

سوالات کنکور و سنجش فصل ۲ و ۳ ریاضی و آمار ۳ :

نرگس اصلانی گرمی

فصل دوم: الگوهای خطی

۱. در دنباله بازگشتی $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = 2a_n + 1$ جمله دهم، کدام است؟

۱) ۹۷۹

۲) ۹۸۷

۳) ۱۰۱۵

۴) ۱۰۲۳

پاسخ: گزینه ۴ با توجه به رابطه بازگشتی دنباله داریم:

$$a_1 = 1 = 2^1 - 1$$

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 2(1) + 1 = 3 = 2^2 - 1$$

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7 = 2^3 - 1$$

$$a_4 = 2a_3 + 1 = 2(7) + 1 = 15 = 2^4 - 1 \xrightarrow[\text{نوشت}]{\text{بنابراین می‌توان}} a_n = 2^n - 1$$

بنابراین جمله دهم، برابر $2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$ است.

۲. در دنباله اعداد ۰، ۱، ۲، ۴، ۷، ۱۱، ۱۶، ...، جمله دهم، کدام است؟

۱) ۳۷

۲) ۴۲

۳) ۴۵

۴) ۴۶

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به الگوی عددی داده شده داریم:

$$\begin{array}{cccccccccc} +1 & +2 & +3 & +4 & +5 & +6 & +7 & +8 & +9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & , & 2 & , & 4 & , & 7 & , & 11 & , & 16 & , & 22 & , & 29 & , & 37 & , & 46 \end{array}$$

جمله دهم

خارج از کشور- ۱۳۹۸

۳. در دنباله فیبوناچی $a_1 = a_2 = 1$ و $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ جمله یازدهم، کدام است؟

۱) ۸۹

۲) ۹۲

۳) ۹۴

۴) ۹۶

پاسخ: گزینه ۱ جملات دنباله فیبوناچی را تا جمله یازدهم می‌نویسیم؛ داریم:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89$$

↓
جمله یازدهم

خارج از کشور- ۱۳۹۷

۴. در دنباله $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ، اولین جمله مربع کامل غیر ۱، کدام است؟

۱) ۳۶

۲) ۴۹

۳) ۶۴

۴) ۸۱

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا جملات دنباله مثلثی را با توجه به رابطه $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ می‌نویسیم:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, \dots$$

اولین جمله مربع کامل غیر از ۱ عدد ۳۶ است.

خارج از کشور- ۱۳۹۹

۵. جمله هشتم از دنباله اعداد با رابطه $a_1 = a_2 = 3$ و $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n - n$ ، کدام است؟

۱) ۲۳

۲) ۱۹

۳) ۱۷

۴) ۱۳

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به رابطه بازگشتی دنباله داریم:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n - n \xrightarrow{n=1} a_3 = a_2 + a_1 - 1 \xrightarrow{a_2=3, a_1=3} 3 + 3 - 1 = 5$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n - n \xrightarrow{n=2} a_4 = a_3 + a_2 - 2 \xrightarrow{a_3=5, a_2=3} 5 + 3 - 2 = 6$$

$$\begin{aligned}
 a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n - n \xrightarrow{n=3} a_5 = a_4 + a_3 - 3 \xrightarrow{a_4=6, a_3=5} 6 + 5 - 3 = 8 \\
 a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n - n \xrightarrow{n=4} a_6 = a_5 + a_4 - 4 \xrightarrow{a_5=8, a_4=6} 8 + 6 - 4 = 10 \\
 a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n - n \xrightarrow{n=5} a_7 = a_6 + a_5 - 5 \xrightarrow{a_6=10, a_5=8} 10 + 8 - 5 = 13 \\
 a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n - n \xrightarrow{n=6} a_8 = a_7 + a_6 - 6 \xrightarrow{a_7=13, a_6=10} 13 + 10 - 6 = 17
 \end{aligned}$$

۶. در دنباله مثلثی، مجموع هر دو جمله متوالی، کدام دنباله را تشکیل می‌دهد؟

سراسری-۱۳۹۷

دنباله مثلثی: 

$$a_n = (n-1)^2 \quad \boxed{۲}$$

$$a_n = (n+1)^2 \quad \boxed{۱}$$

$$a_n = n^2 \quad \boxed{۴}$$

$$a_n = 2n^2 \quad \boxed{۳}$$

پاسخ: گزینه ۱

جملات دنباله مثلثی به صورت زیر است

الگوی دنباله مثلثی:  , :

دنباله مربعی $1, 4, 9, 16, \dots \Rightarrow 1 + 3 = 4, 4 + 5 = 9, 9 + 7 = 16, \dots$ دنباله مجموع دو جمله متوالی مثلثی $1, 3, 6, 10, \dots$ جملات دنباله مثلثی
دنباله به دست آمده دنباله مربعی با شروع از $(n=2)$ است.

$$(n^a = n^2)$$

سراسری-۱۴۰۱

۷. جمله ۴۰۰ام دنباله اعداد با رابطه $a_1 = 1$ و $a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ زوج} \\ \frac{1}{a_{n+1}} & n \text{ فرد} \end{cases}$ کدام است؟

$$\boxed{۴} \text{ صفر}$$

$$\boxed{۳} \frac{1}{2}$$

$$\boxed{۲} ۱$$

$$\boxed{۱} ۲$$

پاسخ: گزینه ۳ قرار دادن $n = 1, 2, 3, 4$ جمله‌های اول تا پنجم را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
 n=1 &\rightarrow a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\
 n=2 &\rightarrow a_2 = 1 \\
 n=3 &\rightarrow a_3 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\
 n=4 &\rightarrow a_4 = 1
 \end{aligned}$$

math-pilevar.ir

بنابراین جمله‌ها با شماره زوج برابر $\frac{1}{2}$ و جمله‌ها با شماره فرد برابر ۱ است:

$$\Rightarrow a_{400} = \frac{1}{2}$$

۸. دو جمله متوالی دنباله $a_n = \begin{cases} 100 - \frac{1}{2}n^2 & n \text{ زوج} \\ \frac{2n}{15} & n \text{ فرد} \end{cases}$ برابر هستند. اگر مقدار این دو جمله متوالی، برابر مقدار صحیح k باشد، مقدار $k - a_{16}$ کدام است؟

خارج از کشور-۱۴۰۱

$$\boxed{۴} ۳۲$$

$$\boxed{۳} ۳۰$$

$$\boxed{۲} ۲۸$$

$$\boxed{۱} ۲۶$$

پاسخ: گزینه ۳ با محاسبه چند جمله اول می‌فهمیم که جملات فرد همگی مثبت هستند و جملات زوج رو به کاهش هستند.

$$a_1 = \frac{2}{15} \times 1 = \frac{2}{15}$$

$$a_2 = 100 - \frac{1}{2} \times 2^2 = 100 - 2 = 98$$

$$a_3 = \frac{2}{15} \times 3 = \frac{2}{5}$$

⋮

آخرین جمله مثبت برای جملات زوج را با جمله بعدی آن مقایسه می‌کنیم:

$$a_{14} = 100 - \frac{1}{2} \times 14^2 = 100 - 98 = 2$$

$$a_{15} = \frac{2}{15} \times 15 = 2 \Rightarrow a_{14} = a_{15} = 2 \Rightarrow k = 2$$

$$a_{16} = 100 - \frac{1}{2} \times 16^2 = 100 - 128 = -28 \Rightarrow k - a_{16} = 2 - (-28) = 30$$

خارج از کشور- ۱۴۰۰

۹. جمله دهم دنباله بازگشتی $1 + \frac{1}{a_n} = a_{n+1}$ و $a_1 = 1$ کدام است؟

$$\frac{89}{55} \quad (4)$$

$$\frac{610}{377} \quad (3)$$

$$\frac{144}{89} \quad (2)$$

$$\frac{55}{34} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$a_2 = \frac{1}{a_1} + 1 = \frac{1}{1} + 1 = 2$$

$$a_3 = \frac{1}{a_2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$a_4 = \frac{1}{a_3} + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

$$a_5 = \frac{1}{a_4} + 1 = \frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5}$$

$$a_6 = \frac{1}{a_5} + 1 = \frac{5}{8} + 1 = \frac{13}{8}$$

$$a_7 = \frac{1}{a_6} + 1 = \frac{8}{13} + 1 = \frac{21}{13}$$

$$a_8 = \frac{1}{a_7} + 1 = \frac{13}{21} + 1 = \frac{34}{21}$$

$$a_9 = \frac{1}{a_8} + 1 = \frac{21}{34} + 1 = \frac{55}{34}$$

$$a_{10} = \frac{1}{a_9} + 1 = \frac{34}{55} + 1 = \frac{89}{55}$$

$$a_{11} = \frac{1}{a_{10}} + 1 = \frac{55}{89} + 1 = \frac{144}{89}$$

$$a_{12} = \frac{1}{a_{11}} + 1 = \frac{89}{144} + 1 = \frac{233}{144}$$

$$a_{13} = \frac{1}{a_{12}} + 1 = \frac{144}{233} + 1 = \frac{377}{233}$$

$$a_{14} = \frac{1}{a_{13}} + 1 = \frac{233}{377} + 1 = \frac{610}{377}$$

$$a_{15} = \frac{1}{a_{14}} + 1 = \frac{377}{610} + 1 = \frac{987}{610}$$

$$a_{16} = \frac{1}{a_{15}} + 1 = \frac{610}{987} + 1 = \frac{1597}{987}$$

$$a_{17} = \frac{1}{a_{16}} + 1 = \frac{987}{1597} + 1 = \frac{2584}{1597}$$

$$a_{18} = \frac{1}{a_{17}} + 1 = \frac{1597}{2584} + 1 = \frac{4181}{2584}$$

$$a_{19} = \frac{1}{a_{18}} + 1 = \frac{2584}{4181} + 1 = \frac{6765}{4181}$$

$$a_{20} = \frac{1}{a_{19}} + 1 = \frac{4181}{6765} + 1 = \frac{10946}{6765}$$

$$a_{21} = \frac{1}{a_{20}} + 1 = \frac{6765}{10946} + 1 = \frac{17711}{10946}$$

$$a_{22} = \frac{1}{a_{21}} + 1 = \frac{10946}{17711} + 1 = \frac{28657}{17711}$$

$$a_2 = \frac{1}{a_1} + 1 = \frac{1}{1} + 1 = 2$$

$$a_3 = \frac{1}{a_2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$a_4 = \frac{1}{a_3} + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

$$a_5 = \frac{1}{a_4} + 1 = \frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5}$$

$$a_6 = \frac{1}{a_5} + 1 = \frac{5}{8} + 1 = \frac{13}{8}$$

$$a_7 = \frac{1}{a_6} + 1 = \frac{8}{13} + 1 = \frac{21}{13}$$

$$a_8 = \frac{1}{a_7} + 1 = \frac{13}{21} + 1 = \frac{34}{21}$$

$$a_9 = \frac{1}{a_8} + 1 = \frac{21}{34} + 1 = \frac{55}{34}$$

$$a_{10} = \frac{1}{a_9} + 1 = \frac{34}{55} + 1 = \frac{89}{55}$$

$$a_{11} = \frac{1}{a_{10}} + 1 = \frac{55}{89} + 1 = \frac{144}{89}$$

$$a_{12} = \frac{1}{a_{11}} + 1 = \frac{89}{144} + 1 = \frac{233}{144}$$

$$a_{13} = \frac{1}{a_{12}} + 1 = \frac{144}{233} + 1 = \frac{377}{233}$$

$$a_{14} = \frac{1}{a_{13}} + 1 = \frac{233}{377} + 1 = \frac{610}{377}$$

$$a_{15} = \frac{1}{a_{14}} + 1 = \frac{377}{610} + 1 = \frac{987}{610}$$

$$a_{16} = \frac{1}{a_{15}} + 1 = \frac{610}{987} + 1 = \frac{1597}{987}$$

$$a_{17} = \frac{1}{a_{16}} + 1 = \frac{987}{1597} + 1 = \frac{2584}{1597}$$

$$a_{18} = \frac{1}{a_{17}} + 1 = \frac{1597}{2584} + 1 = \frac{4181}{2584}$$

$$a_{19} = \frac{1}{a_{18}} + 1 = \frac{2584}{4181} + 1 = \frac{6765}{4181}$$

$$a_{20} = \frac{1}{a_{19}} + 1 = \frac{4181}{6765} + 1 = \frac{10946}{6765}$$

$$a_{21} = \frac{1}{a_{20}} + 1 = \frac{6765}{10946} + 1 = \frac{17711}{10946}$$

$$a_{22} = \frac{1}{a_{21}} + 1 = \frac{10946}{17711} + 1 = \frac{28657}{17711}$$

سراسری- ۱۴۰۰

۱۰. جمله چهاردهم دنباله بازگشتی $1 + \frac{1}{a_n} = a_{n+1}$ با فرض $a_{16} = \frac{1597}{987}$ کدام است؟

$$\frac{610}{377} \quad (4)$$

$$\frac{377}{233} \quad (3)$$

$$\frac{377}{610} \quad (2)$$

$$\frac{233}{377} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴ در دنباله بازگشتی با جایگذاری مقدار n جملات متوالی را بدست می‌آوریم.با داشتن a_{16} و رابطه بازگشتی مقدار a_{15} را به دست می‌آوریم:

$$a_{16} = \frac{1597}{987} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1 \Rightarrow a_{n+1} - 1 = \frac{1}{a_n} \Rightarrow a_n = \frac{1}{a_{n+1} - 1}$$

$$a_{15} = \frac{1}{a_{16} - 1} \text{ و } a_{16} - 1 = \frac{1597}{987} - 1 = \frac{1597 - 987}{987} = \frac{610}{987} \Rightarrow a_{15} = \frac{987}{610}$$

$$a_{14} = \frac{1}{a_{15} - 1} \text{ و } a_{15} - 1 = \frac{987}{610} - 1 = \frac{987 - 610}{610} = \frac{377}{610} \Rightarrow a_{14} = \frac{610}{377}$$

سراسری- ۱۳۹۹

۱۱. جمله پنجم از دنباله اعداد با رابطه $a_1 = 2$ و $a_{n+1} = \frac{2}{1 + a_n}$ کدام است؟

$$\frac{42}{43} \quad (4)$$

$$\frac{10}{11} \quad (3)$$

$$\frac{32}{31} \quad (2)$$

$$\frac{22}{21} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱ با توجه به رابطه بازگشتی دنباله داریم:

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}, \quad a_1 = 2$$

برای محاسبه جمله پنجم دنباله داریم:

$$\begin{cases} a_2 = \frac{2}{1+a_1} = \frac{2}{3} \\ a_3 = \frac{2}{1+a_2} = \frac{2}{\frac{5}{3}} = \frac{6}{5} \\ a_4 = \frac{2}{1+a_3} = \frac{2}{\frac{11}{5}} = \frac{10}{11} \\ a_5 = \frac{2}{1+a_4} = \frac{2}{\frac{21}{11}} = \frac{22}{21} \end{cases}$$

۱۲. کارفرمایی به یک کارگر مبتدی، در پایان هفته اول ۷۵۰ واحد پول دستمزد می‌دهد و متعهد می‌شود که در صورت رضایت کاری در پایان هر هفته، ۲۵ واحد پول بر دستمزد وی اضافه کند تا به دستمزد ثابت ۲۰۰۰ واحد پول برسد. با رضایت کاری در پایان کدام هفته، به دستمزد ثابت می‌رسد؟

سراسری-۱۳۹۵

۴۸ (۱) ۴۹ (۲) ۵۰ (۳) ۵۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۴ این مسأله نشان‌دهنده یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = 750$ و اختلاف مشترک $d = 25$ و جمله n ام $a_n = 2000$ است:

$$750, 775, \dots, 2000$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 2000 = 750 + (n-1)(25) \Rightarrow 2000 = 750 + 25n - 25$$

$$\Rightarrow 25n = 2000 - 750 + 25 \Rightarrow 25n = 1275 \Rightarrow n = \frac{1275}{25} = 51$$

خارج از کشور-۱۳۹۷

۱۳. در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله اول آن ۳۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۶۰ است. جمله هشتم این دنباله، کدام است؟

۲۶ (۱) ۲۹ (۲) ۳۰ (۳) ۳۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

مجموع سه جمله اول ۳۳ است. یعنی:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 33$$

مجموع سه جمله بعدی (یعنی a_4 و a_5 و a_6) برابر ۶۰ است. یعنی:

$$a_4 + a_5 + a_6 = 60$$

با ساده کردن دو معادله نوشته شده، بر حسب a_1 و d مسأله را حل می‌کنیم.

$$a_1 + a_2 + a_3 = 33 \Rightarrow a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 33 \Rightarrow 3a_1 + 3d = 33$$

$$a_4 + a_5 + a_6 = 60 \Rightarrow a_1 + 3d + a_1 + 4d + a_1 + 5d = 60 \Rightarrow 3a_1 + 12d = 60$$

دو معادله را در دستگاه قرار می‌دهیم و حل می‌کنیم.

$$\times (-1) \begin{cases} 3a_1 + 3d = 33 \\ 3a_1 + 12d = 60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3a_1 - 3d = -33 \\ 3a_1 + 12d = 60 \end{cases}$$

$$\frac{9d = 27 \Rightarrow d = 3}{}$$

با استفاده از یکی از معادلات a_1 به دست می‌آید.

$$3a_1 + 3d = 33 \xrightarrow{d=3} 3a_1 + 9 = 33 \Rightarrow 3a_1 = 24 \Rightarrow a_1 = 8$$

حال جمله هشتم را محاسبه می‌کنیم:

$$a_8 = a_1 + 7d = 8 + 7 \times (3) = 8 + 21 = 29$$

۱۴. مجموع ۵ جمله اول از یک دنباله حسابی صعودی مساوی ۶۰ و مجموع دو جمله بزرگتر سه برابر مجموع سه جمله کوچکتر است. اختلاف مشترک آن کدام است؟

سراسری-۱۳۹۳

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

پاسخ: گزینه ۴ به کمک روابط $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ و $a_n = a_1 + (n-1)d$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_5 = 60 \\ a_4 + a_5 = 3(a_1 + a_2 + a_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = 60 \\ a_1 + 3d + a_1 + 4d = 3(a_1 + 3d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a_1 + 10d = 60 \\ 2a_1 + 7d - 9a_1 - 9d = 0 \end{cases} \xrightarrow{\times 5} \begin{cases} 5a_1 + 10d = 60 \\ -7a_1 - 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a_1 + 10d = 60 \\ -35a_1 - 10d = 0 \end{cases}$$

$$-30a_1 = 60 \Rightarrow 5a_1 = \frac{60}{-30} = -2$$

$$-7a_1 - 2d = 0 \xrightarrow{a_1 = -2} -7(-2) - 2d = 0 \Rightarrow 14 = 2d \Rightarrow d = \frac{14}{2} = 7$$

۱۵. مجموع پنج عدد که جملات متوالی از دنباله حسابی اند برابر ۱۰۵، و مجموع سه عدد بزرگتر آن، ۶ برابر مجموع دو عدد کوچکتر آن است. بزرگترین این اعداد کدام است؟

سراسری-۱۳۸۹

۴۱ (۴)

۴۰ (۳)

۳۹ (۲)

۳۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ می توان پنج عدد را پنج جمله اول دنباله حسابی در نظر گرفت. بنابراین:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \xrightarrow{S_5=105} 105 = \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) \Rightarrow 105 = 5a_1 + 10d \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۵}} a_1 + 2d = 21$$

$$a_3 + a_4 + a_5 = 6(a_1 + a_2) \Rightarrow a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d = 6(a_1 + a_1 + d)$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 9d = 12a_1 + 6d \Rightarrow 12a_1 + 6d - 3a_1 - 9d = 0 \Rightarrow 9a_1 - 3d = 0$$

$$-9 \begin{cases} a_1 + 2d = 21 \\ 9a_1 - 3d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9a_1 - 18d = -189 \\ 9a_1 - 3d = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -21d = -189 \Rightarrow d = \frac{189}{21} = 9 \Rightarrow a_1 + 2(9) = 21 \Rightarrow a_1 = 21 - 18 = 3$$

$$\Rightarrow a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow a_5 = 3 + 4(9) = 39$$

سراسری-۱۳۹۸

۲۴۰۰ (۴)

۲۲۵۰ (۳)

۲۱۰۰ (۲)

۱۸۰۰ (۱)

۱۶. مجموع ۳۰ عدد طبیعی فرد متوالی، با کوچکترین عدد ۵۱، کدام است؟

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به اطلاعات داده شده دنباله حسابی زیر مدنظر است:

۵۱، ۵۳، ۵۵، ...

$$a_1 = 51, d_1 = 2, n = 30$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{30}{2}(2 \times 51 + (30-1) \times 2)$$

$$S_{30} = 30 \times (51 + 2) = 2400$$

خارج از کشور-۱۳۹۸

۳۵۰۰ (۴)

۳۴۷۵ (۳)

۳۴۶۵ (۲)

۳۴۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

...، ۱۴۴، ۱۴۷، ۱۵۰

۱۷. مجموع ۳۵ عدد طبیعی بخش پذیر بر ۳، که بزرگترین آن‌ها ۱۵۰ باشد، کدام است؟

دنباله موردنظر، یک دنباله حسابی با $d = 3$ است.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 150 = a_1 + 34 \times 3 \Rightarrow a_1 = 150 - 102 = 48$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{35(48 + 150)}{2} = 3465$$

سراسری-۱۳۹۷

۸۷۰ (۴)

۸۵۰ (۳)

۸۴۰ (۲)

۷۸۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

دنباله ۶۱، ۲۵، ۰۰۰، ۲۳، یک دنباله حسابی است. بنابراین:

$$a_1 = 23, d = 2, a_n = 61$$

$$a_n = a + (n - 1)d$$

$$\Rightarrow 61 = 23 + (n - 1) \times 2$$

$$\Rightarrow 61 - 23 = 2(n - 1)$$

$$\Rightarrow 38 = 2(n - 1)$$

$$\Rightarrow n - 1 = 19 \Rightarrow n = 20$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}(23 + 61) = 10 \times 84 = \boxed{840}$$

خارج از کشور- ۱۳۹۳

۱۹. در یک دنباله حسابی، مجموع ۷ جمله اول مساوی ۱۸۲ و جمله هشتم برابر ۵۴ است. جمله اول این دنباله کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d) \Rightarrow S_7 = \frac{7}{2}(2a_1 + (7 - 1)d) = 182$$

$$\Rightarrow 7a_1 + 21d = 182 \xrightarrow{\div 7} a_1 + 3d = 26, \quad a_8 = 54 \Rightarrow a_1 + 7d = 54$$

$$\begin{cases} a_1 + 3d = 26 \\ a_1 + 7d = 54 \end{cases} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} -a_1 - 3d = -26 \\ a_1 + 7d = 54 \end{cases} \Rightarrow 4d = 28 \Rightarrow d = \frac{28}{4} = 7$$

$$a_1 + 3d = 26 \xrightarrow{d=7} a_1 + 3(7) = 26 \Rightarrow a_1 = 26 - 21 = 5$$

سراسری- ۱۳۹۹

۲۰. در یک دنباله حسابی، مجموع ۹ جمله اول برابر ۹۰ و جمله هفتم آن ۱۳ است. اختلاف جملات متوالی، کدام است؟

۳ (۴)

۲٫۵ (۳)

۲ (۲)

۱٫۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ اختلاف جملات متوالی همان d است.

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$$

$$S_9 = 90 \Rightarrow \frac{9}{2}(2a_1 + 8d) = 90 \Rightarrow 9a_1 + 36d = 90 \quad (1)$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow a_7 = 13 = a_1 + 6d \quad (2)$$

در نتیجه بنابر (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} 9a_1 + 36d = 90 \\ a_1 + 6d = 13 \end{cases} \xrightarrow{\times(-9)} \begin{cases} 9a_1 + 36d = 90 \\ -9a_1 - 54d = -117 \end{cases} \Rightarrow -18d = -27$$

$$\Rightarrow d = \frac{27}{18} = \frac{3}{2} = 1.5$$

خارج از کشور- ۱۳۹۶

۲۱. مجموع اعداد طبیعی دو رقمی بخش پذیر بر ۳، کدام است؟

۱۷۵۵ (۴)

۱۶۹۵ (۳)

۱۶۶۵ (۲)

۱۶۳۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا اعداد طبیعی دو رقمی بخش پذیر بر ۳ را می نویسیم: ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹. اختلاف مشترک ۳ دارند. بنابراین:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow 99 = 12 + (n - 1)(3) \Rightarrow 99 = 12 + 3n - 3 \Rightarrow 90 = 3n \Rightarrow n = 30$$

بنابراین تعداد جملات ۳۰ تا است و با داشتن جمله اول و جمله آخر مجموع جملات دنباله را به دست می آوریم.

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{30} = \frac{30}{2}(12 + 99) = 15 \times 111 = 1665$$

۲۲. شخصی در ماه اول A تومان پس‌انداز کرده و در هر ماه به اندازه $\left(\frac{1}{20}A\right)$ بیشتر از ماه قبل پس‌انداز می‌کند تا مقدار پس‌انداز یک ماه آن به دو برابر پس‌انداز ماه اول برسد. اگر در این زمان، مجموع پس‌انداز وی ۶۳۰۰۰ تومان باشد، اولین پس‌انداز وی چه قدر بوده است؟

سراسری-۱۳۹۲

۲۴۰۰ (۴)

۲۲۰۰ (۳)

۲۰۰۰ (۲)

۱۶۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ اگر پس‌انداز این شخص در هر یک از ماه‌های اول، دوم، ... و m ام را با $a_1, a_2, \dots, a_n$ نمایش دهیم، باتوجه به فرض مسئله داریم:

$$a_1 = A$$

$$a_2 = A + \frac{1}{20}A$$

$$a_3 = A + \frac{1}{20}A + \frac{1}{20}A = A + 2 \times \frac{1}{20}A$$

⋮

$$a_n = A + \underbrace{\frac{1}{20}A + \dots + \frac{1}{20}A}_{(n-1) \text{ تا}} = A + (n-1) \times \frac{1}{20}A$$

بنابراین دنباله $a_1, a_2, \dots$ یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = A$ و قدر نسبت $d = \frac{1}{20}A$ است.

حال به دنبال زمانی هستیم که در آن ماه پس‌انداز برابر با $2A$ گردد، پس داریم:

$$a_n = 2A \Rightarrow a_1 + (n-1)d = 2A \Rightarrow A + (n-1)\frac{A}{20} = 2A$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)}{20}A = A \Rightarrow \frac{n-1}{20} = 1 \Rightarrow n-1 = 20 \Rightarrow n = 21$$

پس در ماه ۲۱م پس‌انداز این شخص $2A$ تومان می‌گردد و در این زمان، مجموع همه پس‌اندازهای وی، یعنی $(a_1 + \dots + a_{21})$ برابر با ۶۳۰۰۰ تومان است. پس باتوجه به فرمول مجموع n جمله اول دنباله حسابی داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \xrightarrow{S_{21}=63000} 63000 = \frac{21}{2}(2A + 20(\frac{1}{20}A))$$

$$\Rightarrow 126000 = 21 \underbrace{(2A + A)}_{3A} \Rightarrow 126000 = 63A \Rightarrow A = \frac{126000}{63} = 2000$$

سراسری-۱۴۰۱

۲۳. اگر جمله اول و پنجم یک دنباله حسابی به ترتیب ۳ و ۱۱ باشد، جمله دهم این دنباله کدام است؟

۲۴ (۴)

۲۳ (۳)

۲۲ (۲)

۲۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ با توجه به فرمول جمله عمومی دنباله حسابی $a_n = a_1 + (n-1)d$ داریم:

$$a_1 = 3, a_5 = 11 \Rightarrow 11 = 3 + 4d \Rightarrow 4d = 8 \Rightarrow d = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9d = 3 + 9 \times 2 = 21$$

خارج از کشور-۱۴۰۱

۲۴. در یک دنباله حسابی، اختلاف مشترک ۰٫۵- و مجموع دوازده جمله اول برابر ۹ است. جمله اول این دنباله، کدام است؟

 $\frac{7}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{7}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$d = -0.5, s_{12} = 9$$

$$s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow 9 = \frac{12}{2}(2a_1 + 11 \times (-0.5)) \Rightarrow 9 = 6(2a_1 - 5.5) \Rightarrow \frac{9}{6} = 2a_1 - 5.5 \Rightarrow 1.5 + 5.5 = 2a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{7}{2}$$

سراسری-۱۴۰۰

۲۵. مجموع ۱۰ جمله اول یک دنباله حسابی ۲۶- و نسبت جمله پانزدهم به جمله ششم دنباله ۶ است. جمله یازدهم دنباله کدام است؟

-۱۶٫۸ (۴)

-۱۵٫۶ (۳)

-۱۴٫۸ (۲)

-۱۳٫۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ جمله عمومی دنباله حسابی برابر است با: $a_n = a_1 + (n-1)d$ و مجموع جملات دنباله حسابی برابر است با: $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ ، بنابراین داریم:

$$S_{10} = -26 \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2} (2a_1 + 9d) = 10a_1 + 45d = -26 \quad (1)$$

$$\frac{a_{15}}{a_6} = 6 \Rightarrow \frac{a_1 + 14d}{a_1 + 5d} = 6 \Rightarrow a_1 + 14d = 6a_1 + 30d \Rightarrow 5a_1 + 16d = 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} 10a_1 + 45d = -26 \\ 5a_1 + 16d = 0 \end{cases} \xrightarrow{\times -2} \begin{cases} 10a_1 + 45d = -26 \\ -10a_1 - 32d = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{45d - 32d = -26} 13d = -26 \Rightarrow d = -2$$

$$\Rightarrow 5a_1 + 16d = 0 \xrightarrow{d=-2} a_1 = \frac{-16(-2)}{5} = \frac{32}{5}$$

$$\Rightarrow a_{11} = a_1 + 10d = \frac{32}{5} + 10(-2) = -13\frac{6}{5}$$

خارج از کشور- ۱۳۹۹

۲۶. در یک دنباله حسابی، مجموع جملات سوم، پنجم و سیزدهم برابر ۷۵ است. جمله هفتم، کدام است؟

۲۹ (۴)

۲۵ (۳)

۲۴ (۲)

۲۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ بنابر اطلاعات سؤال داریم:

$$a_3 + a_5 + a_{13} = 75$$

از طرفی می‌دانیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

در نتیجه:

$$(a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 12d) = 75 \Rightarrow 3a_1 + 18d = 75 \xrightarrow{\div 3} a_1 + 6d = 25 \xrightarrow{a_7 = a_1 + 6d} a_7 = 25$$

فصل سوم: الگوهای غیرخطی

۲۷. به علت تورّم، بر قیمت کالایی به‌طور یکنواخت هر سال ۱۰ درصد افزوده می‌شود. در سال پنجم، قیمت این کالا، چند برابر قیمت سال اول می‌شود؟

خارج از کشور- ۱۳۹۵

۱,۴۷۵۱ (۴)

۱,۴۶۴۱ (۳)

۱,۳۷۶۱ (۲)

۱,۳۳۲۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

قیمت کالا را x در نظر می‌گیریم که قرار است هر سال ۱۰٪ به آن افزوده شود:

$$x + \frac{10}{100}x = x + 0.1x = 1.1x$$

پس در هر سال، قیمت‌ها در ۱٫۱ ضرب می‌شوند، به عبارت دیگر، یک دنباله هندسی با نسبت مشترک (۱٫۱) می‌سازند و داریم:

$$\frac{a_5}{a_1} = \frac{a_1 r^4}{a_1} = r^4 = (1.1)^4 = ((1.1)^2)^2 = (1.21)^2 = 1.4641$$

خارج از کشور- ۱۳۹۴

۲۸. در یک دنباله هندسی ۶ جمله‌ای، مجموع دو جمله اول ۸۱ و مجموع دو جمله آخر ۱۶ می‌باشد. مجموع این ۶ جمله، کدام است؟

۱۱۵ (۴)

۱۲۴ (۳)

۱۲۸ (۲)

۱۳۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ به کمک فرمول جمله عمومی دنباله هندسی $a_n = a_1 r^{n-1}$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_n = a_1 r^{n-1} \\ a_1 + a_6 = 81 \xrightarrow{a_n = a_1 r^{n-1}} a_1 + a_1 r = 81 \Rightarrow a_1(1+r) = 81 \quad (1) \\ a_5 + a_2 = 16 \xrightarrow{a_n = a_1 r^{n-1}} a_1 r^4 + a_1 r = 16 \Rightarrow a_1 r^4(1+r) = 16 \quad (2) \end{cases}$$

حال، دو عبارت به دست آمده را بر هم تقسیم می‌کنیم، در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow \frac{a_1(1+r)}{a_1 r^4(1+r)} = \frac{81}{16} \Rightarrow \frac{1}{r^4} = \frac{81}{16} \Rightarrow r^4 = \frac{16}{81} \quad (3)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 97 + a_3 + a_4 = 97 + a_1 r^2 + a_1 r^3 = 97 + a_1 r^2(1+r) \stackrel{a_1(1+r)=81}{=} 97 + 81r^2 = 97 + 81\sqrt{r^4} \stackrel{(3)}{=} 97 + 81\sqrt{\frac{16}{81}} = 97 + 16 = 113$$

۲۹. بین دو عدد ۴ و ۹۷۲، چهار عدد صحیح طوری قرار می‌دهیم که جملات دنباله هندسی از ۴ شروع و به ۹۷۲ ختم شوند. مجموع این ۶ عدد، کدام است؟

سراسری-۱۳۹۸

۱۶۵۴ (۴)

۱۵۴۶ (۳)

۱۴۶۸ (۲)

۱۴۵۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

جملات دنباله را به صورت زیر در نظر می‌گیریم و به کمک جمله عمومی $a_n = a_1 r^{n-1}$ مقدار نسبت مشترک را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} & 4, -, -, -, -, 972 \\ & \downarrow \qquad \qquad \downarrow \quad a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_6 = a_1 r^5 \Rightarrow 972 = 4 \times r^5 \Rightarrow r^5 = 243 = 3^5 \Rightarrow r = 3 \\ & a_1 \qquad \qquad a_6 \\ & S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow S_6 = \frac{a_1(1-r^6)}{1-r} \stackrel{a_1=4, r=3}{=} \frac{4(1-3^6)}{1-3} = 1456 \end{aligned}$$

۳۰. در یک دنباله هندسی، جمله اول ۲۲۴ و نسبت مشترک برابر $\frac{1}{3}$ و جمله n ام آن ۷ است. مجموع جملات این دنباله از ۲۲۴ تا عدد ۷ و خود این اعداد، کدام است؟

خارج از کشور-۱۳۹۸

۴۵۸ (۴)

۴۴۱ (۳)

۴۲۰ (۲)

۳۶۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ روش اول:

$$\begin{aligned} & \times \frac{1}{3} \quad \times \frac{1}{3} \\ & \swarrow \quad \searrow \\ & 224, 112, 56, 28, 14, 7 \Rightarrow \text{مجموع جملات} = 224 + 112 + 56 + 28 + 14 + 7 = 441 \end{aligned}$$

روش دوم:

$$a_1 = 224, \quad r = \frac{1}{3}, \quad a_n = 7$$

$$a_n = a_1 \times r^{n-1} \Rightarrow 7 = 224 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{7}{224} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow n-1 = 5 \Rightarrow n = 6$$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{a_1(r^6 - 1)}{r - 1}$$

$$\Rightarrow S_6 = \frac{224 \times \left(\left(\frac{1}{3}\right)^6 - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{224 \times \left(\frac{1}{6^4} - 1\right)}{\frac{-1}{3}} = 441$$

خارج از کشور-۱۳۹۰

۳۱. در یک دنباله هندسی، هر جمله $\frac{2}{3}$ جمله قبلی آن است. اگر مجموع پنج جمله اول آن $\frac{211}{27}$ باشد، جمله اول کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ چون هر جمله، $\frac{2}{3}$ جمله قبلی خود است یعنی نسبت مشترک برابر $\frac{2}{3}$ است.

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \rightarrow S_5 = \frac{a_1(1-(\frac{2}{3})^5)}{1-\frac{2}{3}} \rightarrow \frac{211}{27} = \frac{a_1(1-\frac{32}{243})}{\frac{1}{3}}$$

$$\rightarrow \frac{211}{27} = 3a_1(\frac{211}{243}) \rightarrow \frac{1}{27} = \frac{3a_1}{243} \rightarrow \frac{1}{27} = \frac{a_1}{81} \rightarrow 27a_1 = 81 \rightarrow a_1 = \frac{81}{27} = 3$$

سراسری-۱۳۹۴

۳۲. در یک دنباله هندسی، جمله چهارم ۸ برابر جمله اول است. اگر جمله ششم ۲۴ باشد، مجموع شش جمله اول آن، کدام است؟

۴۸٫۵ (۴)

۴۷٫۷۵ (۳)

۴۷٫۵ (۲)

۴۷٫۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_6 = 8a_1 \rightarrow a_1 r^5 = 8a_1 \Rightarrow r^5 = 8 = 2^3 \Rightarrow r = 2$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_6 = 24 \rightarrow a_1 r^5 = 24 \xrightarrow{r=2} 32a_1 = 24 \Rightarrow a_1 = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \rightarrow S_6 = \frac{a_1(1-r^6)}{1-r} = \frac{\frac{3}{4}(1-2^6)}{1-2} = -\frac{3}{4}(1-64) = \frac{3 \times 63}{4} = \frac{189}{4} = 47.25$$

خارج از کشور-۱۳۹۸

۳۳. حاصل $2^{-\frac{1}{3}}(\sqrt[3]{16})(\frac{1}{4})^{-0.5}$ ، کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

 $\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$2^{-\frac{1}{3}} \times (\sqrt[3]{16})^{-0.5} = 2^{-\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}} \times 2^{-1} = 2^2 = 4$$

$$\downarrow$$

$$(\frac{1}{2^2})^{-0.5} = (2^{-2})^{-0.5}$$

خارج از کشور-۱۳۹۱

۳۴. در یک دنباله هندسی با نسبت مشترک $\frac{1}{2}$ ، اگر مجموع هشت جمله اول $\frac{63}{4}$ باشد، جمله پنجم کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا عدد مرکب را تبدیل به کسر می کنیم ($\frac{63}{4} = \frac{255}{4}$) سپس از فرمول مجموع جملات استفاده می کنیم.

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \rightarrow \frac{255}{4} = \frac{a_1(1-(\frac{1}{2})^8)}{1-\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{255}{4} = \frac{a_1(1-\frac{1}{256})}{\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow \frac{255}{4} = 2a_1(\frac{255}{256}) \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{a_1}{128} \rightarrow 4a_1 = 128 \rightarrow a_1 = \frac{128}{4} = 32$$

$$a_5 = a_1 \times r^4 \Rightarrow a_5 = 32 \times (\frac{1}{2})^4 = 32 \times \frac{1}{16} = 2$$

سراسری-۱۴۰۱

۳۵. در یک دنباله هندسی، جمله هشتم، ۸۱ برابر جمله چهارم است. اگر جمله سوم برابر ۱۸- باشد، جمله پنجم چقدر از جمله هفتم بیشتر است؟

۱۲۹۶ (۴)

۱۰۵۶ (۳)

۹۷۲ (۲)

۸۹۱ (۱)

$$۴^۲ = ۲ \times z \Rightarrow ۱۶ = ۲z \Rightarrow z = \frac{۱۶}{۲} = ۸$$

سراسری-۱۴۰۰

۳۹. اگر x, z, y و $x - \frac{۳}{۲}$ جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار $|x| + |y| + |z|$ کدام است؟

۷ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ در دنباله هندسی زیر، به کمک جمله عمومی نسبت جملات نسبت جملاتی که شامل x است را دوبه دو به دست می آوریم. جمله عمومی دنباله هندسی برابر است با:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\underbrace{x - \frac{۳}{۲}}_{a_1}, \underbrace{y}_{a_۲}, \underbrace{x}_{a_۳}, \underbrace{z}_{a_۴}, \underbrace{۴x}_{a_۵}$$

$$\frac{a_۵}{a_۳} = \frac{a_1 r^۴}{a_1 r^۲} = r^۲ = \frac{۴x}{x} = ۴ \Rightarrow r^۲ = ۴$$

$$\frac{a_۳}{a_1} = \frac{a_1 r^۲}{a_1} = r^۲ = \frac{x}{x - \frac{۳}{۲}} \Rightarrow r^۲ = ۴ = \frac{x}{x - \frac{۳}{۲}} \Rightarrow x = ۴x - ۶ \Rightarrow ۳x = ۶ \Rightarrow x = ۲$$

$r^۲ = ۴$ می باشد، در نتیجه $r = \pm ۲$ است ولی از آنجایی که حاصل قدرمطلق جملات را جمع می کند، مثبت یا منفی در نظر گرفتن r فرقی نمی کند.

$$x = ۲, r = ۲ \Rightarrow \cancel{۲ - \frac{۳}{۲}}, ۱, ۲, ۴, ۸ \Rightarrow |x| + |y| + |z| = ۱ + ۲ + ۴ = ۷$$

سراسری-۱۴۰۰

۴۰. مقدار عبارت $\frac{1}{۳^{۲۵۶}} \times \frac{1}{۳^{۱۶}} \times \frac{1}{۳^{۸}} \times \frac{1}{۳^{۴}} \dots$ کدام است؟

۳۵۱۲ (۴)

۳۲۵۶ (۳)

۳۵۱۲ (۲)

۳۲۵۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ در صورت سؤال حاصل ضرب اعداد توان دار را داریم که پایه ها با هم مساوی هستند، بنابراین توان ها با هم جمع می شوند.

$$\frac{1}{۳^۴} \times \frac{1}{۳^۸} \times \frac{1}{۳^{۱۶}} \times \dots \frac{1}{۳^{۲۵۶}} \rightarrow ۳^{(\frac{1}{۴} + \frac{1}{۸} + \frac{1}{۱۶} + \dots + \frac{1}{۲۵۶})}$$

اعداد فوق، تشکیل دنباله هندسی با جمله اول $\frac{1}{۴}$ و نسبت مشترک $\frac{1}{۲}$ را می دهند. بنابراین، کفایت تعداد جملات را به دست آوریم.

$$a_n = \frac{1}{۲۵۶} \rightarrow a_1 r^{n-1} = \frac{1}{۲۵۶} \xrightarrow{a=\frac{1}{۴}} \frac{1}{۴} r^{n-1} = \frac{1}{۲۵۶}$$

$$r^{n-1} = \frac{۴}{۲۵۶} = \frac{1}{۶۴} \xrightarrow{r=\frac{1}{۲}} \left(\frac{1}{۲}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{۲}\right)^۶ \Rightarrow n-1 = ۶ \Rightarrow n = ۷$$

بنابراین مجموع جملات دنباله هندسی برابر است با:

$$S_n = a_1 \left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) \Rightarrow S_۷ = \frac{1}{۴} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{۲}\right)^۷}{1 - \frac{1}{۲}}\right) = \frac{1}{۲} \left(\frac{1 - \frac{1}{۱۲۸}}{1}\right) = \frac{1}{۲} \left(\frac{۱۲۷}{۱۲۸}\right) = \frac{۱۲۷}{۲۵۶}$$

عبارت مطلوب: $\frac{۱۲۷}{۲۵۶}$

خارج از کشور-۱۳۹۹

۴۱. جمله های دوم و پنجم یک دنباله هندسی، به ترتیب، $\frac{1}{۲}$ و ۴ هستند. مجموع هشت جمله اول دنباله، کدام است؟

۶۷٫۷۵ (۴)

۶۴٫۵ (۳)

۶۳٫۷۵ (۲)

۶۳٫۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ به کمک جمله عمومی دنباله هندسی $a_n = a_1 r^{n-1}$ خواهیم داشت:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_۲ = \frac{1}{۲} \Rightarrow a_1 r = \frac{1}{۲} \quad (۱)$$

$$a_۵ = ۴ \Rightarrow a_1 r^۴ = ۴ \quad (۲)$$

از تقسیم رابطه (۲) بر (۱) داریم:

$$\frac{a_1 r^6}{a_1 r} = \frac{4}{\frac{1}{2}} \Rightarrow r^5 = 8 \Rightarrow r^5 = 2^3 \Rightarrow r = 2$$

با جایگذاری $r = 2$ در رابطه (۱) داریم:

$$a_1 r = \frac{1}{2} \xrightarrow{r=2} 2a_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{4}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

پس:

$$S_8 = \frac{\frac{1}{4}(2^8 - 1)}{2 - 1} = \frac{1}{4}(256 - 1) = \frac{255}{4} = 63,75$$

سراسری-۱۳۹۹

۴۲. مجموع هشت جمله اول دنباله هندسی، ۱۶،۰۰۰، ۳۲، ۶۴، کدام است؟

۱۲۷ (۴)

۱۲۷,۵ (۳)

۱۲۸ (۲)

۱۲۸,۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ در این دنباله نزولی خواهیم داشت:

$$64, 32, 16, \dots \rightarrow \begin{cases} a_1 = 64 \\ r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{32}{64} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

با توجه به فرمول مجموع جملات دنباله هندسی:

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \rightarrow S_8 = \frac{64(1 - (\frac{1}{2})^8)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{64 \times \frac{255}{256}}{\frac{1}{2}} = 128 \times \frac{255}{256} = 127,5$$

خارج از کشور-۱۳۹۷

۴۳. حاصل $\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} + (1 + \sqrt{2})^2$ کدام است؟

۶ (۴)

$4\sqrt{2}$ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} + (1 + \sqrt{2})^2$$

ابتدا مخرج کسر را گویا می‌کنیم و سپس با اتحاد مربع دو جمله‌ای حاصل پرانتز را به دست می‌آوریم و در نهایت دو عبارت را با هم جمع می‌کنیم.

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{4 - 2} = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$(1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

دو عبارت را جمع می‌کنیم:

$$3 - 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} = 6$$

سراسری-۱۳۹۷

۴۴. حاصل عبارت $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{6}}{\sqrt{2}} - \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$ کدام است؟

۴ (۴)

$2\sqrt{3}$ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

به کمک گویا کردن مخرج کسرها خواهیم داشت:

$$\frac{\sqrt{8} + \sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \times \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{1 + 3 - 2\sqrt{3}}{1 - 3} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{-2} = -2 + \sqrt{3}$$

$$\text{پس : } \frac{\sqrt{8} + \sqrt{6}}{\sqrt{2}} - \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} - (-2 + \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$$

سراسری-۱۳۹۸

۴۵. حاصل $8^{-\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{7}{6}}$ ، کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

 $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$2^{\frac{7}{6}} \times 4^{\frac{1}{2}} \times 8^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{7}{6}} \times 2^{2 \times \frac{1}{2}} \times 2^{3 \times (-\frac{1}{3})} = 2^{\frac{7}{6}} \times 2^{\frac{2}{2}} \times 2^{-1} = 2^{\frac{7}{6}} \times 2^1 \times 2^{-1} = 2^{\frac{7}{6}} \times 2^{1-1} = 2^{\frac{7}{6}} \times 2^0 = 2^{\frac{7}{6}} \times 1 = 2^{\frac{7}{6}}$$

خارج از کشور-۱۳۹۷

۴۶. ساده شده عبارت $(12)^{-2} (32)^3 (0.75)^5$ ، کدام است؟

۵۴ (۴)

۳۶ (۳)

۲۷ (۲)

۱۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

برای ساده کردن عبارت فوق داریم:

$$(0.75)^5 (32)^3 (12)^{-2} =$$

$$\begin{cases} \left(\frac{75}{100}\right)^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \left(\frac{3}{2^2}\right)^5 = \frac{3^5}{2^{10}} \\ (32)^3 = (2^5)^3 = 2^{15} \\ 12^{-2} = (3 \times 2^2)^{-2} = 3^{-2} \times 2^{-4} = \frac{1}{3^2 \times 2^4} \end{cases}$$

$$= \frac{3^5}{2^{10}} \times \frac{2^{15}}{1} \times \frac{1}{3^2 \times 2^4} = 3^3 \times 2 = 27 \times 2 = 54$$

سراسری-۱۳۹۷

عبارت را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

۴۷. ساده شده عبارت $6^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} (0.25)^4$ ، کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۲ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$(0.25)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \times 6^4 = \left(\frac{25}{100}\right)^4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 \times (2 \times 3)^4$$

$$\left(\frac{1}{2^2}\right)^4 \times \frac{(2^2)^3}{3^3} \times 2^4 \times 3^4 = \frac{1}{2^8} \times \frac{2^6}{3^3} \times 2^4 \times 3^4$$

$$= \frac{\cancel{2^2}^2 \times \cancel{2^2}^2 \times \cancel{2^2}^2 \times \cancel{2^2}^2 \times \cancel{3}^3 \times \cancel{3}^3 \times \cancel{3}^3 \times \cancel{3}^3}{\cancel{2}^2 \times \cancel{2}^2 \times \cancel{2}^2 \times \cancel{2}^2 \times \cancel{3}^3 \times \cancel{3}^3 \times \cancel{3}^3 \times \cancel{3}^3} = \frac{2^2 \times 3}{1} = 4 \times 3 = 12$$

سراسری-۱۴۰۱

۴۸. حاصل عبارت $\sqrt{3}(\sqrt{96} - \sqrt{12}) - \sqrt{162} + \sqrt{72} \times \sqrt{3}$ ، کدام است؟ $\sqrt{6}$ (۴) $\sqrt{18}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\sqrt{3} \times \sqrt{72} + \sqrt{3}(\sqrt{96} - \sqrt{12}) - \sqrt{162} = \sqrt{3 \times 72} + \sqrt{3 \times 96} - \sqrt{3 \times 12} - \sqrt{162}$$

$$= \sqrt{3 \times 2^3 \times 3^2} + \sqrt{2 \times 8 \times 3} - \sqrt{3 \times 2} - \sqrt{2 \times 81} = 3 \times 2 + \sqrt{144 \times 2} - 6 - 9\sqrt{2} = 6 + 12\sqrt{2} - 6 - 9\sqrt{2} = 3\sqrt{2} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{18}$$

خارج از کشور - ۱۴۰۱

۴۹. از تساوی $(-\frac{1}{3})^x = 9^{x-1} \times (81)^{-1}$ ، مقدار x کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

۴ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۴ ابتدا دو طرف تساوی را به صورت توانی از ۳ یا ۳- می نویسیم:

$$(81)^{-1} \times 9^{x-1} = (-\frac{1}{3})^x \Rightarrow 3^{-4} \times 3^{2x-2} = (-3)^{-x} \Rightarrow (3)^{2x-6} = (-3)^{-x}$$

اگر x زوج باشد $(-3)^{-x} = (3)^{-x}$ مقداری مثبت دارد و با 3^{-x} برابر است، در نتیجه:

$$2x - 6 = -x \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

خارج از کشور - ۱۴۰۰

۵۰. اگر $3^A \times 12^B = \frac{\frac{1}{3^4} \times \frac{1}{3^8} \times \frac{1}{9^{32}} \times \frac{1}{9^{64}}}{\frac{1}{3^2} \times \frac{1}{4^2} \times \frac{3}{3^8} \times \frac{3}{4^8}}$ باشد، مقدار $A + B$ ، کدام است؟ $-\frac{13}{16}$ (۴) $\frac{13}{16}$ (۳) $\frac{13}{32}$ (۲) $-\frac{13}{32}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{\frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^8} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{64}}{\frac{1}{3^2} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4^2} + \frac{3}{8}} = 3^A \times (2^2 \times 3)^B = 3^{A+B} \times 2^{2B} \Rightarrow \frac{\frac{16+8+4+2}{64}}{\frac{3}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4}} = 3^{A+B} \times 2^{2B} \Rightarrow \frac{3}{64} - \frac{3}{64} \times \frac{1}{4} = 3^{A+B} \times 2^{2B}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B = \frac{30}{64} - \frac{3}{64} = \frac{27}{64} = -\frac{13}{32} \\ B = -\frac{3}{64} \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{27}{64} + \frac{3}{64} = \frac{-24+3}{64} = \frac{-21}{64} = \frac{15}{32}$$

البته دقت کنید که قبل از به دست آوردن مقدار A مقدار $A+B = -\frac{13}{32}$ را که مورد سؤال است، به دست آورده ایم.۵۱. کربن یک استخوان فسیل شده ۳۵ درصد مقدار معمولی C^{14} است. اگر زمان نیم عمر ۵۷۰۰ سال و عدد $\frac{20}{y}$ معادل $2\sqrt{2}$ فرض شود، قدمت این استخوان

خارج از کشور - ۱۳۹۰

کدام است؟

۸۵۵۰ (۴)

۸۴۵۰ (۳)

۷۹۵۰ (۲)

۷۸۵۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{20}{y} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow b = (\frac{1}{2})^T \Rightarrow \frac{35}{100} = (\frac{1}{2})^T \Rightarrow \frac{y}{20} = (\frac{1}{2})^T \xrightarrow{\text{گویا می کنیم}} \frac{1}{2\sqrt{2}} = (\frac{1}{2})^T \xrightarrow{\text{گویا می کنیم}} \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{2})^T$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{4} = (\frac{1}{2})^T \rightarrow \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^2} = (2^{-1})^T \rightarrow 2^{\frac{1}{2}-2} = 2^{-T}$$

$$\rightarrow -\frac{3}{2} = -T \rightarrow T = \frac{3}{2}$$

$$(5700 \times \text{دوره} \times \text{نیمه عمر} = \text{عمر (قدمت)}) \Rightarrow 5700 \times \frac{3}{2} = 8550$$

خارج از کشور - ۱۴۰۰

۵۲. نمودار تابع با ضابطه $y = a(\frac{1}{3})^x$ در نقطه ای به عرض ۴، محور y ها را قطع می کند. مقدار تابع در $x = -2$ ، کدام است؟

۳۶ (۴)

۲۷ (۳)

 $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$y = a(\frac{1}{3})^x$$

نقطه ای به عرض ۴ روی محور y ها نقطه $(4, 0)$ است. بنابراین:

$$\Rightarrow 4 = a\left(\frac{1}{3}\right)^0 \Rightarrow 4 = a \times 1 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow y = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x \xrightarrow{x=-2} y = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 4 \times 9 = 36$$

۵۳. نمودار تابع با ضابطه $f(x) = a\left(\frac{1}{3}\right)^x + b$ محور x ها را با طول ۱- و محور y ها را با عرض ۲ قطع می‌کند. مقدار تابع f در $x = 1$ کدام است؟

سراسری- ۱۴۰۰

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ براساس صورت سؤال، هنگامی که محور x ها را با طول ۱- قطع می‌کند، یعنی: $f(-1) = 0$ و وقتی محور y ها را با عرض ۲ قطع می‌کند، یعنی: $f(0) = 2$ بنابراین داریم:

$$f(x) = a\left(\frac{1}{3}\right)^x + b \xrightarrow{f(-1)=0} a\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + b = 0 \Rightarrow 2a + b = 0$$

$$\xrightarrow{f(0)=2} a\left(\frac{1}{3}\right)^0 + b = 2 \Rightarrow a + b = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a + b = 0 \\ a + b = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} 2a - a = -2 \\ a = -2 \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a + b = 0 \\ a = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2(-2) + b = 0 \\ b = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = -2\left(\frac{1}{3}\right)^x + 4 \xrightarrow{x=1} f(1) = -2\left(\frac{1}{3}\right)^1 + 4 = -1 + 4 = 3$$

$$a + b = 2 \xrightarrow{a=-2} -2 + b = 2 \Rightarrow b = 4$$



math-pilevar.ir