



## جزوه آموزشی

# حسابان (۲)

## فصل سوم

### پایه دوازدهم (ریاضی)

گروه آموزشی ریاضی با همکاری خانه ریاضیات یزد

سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱

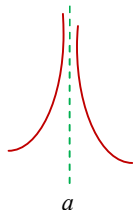


## حدهای نامتناهی و حد در بی نهایت

### حد نامتناهی:

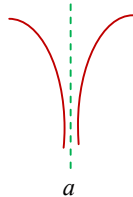
- اگر تابع  $f$  در یک همسایگی محذوف عدد  $a$  تعریف شده باشد و وقتی  $x$  به  $a$  نزدیک می شود مقادیر تابع

بی کران افزایش یابد، گوییم  $f$  در  $a$  دارای حد مثبت بی نهایت است و می نویسیم:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$



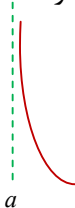
- اگر تابع  $f$  در یک همسایگی محذوف عدد  $a$  تعریف شده باشد و وقتی  $x$  به  $a$  نزدیک می شود مقادیر

تابع بی کران کاهش یابد، گوییم  $f$  در  $a$  دارای حد منفی بی نهایت است و می نویسیم:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$



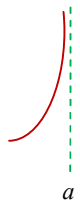
- اگر تابع  $f$  در یک همسایگی راست عدد  $a$  تعریف شده باشد و وقتی مقادیر  $x$  در این همسایگی به  $a$  نزدیک می شود مقادیر تابع بی کران افزایش یابد، گوییم حد راست  $f$  در  $a$ ، مثبت بی نهایت است و

می نویسیم:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$



- اگر تابع  $f$  در یک همسایگی چپ عدد  $a$  تعریف شده باشد و وقتی مقادیر  $x$  در این همسایگی به  $a$  نزدیک می شود مقادیر تابع بی کران افزایش یابد، گوییم حد چپ  $f$  در  $a$ ، مثبت بی نهایت است و

می نویسیم:  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$



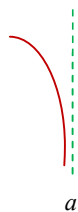
- اگر تابع  $f$  در یک همسایگی راست عدد  $a$  تعریف شده باشد و وقتی مقادیر  $x$  در این همسایگی به  $a$  نزدیک می‌شود مقادیر تابع بی‌کران کاهش یابد، گوییم حد راست  $f$  در  $a$ ، منفی بی‌نهایت است و

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \quad \text{می‌نویسیم:}$$



- اگر تابع  $f$  در یک همسایگی چپ عدد  $a$  تعریف شده باشد و وقتی مقادیر  $x$  در این همسایگی به  $a$  نزدیک می‌شود مقادیر تابع بی‌کران کاهش یابد، گوییم حد چپ  $f$  در  $a$ ، منفی بی‌نهایت است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



- اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$  یا  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$  و یا  $g$  در همسایگی  $a$  کران‌دار باشد،

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty \quad \text{آن‌گاه}$$

- اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$  یا  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$  و یا  $g$  در همسایگی  $a$  کران‌دار باشد،

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = -\infty \quad \text{آن‌گاه}$$

**مثال:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} + [x] \right) = +\infty$  می‌باشد. زیرا  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$  و برای هر  $x \in (-1, 1)$ ،  $[x] \leq 1$  است.

- اگر توابع  $f$  و  $g$  در یک همسایگی یکسان عدد  $a$  تعریف شده باشند و  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \neq 0$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، آن‌گاه:

(الف) اگر  $l > 0$  و  $g$  با مقادیر مثبت به صفر نزدیک شود،  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

(ب) اگر  $l > 0$  و  $g$  با مقادیر منفی به صفر نزدیک شود،  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

(پ) اگر  $l < 0$  و  $g$  با مقادیر مثبت به صفر نزدیک شود،  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

(ت) اگر  $l < 0$  و  $g$  با مقادیر منفی به صفر نزدیک شود،  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

**مثال:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{x^2} = +\infty$  زیرا  $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x+1) = \infty > 0$ ،  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = 0$  و برای هر  $x \neq 0$ ،  $x^2 > 0$  است.

**مثال:**  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-2}{3-x} = -\infty$  زیرا  $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x-2) = 1 > 0$ ،  $\lim_{x \rightarrow 3^+} (3-x) = 0$  و برای هر  $x > 3$ ،  $3-x < 0$  است.

**مثال:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^2} + [x] \right) = +\infty$  می باشد. زیرا  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$  و برای هر  $x \in (-1, 1)$ ،  $[x] \leq 1$  است.

**مثال:**  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{-1}{(x-1)^2} + \sin \frac{1}{x-1} \right) = -\infty$  می باشد. زیرا  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$  و برای هر  $x \neq 1$ ،

$$\left| \sin \frac{1}{x-1} \right| \leq 1 \text{ است.}$$

• اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ ، آن گاه:

الف) اگر  $l > 0$ ،  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = +\infty$

ب) اگر  $l < 0$ ،  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = -\infty$

• اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ ، آن گاه:

الف) اگر  $l > 0$ ،  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = -\infty$

ب) اگر  $l < 0$ ،  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = +\infty$

• اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ ، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = +\infty$

• اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ ، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = -\infty$

• اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ ، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = -\infty$

• اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ ، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = +\infty$

مد در بی‌نهایت:

- اگر تابع  $f$  در بازه  $(c, +\infty)$  تعریف شده و  $l$  یک عدد باشد، وقتی می‌نویسیم  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  یعنی وقتی مقادیر  $x$  بی‌کران افزایش می‌یابد، مقادیر  $f(x)$  به عدد  $l$  نزدیک می‌شوند.



- اگر تابع  $f$  در بازه  $(-\infty, c)$  تعریف شده و  $l$  یک عدد باشد، وقتی می‌نویسیم  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  یعنی وقتی مقادیر  $x$  بی‌کران کاهش می‌یابد، مقادیر  $f(x)$  به عدد  $l$  نزدیک می‌شوند.



•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$  ( $n > 0$ )

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^r - 1}{3x^r + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^r \left(1 - \frac{1}{x^r}\right)}{x^r \left(3 + \frac{1}{x^r}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^r}}{3 + \frac{1}{x^r}} = \frac{1 - 0}{3 + 0} = \frac{1}{3}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^r - 2x^r + 5}{5x^r + x - 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^r \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^r}\right)}{x^r \left(5 + \frac{1}{x^r} - \frac{7}{x^r}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^r - 7x - 1}{3x^r + x + 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^r \left(-1 - \frac{7}{x} - \frac{1}{x^r}\right)}{x^r \left(3 + \frac{1}{x} + \frac{7}{x^r}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$$

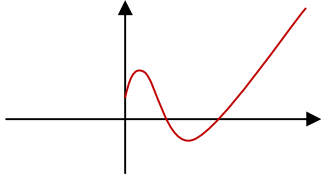
مثال:

مد بی‌نهایت در بی‌نهایت:

● اگر تابع  $f$  روی  $(c, +\infty)$  تعریف شده باشد:

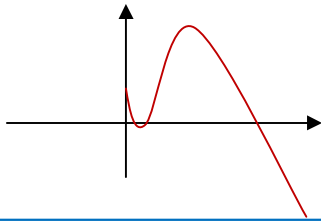
الف) وقتی می‌نویسیم  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  یعنی وقتی مقادیر  $x$  بی‌کران افزایش می‌یابد، مقادیر تابع نیز

بی‌کران افزایش می‌یابد.



ب) وقتی می‌نویسیم  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  یعنی وقتی مقادیر  $x$  بی‌کران افزایش می‌یابد، مقادیر تابع

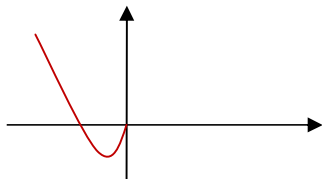
بی‌کران کاهش می‌یابد.



● اگر تابع  $f$  روی  $(-\infty, c)$  تعریف شده باشد:

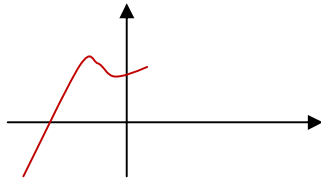
الف) وقتی می‌نویسیم  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  یعنی وقتی مقادیر  $x$  بی‌کران کاهش می‌یابد، مقادیر تابع

بی‌کران افزایش می‌یابد.



ب) وقتی می‌نویسیم  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  یعنی وقتی مقادیر  $x$  بی‌کران کاهش می‌یابد، مقادیر تابع نیز

بی‌کران کاهش می‌یابد.



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_m x^m) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n, \quad n > m, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty, \quad n \text{ زوج}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty, \quad n \text{ فرد}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad 0 < a < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \quad a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \quad 0 < a < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +} \log_a^x = -\infty, \quad a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +} \log_a^x = +\infty, \quad 0 < a < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a^x = +\infty, \quad a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a^x = -\infty, \quad 0 < a < 1$$

مثال:

$$۱) \lim_{x \rightarrow -\infty} (۲x^۴ - ۵x^۳ - ۴x + ۹) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ۲x^۴ = +\infty$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{۲x + ۵} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x}{۲x} \right) = \left( \frac{۱}{۲} \right)$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^۲ + ۲x - ۱}) = -\infty$$



$$۴) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^r + 2x - 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^r + 2x - 1})(x + \sqrt{x^r + 2x - 1})}{x + \sqrt{x^r + 2x - 1}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r - x^r - 2x + 1}{x + |x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{2x} = -1$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 1}{3^x + 5} = \frac{0 + 1}{0 + 5} = \frac{1}{5}$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 1}{3^x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{3^x} = 1$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{5}{(x-2)^r} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2-5}{(x-2)^r} = -\infty$$

### تمرین:

هر یک از حدهای زیر را به دست آورید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5 + 3x^r - 7x^r + 9)$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^r - 3}{4x^r + 5x - 1}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^r + 2x - 1})$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + \sqrt{9x^r + 12x - 1})$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x + 3^{rx}}{3^{rx-1} + 5^x}$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{x+1} + 2^{x-1} - 4}{3^x + 2^x - 5}$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow -5} \left( \frac{1}{x+5} - \frac{7}{(x+5)^r} \right)$$

سؤالات چهار گزینه‌ای

۱. اگر  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = l$ ، آن‌گاه  $\lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{t}\right)$  برابر است با:

- (۱)  $\frac{1}{l}$  (۲) ۰ (۳)  $l$  (۴) ۱

۲. اگر  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 120$  باشد، آن‌گاه  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$  برابر است با:

- (۱) ۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱ (۴)  $\frac{1}{120}$

۳.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{x^{20}}$  برابر است با:

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳)  $-\infty$  (۴)  $\infty$

۴.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x^{20}}$  برابر است با:

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳)  $-\infty$  (۴)  $\infty$

۵.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\Delta x]}{x}$  برابر است با:

- (۱) ۴ (۲) ۰ (۳) ۵ (۴) ۱

۶.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\Delta + 2x - \sqrt{4x^2 - 4x - 1})$  برابر است با:

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴)  $\infty$

۷. اگر  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + a - \sqrt{4x^2 + bx - 1}) = 6$ ،  $4a - b$  برابر است با:

- (۱) ۹ (۲) ۲۴ (۳) ۰ (۴)  $-24$

۸. اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 + ax + b} = \infty$  باشد،  $a - b$  برابر است با:

- (۱) ۱ (۲)  $-5$  (۳) ۰ (۴) ۵

۹.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\Delta \sin \frac{1}{x^\Delta + x + 4}$  برابر است با:

- (۱) ۰ (۲)  $\infty$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۱

۱۰. اگر  $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{زوج } [x] \\ 1 & \text{فرد } [x] \end{cases}$  باشد،  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ :

- (۱) ۱ است (۲) ۰ است (۳)  $\infty$  است (۴) وجود ندارد

۱۱.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 3^x + 5^x}{4^x + 5^x}$  برابر است با :

- (۱) ۰ (۲)  $\infty$  (۳) ۱ (۴) ۵

۱۲. حد عبارت  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$  وقتی  $n \rightarrow \infty$  برابر است با :

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $\infty$

۱۳.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{[x]-2}$  برابر است با :

- (۱) ۱ است (۲)  $-\infty$  است (۳)  $\infty$  است (۴) وجود ندارد

۱۴.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos 2x}{\tan x}$  برابر است با :

- (۱) ۰ (۲)  $-\infty$  (۳) ۱ (۴)  $\infty$

۱۵.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x^2 + x}}$  برابر است با :

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)  $\infty$

۱۶. اگر  $f(x) = \frac{-1}{x+1}$  باشد،  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f \circ f)(x)$  برابر است با :

- (۱) -۱ (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۱

۱۷.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{5x^7 + 1}{x^7 + 1} \right]$  :

- (۱) ۰ است (۲) ۴ است (۳) ۵ است (۴) وجود ندارد

۱۸.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{5x^7 + 7}{x^7 + 1} \right]$  برابر است با :

- (۱) ۰ است (۲) ۴ است (۳) ۵ است (۴) وجود ندارد

۱۹.  $\lim_{x \rightarrow \infty} 12x \sin \frac{5}{36x}$  برابر است با :

- (۱) ۰ (۲) ۵ (۳)  $\frac{5}{3}$  (۴) ۱

۲۰.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$  برابر است با :

- (۱) ۰ (۲)  $\infty$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $-\frac{1}{3}$

۲۱.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin x^2} \right)$  برابر است با :

- (۱)  $\cdot$  (۲)  $\infty$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $-\frac{1}{3}$

۲۲.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\cos x - 1} \right)$  برابر است با :

- (۱)  $\cdot$  (۲)  $-\infty$  (۳)  $\infty$  (۴) ۱

۲۳.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$  برابر است با :

- (۱)  $-1$  (۲)  $\cdot$  (۳) ۱ (۴)  $\infty$

۲۴. اگر  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+ax-x+1}) = 3$  باشد،  $a$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۲۵. حد عبارت  $\frac{4x - \sqrt{2x+1}}{x + \sqrt{x^2+2}}$  وقتی  $x \rightarrow \infty$  کدام است؟

- (۱)  $\cdot$  (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)  $\infty$

۲۶.  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x+2}$  کدام است؟

- (۱)  $-\infty$  (۲)  $\cdot$  (۳) ۱ (۴)  $\infty$

۲۷.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1 \right)$  برابر است با :

- (۱)  $\cdot$  (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)  $-1$

۲۸.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x})$  برابر است با :

- (۱)  $-\infty$  (۲)  $\cdot$  (۳) ۱ (۴)  $\infty$

۲۹.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin x}{x} \right]$  برابر است با :

- (۱)  $\cdot$  (۲) ۱ (۳)  $\infty$  (۴)  $-1$

۳۰.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{1400} - x \right)$  برابر است با :

- (۱)  $\cdot$  (۲) ۱۳۹۹ (۳) ۱۴۰۰ (۴) ۱۴۰۱

۳۱.  $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \cot 2x - \cot x)$  برابر است با :

- (۱)  $\cdot$  (۲) ۱ (۳)  $\infty$  (۴)  $-\infty$

۳۲.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 1})^0 + (x + \sqrt{x^2 + 1})^0}{x^1}$  برابر است با :

- (۱) ۲۰۴۸ (۲) -۲۰۴۸ (۳) ۱۰۲۴ (۴) -۱۰۲۴

۳۳.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[ \frac{1}{x} \right]$  برابر است با :

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳)  $\infty$  (۴)  $-\infty$

۳۴. اگر  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - bx + a} = \infty$  باشد،  $\frac{2b}{a}$  برابر است با :

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{4}$  (۳)  $-\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

۳۵.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x + 3 - \sqrt{x^2 + 7x - 1})$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳)  $-\infty$  (۴)  $\infty$

۳۶. اگر  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{27x^2 + 20x - 10}{(b^2 + 6b)x^2 + 14} = -3$  باشد، برابر است با :

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳)  $\sqrt{2} - 3$  (۴)  $-(\sqrt{2} + 3)$

۳۷.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 8}{\sqrt{3x^2} - 5}$  برابر است با :

- (۱)  $\frac{-5\sqrt{3}}{3}$  (۲)  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$  (۳)  $\frac{\sqrt{15}}{3}$  (۴)  $\frac{-\sqrt{15}}{3}$

۳۸.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 27x}}{\sqrt[3]{x^3} - 2\sqrt{x}}$  برابر است با :

- (۱) ۰ (۲)  $\infty$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $-\infty$

۳۹.  $\lim_{x \rightarrow -14^-} \frac{\left[ \frac{x}{2} \right] + 7}{\frac{x}{2} + 7}$  برابر است با :

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳)  $\infty$  (۴)  $-\infty$

۴۰.  $\lim_{x \rightarrow -14^+} \frac{\left[ \frac{x}{2} \right] + 7}{\frac{x}{2} + 7}$  برابر است با :

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳)  $\infty$  (۴)  $-\infty$

۴۱.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{4} \times n!\right)$  کدام است؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳)  $\sqrt{2}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

۴۲.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x - 3} - \sqrt{x^2 - 2x - 1})$  برابر است با:

(۱) -۳ (۲) ۱ (۳) ۰ (۴) -۲

۴۳.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5x+2}}{\sqrt{1 \cdot x + \sqrt{5x+2} + \sqrt{2x}}}$  برابر است با:

(۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$  (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{10}$  (۴)  $\frac{\sqrt{5}}{10}$

۴۴. اگر  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1 + \sqrt{4x^2 + ax + 2}) = 5$ ،  $a$  برابر است با:

(۱) -۶ (۲) -۱۲ (۳) -۲۴ (۴) -۳۶

۴۵.  $\lim_{x \rightarrow 9^-} \frac{(-1)^{[x]} \times 81}{x^2 - 81}$  برابر است با:

(۱) ۸۱ (۲) -۸۱ (۳)  $\infty$  (۴)  $-\infty$

۴۶. اگر  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x \tan \frac{1}{ax}} = 1$ ،  $a$  برابر است با:

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۰ (۴)  $\frac{1}{2}$

۴۷.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos 3x}{x}$  برابر است با:

(۱) ۰ (۲) ۳ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{9}{2}$

۴۸. اگر  $f(x) = \frac{-3}{x+2}$  باشد،  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f \circ f)(x)$  برابر است با:

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳)  $-\frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

۴۹.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{2x}$  برابر است با:

(۱) ۰ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) ۲ (۴) ۱

$$۵۰. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) \text{ برابر است با:}$$

(۱) ۰ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) ۱ (۴) ۲

$$۵۱. \text{ اگر } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-3x}{x^2+ax+b} = -\infty \text{ باشد، } ab \text{ برابر است با:}$$

(۱) -۶ (۲) ۶ (۳) ۲ (۴) -۲

$$۵۲. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{1-\cos x}} \right) \text{ کدام است؟}$$

(۱) ۰ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\infty$  (۴)  $-\infty$

$$۵۳. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{[\Delta x]}{\Delta x} + \frac{[\gamma x]}{\gamma x} \right]$$

(۱) برابر با ۰ است (۲) برابر با ۱ است (۳) برابر با ۲ است (۴) وجود ندارد

$$۵۴. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{1 - \tan x}{1 - \sin 2x} \text{ برابر است با:}$$

(۱)  $-\infty$  (۲)  $\infty$  (۳) ۰ (۴) ۱

$$۵۵. \text{ حاصل } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x^2} \text{ کدام است؟}$$

(۱) -۱ (۲) ۰ (۳)  $-\infty$  (۴)  $\infty$

$$۵۶. \text{ حاصل } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{\cot x} \text{ کدام است؟}$$

(۱)  $-\infty$  (۲) ۰ (۳) ۱ (۴)  $\infty$

$$۵۷. \text{ حاصل } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{8x^3 + 2x^2} - 2x) \text{ کدام است؟}$$

(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{6}$

$$۵۸. \text{ اگر } f(x) = \frac{2x+5}{x^2-4x+3} \text{ و } g(x) = 2^x \text{، آن گاه } \lim_{x \rightarrow 1^+} g(f(x)) \text{ کدام است؟}$$

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳)  $\infty$  (۴)  $\frac{1}{2}$

$$۵۹. \text{ حاصل } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9x}}{3x + \sqrt{x}} \text{، کدام است؟}$$

(۱)  $-\frac{1}{3}$  (۲)  $-\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

۶۰. حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[ \frac{1}{x} \right]$  کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳)  $+\infty$  (۴)  $-\infty$

۶۱. حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$ ، کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳)  $-\infty$  (۴)  $+\infty$

۶۲. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\cos x - 1} - \frac{1}{x} \right)$ ، کدام است؟

- (۱)  $-\infty$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳) صفر (۴)  $+\infty$

۶۳. در تابع  $f(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{ax - 2}$ ، اگر  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$  باشد، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  کدام است؟

- (۱) ۰ (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

۶۴. در تابع با ضابطه  $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$  کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳)  $-\infty$  (۴) موجود نیست

### سؤالات کنکور سال‌های ۱۳۹۰ الی ۱۴۰۱

۶۵. در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{ax^n + 4}$ ، اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$  باشد، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  کدام است؟

(تجربی ۹۰)

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

۶۶. اگر  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = -1$  باشد، آن گاه حد راست این عبارت در نقطه  $x = -2$  کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۰)

- (۱)  $-\frac{4}{3}$  (۲)  $-\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{4}{3}$

۶۷. نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax + 1 + \sqrt{4x^2 + 9}}{3x - 2}$ ، از نقطه (۲, ۱) می‌گذرد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  کدام است؟

(تجربی ۹۱)

- (۱)  $-\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴) ۱



۶۸. در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax^n - 3x + 1}{3x^2 + x}$ ، اگر  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3}$  باشد، آن گاه  $f(-1)$  کدام است؟

(تجربی ۹۱ خارج)

- (۱) -۲ (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳) ۲ (۴) ۳

۶۹. اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 9}{1 - x + \sqrt{x + 1}} = 3$  باشد، آن گاه حد این کسر وقتی  $x \rightarrow 3$  کدام است؟ (تجربی ۹۲)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۵

۷۰. حد عبارت  $\frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2[x]}{2-x}$  وقتی  $x \rightarrow 2^-$  کدام است؟ (تجربی ۹۲ خارج)

- (۱)  $-\infty$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳) ۱ (۴)  $+\infty$

۷۱. حد عبارت  $x \left[ \frac{1}{x} \right]$  در کدام حالت متناهی نیست؟ (ریاضی ۹۳)

- (۱)  $x \rightarrow 0^-$  (۲)  $x \rightarrow 0^+$  (۳)  $x \rightarrow -\infty$  (۴)  $x \rightarrow +\infty$

۷۲. اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{2x^2+ax+b} = -\infty$  باشد،  $a+b$  کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۷۳. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[ \frac{1}{x} \right]$  کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

- (۱) -۱ (۲) حد ندارد (۳) صفر (۴) ۱

۷۴. حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^2 - 8})$  کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

- (۱) -۸ (۲) صفر (۳) ۴ (۴)  $\infty$

۷۵. در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}}$ ، اگر  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$  باشد، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  کدام است؟ (تجربی ۹۴)

است؟

- (۱) -۶ (۲) -۴ (۳) ۳ (۴) ۵

۷۶. در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^n - 6}$ ، اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$  باشد، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  کدام است؟ (تجربی ۹۴ خارج)

است؟

- (۱)  $-\frac{1}{6}$  (۲)  $-\frac{1}{8}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{3}$

۷۷. در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$ ، اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}$  باشد، آن گاه حد  $f(x)$  وقتی

$x \rightarrow -1$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۵)

(۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{5}{6}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{5}{4}$

۷۸. حد عبارت  $\frac{1}{x^2} \left( 1 - x^2 \left[ \frac{1}{x^2} \right] \right)$  وقتی  $x \rightarrow 0$ ، کدام است؟ (ریاضی ۹۵)

(۱)  $\cdot$  (۲)  $1$  (۳)  $\infty$  (۴) حد ندارد

۷۹. اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 5}{x^2 + ax + b} = -\infty$  باشد،  $a + b$  کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

(۱)  $-1$  (۲)  $\cdot$  (۳)  $1$  (۴)  $2$

۸۰. اگر  $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + x}$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۸)

(۱)  $-1$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $-\frac{1}{4}$  (۴) صفر

۸۱. در مورد تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + |x|}$ ، کدام بیان، درست است؟ (تجربی ۹۸)

(۱)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  (۲)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

(۳)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  (۴)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

۸۲. در مورد تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x}$ ، کدام بیان، درست است؟ (تجربی ۹۸ خارج)

(۱)  $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} f(x) = -\infty$  (۲)  $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} f(x) = +\infty$

(۳)  $\lim_{x \rightarrow \frac{4\pi}{3}} f(x) = -\infty$  (۴)  $\lim_{x \rightarrow \frac{4\pi}{3}} f(x) = +\infty$

۸۳. اگر  $f(x) = x - \sqrt{4x^2 + x}$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۸ خارج)

(۱)  $-2$  (۲)  $-1$  (۳)  $2$  (۴)  $3$

۸۴. تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax - \sqrt{x^2 - 1}}{4x^n - 12}$  را در نظر بگیرید. اگر  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{6}$  باشد، آنگاه

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۹)

(۱)  $\frac{1}{24}$  (۲)  $\frac{1}{18}$  (۳)  $\frac{1}{12}$  (۴)  $\frac{5}{36}$

۸۵. تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{4x^n - 6x^r + 1}{ax^r + 7x^r - 2}$  را در نظر بگیرید. اگر  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$  باشد، آنگاه

(تجربی ۹۹ خارج)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$ ، کدام است؟

(۱)  $-\frac{4}{17}$  (۲)  $-\frac{6}{17}$  (۳)  $-\frac{5}{12}$  (۴)  $-\frac{6}{11}$

۸۶. مقدار  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left( \sqrt{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^r} - \frac{1}{x^r+1}} \right)$ ، کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

(۱) صفر (۲) ۱ (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)  $\sqrt{2}$

۸۷. مقدار  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^r - x^r + 1} + \sqrt{x^r + 1} - x^r}{x}$ ، کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰ خارج)

(۱)  $\frac{2}{3}$  (۲) ۱ (۳) صفر (۴) -۱

۸۸. مقدار  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{16x - \left[ -\frac{2}{x^r} \right]}{24x + \left[ \frac{3}{x^r} \right]}$ ، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

(۱)  $-\infty$  (۲)  $+\infty$  (۳) صفر (۴)  $\frac{2}{3}$

۸۹. مقدار  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{1 \cdot x - 5 + \left[ \frac{3}{x^r} \right]}{16x - \left[ -\frac{2}{x^r} \right]}$ ، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰ خارج)

(۱)  $-\infty$  (۲) صفر (۳)  $\frac{5}{8}$  (۴)  $+\infty$

۹۰. اگر  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[k]{(a^r x^r - 1)(a^r x^r - 1) \dots (a^{100} x^{100} - 1)}}{a^{49} x^k - 1} = -1$ ، آنگاه مقادیر  $a$  و  $k$  کدامند؟

(ریاضی ۱۴۰۰ خارج)

(۱)  $k = 51, a = -1$  (۲)  $k = 51, a = 1$

(۳)  $k = 49, a = -1$  (۴)  $k = 49, a = 1$

۹۱. اگر  $g(x) = \frac{\sqrt{ax^r + bx + c}}{|x - 1|}$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (4 - [x])g(x) = 6$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  کدام است؟

(تجربی ۱۴۰۱)

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۹۲. اگر  $f(x) = \sqrt{ax^2 + x + 1}$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x+2} = \frac{1}{2}$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left[ \frac{1}{x} \right] f(x)$  کدام است؟

(تجربی ۱۴۰۱ خارج)

- (۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) -۱

۹۳. حاصل  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x+1| + [x]}{x - [-x]}$ ، کدام است؟

(تجربی ۱۴۰۱ خارج)

- (۱)  $-\infty$  (۲) صفر (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۱

پاسخنامه

شماره	پاسخ	شماره	پاسخ	شماره	پاسخ	شماره	پاسخ	شماره	پاسخ
۱	۳	۲	۲	۳	۳	۴	۱	۵	۳
۶	۲	۷	۲	۸	۲	۹	۴	۱۰	۴
۱۱	۳	۱۲	۳	۱۳	۴	۱۴	۴	۱۵	۳
۱۶	۱	۱۷	۲	۱۸	۳	۱۹	۳	۲۰	۴
۲۱	۱	۲۲	۳	۲۳	۱	۲۴	۱	۲۵	۲
۲۶	۱	۲۷	۴	۲۸	۴	۲۹	۱	۳۰	۳
۳۱	۱	۳۲	۳	۳۳	۱	۳۴	۳	۳۵	۴
۳۶	۲	۳۷	۱	۳۸	۲	۳۹	۳	۴۰	۱
۴۱	۱	۴۲	۱	۴۳	۱	۴۴	۳	۴۵	۴
۴۶	۴	۴۷	۱	۴۸	۳	۴۹	۲	۵۰	۲
۵۱	۴	۵۲	۴	۵۳	۴	۵۴	۱	۵۵	۴
۵۶	۴	۵۷	۴	۵۸	۱	۵۹	۱	۶۰	۳
۶۱	۳	۶۲	۱	۶۳	۳	۶۴	۲	۶۵	۱
۶۶	۴	۶۷	۲	۶۸	۴	۶۹	۳	۷۰	۲
۷۱	۳	۷۲	۳	۷۳	۲	۷۴	۳	۷۵	۱
۷۶	۲	۷۷	۲	۷۸	۴	۷۹	۲	۸۰	۳
۸۱	۴	۸۲	۱	۸۳	۴	۸۴	۱	۸۵	۲
۸۶	۴	۸۷	۴	۸۸	۱	۸۹	۱	۹۰	۲
۹۱	۳	۹۲	۱	۹۳	۴	۹۴		۹۵	

## خط مجانب قائم و افقی

## خط مجانب قائم:

خط به معادله  $x = a$  مجانب قائم نمودار تابع  $y = f(x)$  است، هر گاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \quad (۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \quad (۳)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad (۵)$$

**مثال:** خط  $x = 2$  مجانب قائم معادله  $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - 3x + 2}$  می باشد. زیرا  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$  و

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

**مثال:** خط  $x = 1$  مجانب قائم معادله  $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - 3x + 2}$  نیست. زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = -1$$

## خط مجانب افقی:

خط به معادله  $y = b$  مجانب افقی نمودار تابع  $y = f(x)$  است، هر گاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad (۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \quad (۲)$$

**مثال:** مجانب‌های افقی  $y = \frac{4x-1}{|x|+2}$  را بیابید.

**حل:** خط  $y = 4$  مجانب افقی  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-1}{|x|+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x} = 4$

خط  $y = -4$  مجانب افقی  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-1}{|x|+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{-x} = -4$

**مثال:** مجانب‌های قائم و افقی  $f(x) = 2x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$  را بیابید.

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

خط  $x = 2$  مجانب قائم  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

مجانب افقی ندارد  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  ،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

### تمرین:

۱. فاصله نقطه تلاقی مجانب‌های منحنی به معادله  $y = \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - 3x + 2}$  از مبدأ مختصات را بیابید.

۲. منحنی به معادله  $y = \frac{x^2 + 3x}{ax^2 + 4x - 1}$ ،  $a \neq 0$ ، فقط دو خط مجانب قائم و افقی دارد. مختصات نقطه تلاقی مجانب‌ها را به دست آورید.

۳. نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{(x-1)^2}$ ، خط مجانب افقی خود را در نقطه  $A$  قطع می‌کند. فاصله نقطه  $A$  از خط مجانب قائم را بیابید.

۴. نمودار تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x^2 - 4x}$  چند خط مجانب قائم دارد؟

۵. خط مجانب قائم و افقی تابع با ضابطه  $y = \log \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$  را بیابید.

۶. خط مجانب قائم و افقی نمودار تابع  $y = \frac{5x + 21}{x + \cos x}$  را به دست آورید.

۷. اگر خط به معادله  $y = 3$  مجانب افقی نمودار  $y = \frac{ax + \sqrt{x+1}}{6x - \sqrt{x-5}}$  باشد، مقدار  $a$  را بیابید.

۸. نمودار تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 3x + 2}$  در اطراف خط‌های مجانب آن رسم کنید.

## سؤالات چهار گزینه‌ای

۱. اگر خط  $x = \frac{\pi}{3}$  مجانب نمودار  $y = \frac{y + \sin x}{a + \cos x}$  باشد،  $a$  برابر است با:

(۱)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۲)  $0$  (۳)  $-\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

۲. منحنی به معادله  $y = \frac{5^x - 1}{5^x - 2}$  چند خط مجانب دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۰

۳. مجانب افقی نمودار تابع  $y = (\sin(x^2 + 1)) \frac{1}{x^2 + 3}$  کدام است؟

(۱)  $y = 0$  (۲)  $y = 1$  (۳)  $y = 5$  (۴)  $y = \frac{1}{3}$

۴. به ازای چند مقدار  $a$  نمودار  $y = \frac{x^4 - 1}{x^2 + ax + 4}$  فقط ۱ مجانب قائم دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵. منحنی به معادله  $y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}$  چند خط مجانب دارد؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۶. تابع  $y = \frac{x+1}{x^2 + mx + 2}$  فقط ۲ خط مجانب دارد. مقدار  $m$  کدام یک از اعداد زیر نمی تواند باشد؟

(۱)  $-3$  (۲) ۳ (۳)  $2\sqrt{2}$  (۴)  $-2\sqrt{2}$

۷. منحنی به معادله  $y = \frac{5}{x^2 - 4x}$  چند خط مجانب قائم و افقی دارد؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸. منحنی به معادله  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$  چند خط مجانب قائم و افقی دارد؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۹. اگر خط به معادله  $x = \frac{\pi}{3}$  مجانب نمودار تابع  $f(x) = \frac{4 + \sin x}{1 + a \cos x}$  باشد،  $a$  برابر است با:

(۱) ۰ (۲) ۲ (۳)  $-2$  (۴)  $-1$

۱۰. به ازای کدام مقدار  $a$  نمودار تابع  $y = ax + 2\sqrt{x^2 - 8x + 1}$  دارای مجانب افقی می باشد؟

(۱) ۰ (۲) ۲ یا  $-2$  (۳) فقط ۲ (۴) فقط  $-2$

۱۱. تابع  $y = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x-5}$  دارای چند خط مجانب است؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

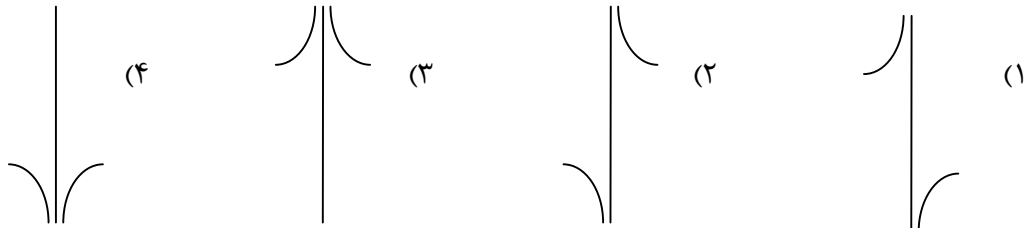
۱۲. منحنی به معادله  $y = \frac{7x}{\sqrt{x^2+1}}$  دارای چند خط مجانب است؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

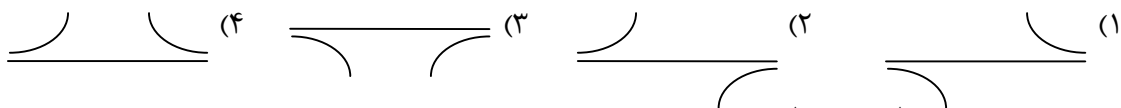
۱۳. منحنی به معادله  $y = (x-1)\sin \frac{1}{x-1}$  چند خط مجانب دارد؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۴. نمودار تابع  $y = \frac{\tan x}{\tan x - 1}$  در اطراف خط مجانب قائم به معادله  $x = \frac{\pi}{4}$  به کدام صورت است؟



۱۵. نمودار تابع  $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5}$  در اطراف مجانب افقی آن به کدام صورت است؟



۱۶. منحنی به معادله  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$  دارای چند خط مجانب است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۷. مجانب موازی محور  $x$  ها در منحنی نمایش تابع  $f(x) = x \sin \frac{1}{x^2 + 2}$  کدام است؟

- (۱)  $y = -\frac{1}{2}$  (۲)  $y = 0$  (۳)  $y = \frac{1}{2}$  (۴)  $y = 1$

۱۸. نقطه‌ی برخورد مجانب های منحنی  $y = \frac{ax-4}{4x+a}$  روی کدام یک از خطوط زیر واقع است؟

- (۱)  $y = x$  (۲)  $y = 4x$  (۳)  $y = -4x$  (۴)  $y = -x$

۱۹. منحنی به معادله  $y = \frac{x+2}{4x + \cos x}$  چند خط مجانب دارد؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیش از ۲ تا

۲۰. منحنی به معادله  $y = \frac{5x + |x-2|}{x+7}$ :

- (۱) ۱ مجانب قائم و ۱ مجانب افقی دارد  
(۲) ۱ مجانب قائم و ۲ مجانب افقی دارد  
(۳) فقط ۱ مجانب قائم دارد  
(۴) ۱ مجانب قائم و ۱ مجانب مایل دارد

۲۱. منحنی به معادله  $y = \cos \frac{1}{x}$  چند خط مجانب دارد؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیش از ۲ تا

۲۲. منحنی به معادله  $f(x) = \frac{1 - \tan x}{1 + 2 \sin x}$  در بازه  $[\pi, 2\pi]$  چند خط مجانب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



۲۳. به ازای کدام مقدار  $a$  نمودار  $y = \frac{x^2 + 5}{x^2 - 10x + a}$  فقط ۱ مجانب قائم دارد؟

- (۱) ۰ (۲) ۲۵ (۳) ۱۰ (۴) ۵

۲۴. چند تا از توابع زیر مجانب قائم دارند؟

الف (  $f(x) = \log(x^2 - 1)$  )      ب (  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}$  )

ج (  $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-9}$  )      د (  $f(x) = \frac{2^x}{2^x-2}$  )

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۵. نمودار تابع  $f(x) = \frac{\sin(x-5)}{x-5}$  ( $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ )

- (۱) ۱ مجانب قائم دارد (۲) ۱ مجانب افقی دارد (۳) ۱ مجانب مایل دارد (۴) مجانب ندارد

۲۶. تابع  $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x - 6 \sin x}$  در بازه  $[-2\pi, 2\pi]$  چند خط مجانب دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۲۷. معادله خط مجانب نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{4-2x}{\sqrt{x^2-2x}}$  وقتی  $x < 0$  کدام است؟

- (۱)  $y = -2$  (۲)  $y = -1$  (۳)  $y = 1$  (۴)  $y = 2$

۲۸. خط به معادله  $y = \frac{3}{2}$  مجانب افقی نمودار تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \frac{Ax^r + 1}{(A-1)x^r + 16}$  است. معادله مجانب

قائم نمودار تابع  $f$  کدام است؟

- (۱)  $x = -4$  (۲)  $x = -2$  (۳)  $x = 2$  (۴)  $x = 4$

۲۹. کدام یک از خطوط زیر مجانب منحنی  $y = 1 + \frac{1}{x^2 - 2x}$  نیست؟

- (۱)  $x = 2$  (۲)  $x = 0$  (۳)  $y = 1$  (۴)  $y = 2$

### سوالات کنکور سالهای ۱۳۹۰ الی ۱۴۰۱

۳۰. اگر  $f(x) = \frac{x+11}{x^2-3x-4}$  و  $g(x) = \frac{3}{x-4}$  باشد، نقطه تلاقی مجانب های نمودار تابع  $f-g$  کدام است؟

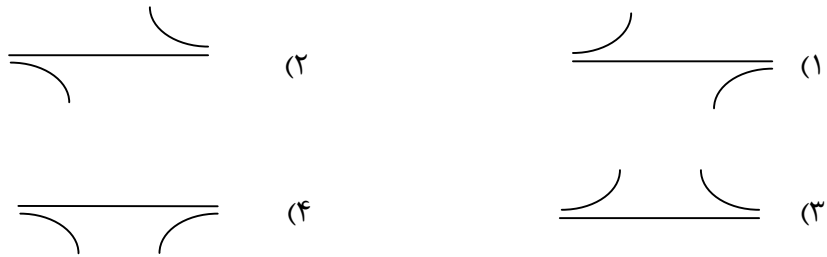
(ریاضی ۹۰)

- (۱)  $(-1, 0)$  (۲)  $(-1, 2)$  (۳)  $(4, -1)$  (۴)  $(4, 0)$

۳۱. اگر  $f(x) = \frac{x+3}{2x+1}$  و  $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$  باشند نقطه تلاقی مجانب های تابع  $f \circ g$  کدام است؟ (تجربی ۹۱)

- (۱)  $(-1, 0)$  (۲)  $(-1, 1)$  (۳)  $(-2, 2)$  (۴)  $(0, 1)$

۳۲. نمودار تابع  $y = \frac{2x^2 - x - 2}{x^2 + 2x}$ ، نسبت به مجانب افقی خود، در بی‌نهایت کدام وضع را دارد؟  
(ریاضی ۹۸ خارج)



۳۳. نمودار تابع  $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{ax^2 + bx + c}$  دارای خط‌های مجانب  $y = -1$ ،  $x = -2$  و  $x = 1$  است.  $f(-1)$  کدام است؟  
(ریاضی ۹۹)

- (۱)  $1/25$  (۲)  $1/5$  (۳)  $1/75$  (۴)  $-1/5$

۳۴. نمودار تابع  $f(x) = \frac{ax^2 + 7x}{2x^2 + bx + c}$ ، فقط یک مجانب قائم  $x = 2$  دارد. اگر  $f(3) = 6$  باشد، معادلهٔ مجانب افقی آن کدام است؟  
(ریاضی ۹۹ خارج)

- (۱)  $y = -1$  (۲)  $y = -\frac{1}{2}$  (۳)  $y = \frac{1}{2}$  (۴)  $y = \frac{3}{2}$

۳۵. اگر تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-a)(4x^2 - 4x + 1)}$ ، فقط دارای دو مجانب باشد. مجموع مقادیر ممکن برای  $a$ ، کدام است؟  
(ریاضی ۱۴۰۰)

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $1$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $2$

۳۶. تابع  $f(x) = \frac{|ax+1| + 2x}{|x| + b}$  دارای دو مجانب افقی و دو مجانب قائم است. اگر هر ریشه مخرج با یکی از حدهای تابع در بی‌نهایت برابر باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  کدام است؟  
(ریاضی ۱۴۰۱)

- (۱)  $-3$  (۲)  $1$  (۳)  $-\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{1}{4}$

۳۷. نقطهٔ  $A\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$  محل تلاقی مجانب‌های نمودار  $f(x) = \frac{bx^2 + 7}{4x^2 + ax + 1}$  است. مقدار  $\frac{b}{a}$  کدام است؟  
(ریاضی ۱۴۰۱ خارج)

- (۱)  $3$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $1$

پاسخنامه

شماره	پاسخ	شماره	پاسخ	شماره	پاسخ	شماره	پاسخ	شماره	پاسخ
۱	۳	۲	۱	۳	۳	۴	۴	۵	۳
۶	۱	۷	۴	۸	۳	۹	۳	۱۰	۲
۱۱	۱	۱۲	۳	۱۳	۲	۱۴	۲	۱۵	۴
۱۶	۲	۱۷	۲	۱۸	۴	۱۹	۳	۲۰	۲
۲۱	۲	۲۲	۴	۲۳	۲	۲۴	۲	۲۵	۴
۲۶	۴	۲۷	۴	۲۸	۲	۲۹	۴	۳۰	۱
۳۱	۴	۳۲	۱	۳۳	۱	۳۴	۲	۳۵	۳
۳۶	۱	۳۷	۱	۳۸		۳۹		۴۰	