 5), (a - b, 7), (a - 1, 5), (12, a + 3)\}$

(۱۵۸) تابع $g = \{(4, -3), (4, a^2 - 4a), (a + 1, -3a)\}$ یک به یک است. مقدار a کدام است؟

(۱۵۹) با رسم شکل نشان دهید تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ یک به یک است.

(۱۶۰) بار رسم شکل نشان دهید تابع $g(x) = \begin{cases} -x^3 & x \geq -1 \\ \frac{1}{|x|} & x < -1 \end{cases}$ یک به یک نمی باشد.

(۱۶۱) آیا $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه ی زیر یک به یک است؟

$$h(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 0 \\ x^2 - 5 & 0 < x \leq 2 \\ -x - 2 & x > 2 \end{cases}$$

(۱۶۲) ثابت کنید تابع $\begin{cases} f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\} \\ f(x) = \frac{2x-3}{x+1} \end{cases}$ یک به یک است.

(۱۶۳) ثابت کنید تابع $\begin{cases} g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x \end{cases}$ یک به یک است.

(۱۶۴) ثابت کنید تابع $\begin{cases} f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 - 1 \end{cases}$ یک به یک است.

(۱۶۵) ثابت کنید $y = 2x^3 - 1$ تابعی یک به یک است.

(۱۶۶) نشان دهید تابع $y = 2x^2 - 1$ یک به یک نمی باشد.

(۱۶۷) با رسم شکل نشان دهید $y = \sqrt{-|x| + 1}$ یک به یک نمی باشد.

(۱۶۷) کدامیک از توابع زیر یک به یک می باشند؟ چرا؟

الف) $y = \sqrt[3]{x}$

ب) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

پ) $y = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases}$

ت) $y = \sqrt{x^2}$

ث) $y = x^5 - 2x$

ج) $y = x|x|$

چ) $y = x \cos x$

چ) $y = |x| + |1 - x|$

خ) $y = |x + 1| - |x + 2|$

(۱۶۹) کدامیک از توابع زیر ۱-۱ می باشد؟ چرا؟

الف) $f(x) = x + 2|x|$ ×

ب) $g(x) = 2x + |x|$ ✓

پ) $h(x) = x + |x|$ ×

ت) $k(x) = x - |x|$ ×

(۱۷۰) آیا تابع $f(x) = 2|x| - 2x - 1$ یک به یک است؟ دامنه و برد آن را بیابید.

ج: $D = \mathbb{R}$, $R: [-1, +\infty)$ و خیر:

هیچکدام ج:

(۱۷۱) کدامیک از توابع زیر یک به یک می باشند؟ دلیل آن را با شکل بیان کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x} & x \geq 0 \\ 2 + x & x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \geq 0 \\ 1 - x^2 & x < 0 \end{cases}$$

یک مورد ج:

(۱۷۲) چند مورد از توابع زیر یک به یک هستند؟

$$f(x) = |x^2| + 2, \quad g(x) = x^2 \sin x, \quad h(x) = \sqrt{-|x|}$$

(۱۷۳) دو تابع f و g مثال بزنید که دامنه هر دو $[2, 6]$ و برد آنها $[0, 5]$ باشد و f یک به یک باشد اما g یک به یک نباشد.

(۱۷۴) نشان دهید تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ بصورت $f(x)$ یک به یک است.

(۱۷۵) نشان دهید تابع $g(x) = -\sqrt{x-1}$ یک به یک است.

(۱۷۶) کدام تابع زیر یک به یک است؟

الف) $y = (1 - 2x)^3$ ✓

ب) $y = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 5$ ✓

پ) $y = x^2 + x + 1$ ×

ت) $y = \frac{2x-3}{x}$ ✓

ث) $y = x|x| + 1$ ✓

ج) $y = |x| - x$ ×

(۱۷۷) آیا تابع $f(x) = x^2 - 2x$ یک به یک است؟ چرا؟

آیا تابع $y = \frac{2^x-1}{2^x+1}$ یک به یک است؟ چرا؟

تابع وارون:

نکته ۱: اگر f تابعی ۱-۱ باشد آنگاه معکوس f یعنی f^{-1} هم تابع می شود. (برای اثبات وارون پذیری (معکوس پذیری) کافی است ثابت کنیم تابع f یک به یک است).

نکته ۲: اگر f و f^{-1} تابع باشند آنگاه به ازای هر $(a, b) \in f$ داریم: $(b, a) \in f^{-1}$

نکته ۳: اگر f و f^{-1} تابع باشند آنگاه $D_f = R_{f^{-1}}$, $D_{f^{-1}} = R_f$

نکته ۴: نمودار تابع f^{-1} قرینه ی نمودار تابع f نسبت به خط $y = x$ می باشد.

نکته ۵: اگر تابع f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی (یکنوا) باشد:

اولاً: تابع f^{-1} هم اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

ثانیاً: محل برخورد f و f^{-1} روی خط $y = x$ قرار می گیرد.

ثالثاً: تابع f یک به یک خواهد بود.

نکته ۶: تابع خطی $y = x$ و $y = -x + k$ بر نمودار تابع معکوس خود منطبقند.

نکته ۷: در صورتی که f یکنوا باشد، برای بدست آوردن محل برخورد f و f^{-1} کافی است معادله ی $f(x) = x$ را حل نمایید.

جواب این معادله همان نقاط برخورد دو تابع f و f^{-1} می باشد.

نکته ۸: تابع $y = \frac{ax+b}{cx-a}$ با وارون خودش برابر است.

نکته ۹: ضابطه تابع معکوس $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ در صورتی که $ad - bc \neq 0$ باشد برابر $f^{-1}(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}$ می باشد.

مشابهت نکته بالا با ماتریس ها:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

نکته ۱۰: تابع درجه دوم با ضابطه ی $y = ax^2 + bx + c$ در هر یک از بازه های $(-\infty, -\frac{b}{2a})$, $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ وارون پذیر است.

نکته ۱۱: برای بدست آوردن وارون تابع وارون پذیر f کافی است نام x , y را عوض کنیم و سپس y را بر حسب x بیابیم، تابع بدست آمده همان تابع معکوس است.

ج: (۱،۱)

۱۷۸) محل تلاقی تابع $f(x) = x^3 + x - 1$ با وارونش کدام است؟

مبدأ: ج

۱۷۹) اگر $f(x) = x^3 + 3x$ باشد. محل تلاقی f و f^{-1} کدام است؟

۱۸۰ مقدار a را طوری بدست آورید که تابع $f(x) = \frac{x}{a} + 3$ و وارونش بر هم منطبق باشند. $a = -1$ ج:

۱۸۱ تابع $y = (x + 3)^2$ در بازه $[-\infty, 3]$ در چند نقطه با معکوس خود تلاقی می کند؟ هیچ نقطه ج:

۱۸۲ اگر ضابطه تابع f بصورت $f(x) = x^3 + x - 1$ باشد. نمودار f^{-1} از کدام نقطه با طول ۳- می گذرد؟ $(-3, -1)$ ج:

۱۸۳ اگر تابع $f(x) = (a + 2)x^2 + 4x + a + 1$ روی $\mathbb{R}$ یک به یک باشد. نمودار f و f^{-1} در چه نقاطی همدیگر را قطع می کنند؟ نقطه تلاقی $= \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ ج: $a = -2$

۱۸۴ تابع $f(x) = 2|x| - |x - 1| + |x + 2|$ روی کدام بازه وارون پذیر نمی باشد؟
(راهنمایی: حل از طریق رسم با استفاده از نقطه یابی ریشه های داخل قدر مطلق) $(-2, 1)$ ج:

۱۸۵ الف) ثابت کنید تابع $f(x) = \frac{x+3}{2x+1}$ وارون پذیر است و سپس ضابطه تابع وارون و دامنه و برد f^{-1} را بیابید.

ب) ثابت کنید $g(x) = \frac{x}{1+|x|}$ وارون پذیر است و سپس ضابطه g را با دامنه g^{-1} مشخص کنید.

$$g^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|} \quad (|x| < 1)$$

(۱۸۶ الف) اگر زوج مرتب $(m, 2)$ بر روی قرینه تابع خطی $y = 2x + 1$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرار داشته باشد. مقدار m کدام است؟
ج: $m = 5$

(ب) نمودار وارون تابع $y = ax + 2$ از نقطه $(-\frac{6}{2})$ می گذرد و مقدار a کدام است؟
ج: $a = -4$

(۱۸۷) با رسم تابع $y = 2x^2 - 3x - 1$ بررسی کنید در کدام بازه از دامنه اش می تواند وارون پذیر باشد. برد f کدام است؟
ج: $R_f = [-\frac{17}{8}, +\infty)$

(۱۸۸) آیا تابع $f(x) = \begin{cases} 4x - x^2 - 3 & x < 2 \\ x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$ وارون پذیر است؟ (رسم)
ج: خیر

(۱۸۹) اگر $f = \{(a, a), (-1, b), (a + b, a)\}$ ، $g = \{(b - a, 3), (\sqrt{a + 3}, -1), (1, \frac{b}{4})\}$ وارون هم باشند. مقدار $g^{-1}(3)$ کدام است؟
ج: ۱

(۱۹۰) تابع $f(x) = \frac{a}{1 - bx}$ مفروض است. اگر f از نقطه $(-\frac{1}{3})$ و تابع f^{-1} از $(\frac{1}{2})$ بگذرد. نمودار f محور y ها را با کدام عرض قطع می کند؟
ج: ۹

(۱۹۱) با کمک رسم تابع $f(x) = \sqrt{-x} + 1$ نشان دهید وارون پذیر است. تابع f^{-1} را بیابید و دامنه و برد تابع f^{-1} کدامند؟
ج: $D_{f^{-1}} = [1, +\infty)$ $R_f = (-\infty, 0]$

(۱۹۲) اگر $f(x) = 1 + \frac{3}{x-2}$ باشد. مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟
ج: ۳

ج: -۴

۱۹۳) اگر $f^{-1}(-1) = 1$ و $f(x) = 2x^3 + x + m$ باشد. مقدار m کدام است؟

ج: $[-8, -7]$

۱۹۴) اگر دامنه ی تابع $f(x) = x^2 - 6x + 1$ بازه ی $[3, 4]$ باشد. دامنه ی f^{-1} کدام است؟

ج: -۲

۱۹۵) الف) در تابع $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟

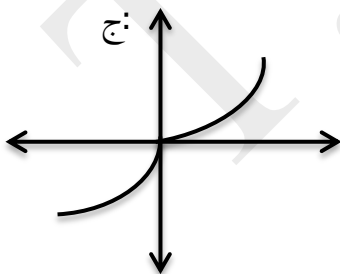
ج: ۰

ب) در تابع $f(x) = \frac{3x}{2+3x}$ مقدار $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ کدام است؟

۱۹۶) تابع زیر به ازای کدام مقدار m وارون پذیر است؟
 $f = \{(1, m^2 - m), (m, 4), (1, 6), (5, m + 1), (0, m^2 + 2)\}$
 ج: $\emptyset$

ج: ۲

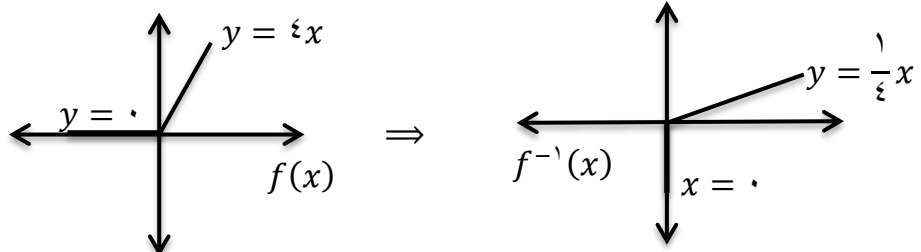
۱۹۷) تابع $f(x) = x^3 - 3x$ ($x \geq 1$) با کدام طول وارون خود را قطع می کند؟



۱۹۸) نمایش هندسی معکوس تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

۱۹۹) منحنی نمایش معکوس تابع f با ضابطه $f(x) = 2x + |2x|$ کدام است؟

ج:



(۲۰۰) ضابطہ تابع معکوس ہر کدماں از توابع زیر را بدست آورید.

الف) $y = x^4 - 2x^2 + 1$ $x \geq 1$ ج: $f^{-1}(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

ب) $y = 4 + \sqrt{x+1}$ ج: $f^{-1}(x) = (x-4)^2 - 1$ $x \geq 4$

پ) $y = x + \sqrt{1+x^2}$ ج: $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right)$ $x > 0$

ت) $y = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -x^2 & x > 0 \end{cases}$ ج: $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$
(راهنمایی: رسم)

ث) $y = x + 2\sqrt{x}$ ج: $f^{-1}(x) = x - 2\sqrt{x+1} + 2$ $x \geq 0$

خودش ج:

(۲۰۱) وارون تابع $y = \frac{2x+1}{x-2}$ کدماں است؟

ج: دامنه خودش $= R - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$

(۲۰۲) برد تابع $y = \frac{3x+2}{2x-3}$ کدماں است؟

(۲۰۳) معکوس تابع $y = 8x^3 - 12x^2 + 6x$ را بیابید.

ج: $\mathbb{R} - \{-2\}$

(۲۰۴) برد تابع $y = \frac{2x-3}{2-x}$ کدام است؟

ج: $f^{-1}(x) = (x-1)^3$

(۲۰۵) معکوس تابع $y = \sqrt[3]{x} + 1$ کدام است؟

(۲۰۶) ضابطه وارون تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x - 4 & x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

ج: $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ 2x+8 & x < -4 \end{cases}$

(۲۰۷) معکوس تابع $f(x) = x^2 - 4x$ ($x \geq 2$) کدام است؟

ج: $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+4}$ $x \geq -4$

(۲۰۸) ثابت کنید تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 & x \geq 1 \\ 2x - 1 & x < 1 \end{cases}$ یک به یک است. معکوس f کدام است؟

ج: $f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x-2 & x \geq \frac{3}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2} & x < 1 \end{cases}$

(۲۰۹) معکوس تابع $y = 2 + \sqrt[3]{x}$ کدام است؟

(۲۱۰) ضابطه وارون تابع $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ کدام است؟

(۲۱۱) معکوس تابع $f(x) = (x^2 - 1)^2$ برای $x \geq 2$ کدام است؟

(۲۱۲) معکوس نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -1 & x > 1 \\ -2x + 1 & x \leq 1 \end{cases}$ از کدام ربع نمی گذرد؟ ربع سوم: ج

(۲۱۳) اگر $f = \{(-1, 2), (3, 1), (4, -2)\}$, $g = \{(-1, 2), (3, 1), (4, -2)\}$ باشد. مقدار $f^{-1}(g^{-1}(2))$ کدام است؟ ج: ۳

(۲۱۴) تابع $f(x) = x^2 - 5x + 3$ در کدام محدوده ها وارون پذیر است؟ $x \geq \frac{5}{2}, x \leq \frac{5}{2}$ ج

(۲۱۵) دامنه ی تابع $f(x) = x^2 + 2x$ را به بازه ی $(-\infty, a)$ محدود کرده ایم تا وارون پذیر شود. حداکثر مقدار a کدام است؟ ج: -۱

(۲۱۶) اگر $f(x) = x^2 + 6x + 3$ با دامنه ی $[-3, +\infty)$ باشد. دامنه ی تابع f^{-1} را بیابید.

(۲۱۷) معکوس تابع $f(x) = \sqrt{x} + 2$ و تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ را بیابید. دامنه و برد تابع معکوس آنها را بنویسید.

(۲۱۸) در چه حالتی از a, b, c معکوس تابع $f(x) = \frac{x-a}{bx-c}$ برابر خودش است.

(۲۱۹) الف- ثابت کنید $\begin{cases} f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 + 2x + 2 \end{cases}$ وارون پذیر است و سپس f^{-1} را بیابید.

ب- نشان دهید تابع $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ وارون پذیر است. سپس وارون را بیابید.

$$g_{(x)}^{-1} = x|x|$$

تمرینات موازی از مبحث تابع یک به یک و وارون:

(۲۲۰) مقدار عددی $f^{-1}(3)$ در تابع $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-3}$ کدام است؟

(۲۲۱) مقدار عددی $f^{-1}(1)$ در تابع $f(x) = 3x - 3x^2 + x^3$ کدام است؟

(۲۲۲) به ازای کدام مقدار m نمودار معکوس تابع $y = \frac{1-2x}{3x+4}$ از نقطه $\binom{m+4}{m}$ می گذرد؟

(۲۲۳) وارون تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ \frac{1}{x} + 1 & x < 0 \end{cases}$ را بیابید. پاسخ کامل:

ابتدا برد دو ضابطه را با توجه به دامنه پیدا می کنیم، بدین ترتیب:

$$\begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \rightarrow R_f = [1, +\infty) \rightarrow D_{f^{-1}} = [1, +\infty) \\ \frac{1}{x} + 1 & x < 0 \rightarrow R_f = (-\infty, 1) \rightarrow D_{f^{-1}} = (-\infty, 1) \end{cases}$$

حال معکوس هر ضابطه را پیدا می کنیم، بدین گونه:

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \rightarrow x = y^2 + 1 \rightarrow y^2 = x - 1 \xrightarrow{y \in [1, +\infty)} y = +\sqrt{x-1} \\ y = \frac{1}{x} + 1 \rightarrow x = \frac{1}{y} + 1 \rightarrow \frac{1}{y} = x - 1 \rightarrow y = \frac{1}{x-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ \frac{1}{x-1} & x < 1 \end{cases}$$

(۲۲۴) وارون تابع $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$ با دامنه $(-\infty, 0]$ کدام است؟

$$\text{ج: } f^{-1}(x) = \frac{x^2}{2x-1}$$

(۲۲۵) وارون تابع $f(x) = x + \frac{1}{x}$ را بدست آورید. پاسخ کامل:

$$y = x + \frac{1}{x} \rightarrow x = y + \frac{1}{y} \rightarrow x = \frac{y^2 + 1}{y} \rightarrow y^2 - xy + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta} y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4}}{2}$$

حال باید بررسی کنیم که کدام ضابطه قابل قبول است. می دانیم $f(2) = \frac{5}{2}$ پس از $f^{-1} = \frac{5}{2}$ باید برابر ۲ شود.

$$f^{-1}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} \rightarrow f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = 2 \rightarrow \text{ق ق}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2} \rightarrow f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow \text{غ ق ق}$$

(۲۲۶) وارون تابع $y = x + \sqrt{x}$ کدام است؟ پاسخ کامل:

$$D_f = [0, +\infty) \Rightarrow R_{f^{-1}} = [0, +\infty)$$

$$y = x + \sqrt{x} \rightarrow x = y + \sqrt{y} \rightarrow x = \left(\sqrt{y} + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} \rightarrow x + \frac{1}{4} = \left(\sqrt{y} + \frac{1}{4}\right)^2$$

$$\rightarrow \sqrt{y} + \frac{1}{4} = \sqrt{x + \frac{1}{4}} \rightarrow \sqrt{y} = -\frac{1}{4} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} \rightarrow y = \left(-\frac{1}{4} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}\right)^2 \rightarrow f^{-1}(x) = \left(-\frac{1}{4} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}\right)^2$$

(۲۲۷) ثابت کنید تابع $f(x) = -|x + 1| + 1$ ($x \geq 1$) وارون پذیر است و سپس f^{-1} را بدست آورید.

$$\text{ج: } f^{-1}(x) = -x + 2$$

(۲۲۸) وارون تابع $y = x^2 - 2x$ کدام است؟

$$\text{ج: } f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1 + x}$$

(۲۲۹) وارون تابع $y = \frac{1}{x^2 - 2x}$ کدام است؟

$$\text{ج: } f^{-1}(x) = 1 + \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x}$$

(۲۳۰) به ازای چه مقادیری از m تابع $f(x) = -2x^2 + mx + 3$ روی بازه $(1, +\infty)$ یک به یک است؟

$$\text{ج: } m < 4$$

(۲۳۱) کدام تابع زیر وارون پذیر است؟

الف) $y = \frac{|x| - 2}{|x| + 2}$

ب) $y = x - \sqrt[3]{x}$

پ) $y = \begin{cases} -3x + 6 & x < 2 \\ -2x & x \geq 2 \end{cases}$

(۲۳۲) کمترین مقدار طبیعی a برای آنکه $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x \leq 2 \\ x + 2a & x > 2 \end{cases}$ یک به یک باشد. چقدر است؟

(۲۳۳) تابع f بصورت $f(x) = x^3 + x - 8$ در کدام نقطه با f^{-1} تلاقی می کند؟ ج: (۲)

(۲۳۴) در تابع $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ مقدار $f^{-1}(2)$ کدام است؟ ج: -۲

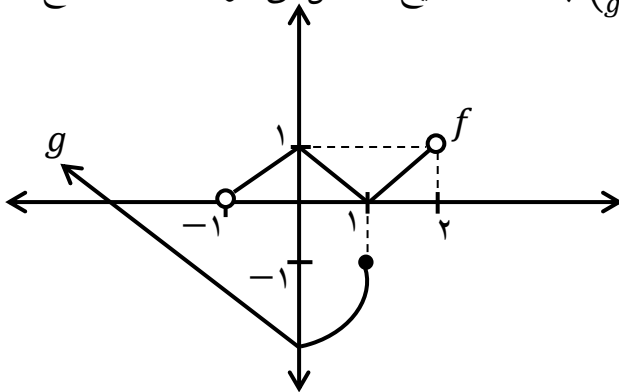
(۲۳۵) اگر تابع $f(x) = x^7 + x - 1$ و معکوس خود را در نقطه A قطع کند. فاصله A از مبدا مختصات کدام است؟ ج: $\sqrt{2}$

(۲۳۶) اگر تابع معکوس $f(x) = \frac{mx}{\sqrt{1+x^2}}$ از نقطه $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$ بگذرد. m کدام است؟ ج: ۱

اعمال جبری روی توابع :

(۲۳۷) اگر $f = \{(-1, 1), (1, 3), (2, -1), (0, 3)\}$ و $g = \{(0, 1), (-1, 1), (3, 3), (2, 5)\}$ باشند. توابع $f \times g$ و توابع $2f, \frac{f}{3f+g}$ را تشکیل دهید.

(۲۳۸) اگر نمودار تابع f, g بصورت روبرو باشد. دامنه ی $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ چند عدد صحیح را شامل می شود؟
ج: ۲



(۲۴۰) اگر $f = \{(-1, 2), (1, 5), (3, -1), (0, 3)\}$ و $g^{-1} = \{(5, -2), (2, 3), (7, 4), (2, 0), (0, -1)\}$ تابع $\frac{f}{g}$ را نمایش دهید.

ج: $\frac{f}{g} = \left\{\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{2}{3}\right)\right\}$

(۲۴۱) تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ مفروض است.
الف) نمودار f را رسم کنید.

ب) نمودار f^{-1} را رسم کنید.

پ) ضابطه تابع $\frac{f}{f}$ کدام است؟

ت) دامنه تابع $\frac{f}{f}$ کدام است؟

(۲۴۲) توابع $f(x) = -|x|$, $g(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$ مفروضند. الف) نمودار f, g را در یک دستگاه رسم کنید.

ب) نمودار $f + g$ را رسم کنید.

(۲۴۳) تابع $f(x) = \sqrt{1 - x}$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$ مفروضند. الف) دامنه $f \times g$ کدام است؟

ب) ضابطه $\frac{g}{f}$ کدام است؟

(۲۴۴) اگر تابع $\frac{f}{g} = \{(-2, 2)\}$, $f = \{(-2, 1), (14, 1), (7, 9)\}$ و $g = \{(-2, m), (4, 3), (7, n + 1)\}$ باشند. مقدار $n + m$ کدام است؟

(۲۴۵) اگر $g = \{(-1, 2), (2, 5), (-5, 0)\}$ باشد. دامنه ی توابع $|g|$, $2g^2$ کدامند؟

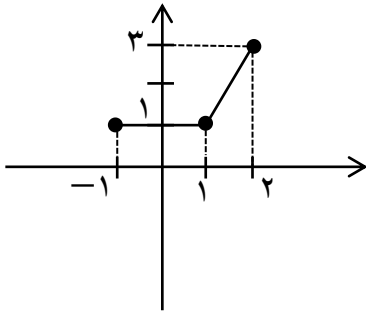
(۲۴۶) اگر $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \notin Z \\ \frac{x}{2} + 1 & x \in Z \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \notin Q \\ 3x + 2 & x \in Q \end{cases}$ باشند. مقادیر زیر را بیابید.

الف) $g(f(\frac{1}{\sqrt{2}})) =$

ب) $g(g(-\frac{2}{3})) + f(f(\frac{1}{4})) =$

(۲۴۷) اگر $f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{|x| - x}$, $g(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x + 1}}$ باشند دامنه ی تابع $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$ را بیابید.

(۲۴۸) با توجه به نمودار تابع f نمودار تابع $-2f(x)$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد تابع $2f$ را بنویسید.



(۲۴۹) اگر $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, $g = \{(2,1), (-3,6), (-1,4), (0,7)\}$ باشند.

الف) دامنه تابع $g - f$ کدام است؟

ب) تابع $f \times g$ را تشکیل دهید.

ت) بیشترین مقدار $2g \times (g - f)$ کدام است؟

(۲۵۰) اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+9}}$, $g = \{(3,1), (0,1), (4,0), (1,-1)\}$ باشند. تابع $\frac{f}{g}$ چند عضو دارد؟ بیشترین مقدار $\frac{g}{f}$ کدام است؟

(۲۵۱) اگر $f(x) = \sqrt{x} + x$, $g = \{(6,5), (1,2), (5,4), (2,3)\}$, $g(f(m)) = 5$ باشند. مقدار m کدام است؟

(۲۵۲) اگر دامنه ی تابع $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 1 \\ x^3 + a & x \leq a + 2 \end{cases}$ برابر R باشد.
الف) آیا g یک به یک است؟

ب) مقدار $g(-2)$ کدام است؟
ج) بله: ج , $g(-2) = -9$

(۲۵۳) اگر $f = \{(1,2), (0,5), (2,0), (-1,1)\}$ ، $g(x) = \frac{1}{x-1}$ باشند.

الف) دامنه تابع $f \times g$ کدام است؟

ب) تابع $\frac{g}{f}$ را تشکیل دهید.

پ) مقدار $f(g(2))$ کدام است؟

(۲۵۴) اگر $f = \{(1,1), (2,0), (-3,-6)\}$ ، $g = \{(x, 2x) | x \in \mathbb{Z} \quad x < 3\}$ باشند. ضابطه $\frac{g}{f}$ کدام است؟

(۲۵۵) اگر $f(x) = 2$ ، $g(x) = x^2 + 2$ باشند. تابع $f - g$ را تشکیل دهید و سپس نمودار g, f و $f - g$ را در یک دستگاه رسم کنید.

(۲۵۶) اگر $f = \{(0,1), (-2,0), (1,2), (4, \sqrt{2})\}$ ، $g(x) = x$ ، تابع $\frac{f}{g}$ را تشکیل دهید.

(۲۵۷) اگر $f(x) = \sqrt{2 - |x - 3|}$ ، $g(x) = \{(1,2), (-1,0), (0,3)\}$ باشند، تابع $f \times g$ را تشکیل دهید.

(۲۵۸) اگر $f = \{(1,0), (-2,4), (2,3)\}$ باشد. تابع $\frac{1}{f}$ کدام است؟

ج: $\left\{ \left(-2, \frac{1}{4}\right), \left(2, \frac{1}{3}\right) \right\}$

(۲۶۰) اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3}$ ، $g(x) = \frac{2x-6}{\sqrt{x-2}}$ باشند. نمودار $g \times f$ را رسم کنید.

تابع پله ای و جزء صحیح :

هر تابعی که بتوان دامنه آن را به تعدادی بازه تقسیم بندی کرد که تابع روی هر کدام از این بازه ها تابع ثابت باشد، یک تابع پله ای می نامند. گونه خاصی از تابع پله ای تابع جزء صحیح است.

(۲۶۱) پارکینگ یک مجموعه ورزشی برای سه ساعت اول ۲ هزار تومان و برای هر ساعت اضافه یا بازه زمانی کمتر از یک ساعت ۵۰۰ تومان دریافت می کند. اگر حداکثر زمان توقف در این پارکینگ ۵ ساعت باشد. نمودار تابعی که نرخ توقف را به ازای همه ساعات ممکن نشان می دهد رسم کنید.
دامنه و برد تابع کدامند؟

(۲۶۲) یک شرکت پستی برای ارسال بسته های تا کمتر از $1kg$ مبلغ ۲ هزار تومان و برای ارسال بسته های از ۱ تا $2kg$ مبلغ ۴ هزار تومان و از ۲ تا کمتر از $3kg$ مبلغ ۶ هزار تومان و برای بسته های بیشتر نیز به همین ترتیب دریافت می کند. اگر $f(x)$ هزینه ارسال یک بسته x کیلوگرمی باشد. نمودار آن را رسم کنید.

(۲۶۳) آیا تابع $f(x) = [x]$ یک به یک است؟

(۲۶۴) نمودار توابع زیر را در بازه $(-2, 2]$ رسم کنید.

الف) $y = [x - 1]$

ب) $y = [x] - 1$

نکته : $[ax \pm b] = [ax] \pm b$ به شرط آنکه $b \in \mathbb{Z}$ باشد.

نکته : در تابع $y = [ax]$ طول هر پله برابر $\frac{1}{|a|}$ است.

نکته : در تابع $y = [ax]$ اگر $a > 0$ باشد، نمودار به حالت پله های بالا رونده و اگر $a < 0$ باشند نمودار بصورت پله های پایین رونده است، و ارتفاع پله ها ۱ واحد است.

(۲۶۵) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = \left[\frac{x}{2}\right]$

$D = [-2, 2)$

ب) $y = [2x]$ $D = [-1, 1)$

پ) $y = [-2x]$ $D = [-1, 1)$

ت) $y = -[2x]$ $D = [-1, 1)$

ث) $y = |[2x]|$ $D = [-1, 1)$

ج) $y = [2|x|]$ $D = [-1, 1)$

الف) $y = x[x]$ $D = [-2, 2)$

ب) $y = [x] + [-x]$ $D = [-2, 2)$

(تابع عینکی)

(۲۶۶) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

(۲۶۷) ثابت کنید توابع زیر پله ای هستند.

الف) $y = \frac{x}{|x|}$

ب) $y = \frac{x+2}{|x+2|} + \frac{|x-1|}{x-1}$

(۲۶۸) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = x - [x]$ $D = [-2, 2)$
(تابع خارخاسکی)

ب) $y = |x| + [x]$ $D = [-2, 2)$

پ) $y = -[-x]$ $D = [-2, 2)$

ت) $y = x[x^2]$ $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

رسم نمودار جزء صحیح توابع:

برای رسم نمودار توابع بصورت $y = [f(x)]$ مراحل زیر را انجام می دهیم:

- ۱- ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم می کنیم.
- ۲- تمام خطوط $y = a$ که $a \in \mathbb{Z}$ باشد را رسم می کنیم.
- ۳- محل تلاقی خطوط و تابع f را توپر می کنیم.
- ۴- قسمت هایی از نمودار که بین دو خط $y = a$ و $y = a + 1$ است را بر روی خط افقی پایین تر تصویر می کنیم.

(۲۶۹) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = [x^2]$ $D = [-1, 1]$

ب) $y = [-x^2 + 1]$ $D = [-1, 2]$

پ) $y = [\sin x]$ $D = [0, 2\pi]$

(۲۷۰) نمودار تابع $y = [x^2]$ روی بازه $(-2, 2)$ از چند پاره خط تشکیل شده است؟

(۲۷۱) نمودار تابع $y = \frac{x+1}{[x]}$ را در بازه $(1, 4)$ رسم کنید.

(۲۷۲) مساحت محدود به نمودار تابع $y = x - [x]$ و محور x ها در بازه $(0, 4)$ چقدر است؟

(۲۷۳) اگر $f(x) = [x]$ باشد، مجموعه مقادیر $f(x - f(x))$ کدام است؟ ج: $\{0, 1\}$

(۲۷۴) طول هر پله در تابع پله ای $f(x) = [-3x]$ چقدر است؟

(۲۷۵) نمودار تابع $y = 2\left[\frac{x}{2}\right] + 1$ روی بازه $[-2, 6]$ از چند پاره خط مساوی هم تشکیل شده است؟

(۲۷۶) معادلات زیر را حل کنید.

الف) $[4x^2 - 4x] = 0$

ب) $[2(x + 3)] = -1$

پ) $\left[\frac{1}{x-2}\right] = -1$

ت) $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = \frac{5}{2}$

ث) $[1 - 2x] = -2$

(۲۷۷) معادلات زیر را حل نمایید.

الف) $2[3x - 1] = -3$

ب) $\left[\frac{x}{x+1}\right] = 1$

(۲۷۸) به ازای چه مقدار x روابط زیر برقرار است؟

الف) $\sqrt{x-1} + [x] = 0$

ب) $[2x] + \left[2x + \frac{1}{3}\right] = \frac{4}{3}$

(۲۷۹) دو تابع $f(x) = [x] + [-x]$ ، $g(x) = x^2 + x - 2$ مفروض است، حاصل $g(f(x))$ کدام است؟ -2 ج:

(۲۸۰) حاصل $[(1 + \sqrt{2})^4]$ کدام است؟

(۲۸۱) اگر $x = -\frac{1}{4}$ باشد. مقدار $[x] + [x^2] + [x^3] + \dots + [x^{50}]$ چقدر است؟

(۲۸۲) حاصل $\left[\frac{1}{25}\right] + \left[\frac{2}{25}\right] + \left[\frac{3}{25}\right] + \dots + \left[\frac{100}{25}\right]$ کدام است؟

(۲۸۳) اگر $|x + 2| \leq 3$ باشد، حدود $[3 - 2x]$ کدام است؟

(۲۸۴) اگر $x + x^2 < 0$ باشد. حدود $[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4]$ کدام است؟

(۲۸۵) حاصل $[\sin 1^\circ] + [\sin 2^\circ] + [\sin 3^\circ] + \dots + [\sin 360^\circ]$ کدام است؟

(۲۸۶) اگر $f(x) = [x]$ ، $g(x) = \frac{x}{1-x}$ باشد. مقدار $f(g(\sqrt{2}))$ کدام است؟

(۲۸۷) اگر $f(x) = x^2 - 2[x]$ باشد. مقدار $f(-\frac{1}{4}f(\sqrt{3}))$ کدام است؟

(۲۸۷) اگر عبارت $1 \leq \left| \frac{2x-1}{x+1} \right|$ باشد. عبارت $[-x]$ چند مقدار مختلف دارد؟

(۲۸۹) اگر $[x^2 + x] = -1$ باشد. مقدار $[x^{20}]$ کدام است؟

(۲۹۰) اگر $0 = [x^2 + x + 1]$ باشد مقادیر $[2x - 1]$ را بیابید.

(۲۹۱) اگر $4 = [x + 1]^2 + 3[x + 1]$ باشد. مقادیر x کدامند؟

(۲۹۲) مقدار $\left[\frac{a^2}{1+a^2} \right]$ کدام است؟

(۲۹۳) مقدار $[\cos 155^\circ] + [\sin 15^\circ]$ کدام است؟

(۲۹۴) مقدار $[(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{20}]$ کدام است؟

(۲۹۵) دامنه توابع زیر را بدست آورید.

الف) $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{[x]}$

ب) $y = \frac{\sqrt{x+1}}{2[x] - 4}$

(۲۹۶) در دامنه تابع روبرو چند عدد صحیح قرار نمی گیرند؟

$$f(x) = \frac{2x^3 - 1}{2\left[\frac{x}{3}\right] - 1}$$

(۲۹۷) اگر $a = 1 - \sqrt{2}$ باشد. حاصل $[\sqrt{(a-2)^2}]$ کدام است؟

نکته: اگر $n \in \mathbb{Z}$ باشد داریم:

- ۱) $[u] = n \Rightarrow n \leq u < n+1$
- ۲) $[u] \geq n \Rightarrow u \geq n$
- ۳) $[u] > n \Rightarrow [u] \geq n+1 \Rightarrow u \geq n+1$
- ۴) $[u] \leq n \Rightarrow u < n+1$
- ۵) $[u] < n \Rightarrow [u] \leq -1 \Rightarrow u < n$

نکته:

$$[u] + [-u] = \begin{cases} 0 & u \in \mathbb{Z} \\ -1 & u \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

(۲۹۸) حاصل $[x] + [-x]$ به ازای $x = \frac{\sqrt{80}}{9}$ چقدر است؟

ج: ۹، ۴، ۱

(۲۹۹) به ازای چند عدد طبیعی $x \in (0, 10)$ حاصل $[\sqrt{x}] + [-\sqrt{x}]$ برابر صفر می شود؟

(۳۰۰) معادله $2 \leq [2x - 3]$ را حل نمایید.

۳۰۱ دامنه توابع زیر را بدست آورید.

ج: $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

الف) $f(x) = \sqrt{1 - [x^2]}$

ج: $(-3, 1)$

ب) $f(x) = \sqrt{2 - [x^2 + 2x]}$

ج: $\mathbb{R}$

پ) $f(x) = \sqrt{([x] - 1)([x] - \sqrt{2})}$

۳۰۲ اگر $1 \leq [x - 1]$ حدود x کدام است؟

۳۰۳ دامنه توابع زیر را بدست آورید.

الف) $y = \frac{1}{x - [x]}$

ب) $y = \frac{1}{\sqrt{[x] + [-x]}}$

پ) $y = \sqrt{[x] + 3}$

۳۰۴ آیا دو توابع $f(x) = \left[\frac{x^2}{1+x^2} \right]$ و $g(x) = 0$ مساوی اند؟