



نمونه سوالات فصل

مشتق

حسابان (۲)

پایه دوازدهم دوره متوسطه دوم

به کوشش: مرتضی معینی



بهار ۹۹

گروه ریاضی آموزش و پرورش ناحیه دو کرج

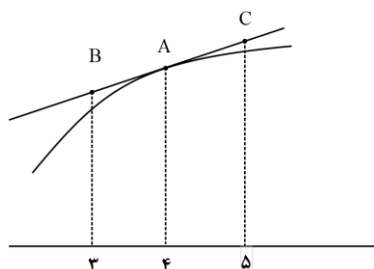
با استفاده از تعریف مشتق، مشتق توابع زیر را در نقاط داده شده محاسبه کنید.

الف) $f(x) = -x^2 + 10x, x = 2$

ب) $g(x) = x^2 + 3, x = -2$

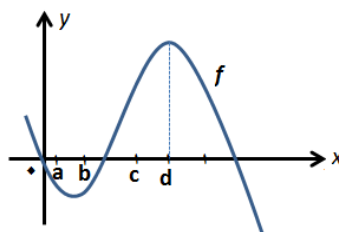
با استفاده از تعریف مشتق، معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ در نقطه ای به طول ۲ واقع بر آن را بنویسید.

برای تابع f در شکل روبرو داریم $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 24$ با توجه به شکل، مختصات نقاط A, B و C را بیابید.



با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول های a و b و c و d را با مشتق های داده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
	۰
	$1/5$
	۲
	$-1/5$



نقاط A, B, C, D, E, F, G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید بطوریکه:

الف) نقطه ای روی نمودار که شیب آن منفی است.

ب) نقطه ای روی نمودار تابع که مقدار تابع و مقدار مشتق در این نقطه منفی است.

پ) نقطه ای روی نمودار تابع که مقدار تابع در آن صفر است و مقدار مشتق در این نقطه مثبت است.

ت) نقطه ای روی نمودار تابع که مقدار مشتق در این نقطه صفر است.

ث) نقاط F, E متفاوت هستند و مشتق یکسانی دارند.

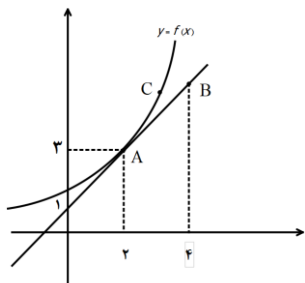
س) نقطه ای روی نمودار تابع که مقدار تابع در آن مثبت است و مقدار مشتق در این نقطه منفی است.

در شکل روبرو نمودار تابع f و خط مماس بر منحنی آن در نقطه ای $x = 2$ داده شده است:

الف) مشتق تابع f را در نقطه ای $x = 2$ را بیابید.

ب) عرض نقطه B چقدر است؟

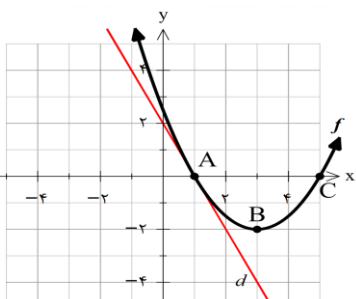
پ) شیب نمودار منحنی در نقطه C روی منحنی را با شیب خط $y = x$ مقایسه کنید.

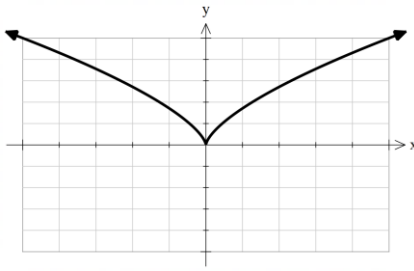
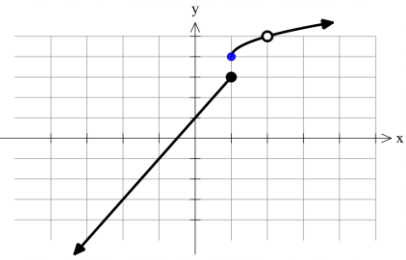
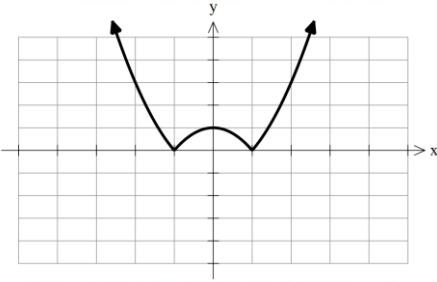
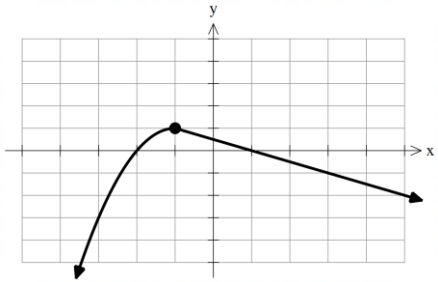
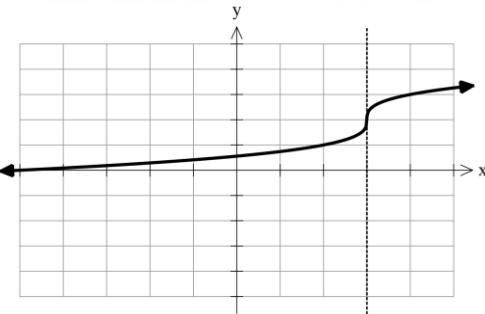
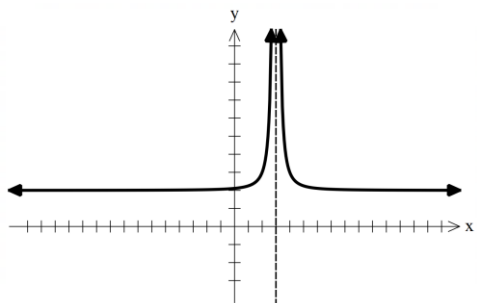
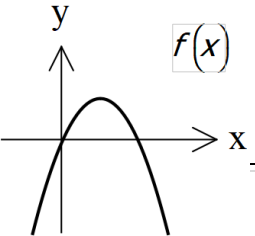
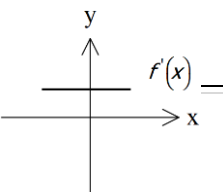
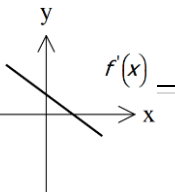
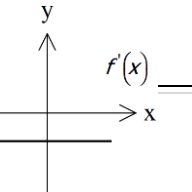


در نمودار مقابل خط d در نقطه $x = 1$ بر نمودار f مماس شده است:

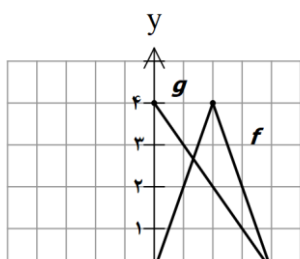
الف) مشتق تابع f را در نقطه $x = 1$ محاسبه کنید.

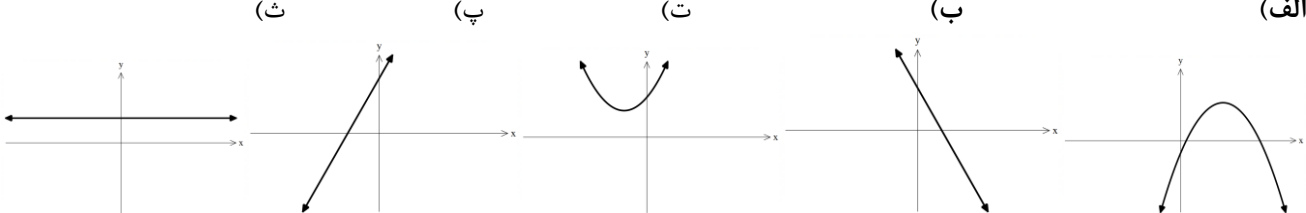
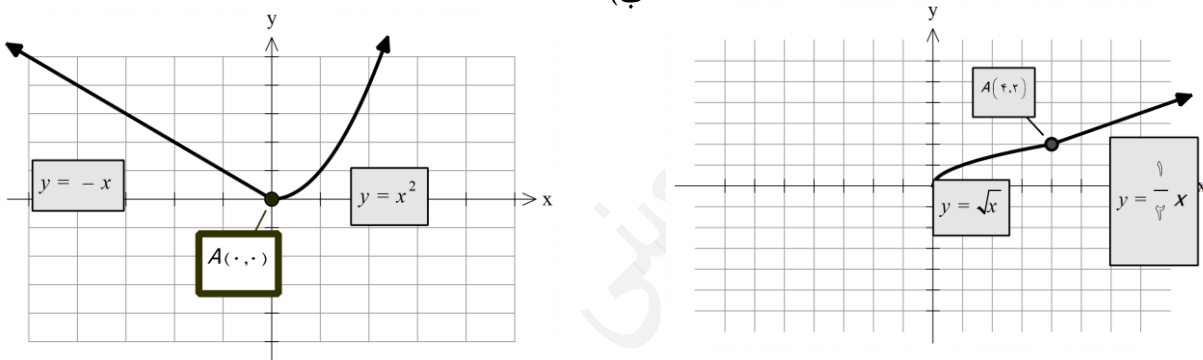
ب) شیب نمودار را در نقاط C, B مقایسه کنید.



	۸ الف) مشتق پذیری تابع $f(x) = x^2 - 1$ را در $x = 1, x = -1$ بررسی کنید. ب) معادله نیم مماس های چپ و راست را در نقطه $x = 1$ بدست آورید.
۹ مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در $x = 0$ بررسی کنید.	۱۰ مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ را در $x = 1$ بررسی کنید.
۱۱ تابع f تحت چه شرایطی در $x = a$ مشتق پذیر نیست؟	۱۲ نمودار یک تابع به صورت مقابل است. الف) مقدار مشتق در نقطه b چقدر است؟ ب) مشتق پذیری تابع را در نقاط a, c بررسی کنید. پ) آیا این تابع در بازه $[b, c]$ مشتق پذیر است؟
۱۳ در شکل های زیر، مشتق پذیری نقاط مشخص شده را بررسی کنید. الف) (ب)  (ت)  (ت)  (ت)  (ث)  	۱۴ اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، آنگاه نمودار تابع مشتق آن کدام است؟  الف) $f'(x)$  ب)  ج)  د)

۱۵	اگر $f(x) = \begin{cases} 5x & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.
۱۶	اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(\circ)$ و $f'_-(\circ)$ موجودند ولی $f'(\circ)$ موجود نیست.
۱۷	در تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \leq 1 \\ x^2+3 & x > 1 \end{cases}$ با استفاده از تعریف مشتق، مشتق های چپ و راست تابع f را در $x=1$ محاسبه کنید. آیا این تابع در $x=1$ مشتق پذیر است؟
۱۸	مشتق پذیری تابع مقابل را در نقطه $x=-1$ بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} x^2+3 & x \geq -1 \\ 2x+6 & x < -1 \end{cases}$
۱۹	تابع $f(x) = \begin{cases} 5x-4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x+6 & x > 3 \end{cases}$ داده شده است: الف) نمودار تابع f را رسم کنید. ب) نشان دهید $f'(\circ)$, $f'(3)$ وجود ندارند. پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید. ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.
۲۰	شکل زیر را در نظر بگیرید. در کدام یک از پنج نقطه مشخص شده در نمودار: الف) $f'(x)$ و $f''(x)$ هر دو منفی اند. ب) $f'(x)$ منفی و $f''(x)$ مثبت است.
۲۱	مشتق تابع زیر را حساب کنید. (ساده کردن الزامی نمی باشد) الف) $f(x) = \left(\frac{2x-1}{\sqrt{x+3}}\right)^4$ ب) $g(x) = \frac{x}{2x^2+x-1}$ پ) $h(x) = (\sqrt{3x+2})(x^2+1)$
۲۲	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $f(x) = (x^2+2x+1)^5$ ب) $g(x) = \frac{5x^2-x}{\sqrt{x}}$ پ) $h(x) = (x^2+1)^3(5x-1)$ ت) $w(x) = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$
۲۳	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $f(x) = \sin x \tan x$ ب) $g(x) = \frac{5 \cos x}{1-\sin x}$ پ) $h(x) = \cos^3 x$ ت) $w(x) = \sin(3x^2+5)$
۲۴	نمودار تابع f, g را در شکل مقابل در نظر بگیرید: الف) اگر $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ باشد، $h'(1), h'(2), h'(3)$ را بیابید.



	ب) اگر $k(x) = f(x).g(x)$ مطلوب است $k'(3), k'(2), k'(1)$	
۲۵	اگر توابع f, g مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3, f'(2) = 5, g(2) = 8, g'(2) = -6$ مقادیر $(fg)'(2)$ و $(\frac{f}{g})'(2)$ را به دست آورید.	
۲۶	اگر توابع f, g مشتق پذیر باشند و $f'(1) = 3, g'(1) = 5$ مقادیر $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$ را به دست آورید.	
۲۷	نمودار مشتق توابع زیر را رسم کنید. (الف) (ب) (ت) (پ) (ث) 	
۲۸	با محاسبه مشتق چپ و راست در نقطه A، نشان دهید که در نقطه مشتق موجود نیست. (الف) (ب) 	
۲۹	تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ متوسط قد کودکان تا شصت ماهگی را نشان می دهد که در آن x مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است. الف) آهنگ تغییر متوسط رشد در بازه ی زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟ ب) آهنگ لحظه ای تغییر قد در ۴۹ ماهگی چقدر است؟	
۳۰	تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟	
۳۱	جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می کنیم. جهت حرکت را به طرف بالا مثبت در نظر می گیریم. ارتفاع از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می آید: الف) سرعت متوسط را در بازه $[5, 8]$ به دست آورید. ب) سرعت جسم در لحظه برخورد به زمین را به دست آورید. پ) مشخص کنید در چه لحظه ای سرعت جسم $35m/s, 35m/s$ است.	
۳۲	معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه $[0, 5]$ (بر t حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟	
۳۳	یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^2$ گرم است. الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می یابد؟ ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t = 3$ چقدر است؟	
۳۴	گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر است. در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از	

	رابطه $V = 40(1 - \frac{t}{100})^2$ به دست می آید:
	الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0, 1]$ چقدر است؟ ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می شود؟
۳۵	آهنگ تغییرات مساحت یک مربع را نسبت به محیط آن برای مربعی با محیط ۶ واحد بیابید.
«سوالات تکمیلی»	
۳۶	معادله خط مماس بر منحنی $y = \frac{1}{x}$ را در نقطه $(1, 1)$ بنویسید. (محاسبه شیب خط با تعریف)
۳۷	به کمک تعریف مشتق، شیب خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 2$ را در نقطه ای به طول ۱ واقع بر منحنی بیابید.
۳۸	با استفاده از تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = x^2 - 4 $ را در نقطه $x = 2$ بررسی کنید.
۳۹	با استفاده از تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.
۴۰	با استفاده از تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = x^2 - 1 $ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.
۴۱	با استفاده از تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = \sin x $ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.
۴۲	با استفاده از تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = x[x]$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.
۴۳	با استفاده از تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.
۴۴	مشتق چپ تابع $f(x) = x-1 + 2 x-2 $ در نقطه $x = 1$ برابر است.
۴۵	مقدار a, b به گونه ای تعیین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & x \leq 0 \\ ax + a + b & x > 0 \end{cases}$ در $x = 0$ مشتق پذیر باشد.
۴۶	مشتق پذیری تابع زیر را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$
۴۷	نشان دهید نقطه $(1, 0)$ یک گوشه برای تابع $f(x) = x-1 $ است و اندازه زاویه ایجاد شده در گوشه را به دست آورید.
۴۸	نشان دهید نقطه $x = 2$ یک گوشه برای تابع $f(x) = x^2 - 2x $ است و اندازه تانژانت زاویه ایجاد شده در گوشه را به دست آورید.
۴۹	شیب خط قائم بر منحنی $y = \sqrt{x}$ در نقطه ای به طول ۱ واقع بر منحنی، برابر است با
۵۰	معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ را در نقطه $(0, \frac{1}{2})$ بنویسید.
۵۱	معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = -x^2 + 4x$ را در نقطه به طول ۱ واقع بر منحنی را بنویسید.
۵۲	از نقطه $A(0, -1)$ دو خط مماس بر منحنی $f(x) = x^2 + x$ رسم شده است، معادله این دو خط مماس را به دست آورید.
۵۳	فرض کنید $f(x) = x^6 - 2x^4 - x + 1$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(1+h) - f'(1)}{h}$ را به دست آورید.
۵۴	مشتق چهارم تابع $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^2 + 3)$ را در $x = 1$ حساب کنید.
۵۵	به ازای چه مقادیری از a, b, c تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 & x < 1 \\ ax^2 + bx + c & x \geq 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ مشتق مرتبه دوم دارد؟
۵۶	معادله حرکت ذره ای به صورت $s = t^3 - 4t^2 + 2t + 3$ است. (s بر حسب سانتیمتر و t بر حسب ثانیه است)، شتاب این ذره را به عنوان تابعی از زمان پیدا کنید. پس از گذشت ۳ ثانیه شتاب چقدر است؟

۵۷	با تعیین ضابطه توابع f' , f'' ضابطه مشتق n ام تابع $f(x) = x \operatorname{sgn}(x)$ را بدست آورید.
۵۸	مشتق سوم تابع $y = \frac{1}{x}$ را در نقطه $x = -1$ به دست آورید.
۵۹	ضابطه تابع درجه دوم f را چنان بیابید که $f(-1) = -6$, $f'(-1) = 4$, $f''(-1) = -2$ باشد.
۶۰	الف) ثابت کنید اگر تابع f زوج و مشتق پذیر باشد آنگاه تابع مشتقش فرد است. ب) ثابت کنید اگر تابع f فرد و مشتق پذیر باشد آنگاه تابع مشتقش زوج است.
۶۱	اگر تابع f زوج و تابع g فرد باشد، و داشته باشیم $f'(1) = 2$, $g'(1) = 3$ ، مقدار $(f+g)'(-1)$ را حساب کنید.
۶۲	با فرض اینکه تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد و به ازای هر عدد حقیقی x ، $g(x) = f(2-x^2)$ و $f'(1) = 3$ ، مقدار $g'(1)$ را حساب کنید.
۶۳	اگر $f(x) = \sqrt{x}g(x)$ و $g(4) = 8$, $g'(4) = 7$ باشد مقدار $f'(4)$ را حساب کنید.
۶۴	فرض کنید $f'(2) = \frac{3}{2}$ ، مشتق تابع $g(x) = f(\frac{1}{x})$ را در $x = \frac{1}{2}$ محاسبه کنید.
۶۵	مجموع دو عدد برابر ۱۶ است. بزرگترین مقدار برای حاصلضرب آنها را پیدا کنید.
۶۶	الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = -x^2 + 2x$ نسبت به x روی بازه $[-1, 2]$ برابر ب) آهنگ تغییر آنی تابع $f(x) = 2\sin 2x$ نسبت به x در $x = \frac{\pi}{6}$ برابر
۶۷	آهنگ تغییر حجم مکعبی به طول ضلع x را نسبت به x وقتی $x = 3$ است را بیابید.
۶۸	آهنگ تغییر مساحت دایره را نسبت به قطر آن بیابید.
۶۹	بادکنکی کروی مملو از هوا، شعاعی برابر ۱۰ سانتیمتر دارد. اگر ۱ سانتیمتر دیگر به شعاع آن افزوده گردد آهنگ تغییر حجم آن چقدر است؟
۷۰	هزینه ساخت x واحد از محصولی $c(x)$ تومان است که در آن $c(x) = 500 + 10x + x^2$ می باشد. الف) هزینه واقعی افزایش تولید از ۱۰۰ به ۱۰۱ واحد در روز چقدر است؟ ب) هزینه نهایی در این سطح تولید چقدر است؟
۷۱	هزینه ساخت x تلویزیون $c(x)$ تومان است که در آن $c(x) = 60000 + 30000x - 300x^2$ می باشد. هزینه تولید ۱۰۱ امین تلویزیون چقدر است و معنی آن را توضیح دهید.
۷۲	هزینه ساخت x ساعت مچی $c(x)$ تومان است که در آن $c(x) = 2000 + 10x - \frac{x^2}{100}$ می باشد. الف) هزینه نهایی وقتی $x = 50$ چقدر است؟ ب) هزینه واقعی تولید پنجاه یکمین ساعت چقدر است؟