

# فصل سوم:

## تابع

مدرس:

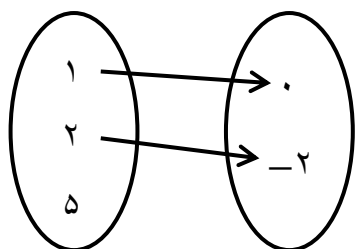
طیه آذرشین

## تابع و مروری برگشت:

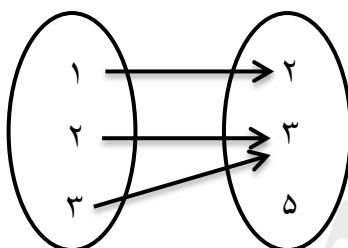
تابع مجموعه ای زوج های مرتب می باشد که پنج ویژگی از آن دارای مؤلفه های اول یکسان نیستند. اگر مؤلفه های اول برابر باشند، مؤلفه دوم نیز باید برابر باشند. (به هر عضو دامنه، عضو منحصر بفردی از برد نسبت داده می شود.)

تابع با هر کدام از صورت های زیر ظاهر می شود:

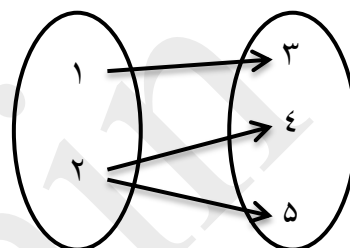
بصورت نمودار پیکانی: در این حالت وقتی تابع است که از هر عضو دامنه دقیقاً یک پیکان خارج شود.



تابع نیست



تابع است



تابع نیست

|     |   |   |    |   |
|-----|---|---|----|---|
| $x$ | 2 | 3 | -2 | 1 |
| $y$ | 4 | 3 | 4  | 5 |

تابع است

|            |     |
|------------|-----|
| $x$        | $y$ |
| 3          | -2  |
| $\sqrt{9}$ | 5   |
| 0          | 1   |

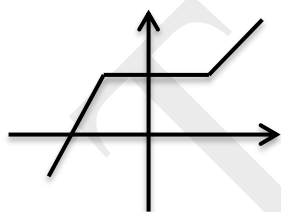
تابع نیست

|     |            |   |    |   |
|-----|------------|---|----|---|
| $x$ | $\sqrt{4}$ | 2 | 5  | 3 |
| $y$ | 3          | 3 | 13 | 0 |

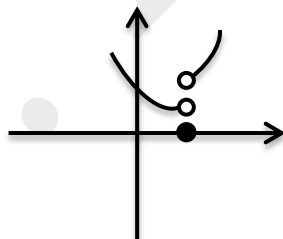
تابع است

بصورت جدولی:

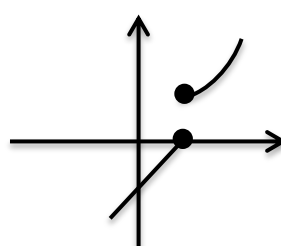
بصورت نمودار مختصاتی: یک نمودار وقتی تابع است که هر خطی موازی محور  $y$  با آن را در حداکثر یک نقطه قطع کند.



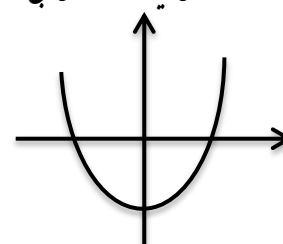
تابع است



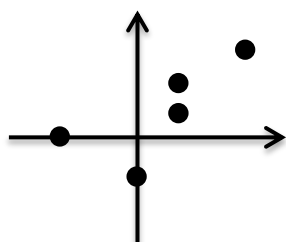
تابع است



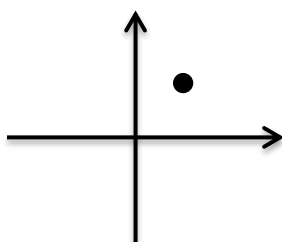
تابع نیست



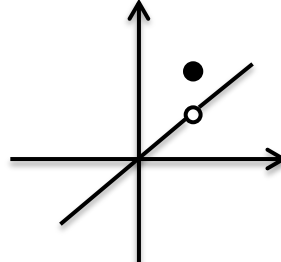
تابع است



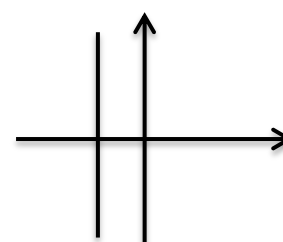
تابع نیست



تابع است



تابع است



تابع نیست

## بصورت ضابطه:

رابطه ی  $y = f(x)$  وقتی ضابطه یک تابع است که به ازای هر عددی که به  $x$  بدیم حداکثر یک جواب برای  $y$  بدست آید.

نکته: یک رابطه ی چند ضابطه ای در صورتی تابع است که دامنه ضابطه ها اشتراکی نداشته باشند و هر کدام از ضابطه ها دامنه خود تابع باشند. (در صورت وجود اشتراک، مقدار تابع در آن نقاط اشتراک برابر باشد).

نکته: هسی تابع است.

## نمونه ملی از تابع:

تابع چند ضابطه ای، تابع چند جمله ای، تابع خاص چند جمله ای (تابع ثابت، تابع بانی، تابع خطی)، تابع قدر مطلق، تابع کویا (کسری)، تابع رادیکالی، تابع جزء صحیح، تابع مثلثاتی، تابع لگاریتمی و....

## دامنه برخی توابع:

نکته: دامنه تابع قبل از ساده کردن محاسبه می گردد. همچنین برد یک تابع با توجه به دامنه آن بررسی می شود.

$$۱) f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a.$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad \text{صورت کلی تابع چند جمله ای}$$

(بطور کلی هر رابطه به شکل یک چند جمله ای را تابع چند جمله ای می نامیم).

(برد تابع چند جمله ای درجه فرد برابر  $\mathbb{R}$  است).

$$f(x) = x \quad (\text{تابع بانی}) \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = a. \quad (\text{عدد ثابت}) \quad (\text{تابع ثابت}) \quad D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \{a\}$$

$$۲) f = \text{مجموعه ی مؤلفه های دوم} \quad R_f = \text{مجموعه ی مؤلفه های اول} \quad D_f = \text{مجموعه ای از زوج مرتب ها با شرایط تابع}$$

نکته: اگر نمودار تابع را داشته باشیم، به تصویر تمام نقاط روی محور  $x$  دامنه تابع و به تصویر همه نقاط نمودار روی محور  $y$  برد تابع می گوئیم.

$$۳) f(x) = \text{تابعی چند ضابطه ای}$$

$$D_f = (\text{اجتماع محدوده های ارائه شده برای } x)$$

$$R_f = \text{برد تابع چند ضابطه ای با توجه به دامنه آن بررسی می شود}$$

$$۴) f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \quad D_f = \mathbb{R}$$

(تابع قدر مطلق)

$$۵) f(x) = \frac{P(x)}{q(x)} \quad \text{عدد ثابت } q(x) \neq 0 \quad P(x), q(x) \text{ دو چند جمله ای اند.}$$

(تابع کویا)

$$D_f = \mathbb{R} - \{\text{جوابهای صفر کننده مخرج}\}$$

توابع رادیکالی (ع)  $y = \sqrt[n+1]{f(x)}$  (فرجه فرد)  $D = D_f$

$y = \sqrt[n]{f(x)}$  (فرجه زوج)  $f(x) \geq 0 \rightarrow$  بدست آوردن دامنه  $D =$  جواب نا معادله  $\rightarrow$

۷) دامنه‌ی توابع  $|f|$ ,  $kf$ ,  $f^n$ ,  $\sqrt[n+1]{f}$  همان دامنه‌ی تابع  $f$  می‌باشد.

۸)  $y = \sqrt[n]{\frac{f}{g}}$  دامنه  $=$  جواب این نا معادله  $\rightarrow \frac{f}{g} \geq 0$  : روش بدست آوردن دامنه

۹)  $y = \frac{\sqrt[n]{f}}{g}$   $\{x | g(x) = 0\}$  - جواب نا معادله  $=$  دامنه  $\rightarrow f \geq 0$  : روش بدست آوردن دامنه

۱۰)  $y = \frac{f}{\sqrt[n]{g}}$  جواب این نا معادله  $=$  دامنه  $\rightarrow g > 0$  : روش بدست آوردن دامنه

۱۱)  $y = \frac{\sqrt[n]{f}}{\sqrt[n]{g}}$  اشتراک جواب های دو نا معادله  $=$  دامنه  $\rightarrow f \geq 0, g > 0$  : روش بدست آوردن دامنه

نکته: در موارد بالا اگر فرجه رادیکال فرد باشد، با حذف رادیکال فرجه فرد، دامنه برابر دامنه‌ی باقیمانده عبارت می‌باشد.

۱۲) دامنه‌ی توابع بصورت  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \times g$  برابر  $D_f \cap D_g$  است.

۱۳) دامنه‌ی توابع بصورت  $\frac{f}{g}$  برابر  $\{x | g(x) \neq 0\} \cap D_f$  است.

۱۴) دامنه تابع مثلثاتی  $y = \sin(f(x))$ ,  $y = \cos(f(x))$  و دامنه تابع  $|f(x)|$  و  $[f(x)]$  و دامنه‌ی تابع نمایی  $a^{f(x)}$  که  $a \neq 0$  باشد، برابر دامنه تابع  $f$  است.

۱۵) دامنه تابع مثلثاتی بصورت  $y = \tan(f(x))$  برابر  $\{x \in D_f | f(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\}$  است.

۱۶) دامنه تابع مثلثاتی بصورت  $y = \cot(f(x))$  برابر  $\{x \in D_f | f(x) \neq k\pi\}$  است.

۱۷) دامنه توابع لگاریتمی بصورت  $y = \log_{g(x)} f(x)$  برابر اشتراک دو نا معادله‌ی  $f(x) > 0$ ,  $g(x) > 0$  و شرط  $g(x) \neq 1$  می‌باشد.

### تمرینات:

۱) مقادیر صحیح  $a, b$  در تابع  $f = \{(1, 3), (2, 2), (1, a - 2b), (2, a^2 - b)\}$  کدامند؟  $a = 1$ ,  $b = -1$  ج:

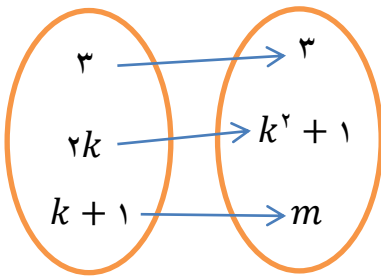
۳ - و ۲ ج:

۲) اگر دو زوج مرتب  $(13, xy)$ ,  $(-6, x^2 + y^2)$  برابر باشد. مقدار  $x, y$  کدامند؟

۳) اگر  $g = \{(2, 4), (3, -1), (5, -1), (2, a^2 + 3a)\}$  تابع باشد. مقدار  $a$  کدام است؟  $-4, 1$ : ج

۴) اگر  $g$  بصورت روبرو تابع همانی باشد. مقدار  $k, m$  کدامند؟

ج: ۱, ۲



۵) مقدار  $a, b$  را طوری بدست آورید که رابطه  $f$  بصورت زیر تابع باشد.

$$f = \left\{ (a^2 + a, 1), (0, b + 4), (1, a^2 + 2b), (0, a^2 + b), \left( \frac{2-a}{4}, a-b \right) \right\}$$

ج:  $a = 2, b = -1$        $a = -2, b = -2$

۶) کدامیک از رابطه های زیر می تواند ضابطه یک تابع باشد؟

الف)  $x^2 + 4y^2 = 1$       ×

ب)  $\sqrt{x-1} + |y^2 - 1| = 0$       ×

پ)  $2x^2 + (y-1)^2 = 0$       ✓

ت)  $2^{x+y} = 1$       ✓

ث)  $1^{x+3} = 1$       ×

ج)  $|x+2| + |y-3| = 2$       ×

چ)  $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x}$  ✓

ح)  $y^3 + x^3y = 0$  ✓

خ)  $y = 2x + x^2$  ✓

د)  $xy = 2x^2 - 1$  ✓

ذ)  $y = \begin{cases} 2x^2 - 1 & x \geq 1 \\ |x - 2| & x \leq 1 \end{cases}$  ✓

ر)  $y^2 + x^2 - 6y + 9 = 0$  ✓

ز)  $x + x^2 = |y| + 1$  ×

ژ)  $(-1)^{xy+3} = 1$  ×

س)  $x^2 + y^2 - 2x = -1$  ✓

ش)  $xy - 1 = 0$  ✓

ص)  $x^2 + xy = 0$  ×

ض)  $xy = 0$  ×

ط)  $y = \sqrt{x} \pm \sqrt{x+1}$  ×

ظ)  $y = \begin{cases} 2x - 1 & x > 2 \\ x^2 + 3 & x < 3 \end{cases}$  ×

ک)  $x^2 - 2x + 1 = 0$  ×

گ)  $y^2 + 4y + 4 = 0$  ✓

ج)  $y^2 + 2y - xy = x$  ×

(۷) دامنه توابع زیر را بیابید.

الف)  $f(x) = -2x^3 + x^2 - x + 7$  ج:  $\mathbb{R}$

ب)  $g(x) = -3$  ج:  $\mathbb{R}$

پ)  $y = \frac{x+1}{x+1}$  ج:  $\mathbb{R} - \{-1\}$

ت)  $y = \frac{|x|}{x}$  ج:  $\mathbb{R} - \{0\}$

ث)  $y = \frac{x^2 - 2x}{|x| - x}$  ج:  $(-\infty, 0)$

ج)  $y = \frac{2x + x^2}{|x| + x}$  ج:  $(0, +\infty)$

ح)  $y = \frac{x-1}{|x|-1}$  ج:  $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$

خ)  $y = \frac{x+1}{|x|+1}$  ج:  $\mathbb{R}$

د)  $y = \frac{3x-1}{2x-x^2}$  ج:  $\mathbb{R} - \{0, 2\}$

ذ)  $y = \frac{|x+2|}{x-9x^3}$  ج:  $\mathbb{R} - \left\{0, \pm \frac{1}{3}\right\}$

ر)  $y = \frac{2x}{1+x^3}$  ج:  $\mathbb{R} - \{-1\}$

ز)  $y = \frac{x}{x^6 + 8x}$  ج:  $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$

ژ)  $y = \frac{2x^3 - x}{|x+1| - 2}$  ج:  $\mathbb{R} - \{1, -3\}$

$$y = \frac{x+5}{|x+2|+1} \quad \text{س)$$

ج:  $\mathbb{R}$

$$y = \frac{|x|}{3 - |x|} \quad \text{ش)$$

ج:  $\mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$

$$y = \frac{1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} \quad \text{ص)$$

ج:  $\mathbb{R} \setminus \{2, \pm 1\}$

$$y = \frac{2}{2 + \frac{1}{x}} \quad \text{ض)$$

ج:  $\mathbb{R} \setminus \{2, \pm 1\}$

۸) در دامنه تابع  $f: N \rightarrow N$  که  $f(x) = \frac{2x^2}{x(x+1)}$  است. دامنه کدام است؟  $N$  ج:

۹) دامنه تابع  $f(x) = \frac{a^3 - 3a}{a^2 - 1}$  کدام است؟  $\mathbb{R}$  ج:

۱۰) دامنه ی تابع  $f(x) = \frac{x+3}{x^2 - ax + b}$  برابر  $\mathbb{R} - \{1, -2\}$  است. مقدار  $a, b$  کدامند؟ ج:  $-1, -2$

ج:  $(-4, 4)$

۱۱) اگر دامنه تابع  $f(x) = \frac{1-3x}{x^2 + mx + 4}$  برابر  $\mathbb{R}$  باشد. حدود  $m$  کدام است؟

دامنه ی توابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}} \quad \text{۱۲)$$

ج:  $[-2, 2] - \{0\}$

$$۱۳) g(x) = \sqrt{\frac{|1+x|}{2x^2 - x - 1}}$$

$$\text{ج: } (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$$

$$۱۴) f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 3x + 2}{|2x - 1| - 1}}$$

$$\text{ج: } (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

$$۱۵) f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{5 - x}}$$

$$\text{ج: } [1, 5]$$

$$۱۶) g(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 + x}}$$

$$\text{ج: } [-1, 0]$$

$$۱۷) f(x) = \sqrt{\frac{2 - |x + 2|}{1 + x^2}}$$

$$\text{ج: } [-4, 0]$$

$$۱۸) g(x) = \sqrt{2 - \sqrt{1 - x}}$$

$$\text{ج: } [-3, 1]$$

$$۱۹) f(x) = \sqrt{(x+2)^2(x-3)}$$

$$\text{ج: } [3, +\infty) \cup \{-2\}$$

$$۲۰) g(x) = \frac{3x - 1}{\sqrt{x^4 - 5x^2 + 4}}$$

$$\text{ج: } (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$$

$$۲۱) f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{1 + x - 2x^2}}$$

$$\text{ج: } \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$۲۲) g(x) = \sqrt[4]{\frac{|1 + x|}{2x^2 - x - 1}}$$

$$\text{ج: } (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$$

$$۲۳) f(x) = \sqrt{\frac{-x^2 - x + 2}{|x + 2|}}$$

$$\text{ج: } (-2, 1]$$

$$۲۴) g(x) = \sqrt{1 - |x + 3|} + \sqrt{\frac{3x}{2x^2 + 4x}}$$

$$\text{ج: } D = \emptyset$$

$$۲۵) f(x) = \sqrt{1 - \left|\frac{x + 1}{2x - 1}\right|}$$

$$\text{ج: } (-\infty, -\frac{1}{2})$$

$$۲۶) g(x) = \frac{5x}{\sqrt{|x| - x}} + \sqrt{x + 1}$$

$$\text{ج: } [-1, 0)$$

$$۲۷) f(x) = \sqrt{|x| + x} - \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{ج: } [-1, 1]$$

۲۸) دامنه تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{|x-1|+(x-2)^2}$  کدام است؟ ج:  $[1, +\infty)$

دامنه توابع زیر را بدست آورید.

۲۹)  $g(x) = \sqrt{1+x^2} \times \sqrt{x^2-x^3}$

ج:  $(-\infty, 1]$

۳۰)  $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{3x-2x^2-1}}$

ج:  $(\frac{1}{2}, 1)$

۳۱)  $g(x) = \sqrt{x^2+2x} + \sqrt{\frac{-2x^2}{x^2+2x}}$

ج:  $\emptyset$

۳۲)  $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x+3}}$

ج:  $[-3, -2]$

۳۳)  $g(x) = \sqrt{\frac{1-4x^2}{x^2+x+4}}$

ج:  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

۳۴)  $f(x) = \sqrt[4]{\frac{3x-x^2}{1-x^2}}$

ج:  $(-\infty, -1) \cup [0, 1) \cup [3, +\infty)$

$$۳۵) g(x) = \sqrt[۳]{\frac{۲x-۵}{۲x-۵}} - \sqrt{۶x-۸-x^۲}$$

$$\text{ج: } [۲, ۴] - \left\{\frac{۵}{۲}\right\}$$

$$۳۶) f(x) = \sqrt{۲x^۳ + ۲x}$$

$$\text{ج: } [۰, +\infty)$$

$$۳۷) g(x) = \frac{|x| - ۱}{\sqrt{|x| - ۱}}$$

$$\text{ج: } (-\infty, -۱) \cup (۱, +\infty)$$

$$۳۸) f(x) = \sqrt{\frac{۲|x| - ۳}{|x - ۱|}}$$

$$\text{ج: } (-\infty, -\frac{۳}{۲}] \cup [\frac{۳}{۲}, +\infty) - \{۱\}$$

$$۳۹) g(x) = \sqrt{۱ - \sqrt{\frac{x+۱}{۲}}}$$

$$\text{ج: } [-۱, ۱]$$

$$۴۰) f(x) = \frac{۳x - ۱}{\sqrt{|x| - x}}$$

$$\text{ج: } (-\infty, ۰)$$

$$۴۱) g(x) = \sqrt{۵-x} + \sqrt{x-۵}$$

$$\text{ج: } \{۵\}$$

$$۴۲) f(x) = \sqrt[۳]{\sqrt{\frac{۱}{x^۲} - \frac{۹}{۴}}}$$

$$\text{ج: } \left[-\frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۳}\right] - \{۰\}$$

$$۴۳) g(x) = \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[4]{x-1}$$

$$\text{ج: } [1, +\infty)$$

$$۴۴) f(x) = \sqrt{\frac{3x-2}{x^2-8x+15}}$$

$$\text{ج: } \left[\frac{2}{3}, 3\right) \cup (5, +\infty)$$

$$۴۵) g(x) = x^2 + \frac{|x|}{x} + \sqrt{-x^2}$$

دامنه ی توابع زیر را بدست آورید.

$$۴۶) f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x\sqrt{x+1}}$$

$$۴۷) g(x) = \begin{cases} x^2 & 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x} & x \leq 1 \end{cases}$$

دامنه ی توابع زیر را بدست آورید.

$$۴۸) f(x) = \frac{2x-3}{x^2-4|x|-21}$$

$$\text{ج: } D = \mathbb{R} - \{\pm 7\}$$

$$۴۹) g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^3}}$$

$$\text{ج: } D = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$$

$$۵۰) f(x) = \sqrt{3^x - 4^x}$$

$$\text{ج: } D = (-\infty, 0]$$

$$۵۱) g(x) = \sqrt{|x|(x^2 - 1)}$$

$$ج: D = (-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty)$$

$$۵۲) f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - 16x^2}}$$

$$ج: D = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$$

$$۵۳) g(x) = \frac{x + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{x + |x|}}$$

$$ج: D = (0, 1]$$

$$۵۴) f(x) = \frac{x^{10} + 2}{2 - x^{10}}$$

$$ج: D = \mathbb{R} - \{\sqrt[10]{2}\}$$

$$۵۵) f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}}$$

$$ج: D = [-2, 2]$$

$$۵۶) g(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}}$$

$$ج: D = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$$

$$۵۷) f(x) = \sqrt{3 - ||x + 1| - 2|}$$

$$ج: D = [-6, 4]$$

$$۵۸) g(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x} - 2}$$

$$ج: D = \mathbb{R}^+$$

$$۵۹) f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-1}} + \sqrt[3]{\frac{x+1}{1+x^2}}$$

$$ج: D = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$۶۰) g(x) = \frac{1 + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} - 1}$$

$$ج: D = [1, +\infty) - \{2\}$$

$$۶۱) f(x) = \sqrt{\frac{-x^2 - 2x^2}{(x+1)(x+2)}}$$

$$ج: D = \{0\} \cup (-\infty, -1) - \{-2\}$$

$$۶۲) g(x) = \sqrt{\frac{1 - |x|}{1 + |x|}}$$

$$ج: D = [-1, 1]$$

$$۶۳) f(x) = \frac{\sqrt{x(x^2-1)}}{\sqrt{|x|+x}}$$

$$ج: D = [1, +\infty)$$

$$۶۴) f(x) = \sqrt{\sqrt{x+6} - \sqrt{x+3}}$$

$$ج: D = [-3, +\infty)$$

$$۶۵) f(x) = \sqrt{2x - \sqrt{3+x}}$$

$$ج: D = [1, +\infty) \cup \left[-3, -\frac{3}{4}\right]$$

۶۶) دامنه ی تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x^2-16}$  شامل چند عدد طبیعی است؟  
ج: ۲  $\rightarrow D = [0, 2]$

۶۷) دامنه ی تابع  $g(x) = \frac{1-3x}{\sqrt{2-|x|}}$  چند عدد صحیح را شامل می شود؟  
ج: ۳  $\rightarrow D = (-2, 2)$

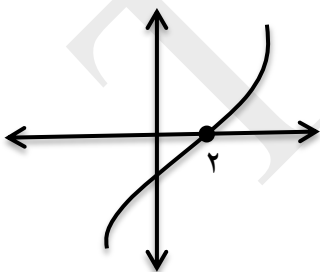
۶۸) دامنه ی تابع  $f(x) = \sqrt{\frac{5-x^2}{x-1}}$  شامل چند عدد طبیعی می باشد؟  
یکی: ج

۶۹) به ازای چه مقدار  $m$  تابع  $f(x) = \sqrt{(m+2)x^2 - 2mx + m - 1}$  دامنه  $f$  برابر  $\mathbb{R}$  است؟  
ج:  $m \in (-\infty, 2]$

۷۰) دامنه ی تابع  $\frac{2y+1}{y-2} = \frac{x+2}{3x-1}$  کدام است؟  
ج:  $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}, \frac{4}{5}\right\}$

۷۱) اگر تابع  $f(x) = \frac{x^3+ax^2+bx+c-2}{x^2-x+1}$  همانی باشد. مقدار  $2a+b-c$  کدام است؟  
ج: -۳

۷۲) اگر  $g(x) = \sqrt{(x^2-4)f(x)}$  باشد. دامنه ی تابع  $g$  کدام است؟  
ج:  $[-2, +\infty]$



۷۳) در دامنه ی تابع  $y = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x^2}}{\frac{1}{2x} - 3}$  چند عدد صحیح وجود ندارد؟  
ج: ۴

A coordinate plane showing the graph of the inequality  $y > x - 1$ . The line  $y = x - 1$  is plotted with a solid line and a solid dot at the point  $(0, -1)$ . The region above the line is shaded, indicating the solution set for the inequality.

$$\begin{array}{ccccccc} |y - 1| + \sqrt[3]{\sqrt{x}} = 5 & , & (-2)^x = 1^{y+1} & , & 2y + x^2 = 2x - 1 & , & y + |y| = x^2 - 1 \\ \checkmark & & \times & & \checkmark & & \times \end{array}$$
$$-\frac{1}{2}, 2: \text{ج}$$

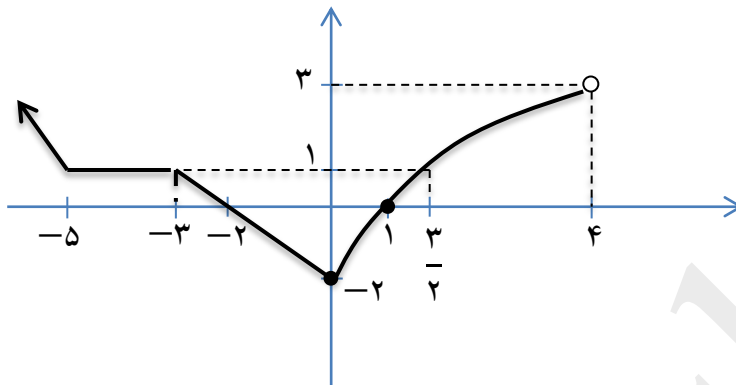
$$f = \left\{ (\mathfrak{r}, \mathfrak{r}), (-\mathfrak{r}, m), (m, -m + \mathfrak{r}), (\mathfrak{r}, m^{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r}), \left( \mathfrak{r}, \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}} m \right) \right\}$$

(۷۹) اگر  $f$  بصورت  $f = \{(-۲, \alpha^۲ - ۳\alpha), (-۳, -۳), (\beta, \alpha - ۱)\}$  تابعی همانی باشد. مقادیر طبیعی  $\beta, \alpha$  کدامند؟  
ج:  $\alpha = ۲, \beta = ۱$

۸۰) اگر  $f$  تابع باشد مقدار  $m$  و  $n$  کدامند؟

$$f = \{(1, m^2 + m), (1, n^2 + n), (m, 1), (-2, n), (1, 2)\}$$

۸۱) با توجه به نمودار تابع  $f$  بصورت زیر دامنه ی توابع را بدست آورید.



الف)  $y = \sqrt{f(x)}$  ج:  $(-\infty, -2] \cup [1, 4)$

ب)  $y = \sqrt{f(x) - 1}$  ج:  $(-\infty, -3] \cup [\frac{3}{2}, 4)$

پ)  $y = \sqrt{\frac{3}{2} - |f(x) + \frac{1}{2}|}$  ج:  $[-5, \frac{3}{2}]$

ت)  $y = \sqrt{\frac{x}{f(x)}}$  ج:  $(-2, 0] \cup (1, 4]$

ث)  $y = \sqrt{-x f(x)}$  ج:  $(-\infty, -2] \cup [0, 1]$

نکته: اگر دامنه ی تابع  $f$  بازه ی  $(a, b]$  باشد، برای بدست آوردن دامنه ی تابع  $f(cx + d)$  کافی است جواب نامعادله ی  $a < cx + d \leq b$  را بدست آوریم.

۸۲) اگر دامنه ی تابع  $f$  بازه ی  $[-1, 2]$  باشد. دامنه ی تابع  $f(\frac{x-2}{3})$  کدام است؟ ج:  $[-1, 8)$

۸۳ الف) اگر دامنه ی تابع  $f$  بازه ی  $(-2, 4)$  باشد. دامنه تابع  $f(2x - 1)$  کدام است؟ ج:  $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$

ب) اگر  $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$  باشد. دامنه تابع  $f(3 - x)$  کدام است؟ ج:  $[1, 3]$

۸۴ اگر دامنه ی تابع  $f$  بازه ی  $[-2, 3]$  باشد. دامنه ی تابع  $y = 2 - 3f(2 - x)$  کدام است؟ ج:  $(-1, 4]$

۸۵ اگر  $D_f = [2, 4]$  و  $D_g = [1, 2]$  باشد. دامنه تابع  $y = g(\frac{x}{2}) + 2f(2x)$  کدام است؟ ج:  $[1, 2)$

۸۶ اگر  $f(x^2 + x) = -x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x$  باشد. آنگاه  $f(x)$  کدام است؟ (راهنمایی: روش قطع گزینه)

۱)  $f(x) = 2x - x^2 + 1$

۲)  $f(x) = 2x + x^2 + 1$

۳)  $f(x) = 2x + x^2$

۴)  $f(x) = 2x - x^2$  ✓

۸۷ اگر تابع  $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$  مقدار  $f(f(-1))$  کدام است؟ تعریف نشده ج:

۸۸ اگر  $f(x) = |x| - x$  باشد. مقدار تابع با ضابطه  $y = f(f(x))$  را بدست آورید.

۸۹ اگر مجموعه  $A$  دارای  $m$  عضو و مجموعه  $B$  دارای  $n$  عضو باشد. چند تابع از  $A$  به  $B$  می توان نوشت؟

۹۰ اگر  $A = \{a, b, c\}$  ,  $B = \{1, 2, 3, 5\}$  باشند. چند تابع از  $A$  به  $B$  می توان نوشت؟

۹۱ اگر  $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1}$  و  $g(x) = k(x - 1)$  و  $f(\sqrt{2k}) + g(-1) = 0$  باشند مقدار  $k$  کدام است؟ ج:  $\frac{1}{2}$

۹۲) در تابع خطی  $f$  که  $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$  و  $f(1+\sqrt{2}) = \sqrt{2}$  باشد. حاصل  $f(\frac{1}{2})$  کدام است؟  
ج:  $-\frac{1}{2}$

۹۳) دامنه تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} + \sqrt{\frac{2-x}{x}}$  کدام است؟ (راهنمایی: روش قطع گزینه)

۱)  $(0, 1)$

۲)  $[1, 2] \checkmark$

۳)  $(0, 2)$

۴)  $(2, 3)$

۹۴) دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{\frac{-1}{x^2 + 2x}}$  کدام است؟ (راهنمایی: روش قطع گزینه)

۱)  $(-2, 0)$

۲)  $\mathbb{R} - [-2, 0]$

۳)  $\emptyset \checkmark$

۴)  $\{0, -2\}$

تساوی دو تابع:

دو تابع  $f$  و  $g$  را مساوی گویند اگر:

$D_f = D_g$  (الف)

ب) برای هر  $x$  در دامنه  $f$  و  $g$  داشته باشیم  $f(x) = g(x)$

سؤال: کدامیک از جفت تابع زیر با هم مساوی اند؟

۹۵)  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

$g(x) = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$

×

۹۶)  $f(x) = \sqrt{-x^2}$

$g(x) = \{(0, 0)\}$

✓

۹۷)  $f(x) = 2$

$g(x) = \frac{2x^2 + 6}{x^2 + 3}$

✓

۹۸)  $f(x) = |x| - 3$

$g(x) = \frac{x^2 - 9}{|x| + 3}$

✓

$$99) f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad g(x) = \tan x \quad \checkmark$$

$$100) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \quad g(x) = x + 2 \quad \times$$

$$101) f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = \sqrt[3]{x^3} \quad \checkmark$$

$$102) f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}, \quad g(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} \quad \times$$

$$103) f(x) = \frac{x+3}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{\frac{x}{x+3}} \quad \times$$

$$104) f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, \quad g(x) = \tan x \cot x \quad \times$$

$$105) f(x) = x\sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt{x^3} \quad \checkmark$$

$$106) f(x) = \sqrt{4-x^2}, \quad g(x) = \sqrt{x+2} \times \sqrt{2-x} \quad \checkmark$$

$$107) f(x) = x + 2, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$108) f(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad g(x) = \sqrt{1 + \tan^2 x} \quad \times$$

(۱۰۹) مقدار  $a$  را طوری بدست آورید که توابع  $f, g$  برابر باشند. ج:  $a = -9$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x + 4} & x \neq -4 \\ a + 1 & x = -4 \end{cases} \quad g(x) = x - 4$$

(۱۱۰) مقدار  $a$  را طوری بدست آورید که دو تابع  $f, g$  مساوی باشند. ج:  $a = 0$

$$f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{2x + 6} & x = 5 \\ \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} & x \neq 5 \end{cases} \quad g(x) = x - 1$$

(۱۱۱) اگر دو تابع  $f, g$  مساوی باشند. مقدار  $m, n$  را بدست آورید. ج:  $-1, 3$

$$f(x) = \begin{cases} 2m - n & x = -4 \\ \frac{x^2 + 3x - 4}{x + 4} & x \neq -4 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} m + n & x = 3 \\ \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & x \neq 3 \end{cases}$$

$$(۱۱۲) \text{ اگر } f(x) = 2x - 1, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 1}{2x + 1} & x \neq -\frac{1}{2} \\ 1 - k & x = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ باشند. } k \text{ را طوری بیابید که به ازای هر } x \text{ دو تابع } f \text{ و } g$$

برابر باشند. ج:  $k = 3$

$$(۱۱۳) \text{ اگر دو تابع } \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} & x \neq a \\ a & x = a \end{cases} \text{ , } g(x) = x - 2b \text{ , } f(x) = x - 2b \text{ با هم برابر باشند. } a + b \text{ کدام است؟ ج: } 3$$

نکته:

رسم توابع چند جمله ای و قدر مطلق و رادیکال معمولاً از روش انتقال و گاهی از روش نقطه یابی انجام می گیرد.

(۱۱۴) تابع  $y = x^2$  ,  $y = |x|$  را در این دامنه ها رسم کنید.

الف)  $D = R - \{0\}$

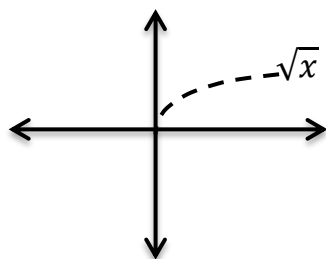
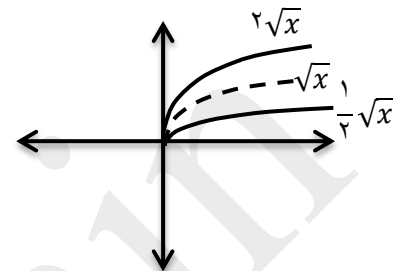
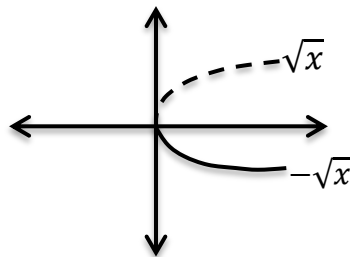
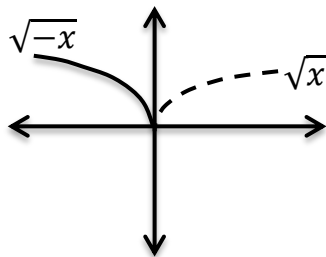
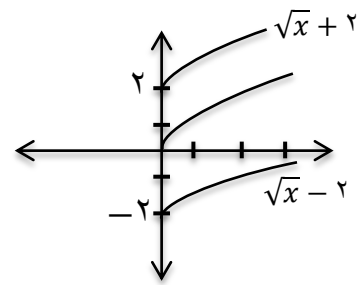
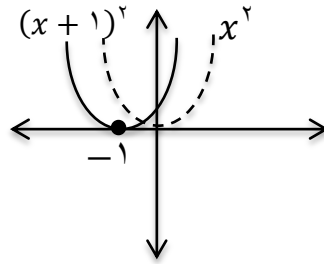
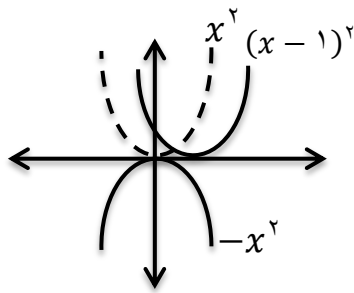
ب)  $D = [-2, 2]$

پ)  $D = (0, +\infty)$

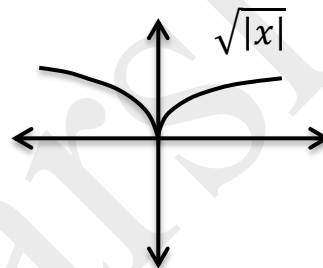
ت)  $D = R - (-1, 1]$

نکاتی در مورد رسم توابع با استفاده از روش انتقال:

- ۱- حرکت از روی نمودار  $f(x)$  خواستیم نمودار  $f(x \pm a)$  را رسم کنیم تابع  $f$  را  $a$  واحد به چپ  $(+)$  و راست  $(-)$  منتقل می کنیم.
- ۲- حرکت از روی نمودار  $f(x)$  خواستیم نمودار  $f(x) \pm a$  را رسم کنیم تابع  $f$  را  $a$  واحد به بالا  $(+)$  و پایین  $(-)$  منتقل می کنیم.
- ۳- حرکت از روی نمودار  $f(x)$  خواستیم نمودار  $-f(x)$  را رسم کنیم تابع  $f$  را نسبت به محور  $x$  باقرینه می کنیم.
- ۴- حرکت از روی نمودار  $f(x)$  خواستیم نمودار  $f(-x)$  را رسم کنیم تابع  $f$  را نسبت به محور  $y$  باقرینه می کنیم.
- ۵- حرکت از روی نمودار  $f(x)$  خواستیم نمودار  $|f(x)|$  را رسم کنیم. جابجایی از نمودار  $f$  که بالای محور  $x$  هست را بدون تغییر نگه داشته اما جابجایی که زیر محور  $x$  هست را نسبت به محور  $x$  باقرینه می کنیم.
- ۶- حرکت از روی نمودار  $f(x)$  خواستیم نمودار  $f(|x|)$  را رسم کنیم، به قسمت یابی از نمودار که جلوی  $(\text{سمت راست})$  محور  $y$  هست کاری نداریم اما قسمتی از نمودار که قبل از محور  $y$  هست  $(\text{سمت چپ})$  را حذف می کنیم و سپس به نمودار باقی مانده، قرینه اش نسبت به محور  $y$  داریم افزایش.
- ۷- برای رسم دو تابع بصورت جمع یا تفریق دو تابع قدر مطلق، ابتدا آنها را بصورت تابع چند ضابطه ای در می آوریم و سپس رسم می کنیم.
- ۸- حرکت از روی نمودار  $f(x)$  خواستیم نمودار  $af(x)$  را رسم کنیم دو حالت بوجود می آید:  
الف) اگر  $a > 1$  باشد نمودار  $f$  را در امتداد محور  $y$  با ضریب  $a$  کشیده می شود.  
ب) اگر  $0 < a < 1$  باشد، نمودار  $f$  را در امتداد محور  $y$  با ضریب  $a$  فشرده تری شود.
- ۹- حرکت از روی نمودار  $f(x)$  خواستیم نمودار  $f(ax)$  را رسم کنیم دو حالت بوجود می آید:  
الف) اگر  $a > 1$  باشد، نمودار  $f$  در امتداد محور  $x$  با ضریب  $\frac{1}{a}$  فشرده می شود.  
ب) اگر  $0 < a < 1$  باشد، نمودار  $f$  در امتداد محور  $x$  با ضریب  $\frac{1}{a}$  کشیده می شود.



→



ج:  $(-6, 0]$

۱۱۵) اگر دامنه ی تابع  $y = -|x + 3|$  برابر  $[-4, 3]$  باشد. برد آن کدام است؟

ج: ۸

۱۱۶) مساحت ناحیه محدود بین توابع  $y = |x| - 4$  ,  $y = -|x|$  کدام است؟

۱۱۷) چه تعداد از گزاره های زیر درست است؟

الف) نمودار تابع  $y = -\frac{1}{x}$  محورهای مختصات را قطع نمی کند.

ب) تابع  $y = -\frac{1}{x}$  و معکوسش نمودار یکسانی دارند.

۱۱۸) اگر  $2 < x < 3$  باشد. نمودار تابع  $y = |x - 2| + |4 - x| + |-2x + 3|$  بر نمودار کدام تابع خطی منطبق است؟

ج:  $y = 2x - 1$

توابع زیر را رسم کنید.

$$۱۱۹) y = \frac{1}{2-x}$$

$$۱۲۰) y = \frac{1}{x+1}$$

$$۱۲۱) y = \frac{1}{x-2}$$

$$۱۲۲) y = \frac{1}{|x|+1}$$

$$۱۲۳) y = \frac{1}{1-|x|}$$

$$۱۲۴) y = |x^2 - 1|$$

$$۱۲۵) y = |\sqrt{x} - 1|$$

$$۱۲۶) y = |-x^2 + 1|$$

$$۱۲۷) y = |x^2 + 2x|$$

$$۱۲۸) y = ||x| - 3|$$

$$۱۲۹) y = ||x| - 1| - 1|$$

$$۱۳۰) y = \left| \frac{1}{2}x + 1 \right|$$

$$۱۳۱) y = |3x - 1|$$

$$۱۳۲) y = |x^2 - 2x|$$

$$۱۳۳) y = 2^{|x|} - 1$$

$$۱۳۴) y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} + 1$$

$$۱۳۵) y = \sqrt{|x|} + 1$$

$$۱۳۶) y = \sqrt{|x| + 1}$$

$$۱۳۷) y = |x + 2| - 1$$

$$۱۳۸) y = 2 - |x - 1|$$

$$۱۳۹) y = 1 - \sqrt{2 - x}$$

$$۱۴۰) y = -\frac{1}{x}$$

$$۱۴۱) y = \sqrt{1 - |x|}$$

$$۱۴۲) y = 1 - \sqrt{|x| + 1}$$

$$۱۴۳) y = x^3 - 1$$

$$۱۴۴) y = (x - 1)^3$$

$$۱۴۵) y = (|x| - 1)^2$$

$$۱۴۶) y = \frac{1}{|x|}$$

$$۱۴۷) y = -\frac{1}{|x|}$$

نکته ۱۰: رسم سریع تابع آشنایی و کلدانی

برای رسم توابعی بصورت تفاضل و عبارت قدر مطلق با درجه ۱ و ضرب  $|x|$  یکسان (سرسره ای یا آشنایی) می توان ریشه های صفرکننده و قدر مطلق را به تابع داد و دو نقطه بدست آمده را در دستگاه مختصات بهم متصل و سپس دو خط افقی کناری را طوری رسم می کنیم که تصویر یک سرسره ظاهر شود. برای رسم توابعی بصورت مجموع و عبارت قدر مطلق با درجه ۱ و ضرب  $|x|$  یکسان (کلدانی) می توان ریشه های صفرکننده و قدر مطلق را به تابع داد و دو نقطه بدست آمده را در دستگاه مختصات بهم متصل و سپس دو خط کناری را یکی با شیب مجموع ضرایب  $|x|$  در دو قدر مطلق و دیگری هم با شیب قریه مجموع ضرایب  $|x|$  رسم تا تصویر کلدان ظاهر شود.

$$۱۴۸) y = |x + 3| - |x - 1|$$

$$۱۴۹) y = |x + 1| - \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

$$۱۵۰) y = |2x - 2| + |2x + 3|$$

$$۱۵۱) y = |x| + |x - 2|$$

$$۱۵۲) y = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$$

نکته ۱: برای رسم توابعی بصورت های زیر بهتر آن است که از نقطه یابی کمک بگیرید. به این ترتیب که جواب صفرکننده داخل قدر مطلق را در تابع گذاشته که همان رأس بدست می آید و پس نقطه کلی در دو طرف رأس به تابع می دهیم.

$$۱۵۳) y = -\frac{1}{4} |2x + 4| + 1$$

$$۱۵۴) y = -\frac{1}{4} (2x - 4)^2 + 1$$

$$۱۵۵) y = 2(3x - 1)^2 - 1$$

$$۱۵۶) y = 2 \left| \frac{x}{3} + 1 \right| - 1$$

نکته:

برای رسم توابع دیگری به جز آن که در نکته قبل گفته شد اگر به شکل زیر باشند می بایست آن را از حالت قدر مطلق دریاوریم و پس رسم کنیم.

$$۱۵۷) y = x|x| + 1$$

$$۱۵۸) y = x|x| + \frac{x}{|x|}$$

$$۱۵۹) y = x - ۲|x|$$

$$۱۶۰) y = x + |x - ۲|$$

$$۱۶۱) y = x + \frac{|x - ۳|}{x - ۳}$$

$$۱۶۲) y = |۲x + ۱| - |x - ۱|$$

$$۱۶۳) y = |۲x - ۱| + |x + ۱|$$

### تابع یک به یک:

۱- اگر تابع بصورت زوج مرتب باشد در صورتی یک به یک است که هیچ دو زوج مرتب متمایز با مولفه های دوم یکسان در آن یافت نشود.

۲- ضابطه تابع  $f$  یک به یک است در صورتی که برای  $x_۱$  و  $x_۲$  از دامنه  $f$  داشته باشیم:

$$f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow x_۱ = x_۲$$

۳- اگر نمودار تابع را داشته باشیم در صورتی غایش یک تابع یک به یک است که هر خط موازی با محور  $x$  با نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

$$۴- \text{تابع } f \text{ یا ضابطه } f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in D_۱ \\ h(x) & x \in D_۲ \end{cases} \text{ در صورتی یک به یک است که:}$$

اولاً:  $g$  در  $D_۱$  و  $h$  در  $D_۲$  یک به یک باشند.

ثانیاً: برد  $g$  و  $h$  با هم اشتراک نداشته باشند.

۱۶۴) در تابع یک به یک  $f$  بصورت  $f = \{(-۲, ۲), (b, ۳), (-۱, ۳), (b, a)\}$  مقدار  $a$  ,  $b$  چه می تواند باشند.

$$\text{ج: } a = ۳, \quad b = -۱$$

۱۶۵) اگر تابع  $f = \{(2, a), (4, a^2), (a, b-1)\}$  یک به یک باشد و  $f(4) - 3f(2) = -2$  باشد. مقدار  $b + a$  کدام است؟  
ج: ۵

۱۶۶) به ازای چه مقدار  $b, a$  تابع  $f = \{(-8, 11), (2a, 5), (3, b^2), (-3, 7), (3, a+5), (3a-4, 5)\}$  یک به یک باشد؟  
ج:  $a = 4$        $b = \pm 3$

۱۶۷) کدام زوج مرتب به تابع  $f = \{(1, 3a), (a-1, 1), (0, 1), (2, 11)\}$  اضافه شود تا  $f$  یک به یک بماند؟  
۱)  $(0, 3)$       ۲)  $(-4, 1)$       ۳)  $(1, 1)$       ۴)  $(3, 2)$  ✓

۱۶۸) اگر  $f$  تابعی یک به یک و دامنه  $f$  بصورت  $\{a^2, -2, \pm 1\}$  و برد آن  $\{2$  و  $\pm 1\}$  باشند. حداکثر چند مقدار برای  $a$  می توان یافت؟  
ج: ۲

۱۶۹) اگر رابطه  $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$  یک به یک باشد  $(a, b)$  کدامند؟  
ج:  $(2, 3)$

۱۷۰) اگر تابع روبرویک به یک باشد. مقدار  $a + b$  را بیابید.  $g = \{(3, 5), (a-b, 7), (a-1, 5), (12, a+3)\}$   
ج:  $-4$

۱۷۱) تابع  $g = \{(4, -3), (4, a^2 - 4a), (a+1, -3a)\}$  یک به یک است. مقدار  $a$  کدام است؟ هیچ مقدار ج:

۱۷۲) با رسم شکل نشان دهید تابع  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$  یک به یک نیست.

۱۷۳) بار سم شکل نشان دهید تابع  $g(x) = \begin{cases} -x^3 & x \geq -1 \\ \frac{1}{|x|} & x < -1 \end{cases}$  یک به یک نمی باشد.

(۱۷۴) آیا  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه ی زیر یک به یک است؟

$$h(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 0 \\ x^2 - 5 & 0 < x \leq 2 \\ -x - 2 & x > 2 \end{cases}$$

(۱۷۵) ثابت کنید تابع  $\begin{cases} f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\} \\ f(x) = \frac{2x-3}{x+1} \end{cases}$  یک به یک است.

(۱۷۶) ثابت کنید تابع  $\begin{cases} g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x \end{cases}$  یک به یک است.

(۱۷۷) ثابت کنید تابع  $\begin{cases} f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 - 1 \end{cases}$  یک به یک است.

(۱۷۸) ثابت کنید  $y = 2x^3 - 1$  تابعی یک به یک است.

(۱۷۹) نشان دهید تابع  $y = 2x^2 - 1$  یک به یک نمی باشد.

(۱۸۰) با رسم شکل نشان دهید  $y = \sqrt{-|x| + 1}$  یک به یک نمی باشد.

(۱۸۱) کدامیک از توابع زیر یک به یک می باشند؟ چرا؟

الف)  $y = \sqrt[3]{x}$

ب)  $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

پ)  $y = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases}$

ت)  $y = \sqrt[3]{x^2}$

ث)  $y = x^2 - 2x$

ج)  $y = x|x|$

چ)  $y = x \cos x$

ح)  $y = |x| + |1 - x|$

خ)  $y = |x + 1| - |x + 2|$

۱۸۲) کدامیک از توابع زیر ۱-۱ می باشد؟ چرا؟

الف)  $f(x) = x + 2|x|$  ×

ب)  $g(x) = 2x + |x|$  ✓

پ)  $h(x) = x + |x|$  ×

ت)  $k(x) = x - |x|$  ×

(۱۸۳) آیا تابع  $f(x) = 2|x| - 2x - 1$  یک به یک است؟ دامنه و برد آن را بیابید.

$D = \mathbb{R}$  ,  $R: [-1, +\infty)$  و خیر: ج

هیچکدام: ج

(۱۸۴) کدامیک از توابع زیر یک به یک می باشند؟ دلیل آن را با شکل بیان کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x} & x \geq 0 \\ 2 + x & x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \geq 0 \\ 1 - x^2 & x < 0 \end{cases}$$

یک مورد: ج

(۱۸۵) چند مورد از توابع زیر یک به یک هستند؟

$$f(x) = |x^2| + 2, \quad g(x) = x^2 \sin x, \quad h(x) = \sqrt{-|x|}$$

(۱۸۶) دو تابع  $f$  و  $g$  مثال بزنید که دامنه هر دو  $[2, 6]$  و برد آنها  $[0, 5]$  باشد و  $f$  یک به یک باشد اما  $g$  یک به یک نباشد.

(۱۸۷) نشان دهید تابع  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  بصورت  $f(x)$  یک به یک است.

(۱۸۸) نشان دهید تابع  $g(x) = -\sqrt{x-1}$  یک به یک است.

(۱۸۹) کدام تابع زیر یک به یک است؟

الف)  $y = (1 - 2x)^3$  ✓

ب)  $y = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 5$  ✓

پ)  $y = x^2 + x + 1$  ×

ت)  $y = \frac{2x-3}{x}$  ✓

ث)  $y = x|x| + 1$  ✓

ج)  $y = |x| - x$  ×

۱۹۰) آیا تابع  $f(x) = x^2 - 2x$  یک به یک است؟ چرا؟

۱۹۱) آیا تابع  $y = \frac{2^x-1}{2^x+1}$  یک به یک است؟ چرا؟

### تابع وارون:

کلمه ۱: اگر  $f$  تابعی ۱- باشد آنگاه معکوس  $f$  یعنی  $f^{-1}$  هم تابع می شود. (برای اثبات وارون پذیری (معکوس پذیری) کافی است ثابت کنیم تابع  $f$  یک به یک است).

کلمه ۲: اگر  $f$  و  $f^{-1}$  تابع باشند آنگاه به ازای هر  $(a, b) \in f$  داریم:  $(b, a) \in f^{-1}$

کلمه ۳: اگر  $f$  و  $f^{-1}$  تابع باشند آنگاه  $D_{f^{-1}} = R_f$  ,  $D_f = R_{f^{-1}}$

کلمه ۴: نمودار تابع  $f^{-1}$  قرینه ی نمودار تابع  $f$  نسبت به خط  $y = x$  می باشد.

کلمه ۵: اگر تابع  $f$  اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی (یکنوا) باشد:

اولاً: تابع  $f$  یک به یک خواهد بود.

ثانیاً: محل برخورد  $f$  و  $f^{-1}$  روی خط  $y = x$  قرار می گیرد.

ثالثاً: تابع  $f^{-1}$  هم اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی است.

نکته ۷: تابع خطی  $y = x$  و  $y = -x + k$  بر نمودار تابع معکوس خود منطبقند.

نکته ۸: ضابطه تابع معکوس  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  (تابع همگرافیک) در صورتی که  $ad - bc \neq 0$  باشد برابر  $f^{-1}(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}$  می باشد.

نکته ۹: تابع  $y = \frac{ax+b}{cx-a}$  با وارون خودش برابر است.

مشابهت نکته بالا با تریس؛

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

نکته ۱۰: تابع درجه دوم با ضابطه  $y = ax^2 + bx + c$  در حریف از بازه  $(-\infty, -\frac{b}{2a})$  و  $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$  وارون پذیر است.

نکته ۱۱: برای بدست آوردن تابع وارون تابع وارون پذیر  $f$  کافی است نام  $x$ ،  $y$  را عوض کنیم و سپس  $y$  را برابر حسب  $x$  بیاوریم، تابع بدست آمده همان تابع معکوس است.

۱۹۲) محل تلاقی تابع  $f(x) = x^3 + x - 1$  با وارونش کدام است؟ ج: (۱،۱)

۱۹۳) اگر  $f(x) = x^3 + 3x$  باشد. محل تلاقی  $f$  و  $f^{-1}$  کدام است؟ مبدأ ج:

۱۹۴) مقدار  $a$  را طوری بدست آورید که تابع  $f(x) = \frac{x}{a} + 3$  و وارونش بر هم منطبق باشند. ج:  $a = -1$

۱۹۵) تابع  $y = (x+3)^2$  در بازه  $[-3, -\infty)$  در چند نقطه با معکوس خود تلاقی می کند؟ هیچ نقطه ج:

۱۹۶) اگر ضابطه تابع  $f$  بصورت  $f(x) = x^3 + x - 1$  باشد. نمودار  $f^{-1}$  از کدام نقطه با طول ۳- می گذرد؟ ج:  $(-3, -3)$

(۱۹۷) اگر تابع  $f(x) = (a+2)x^2 + 4x + a + 1$  روی  $\mathbb{R}$  یک به یک باشد. نمودار  $f$  و  $f^{-1}$  در چه نقاطی همدیگر را قطع می کنند؟ نقطه تلاقی  $= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  ج:  $a = -2$

(۱۹۸) قرینه نقطه ی  $(a-1, 2a+b-3)$  نسبت به خط  $y=x$  برابر  $(5, -a+3)$  است.  $a-b$  کدام است؟  $-2$  ج:

(۱۹۹) تابع  $f(x) = 2|x| - |x-1| + |x+2|$  روی کدام بازه وارون پذیر نمی باشد؟  
(راهنمایی: حل از طریق رسم با استفاده از نقطه یابی ریشه های داخل قدر مطلق) ج:  $(-2, 0)$

(۲۰۰) الف) ثابت کنید تابع  $f(x) = \frac{x+3}{2x+1}$  وارون پذیر است و سپس ضابطه تابع وارون و دامنه و برد  $f^{-1}$  را بیابید.

ب) ثابت کنید  $g(x) = \frac{x}{1+|x|}$  وارون پذیر است و سپس ضابطه  $g^{-1}$  را با دامنه  $g^{-1}$  مشخص کنید.  
ج:  $g^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|} (|x| < 1)$

(۲۰۱) الف) اگر زوج مرتب  $(m, 2)$  بر روی قرینه تابع خطی  $y = 2x + 1$  نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرار داشته باشد. مقدار  $m$  کدام است؟  $m = 5$  ج:

ب) نمودار وارون تابع  $y = ax + 2$  از نقطه ی  $\left(-\frac{6}{5}, 0\right)$  می گذرد و مقدار  $a$  کدام است؟  $a = -4$  ج:

(۲۰۲) با رسم تابع  $y = 2x^2 - 3x - 1$  بررسی کنید در کدام بازه از دامنه اش می تواند وارون پذیر باشد. برد  $f$  کدام است؟  
ج:  $R_f = \left[-\frac{17}{8}, +\infty\right)$

(۲۰۳) آیا تابع  $f(x) = \begin{cases} 4x - x^2 - 3 & x < 2 \\ x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$  وارون پذیر است؟ (رسم) خیر: ج

(۲۰۴) اگر  $f = \{(a, a), (-1, b), (a + b, a)\}$ ،  $g = \{(b + a, 3), (\sqrt{a - 3}, -1)\}$  وارون هم باشند. مقدار  $g^{-1}(3)$  کدام است؟ ج: ۳

(۲۰۵) تابع  $f(x) = \frac{a}{1 - bx}$  مفروض است. اگر  $f$  از نقطه ی  $(-3, -1)$  و تابع  $f^{-1}$  از  $(1, 2)$  بگذرد. نمودار  $f$  محور  $y$  ها را با کدام عرض قطع می کند؟ ج: ۹

(۲۰۶) با کمک رسم تابع  $f(x) = \sqrt{-x} + 1$  نشان دهید وارون پذیر است. تابع  $f^{-1}$  را بیابید و دامنه و برد تابع  $f^{-1}$  کدامند؟  
ج:  $D_{f^{-1}} = [1, +\infty)$   $R_f = (-\infty, 0]$

(۲۰۷) اگر  $f(x) = 1 + \frac{3}{x-2}$  باشد. مقدار  $f^{-1}(4)$  کدام است؟ ج: ۳

(۲۰۸) اگر  $f(x) = 2x^2 + x + m, f^{-1}(-1) = 1$  باشد. مقدار  $m$  کدام است؟ ج: -۴

(۲۰۹) اگر دامنه ی تابع  $f(x) = x^2 - 6x + 1$  بازه ی  $[3, 4]$  باشد. دامنه ی  $f^{-1}$  کدام است؟ ج:  $[-8, -7]$

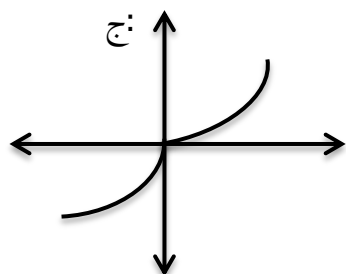
(۲۱۰) الف) در تابع  $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$  مقدار  $f^{-1}(4)$  کدام است؟ ج: -۲

ب) در تابع  $f(x) = \frac{x^3}{2+x}$  مقدار  $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$  کدام است؟  
ج: ۰

(۲۱۱) تابع زیر به ازای کدام مقدار  $m$  وارون پذیر است؟

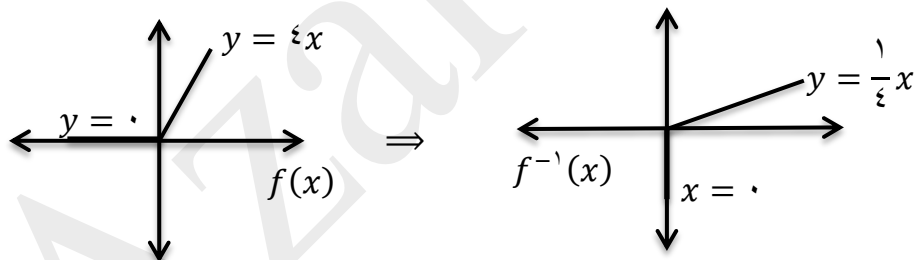
$$f = \{(1, m^2 - m), (m, 4), (1, 6), (5, m + 1), (0, m^2 + 2)\}$$

(۲۱۲) تابع  $f(x) = x^3 - 3x$  ( $x \geq 1$ ) با کدام طول وارون خود را قطع می کند؟  
ج: ۲



(۲۱۳) نمایش هندسی معکوس تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$  کدام است؟

(۲۱۴) منحنی نمایش معکوس تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = 2x + |2x|$  کدام است؟



(۲۱۵) ضابطه تابع معکوس هر کدام از توابع زیر را بدست آورید.

الف)  $y = x^4 - 2x^2 + 1$   $x \geq 1$  ج:  $f^{-1}(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

ب)  $y = 4 + \sqrt{x+1}$  ج:  $f^{-1}(x) = (x-4)^2 - 1$   $x \geq 4$

پ)  $y = x + \sqrt{1+x^2}$  ج:  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$   $x > 0$

ت)  $y = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -x^2 & x > 0 \end{cases}$  ج:  $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$   
(راهنمایی: رسم)

ث)  $y = x + 2\sqrt{x}$  ج:  $f^{-1}(x) = x - 2\sqrt{x+1} + 2$   $x \geq 0$

(۲۱۶) معکوس تابع  $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$  کدام است؟ (راهنمایی: روش قطع گزینه)

۱)  $y = x^2 + 2x + 3$

۲)  $y = x^2 - 2x + 3$

۳)  $y = -x^2 + x - 3$

۴)  $y = \frac{1}{1 + \sqrt{x-2}}$

خودش: ج

(۲۱۷) وارون تابع  $y = \frac{2x+1}{x-2}$  کدام است؟

$R - \left\{\frac{3}{2}\right\}$  دامنه خودش: ج

(۲۱۸) برد تابع  $y = \frac{3x+2}{2x-3}$  کدام است؟

ج:  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{x-1})$

(۲۱۹) معکوس تابع  $y = 8x^3 - 12x^2 + 6x$  را بیابید.

(۲۲۰) برد تابع  $y = \frac{2x-3}{2-x}$  کدام است؟

ج:  $\mathbb{R} - \{-2\}$

(۲۲۱) معکوس تابع  $y = \sqrt[3]{x} + 1$  کدام است؟

ج:  $f^{-1}(x) = (x - 1)^3$

(۲۲۲) ضابطه وارون تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x - 4 & x < 0 \end{cases}$  کدام است؟

ج:  $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ 2x+8 & x < -4 \end{cases}$

(۲۲۳) معکوس تابع  $f(x) = x^2 - 4x$  ( $x \geq 2$ ) کدام است؟

ج:  $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+4}$   $x \geq -4$

(۲۲۴) ثابت کنید تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 & x \geq 1 \\ 2x - 1 & x < 1 \end{cases}$  معکوس  $f$  کدام است؟

ج:  $f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x \geq \frac{3}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2} & x < 1 \end{cases}$

(۲۲۵) ضابطه تابع معکوس  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 & x \geq 1 \\ 2x - 1 & x < 1 \end{cases}$  کدام گزینه است؟ (راهنمایی: روش حذف گزینه)

۱)  $f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x + 2 & x \geq \frac{3}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2} & x < 1 \end{cases}$

۲)  $f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x \geq \frac{3}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2} & x < 1 \end{cases}$

۳)  $f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 2x + 2 & x < -1 \end{cases}$

۴)  $f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x > 3 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} & x \leq 3 \end{cases}$

(۲۲۶) معکوس تابع  $y = 2 + \sqrt[3]{x}$  کدام است؟

(۲۲۷) ضابطه وارون تابع  $\begin{cases} f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases}$  کدام است؟

(۲۲۸) معکوس تابع  $f(x) = (x^2 - 1)^2$  برای  $x \geq 2$  کدام است؟

(۲۲۹) معکوس نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} -1 & x > 1 \\ -2x + 1 & x \leq 1 \end{cases}$  از کدام ربع نمی گذرد؟  
ربع سوم: ج

(۲۳۰) اگر  $f = \{(-2, 3), (3, -1), (4, -2)\}$ ,  $g = \{(-1, 2), (3, 1), (4, -2)\}$  باشد. مقدار  $f^{-1}(g^{-1}(2))$  کدام است؟  
۳: ج

(۲۳۱) تابع  $f(x) = x^2 - 5x + 3$  در کدام محدوده ها وارون پذیر است؟  
 $x \geq \frac{5}{2}, x \leq \frac{5}{2}$ : ج

(۲۳۲) دامنه ی تابع  $f(x) = x^2 + 2x$  را به بازه ی  $(-\infty, a)$  محدود کرده ایم تا وارون پذیر شود. حداکثر مقدار  $a$  کدام است؟  
-۱: ج

(۲۳۳) اگر  $f(x) = x^2 + 6x + 3$  با دامنه ی  $[-3, +\infty)$  باشد. دامنه ی تابع  $f^{-1}$  را بیابید.

(۲۳۴) معکوس تابع  $f(x) = \sqrt{x} + 2$  و تابع  $f(x) = \sqrt{x+2}$  را بیابید. دامنه و برد تابع معکوس آنها را بنویسید.

(۲۳۵) در چه حالتی از  $a, b, c$  معکوس تابع  $f(x) = \frac{x-a}{bx-c}$  برابر خودش است.

(۲۳۶) الف- ثابت کنید  $\begin{cases} f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 + 2x + 2 \end{cases}$  وارون پذیر است و سپس  $f^{-1}$  را بیابید.

ب- نشان دهید تابع  $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$  وارون پذیر است. سپس وارون را بیابید.

$$g_{(x)}^{-1} = x|x|$$

تمرینات موازی از بحث تابع یک به یک و وارون:

(۲۳۷) مقدار عددی  $f^{-1}(3)$  در تابع  $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x - 3}}$  کدام است؟

(۲۳۸) مقدار عددی  $f^{-1}(1)$  در تابع  $f(x) = 3x - 3x^2 + x^3$  کدام است؟

(۲۳۹) به ازای کدام مقدار  $m$  نمودار معکوس تابع  $y = \frac{1-2x}{3x+4}$  از نقطه  $y = \binom{m+4}{m}$  می گذرد؟

(۲۴۰) وارون تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ \frac{1}{x} + 1 & x < 0 \end{cases}$  را بیابید. پاسخ کامل:

ابتدا برد دو ضابطه را با توجه به دامنه پیدا می کنیم، بدین ترتیب:

$$\begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \rightarrow R_f = [1, +\infty) \rightarrow D_{f^{-1}} = [1, +\infty) \\ \frac{1}{x} + 1 & x < 0 \rightarrow R_f = (-\infty, 1) \rightarrow D_{f^{-1}} = (-\infty, 1) \end{cases}$$

حال معکوس هر ضابطه را پیدا می کنیم، بدین گونه:

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \rightarrow x = y^2 + 1 \rightarrow y^2 = x - 1 \xrightarrow{y \in [1, +\infty)} y = +\sqrt{x-1} \\ y = \frac{1}{x} + 1 \rightarrow x = \frac{1}{y} + 1 \rightarrow \frac{1}{y} = x - 1 \rightarrow y = \frac{1}{x-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ \frac{1}{x-1} & x < 1 \end{cases}$$

(۲۴۱) وارون تابع  $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$  با دامنه  $(-\infty, 0]$  کدام است؟

ج:  $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

(۲۴۲) وارون تابع  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  را بدست آورید. پاسخ کامل:

$$y = x + \frac{1}{x} \rightarrow x = y + \frac{1}{y} \rightarrow x = \frac{y^2 + 1}{y} \rightarrow y^2 - xy + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta} y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

حال باید بررسی کنیم که کدام ضابطه قابل قبول است. می دانیم  $f(2) = \frac{5}{2}$  پس از  $f^{-1} = \frac{5}{2}$  باید برابر ۲ شود.

$$f^{-1}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \rightarrow f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = 2 \rightarrow \text{ق ق}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2} \rightarrow f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow \text{غ ق ق}$$

(۲۴۳) وارون تابع  $y = x + \sqrt{x}$  کدام است؟ پاسخ کامل:

$$D_f = [0, +\infty) \Rightarrow R_{f^{-1}} = [0, +\infty)$$

$$y = x + \sqrt{x} \rightarrow x = y + \sqrt{y} \rightarrow x = \left(\sqrt{y} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \rightarrow x + \frac{1}{4} = \left(\sqrt{y} + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow \sqrt{y} + \frac{1}{2} = \sqrt{x + \frac{1}{4}} \rightarrow \sqrt{y} = -\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} \rightarrow y = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}\right)^2 \rightarrow f^{-1}(x) = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}\right)^2$$

(۲۴۴) ثابت کنید تابع  $f(x) = -|x+1| + 1$  ( $x \leq -1$ ) وارون پذیر است و سپس  $f^{-1}$  را بدست آورید.

ج:  $f^{-1}(x) = x - 2$

(۲۴۵) وارون تابع  $y = x^2 - 2x$  کدام است؟

ج:  $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1+x}$

(۲۴۶) وارون تابع  $y = \frac{1}{x^2 - 2x}$  کدام است؟

ج:  $f^{-1}(x) = 1 + \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x}$

(۲۴۷) به ازای چه مقادیری از  $m$  تابع  $f(x) = -2x^2 + mx + 3$  روی بازه  $(1, +\infty)$  یک به یک است؟

ج:  $m \leq 4$

(۲۴۸) کدام تابع زیر وارون پذیر است؟

الف)  $y = \frac{|x| - 2}{|x| + 2}$

ب)  $y = x - \sqrt[3]{x}$

پ)  $y = \begin{cases} -3x + 6 & x < 2 \\ -2x & x \geq 2 \end{cases}$

(۲۴۹) کمترین مقدار طبیعی  $a$  برای آنکه  $x \leq 2$  و  $x > 2$   $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 \\ x + 2a \end{cases}$  یک به یک باشد. چقدر است؟

(۲۵۰) تابع  $f$  بصورت  $f(x) = x^3 + x - 8$  در کدام نقطه با  $f^{-1}$  تلاقی می کند؟ ج: (۲)

(۲۵۱) در تابع  $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$  مقدار  $f^{-1}(2)$  کدام است؟ ج: -۲

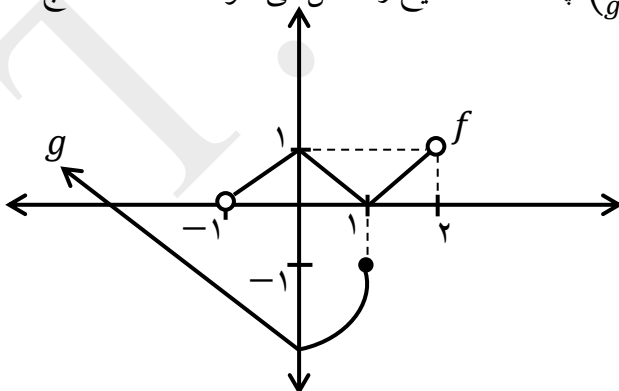
(۲۵۲) اگر تابع  $f(x) = x^5 + x - 1$  و معکوس خود را در نقطه  $A$  قطع کند. فاصله  $A$  از مبدا مختصات کدام است؟  $\sqrt{2}$  ج:

(۲۵۳) اگر تابع معکوس  $f(x) = \frac{mx}{\sqrt{1+x^2}}$  از نقطه  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$  بگذرد.  $m$  کدام است؟ ج: ۱

اعمال جبری روی توابع:

(۲۵۴) اگر  $f = \{(-1, 1), (1, 3), (2, -1), (0, 3)\}$ ,  $g = \{(0, 1), (-1, 1), (3, 3), (2, 5)\}$  باشند. توابع  $f \times g$  و توابع  $2f, \frac{f}{3f+g}$  را تشکیل دهید.

(۲۵۵) اگر نمودار تابع  $f, g$  بصورت روبرو باشد. دامنه  $(\frac{f}{g})(x)$  چند عدد صحیح را شامل می شود؟ ج: ۲



(۲۵۶) اگر  $x \geq 1$ ,  $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ x-1 & x < 1 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x+3 & x < 0 \end{cases}$  باشند، دامنه وضابطه  $f-g$ ,  $g \times f$ ,  $\frac{f}{g}$  را بدست آورید.

۲۵۷) اگر  $f = \{(-1, 2), (1, 5), (3, -1), (0, 3)\}$  و  $g^{-1} = \{(5, -2), (2, 3), (7, 4), (2, 0), (0, -1)\}$  تابع  $\frac{f}{g}$  را نمایش دهید.

$$\text{ج: } \frac{f}{g} = \left\{ \left( 3, -\frac{1}{4} \right), \left( 0, \frac{3}{4} \right) \right\}$$

۲۵۸) تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$  مفروض است.  
الف) نمودار  $f$  را رسم کنید.

ب) نمودار  $f^{-1}$  را رسم کنید.

پ) ضابطه تابع  $\frac{f}{f}$  کدام است؟

ت) دامنه تابع  $\frac{f}{f}$  کدام است؟

۲۵۹) توابع  $f(x) = -|x|$  ،  $g(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$  مفروضند.  
الف) نمودار  $f, g$  را در یک دستگاه رسم کنید.

ب) نمودار  $f + g$  را رسم کنید.

۲۶۰) تابع  $f(x) = \sqrt{1 - x}$  ،  $g(x) = \sqrt{x - 1}$  مفروضند.  
الف) دامنه  $f \times g$  کدام است؟

ب) ضابطه  $\frac{g}{f}$  کدام است؟

(۲۶۱) اگر تابع  $f = \{(-۲, ۱), (۱۴, ۱), (۷, ۹)\}$  و  $g = \{(-۲, m), (۴, ۳), (۷, n + ۱)\}$  باشند. مقدار  $n + m$  کدام است؟ ج:  $-\frac{1}{2}$

(۲۶۲) اگر  $g = \{(-۱, ۲), (۲, ۵), (-۵, ۰)\}$  باشد. دامنه ی توابع  $|g|$ ،  $2g$  کدامند؟

(۲۶۳) اگر  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+۲}}$ ،  $g(x) = ۲ \sin^۲ \pi x$  باشد. حاصل  $g + f$  را به ازای  $x = \frac{۲}{۳}$  بیابید.

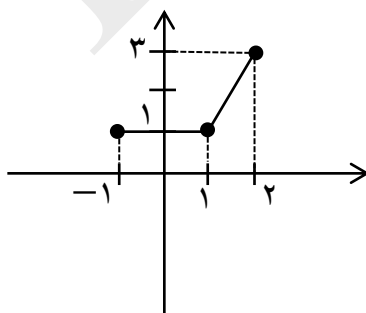
(۲۶۴) اگر  $f(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ & x \notin \mathbb{Z} \\ \frac{x}{۲} + ۱ & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ ،  $g(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ & x \notin \mathbb{Q} \\ ۳x + ۲ & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$  باشند. مقادیر زیر را بیابید.

الف)  $g(f(\frac{1}{\sqrt{۲}})) =$

ب)  $g(g(-\frac{۲}{۳})) + f(f(\frac{1}{۲})) =$

(۲۶۵) اگر  $f(x) = \frac{\sqrt{۴-x^۲}}{|x|-x}$ ،  $g(x) = \sqrt{۱-\sqrt{x+۱}}$  باشند دامنه ی تابع  $\frac{f}{g}$ ،  $\frac{g}{f}$  را بیابید.

(۲۶۶) با توجه به نمودار تابع  $f$  نمودار تابع  $-۲f(x)$  را رسم کنید و سپس دامنه و برد تابع  $۲f$  را بنویسید.



(۲۶۷) اگر  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ,  $g = \{(2, 1), (-3, 6), (-1, 4), (0, 7)\}$  باشند.

الف) دامنه تابع  $g - f$  کدام است؟

ب) تابع  $f \times g$  را تشکیل دهید.

ت) بیشترین مقدار  $(g - f) \times 2g$  کدام است؟

(۲۶۸) اگر  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}$ ,  $g = \{(3, 1), (0, 1), (4, 0), (1, -1)\}$  باشند. تابع  $\frac{f}{g}$  چند عضو دارد؟ بیشترین مقدار  $\frac{g}{f}$  کدام است؟ ج: ۳

(۲۶۹) اگر  $f(x) = \sqrt{x} + x$ ,  $g = \{(6, 5), (1, 2), (5, 4), (2, 3)\}$ ,  $g(f(m)) = 5$  باشند. مقدار  $m$  کدام است؟

(۲۷۰) اگر دامنه ی تابع  $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 1 \\ x^3 + a & x \leq a + 2 \end{cases}$  برابر  $R$  باشد. الف) آیا  $g$  یک به یک است؟

ب) مقدار  $g(-2)$  کدام است؟ ج: بله:  $g(-2) = -9$

(۲۷۱) اگر  $f = \{(1, 2), (0, 5), (2, 0), (-1, 1)\}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x-1}$  باشند.

الف) دامنه تابع  $f \times g$  کدام است؟

ب) تابع  $\frac{g}{f}$  را تشکیل دهید.

پ) مقدار  $f(g(2))$  کدام است؟

(۲۷۲) اگر  $f = \{(1,1), (2,0), (-3,-6)\}$  ،  $g = \{(x, 2x) | x \in \mathbb{Z} \quad x < 3\}$  باشند. ضابطه  $\frac{g}{f}$  کدام است؟

(۲۷۳) اگر  $f(x) = 2$  ،  $g(x) = x^2 + 2$  باشند. تابع  $f - g$  را تشکیل دهید و سپس نمودار  $g, f$  و  $f - g$  را در یک دستگاه رسم کنید.

(۲۷۴) اگر  $f = \{(0,1), (-2,0), (1,2), (4,\sqrt{2})\}$  ،  $g(x) = x$  ، تابع  $\frac{f}{g}$  را تشکیل دهید.

(۲۷۵) اگر  $f(x) = \sqrt{2 - |x - 3|}$  ،  $g(x) = \{(1,2), (-1,0), (0,3)\}$  باشند، تابع  $f \times g$  را تشکیل دهید.

(۲۷۶) اگر  $f = \{(1,0), (-2,4), (2,3)\}$  باشد. تابع  $\frac{1}{f}$  کدام است؟

ج:  $\left\{\left(-2, \frac{1}{4}\right), \left(2, \frac{1}{3}\right)\right\}$

(۲۷۷) اگر  $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3}$  ،  $g(x) = \frac{2x-6}{\sqrt{x-2}}$  باشند. نمودار  $g \times f$  را رسم کنید.

### تابع پدای و جزء صحیح:

هر تابعی که بتوان دامنه آن را به تعدادی بازه تقسیم بندی کرد که تابع روی هر کدام از این بازه ها تابع ثابت باشد یک تابع پدای می نامند. کوزه خاصی از تابع پدای تابع جزء صحیح است.

(۲۷۸) پارکینگ یک مجموعه ورزشی برای سه ساعت اول ۲ هزار تومان و برای هر ساعت اضافه یا بازه زمانی کمتر از یک ساعت ۵۰۰ تومان دریافت می کند. اگر حداکثر زمان توقف در این پارکینگ ۵ ساعت باشد. نمودار تابعی که نرخ توقف را به ازای همه ساعات ممکن نشان می دهد رسم کنید.  
دامنه و برد تابع کدامند؟

(۲۷۹) یک شرکت پستی برای ارسال بسته های تا کمتر از  $1kg$  مبلغ ۲ هزار تومان و برای ارسال بسته های از ۱ تا  $2kg$  مبلغ ۴ هزار تومان و از ۲ تا کمتر از  $3kg$  مبلغ ۶ هزار تومان و برای بسته های بیشتر نیز به همین ترتیب دریافت می کند. اگر  $f(x)$  هزینه ارسال یک بسته  $x$  کیلوگرمی باشد. نمودار آن را رسم کنید.

(۲۸۰) آیا تابع  $f(x) = [x]$  یک به یک است؟

(۲۸۱) نمودار توابع زیر را در بازه  $[-2, 2]$  رسم کنید.

الف)  $y = [x - 1]$

ب)  $y = [x] - 1$

نکته:  $[ax \pm b] = [ax] \pm b$  به شرط آنکه  $b \in \mathbb{Z}$  باشد.

نکته: در تابع  $y = [ax]$  طول هر پله برابر  $\frac{1}{|a|}$  است.

نکته: در تابع  $y = [ax]$  اگر  $a > 0$  باشد نمودار به حالت پله های بالا رونده و اگر  $a < 0$  باشد نمودار به صورت پله های پایین رونده است، و ارتفاع پله ها واحد است.

(۲۸۲) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف)  $y = \left[\frac{x}{2}\right]$

$D = [-2, 2)$

ب)  $y = [2x]$

$D = [-1, 1)$

پ)  $y = [-2x]$

$D = [-1, 1)$

ت)  $y = -[2x]$   $D = [-1, 1)$

ث)  $y = |[2x]|$   $D = [-1, 1)$

ج)  $y = [2|x|]$   $D = [-1, 1)$

۲۸۳) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف)  $y = x[x]$   $D = [-2, 2)$

ب)  $y = [x] + [-x]$   $D = [-2, 2)$   
(تابع عینکی)

۲۸۴) ثابت کنید توابع زیر پله ای هستند.

الف)  $y = \frac{x}{|x|}$

ب)  $y = \frac{x+2}{|x+2|} + \frac{|x-1|}{x-1}$

۲۸۵) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف)  $y = x - [x]$   $D = [-2, 2)$

(تابع خارخاسکی)

ب)  $y = |x| + [x]$   $D = [-2, 2)$

پ)  $y = -[-x]$   $D = [-2, 2)$

ت)  $y = x[x^2]$   $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

رسم نمودار جزء صحیح تابع:

برای رسم نمودار توابع بصورت  $y = [f(x)]$  مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱- ابتدا نمودار  $f(x)$  را رسم می‌کنیم.

۲- تمام خطوط  $y = a$  که  $a \in \mathbb{Z}$  باشد را رسم می‌کنیم.

۳- محلی تلاقی خطوط و تابع  $f$  را توپری می‌کنیم.

۴- قسمت پایانی از نمودار که بین دو خط  $y = a$  و  $y = a + 1$  است را بر روی خط افقی پایین تر تصویر می‌کنیم.

(۲۸۶) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف)  $y = [x^2]$   $D = [-2, 2]$

ب)  $y = [-x^2 + 1]$   $D = [-1, 2]$

(۲۸۷) نمودار تابع  $y = [x^2]$  روی بازه  $(-2, 2)$  از چند پاره خط تشکیل شده است؟ ج: ۷

(۲۸۸) نمودار تابع  $y = \frac{x+1}{[x]}$  را در بازه  $[1, 4)$  رسم کنید.

(۲۸۹) مساحت محدود به نمودار تابع  $y = x - [x]$  (تابع خاراخاسکی) و محور  $x$  ها در بازه  $[0, 4]$  چقدر است؟

(۲۹۰) اگر  $f(x) = [x]$  باشد، مجموعه مقادیر  $f(x - f(x))$  کدام است؟ ج:  $\{0, 1\}$

(۲۹۱) طول هر پله در تابع پله ای  $f(x) = [-3x]$  چقدر است؟ ج:  $\frac{1}{3}$

(۲۹۲) نمودار تابع  $y = 2\left[\frac{x}{2}\right] + 1$  روی بازه  $[-2, 6]$  از چند پاره خط مساوی هم تشکیل شده است؟

نکته: اگر  $n \in \mathbb{Z}$  باشد داریم:

$$[u] = n \Rightarrow n \leq u < n + 1$$

(۲۹۳) معادلات زیر را حل کنید.

الف)  $[4x^2 - 4x] = 0$  ج:  $(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, 0] \cup [1, \frac{1+\sqrt{2}}{2})$

ب)  $[2(x+3)] = -1$  ج:  $[-\frac{7}{4}, -3)$

پ)  $[\frac{1}{x-2}] = -1$  ج:  $(-\infty, 1]$

ت)  $[x] + [x + \frac{1}{2}] = \frac{5}{2}$  ریشه ندارد ج:

ث)  $[1-2x] = -2$

(۲۹۴) معادلات زیر را حل نمایید.

الف)  $2[3x-1] = -3$  ریشه ندارد ج:

ب)  $[\frac{x}{x+1}] = 1$  ج:  $(-\infty, -2)$

(۲۹۵) به ازای چه مقدار  $x$  روابط زیر برقرار است؟

الف)  $\sqrt{x-1} + [x] = 0$  هیچ مقدار ج:

ب)  $[2x] + [2x + \frac{1}{3}] = \frac{4}{3}$  هیچ مقدار ج:

(۲۹۶) دو تابع  $f(x) = [x] + [-x]$ ،  $g(x) = x^2 + x - 2$  مفروض است، حاصل  $g(f(x))$  کدام است؟ -۲ ج:

۲۹۷) حاصل  $[(1 + \sqrt{2})^4]$  کدام است؟ ۳۳ ج

۲۹۸) اگر  $x = -\frac{1}{p}$  باشد. مقدار  $[x] + [x^2] + [x^3] + \dots + [x^{50}]$  چقدر است؟

۲۹۹) حاصل  $\left[\frac{1}{25}\right] + \left[\frac{2}{25}\right] + \left[\frac{3}{25}\right] + \dots + \left[\frac{100}{25}\right]$  کدام است؟ ۱۱۱ ج

۳۰۰) اگر  $|x + 2| \leq 3$  باشد، حدود  $[3 - 2x]$  کدام است؟

۳۰۱) اگر  $x + x^2 < 0$  باشد. حدود  $[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4]$  کدام است؟

۳۰۲) حاصل  $[\sin 1^\circ] + [\sin 2^\circ] + [\sin 3^\circ] + \dots + [\sin 360^\circ]$  کدام است؟

۳۰۳) اگر  $f(x) = [x]$  ،  $g(x) = \frac{x}{1-x}$  باشد. مقدار  $f(g(\sqrt{2}))$  کدام است؟

۳۰۴) اگر  $f(x) = x^2 - 2[x]$  باشد. مقدار  $f(-\frac{1}{p}f(\sqrt{3}))$  کدام است؟

۳۰۵) اگر عبارت  $1 \leq \left|\frac{2x-1}{x+1}\right|$  باشد. عبارت  $[-x]$  چند مقدار مختلف دارد؟

۳۰۶) اگر  $[x^2 + x] = -1$  باشد. مقدار  $[x^{20}]$  کدام است؟

۳۰۷) اگر  $x^2 + x + 1 = 0$  باشد مقادیر  $[2x - 1]$  را بیابید.

۳۰۸) اگر  $x^2 + 3[x + 1] = 4$  باشد. مقادیر  $x$  کدامند؟

۳۰۹) مقدار  $\left[\frac{a^2}{1+a^2}\right]$  کدام است؟

۳۱۰) مقدار  $[\cos 155^\circ] + [\sin 15^\circ]$  کدام است؟

۳۱۱) مقدار  $[(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{20}]$  کدام است؟

۳۱۲) دامنه توابع زیر را بدست آورید.

الف)  $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{[x]}$

ج:  $[-2, 0) \cup [1, 2]$

ب)  $y = \frac{\sqrt{x+1}}{2[x] - 4}$

$f(x) = \frac{2x^3 - 1}{2\left[\frac{x}{3}\right] - 1}$

۳۱۳) در دامنه تابع روبرو چند عدد صحیح قرار نمی گیرند؟

۳۱۴) دامنه تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{[x]-x}}{x^3-x}$  کدام است؟ (راهنمایی: روش قطع گزینه)

۱)  $z - \{\pm 1\}$

۲)  $\mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$

۳)  $w - \{\pm 1\}$

۴)  $N - \{0, \pm 1\}$

۳۱۵) اگر  $a = 1 - \sqrt{2}$  باشد. حاصل  $[\sqrt{(a-2)^2}]$  کدام است؟

نکته: اگر  $n \in \mathbb{Z}$  باشد داریم:

۱)  $[u] \geq n \Rightarrow u \geq n$

۲)  $[u] > n \Rightarrow [u] \geq n + 1 \Rightarrow u \geq n + 1$

۳)  $[u] \leq n \Rightarrow u < n + 1$

۴)  $[u] < n \Rightarrow [u] \leq n - 1 \Rightarrow u < n$

نکته:

$$[u] + [-u] = \begin{cases} 0 & u \in \mathbb{Z} \\ -1 & u \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

۳۱۶) حاصل  $[x] + [-x]$  به ازای  $x = \frac{\sqrt{80}}{9}$  چقدر است؟  
ج: -۱

۳۱۷) به ازای چند عدد طبیعی  $x \in (0, 10)$  حاصل  $[x] + [-\sqrt{x}]$  برابر صفر می شود؟  
ج: ۹، ۴، ۱

۳۱۸) معادله  $2 \leq [2x - 3]$  را حل نمایید.

۳۱۹) دامنه توابع زیر را بدست آورید.

الف)  $f(x) = \sqrt{1 - [x^2]}$  ج:  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

ب)  $f(x) = \sqrt{2 - [x^2 + 2x]}$  ج:  $(-3, 1)$

پ)  $f(x) = \sqrt{([x] - 1)([x] - \sqrt{2})}$  ج:  $\mathbb{R}$

۳۲۰) اگر  $1 \leq |x - 1|$  حدود  $x$  کدام است؟

۳۲۱) دامنه توابع زیر را بدست آورید.

الف)  $y = \frac{1}{x - [x]}$

ب)  $y = \frac{1}{\sqrt{[x] + [-x]}}$

ج:  $\emptyset$

پ)  $y = \sqrt{[x] + 3}$

ت)  $y = \sqrt{1 - [x^2]}$

ج:  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

۳۲۲) آیا دو توابع  $f(x) = \left[ \frac{x^2}{1+x^2} \right]$  و  $g(x) = 0$  مساوی اند؟ بلی: ج

۳۲۳) دامنه تابع  $f(x) = \frac{[x - [x]]}{[2 - x] + [x - 2]}$  کدام است؟ (راهنمایی: روش قطع گزینه)

۱)  $\mathbb{R} - \{2\}$

۲)  $\{0, 1\}$

۳)  $\{0\}$

۴)  $\emptyset$