



جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش و پرورش

اداره کل آموزش و پرورش استان یزد

اداره کنونی و گروه های آموزشی دوره متوسطه

جزوه آموزشی

حسابان (۲)

فصل دوم

پایه دوازدهم (ریاضی)

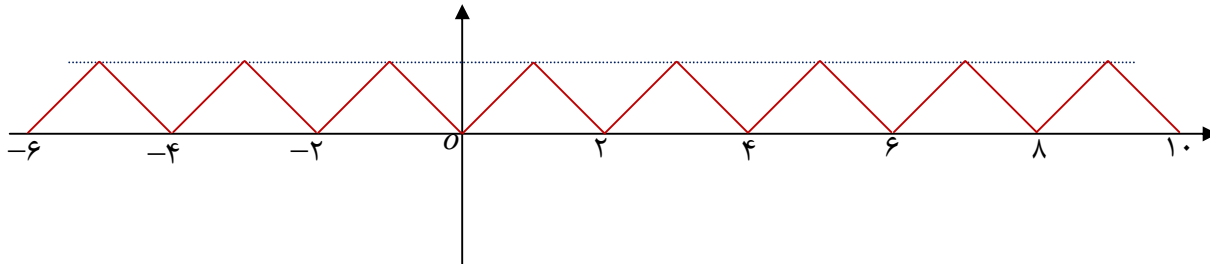
گروه آموزشی ریاضی با همکاری خانه ریاضیات یزد

سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲

مثلثات

تابع متناوب :

نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر می‌باشد. با کمی دقت متوجه می‌شوید که نمودار این تابع در بازه هایی به طول ۲، ۴، ۶ و ... تکرار می‌شود. این تابع را متناوب نامیده هر یک از اعداد ۲، ۴، ۶ و ... را یک دوره تناوب تابع و کوچکترین آنها را که عدد ۲ می‌باشد را دوره تناوب اصلی تابع گوییم.



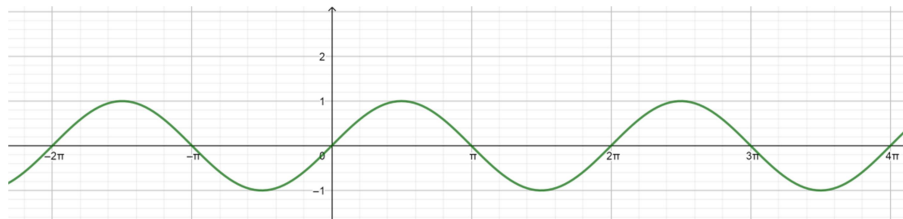
تابع متناوب : تابع f را متناوب گوییم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند c وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm c \in D_f$ و $f(x \pm c) = f(x)$.

اگر عدد c یک دوره تناوب تابع f باشد عدد kc ، $k \in \mathbb{Z}$ ، $k \neq 0$ نیز یک دوره تناوب f است.
اگر تابع f متناوب باشد کوچکترین دوره تناوب مثبت آن را در صورت وجود دوره تناوب اصلی f نامیده معمولاً با T نشان می‌دهیم.

مثال : نمودار توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \sin(2\pi x)$ را رسم نمایید و دوره تناوب هر یک را معین کنید.

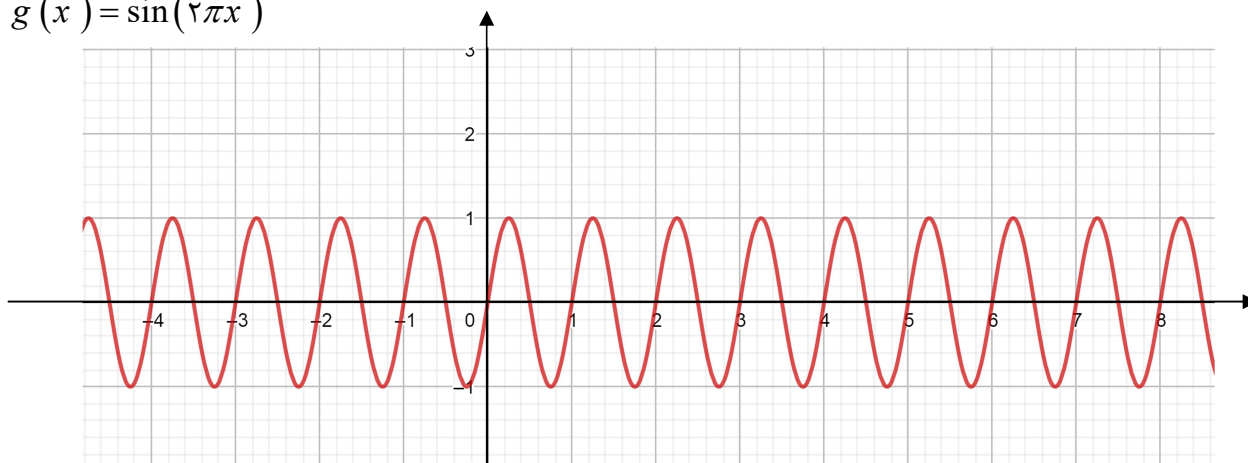
حل :

$$f(x) = \sin x$$



دوره تناوب 2π

$$g(x) = \sin(2\pi x)$$



دوره تناوب ۱

اگر T دوره تناوب $y = f(x)$ باشد، دوره تناوب تابع‌های $y = af(x \pm b) + c$ ، $a \neq 0$ نیز T است.
اگر f ، g دو تابع مثلثاتی به ترتیب با دوره‌های تناوب T_1 ، T_2 باشند، وقتی توابع $f \pm g$ متناوب هستند که عددی گویا باشد $\frac{T_1}{T_2}$.

مثال : با توجه به مثال قبل دوره تناوب هر یک از توابع $h(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 5$ و $k(x) = -5\sin(2\pi x + 9) - \pi$ را بیابید.

حل :

چون دوره تناوب $h(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 5$ برابر دوره تناوب $f(x) = \sin x$ است پس $T = 2\pi$.
چون دوره تناوب $k(x) = -5\sin(2\pi x + 9) - \pi$ برابر دوره تناوب $g(x) = \sin(2\pi x)$ است پس $T = 1$.

مثال : آیا $y = \sin(x) - \sin(2\pi x)$ متناوب است.

حل :

خیر زیرا دوره تناوب $f(x) = \sin x$ ، 2π و دوره تناوب $g(x) = \sin(2\pi x)$ ، ۱ است و $\frac{2\pi}{1}$ عدد گویا نیست.

اگر دوره‌های تناوب توابع f ، g به ترتیب T_1 ، T_2 و تابع‌های $f \pm g$ متناوب باشند، ک-م-م اعداد T_1 ، T_2 یک دوره تناوب تابع‌های $f \pm g$ است ولی ممکن است دوره تناوب اصلی آن‌ها نباشد.

مثال: نشان دهید دوره تناوب اصلی هر یک از توابع $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$ و $g(x) = 2\cos^2 x - 1$ برابر π است ولی ک-م-م آن‌ها که π می‌باشد دوره تناوب اصلی $k(x) = f(x) - g(x)$ نیست.

حل:

$$f(x) = 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$g(x) = 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

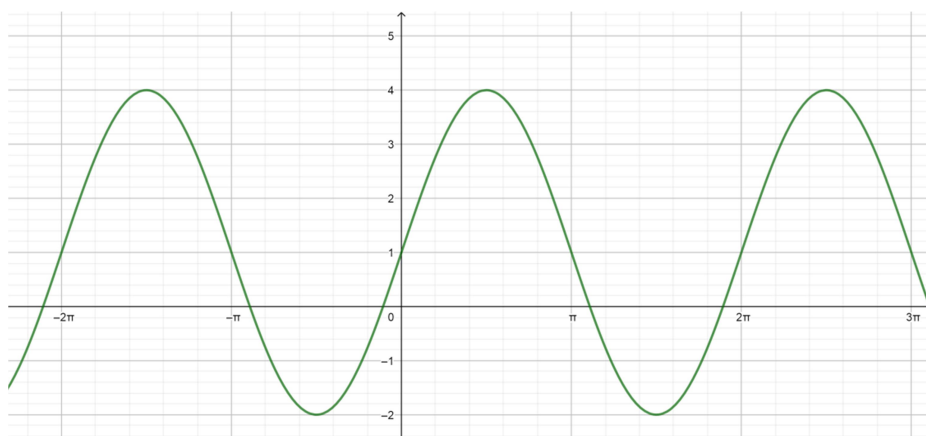
$$k(x) = f(x) - g(x) = \cos 2x - \cos 2x = 0$$

تابع $k(x) = 0$ یک تابع ثابت است و عدد π دوره تناوب آن است ولی این تابع دوره تناوب اصلی ندارد.

مثال: نمودار توابع $f(x) = 3\sin x + 1$ و $g(x) = -3\cos(2\pi x) + 2$ را رسم نمایید و مقدار ماکزیمم و مینیمم هر یک را به کمک نمودار تعیین نمایید.

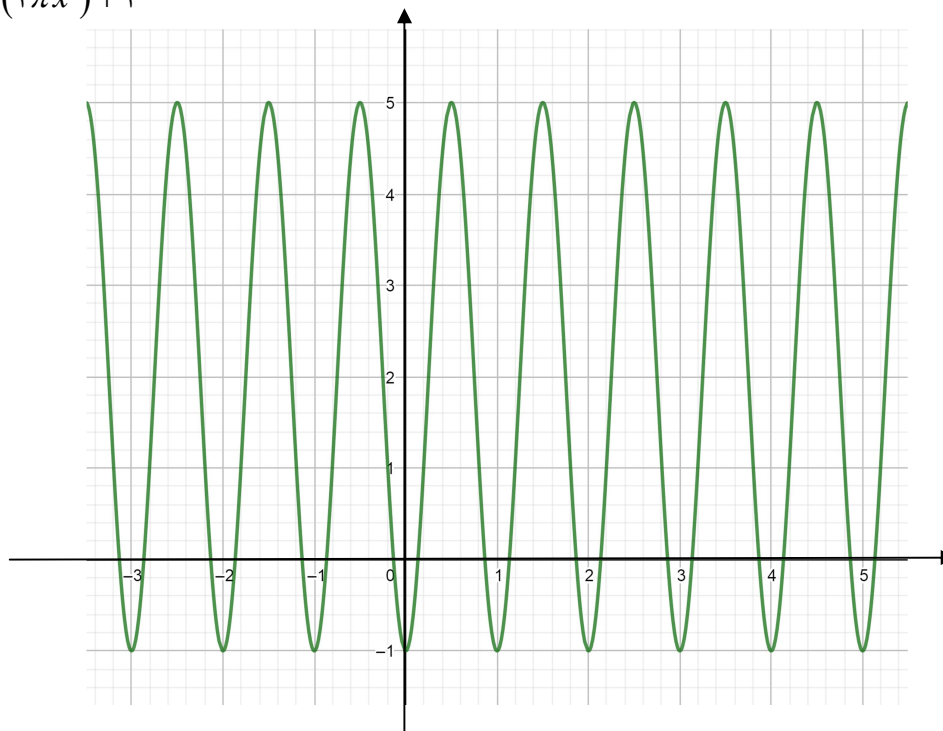
حل:

$$f(x) = 3\sin x + 1$$



مقدار ماکزیمم ۴ و مقدار مینیمم -۲ می‌باشد.

$$g(x) = -3 \cos(2\pi x) + 2$$



مقدار ماکزیمم ۵ و مقدار مینیمم -۱ می‌باشد.

توابع $y = a \cos(bx) + c$ و $y = a \sin(bx) + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

مثال: بیشترین مقدار و کمترین مقدار $y = -5 \cos 2x - 1$ به ترتیب برابر است با $-5 - 1 = -6$ و $5 - 1 = 4$

مثال: ضابطه تابعی را بنویسید که مقدار ماکزیمم و مینیمم آن به ترتیب ۵ و -۷ و دوره تناوب آن ۳ باشد.

حل:

ضابطه این تابع به فرم $y = a \cos(bx) + c$ یا $y = a \sin(bx) + c$ می‌تواند باشد.

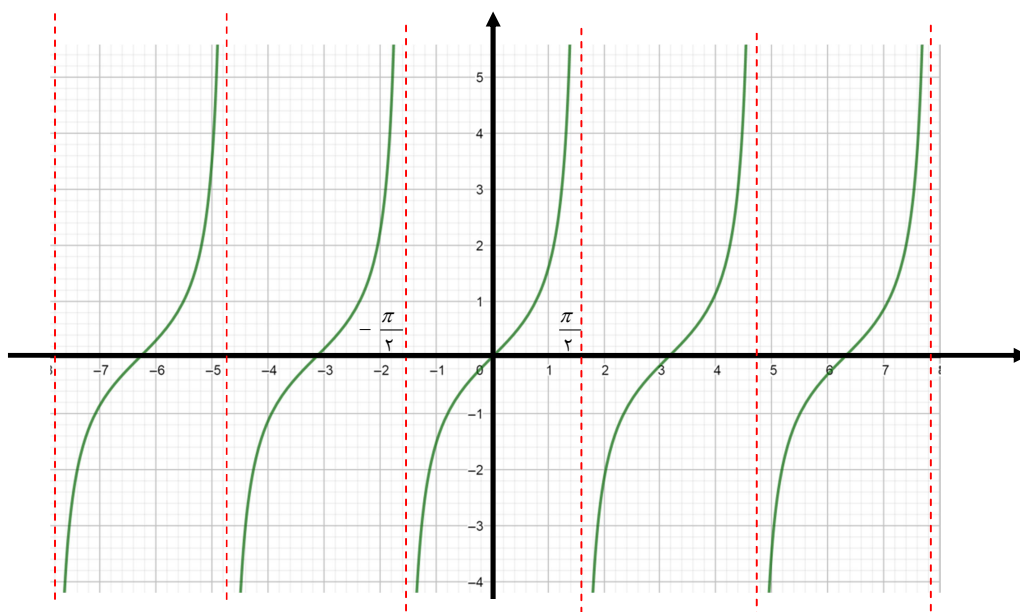
$$\begin{cases} |a| + c = 5 \\ -|a| + c = -7 \end{cases} \Rightarrow c = -1, a = \pm 6$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 3 \Rightarrow b = \pm \frac{2\pi}{3}$$

یکی از این ضابطه‌ها $y = 6 \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right) - 1$ می‌باشد.

تابع تانژانت

مثال: با توجه به نمودار تابع $y = \tan x$ که به صورت زیر می باشد. نتیجه می شود که:



الف) دامنه تابع $\left\{ x \mid x \in R, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z \right\}$ است.

ب) برد تابع R است.

پ) دوره تناوب تابع π است.

ت) تابع بیشترین مقدار ندارد و کمترین مقدار نیز ندارد.

ث) تابع اکیداً صعودی نیست.

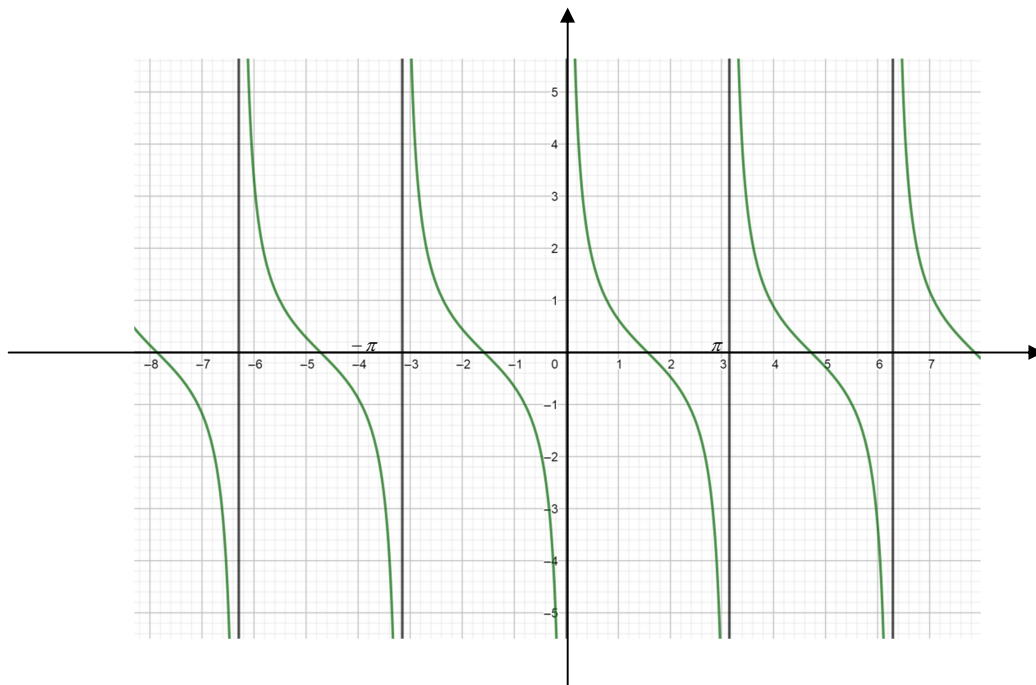
ج) تابع اکیداً نزولی نیست.

چ) تابع اکیداً یکنوا نیست.

ح) تابع در هر بازه ای که تعریف شده باشد اکیداً صعودی و اکیداً یکنوا است.

تابع کتانژانت

مثال: با توجه به نمودار تابع $y = \cot x$ که به صورت زیر می‌باشد. نتیجه می‌شود که:



(الف) دامنه تابع $\{x | x \in R, x \neq k\pi, k \in Z\}$ است.

(ب) برد تابع R است.

(پ) دوره تناوب تابع π است.

(ت) تابع بیشترین مقدار ندارد و کمترین مقدار نیز ندارد.

(ث) تابع اکیداً صعودی نیست.

(ج) تابع اکیداً نزولی نیست.

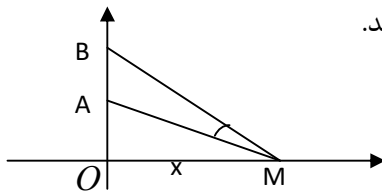
(چ) تابع اکیداً یکنوا نیست.

(ح) تابع در هر بازه‌ای که تعریف شده باشد اکیداً نزولی و اکیداً یکنوا است.

دوره تناوب اصلی چند تابع :

تابع	دوره تناوب اصلی
$y = \sin ax$	$\frac{2\pi}{ a }$
$y = \cos ax$	$\frac{2\pi}{ a }$
$y = \tan ax$	$\frac{\pi}{ a }$
$y = \cot ax$	$\frac{\pi}{ a }$
$y = \sin ax $	$\frac{\pi}{ a }$
$y = \cos ax $	$\frac{\pi}{ a }$
$y = \sin^m ax$, زوج , $m \in N$	$\frac{\pi}{ a }$
$y = \cos^m ax$, زوج , $m \in N$	$\frac{\pi}{ a }$
$y = \sin^m ax$, فرد , $m \in N$	$\frac{2\pi}{ a }$
$y = \cos^m ax$, فرد , $m \in N$	$\frac{2\pi}{ a }$
$y = \tan ax \cot ax$	$\frac{\pi}{2 a }$
$y = \tan ax - \cot ax$	$\frac{\pi}{2 a }$
$y = \sin ax + \cos ax $	$\frac{\pi}{2 a }$
$y = \sin ax - \cos ax $	$\frac{\pi}{ a }$
$y = mx - [mx]$	$\frac{1}{ m }$

مثال: دو نقطه A و B به بلندی‌های ۴ و ۷ بر روی محور قائم قرار دارند. نقطه M بر روی محور افقی واقع است. اگر $OM = x$ باشد تانژانت زاویه AMB را بر حسب x به دست آورید.



حل:

قرار می‌دهیم $\hat{OMB} = \lambda$, $\hat{OMA} = \beta$, $\hat{AMB} = \alpha$ در نتیجه $\alpha = \lambda - \beta$

در مثلث قائم‌الزاویه OMB داریم $\tan \lambda = \frac{OB}{OM} = \frac{7}{x}$

در مثلث قائم‌الزاویه OMA داریم $\tan \beta = \frac{OA}{OM} = \frac{4}{x}$

$$\tan \alpha = \tan(\lambda - \beta) \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\tan \lambda - \tan \beta}{1 + \tan \lambda \tan \beta} \Rightarrow$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{7}{x} - \frac{4}{x}}{1 + \frac{7}{x} \times \frac{4}{x}} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\frac{3}{x}}{\frac{x^2 + 28}{x^2}} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3x}{x^2 + 28}$$

تمرین:

۱. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + 5$ را بیابید.

۲. دوره تناوب $f(x) = \frac{2}{3}x - \left[\frac{2}{3}x \right]$ را به دست آورید.

۳. ثابت کنید تابع $f(x) = \begin{cases} 3 & x \in Q \\ 5 & x \notin Q \end{cases}$ متناوب است ولی دوره تناوب اصلی ندارد.

۴. ثابت کنید تابع $f(x) = \begin{cases} 1390 & x \in Z \\ 1391 & x \notin Z \end{cases}$ متناوب است ولی دوره تناوب آن را بیابید.

۵. نشان دهید تابع $f(x) = x^2$ متناوب نیست.

۶. آیا تابع $f(x) = \sin \sqrt{x}$ متناوب است؟

سؤالات چهار گزینه‌ای:

۱. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = 3x - [3x]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۲. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = 5 - \sin^2 4x$ کدام است؟

- (۱) 4π (۲) 2π (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۳. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \tan \frac{\pi}{6} x - \cot \frac{\pi}{6} x + 10$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۶

۴. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 1$ کدام است؟

- (۱) 4π (۲) 2π (۳) π (۴) $\frac{\pi}{2}$

۵. اگر دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \sin ax + \cos^2 ax$ برابر با $\frac{\pi}{3}$ باشد، a کدام است؟

- (۱) ۱ یا -۱ (۲) ۲ یا -۲ (۳) ۶ یا -۶ (۴) ۳ یا -۳

۶. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \tan^2 x \cot^2 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) π (۴) 2π

۷. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = |\sin^4 x \cos^4 x| + 5$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) π (۴) $\frac{\pi}{8}$

۸. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] - \frac{5x}{6}$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۶ (۳) ۲ (۴) ۳

۹. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \sin^2 2x \cos^2 x - \cos^2 2x \sin^2 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) π (۴) 2π

۱۰. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = (-1)^{[\Delta x]}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۱۱. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \cos(3x)$ کدام است؟

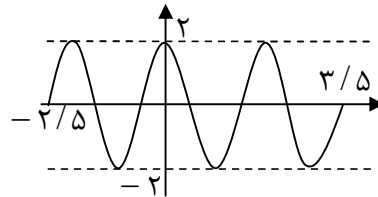
- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) π (۴) $\frac{2\pi}{3}$

۱۲. دوره تناوب اصلی تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi}{2} x & x \in Q \\ \cdot & x \notin Q \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) 2π (۲) 2 (۳) 4 (۴) 4π

سؤالات کنکور سال‌های ۱۳۹۰ الی ۱۴۰۱ :

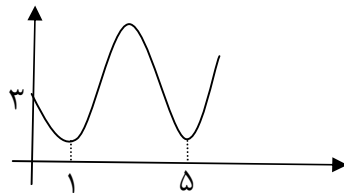
۱۳. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin \pi \left(\frac{1}{2} + bx \right)$ است. a, b کدام است؟ (ریاضی ۹۲)



- (۱) ۲ (۲) $2/5$ (۳) ۳ (۴) $3/5$

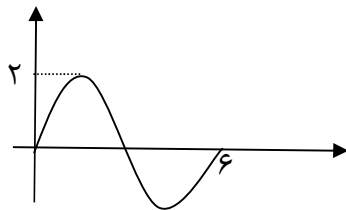
۱۴. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه $x = \frac{25}{3}$ ، کدام است؟

(تجربی ۹۳)



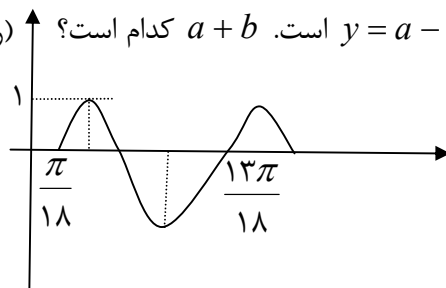
- (۱) ۲ (۲) $2/5$ (۳) ۳ (۴) $3/5$

۱۵. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟ (تجربی ۹۳ خارج)



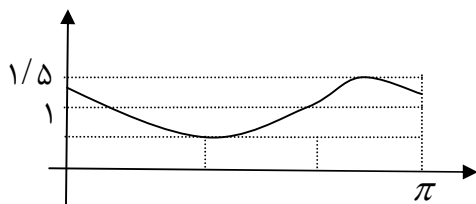
- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{8}{3}$

۱۶. شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$ است. $a + b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۵)



- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۱۷. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = 1 + a \sin\left(bx - \frac{\pi}{6}\right)$ است. $a + b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۵ خارج)



(۲) ۱

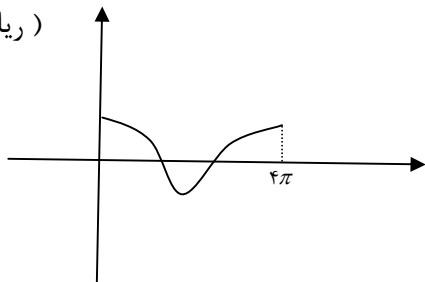
(۱) $\frac{1}{2}$

(۴) ۲

(۳) $\frac{3}{2}$

۱۸. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx$ است. مقدار تابع در نقطه $x = \frac{16\pi}{3}$ ، کدام است؟

(ریاضی ۹۶)

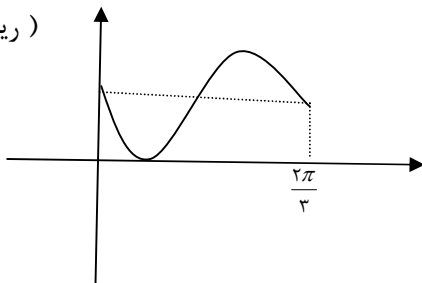
(۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۴) ۰

۱۹. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطه $x = \frac{7\pi}{6}$ ، کدام است؟

(ریاضی ۹۶ خارج)



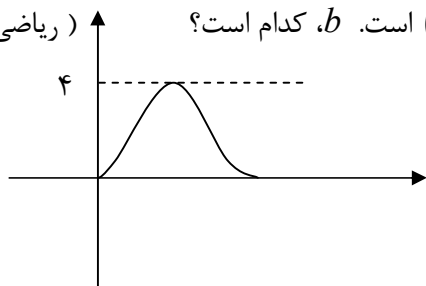
(۱) صفر

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۴) ۲

۲۰. شکل زیر نمودار تابع $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ در بازه $(0, 4)$ است. b ، کدام است؟ (ریاضی ۹۷)



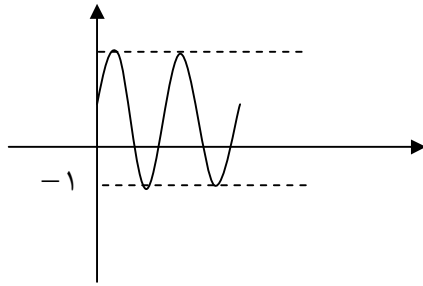
(۱) -۲

(۲) -۱

(۳) ۱

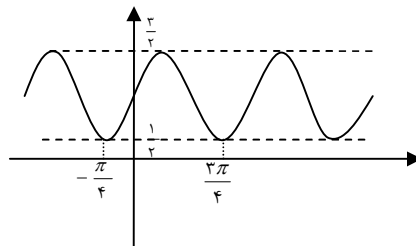
(۴) ۲

۲۱. شکل زیر نمودار تابع $y = 1 + a \sin(b\pi x)$ در بازه $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ است. $a + b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۷ خارج)



- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶

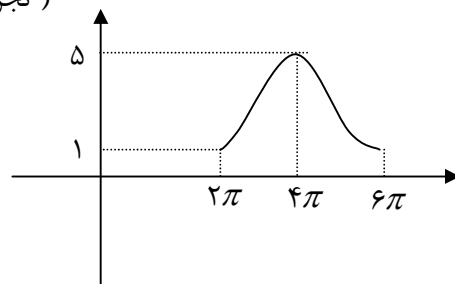
۲۲. شکل روبرو نمودار تابع $y = 1 + a \sin bx \cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)



- (۱) ۱
- (۲) ۳/۲
- (۳) ۲
- (۴) ۳

۲۳. شکل زیر، نمودار تابع $y = c + a \cos bx$ را در یک دوره تناوب نشان می‌دهد. مقدار c ، کدام است؟

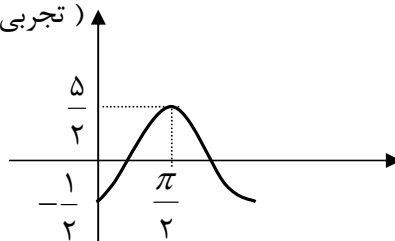
(تجربی ۱۴۰۱)



- (۱) ۵
- (۲) ۴
- (۳) ۳
- (۴) ۱

۲۴. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = c + a \cos bx$ را نشان می‌دهد. مقدار ac ، کدام است؟

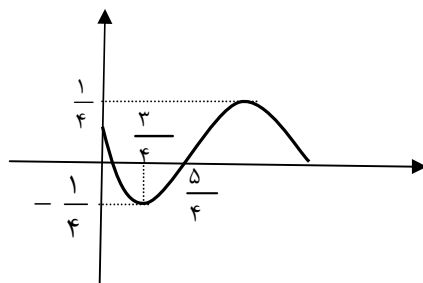
(تجربی ۱۴۰۱ خارج)



- (۱) -۵
- (۲) -۳
- (۳) -۵/۲
- (۴) -۳/۲

۲۵. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a \cos(bx + c)$ را نشان می‌دهد. اگر $b > 0$ و $0 < c < \pi$ باشد، مقدار

(ریاضی ۱۴۰۱)



کدام است؟ $\frac{ac}{b}$

(۱) $\frac{1}{16}$

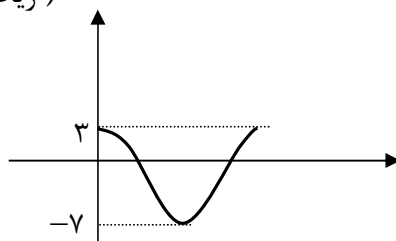
(۲) ۱

(۳) $\frac{1}{4\pi}$

(۴) π

۲۶. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos x + b$ را نشان می‌دهد. مقدار $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ کدام است؟

(ریاضی ۱۴۰۱ خارج)



(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{11}{2}$

(۳) $-\frac{1}{2}$

(۴) $-\frac{11}{2}$

پاسخنامه

شماره	پاسخ	شماره	پاسخ	شماره	پاسخ	شماره	پاسخ	شماره	پاسخ
۱	۲	۲	۳	۳	۳	۴	۴	۵	۳
۶	۲	۷	۴	۸	۲	۹	۲	۱۰	۲
۱۱	۴	۱۲	۲	۱۳	۱	۱۴	۲	۱۵	۳
۱۶	۴	۱۷	۳	۱۸	۱	۱۹	۴	۲۰	۱
۲۱	۳	۲۲	۳	۲۳	۳	۲۴	۴	۲۵	۱
۲۶	۱	۲۷		۲۸		۲۹		۳۰	

معادلات مثلثاتی

• معادلات مثلثاتی:

برای حل هر معادله مثلثاتی ابتدا به کمک روابط جبری و مثلثاتی آن را به یک یا چند معادله ساده $\sin x = a$ ، $\cos x = b$ ، $\tan x = c$ یا $\cot x = d$ تبدیل می‌کنیم و سپس هر یک از معادلات ساده بدست آمده را حل می‌نماییم، اجتماع جواب‌های این معادلات که در دامنه متغیر معادله اصلی باشد، مجموعه جواب معادله می‌باشد.

الف) حل معادله $\sin x = a$:

اگر $-1 \leq a \leq 1$ باشد زاویه‌ای مانند α وجود دارد که $\sin \alpha = a$ و در نتیجه $\sin x = \sin \alpha$ و جواب‌های معادله به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ ، $x = 2k\pi + \pi - \alpha$ ، $k \in Z$ می‌باشد.

مثال: معادله $2\sin x = 1$ را حل کنید.

$$2\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

حل:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

مثال: معادله $\sin 5x - 2\sin x \cos x = 0$ چند ریشه در بازه $[0, \pi]$ دارد؟

حل:

$$\sin 5x - 2\sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin 5x = \sin 2x \Rightarrow$$

$$5x = 2k\pi + 2x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \Rightarrow x = 0, \frac{2\pi}{3}$$

$$5x = 2k\pi + \pi - 2x \Rightarrow 7x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi + \pi}{7} \Rightarrow x = \frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \pi$$

ب) حل معادله $\cos x = b$:

اگر $-1 \leq b \leq 1$ باشد زاویه‌ای مانند α وجود دارد که $\cos \alpha = b$ و در نتیجه $\cos x = \cos \alpha$ و جواب‌های معادله به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ ، $x = 2k\pi - \alpha$ ، $k \in Z$ می‌باشد.

مثال: معادله $2\cos^3 x + 1 = 0$ را حل کنید.

$$2\cos^3 x + 1 = 0 \Rightarrow \cos^3 x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos^3 x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow$$

حل:

$$3x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9}$$

مثال: جواب‌های معادله $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$ در بازه $[\pi, 2\pi]$ را بیابید.

حل: $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -1, \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \pi$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{3}$$

مثال: معادله $4\cos^2 x - 3 = 0$ را حل کنید.

حل: $4 \times \frac{1 + \cos 2x}{2} - 3 = 0 \Rightarrow 2\cos 2x - 1 = 0 \Rightarrow$

$$2\cos 2x = 1 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

پ) حل معادله $\tan x = c$:

$c \in R$, زاویه‌ای مانند α وجود دارد که $\tan \alpha = c$ و در نتیجه $\tan x = \tan \alpha$ و جواب‌های معادله به صورت $x = k\pi + \alpha$, $k \in Z$ می‌باشد.

مثال: معادله $\sin x - \cos x = 0$ را حل کنید.

حل: $\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

ت) حل معادله $\cot x = d$:

$d \in R$, زاویه‌ای مانند α وجود دارد که $\cot \alpha = d$ و در نتیجه $\cot x = \cot \alpha$ و جواب‌های معادله به صورت $x = k\pi + \alpha$, $k \in Z$ می‌باشد.

مثال: معادله $\cot^2 x + \sqrt{3}\cot x = 0$ را حل کنید.

حل: $\cot^2 x + \sqrt{3}\cot x = 0 \Rightarrow \cot x(\cot x + \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \cot x = 0, \cot x = -\sqrt{3}$

$$\cot x = 0 \Rightarrow \cot x = \cot \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\cot x = -\sqrt{3} \Rightarrow \cot x = \cot \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6}$$

ث) حالت‌های خاص:

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$	$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$
$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$	$\cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi$

توجه:

ریشه معادلات $\sin x = 1$ ، $\sin x = -1$ ، $\cos x = 1$ و $\cos x = -1$ مضاعف می‌باشد.

مثال: معادله $\sin^2 x = \sin x$ را حل کنید.

حل: $\sin^2 x = \sin x \Rightarrow \sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

مثال: معادله $2\cos^2 x - \sin x = 1$ را حل کنید.

حل: $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0 \Rightarrow 2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

مثال: معادله $\cos^4 x - \sin x = 0$ را حل کنید.

حل: $\cos^4 x - \sin x = 0 \Rightarrow \cos^4 x = \sin x \Rightarrow \cos^4 x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow$

$$4x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}, x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$$

تمرین:

۱. هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2\sin^2 x = \sin x$

ب) $\tan 5x = \tan x$

پ) $2\sin^2 x - 5\sin x + 3 = 0$

ت) $\tan^2 x = \tan x$

ث) $\sin x + \tan x \cos(2\pi - x) = 1$

ج) $2\sin^2 x + 3\cos x = 3$

چ) $3\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x \cos x = 3$

۲. هر یک از معادلات زیر را حل کنید و جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ را بیابید.

الف) $3\sin x = \sqrt{3}\cos x$

ب) $\tan x = 2\sin x$

پ) $2\sin x \cos x + \sqrt{3}\cos x = 0$

ت) $\tan^2 x = \tan x$

ث) $\sin x \tan x + \cos x \cot x = 0$

ج) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

چ) $\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \sqrt{2}$

سؤالات چهار گزینه‌ای:

۱. معادله $\sin 5x - 2\sin x \cos x = 0$ چند ریشه در بازه $[0, \pi]$ دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۲. معادله $\sin^2 \pi x + \cos^2 \pi x = 0$ در بازه $[-1, 1]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۳. جواب کلی معادله $2\sin^2 x - \sin 2x = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۴. معادله $\tan x - 2\cot x = -1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۵. معادله $\tan 7x \tan 5x = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۲ (۳) ۲۳ (۴) ۲۴

۶. معادله $\sin 5x - \sin 3x = 0$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۷. معادله $\tan 3x + \cot 2x = 0$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۰ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۸. معادله $\sin 5x \cos 2x - \cos 5x \sin 2x = 1$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۰ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۹. اگر معادله $\cos 2x + 2 \cos x = m$ ریشه مضاعف داشته باشد، مجموع مقادیر m چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

۱۰. خط به معادله $y = 2$ نمودار منحنی $f(x) = \frac{1 + 3 \sin x}{1 - 2 \sin x}$ را در بازه $[0, 2\pi]$ در چند نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) ۰ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۱. جواب کلی معادله مثلثاتی $3\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 5 = 0$ به کدام صورت زیر است؟

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi + \frac{5\pi}{4}$ (۴) $2k\pi - \frac{3\pi}{4}$

۱۲. جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin 3x + \sin x = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2}$ (۲) $k\pi$ (۳) $k\pi + \frac{5\pi}{4}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

۱۳. مجموع جواب‌های متمایز معادله $2 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0$ در بازه $[\pi, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{8\pi}{3}$ (۲) $\frac{10\pi}{3}$ (۳) 3π (۴) $\frac{11\pi}{3}$

۱۴. جواب های کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x = \sin x$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ بیان شده است. مجموعه مقادیر i کدام است؟

- (۱) $\{7, 9\}$ (۲) $\{1, 3, 5\}$ (۳) $\{1, 4, 7\}$ (۴) $\{1, 5, 9\}$

۱۵. جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

۱۶. جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin(\pi + x) = 0$ ، $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ به کدام صورت است؟

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

۱۷. چند تا مثلث وجود دارد که اندازه دوزلع آن ۱۲ و $7\sqrt{3}$ سانتی متر و مساحت آن ۶۳ سانتی متر مربع باشد؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

سؤالات کنکور سال های ۱۳۹۰ الی ۱۴۰۱ :

۱۸. جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin(\pi + x)\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\sin(\pi - x) + 1 = 0$ کدام است ؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(تجربی ۹۰)

- (۱) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

۱۹. جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)(\sin x - \tan x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۰ خارج)

- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۲۰. جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۱)

- (۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۲۱. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۱ خارج)

(۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{6}$

۲۲. نقاط پایانی کمان جواب‌های معادلهٔ $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی رأس‌های کدام چند ضلعی است؟ (ریاضی ۹۱ خارج)

(۱) مثلث متساوی‌الساقین (۲) مستطیل
(۳) مثلث قائم‌الزاویه (۴) مربع

۲۳. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۲)

(۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۲۴. مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (تجربی ۹۲ خارج)

(۱) 8π (۲) 9π (۳) 10π (۴) 11π

۲۵. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sqrt{2} \sin x \cos x = \sin x + \cos x$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

۲۶. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲ خارج)

(۱) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۲۷. در معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x (\sin x + \cos x) = \cos 2x (\cos x - \sin x)$ ، مجموع تمام جواب‌ها در بازه $[0, \pi]$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۳)

(۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{5\pi}{4}$ (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{7\pi}{4}$

۲۸. جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = 1$ ، به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۳ خارج)

$$(۱) \quad k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۲) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (۳) \quad 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \quad (۴) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

۲۹. جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2 \cos^2 x$ ، کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

$$(۱) \quad \frac{k\pi}{2} \quad (۲) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (۳) \quad k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۴) \quad k\pi + \frac{\pi}{4}$$

۳۰. جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$ ، به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۴)

$$(۱) \quad \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \quad (۲) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (۳) \quad k\pi - \frac{\pi}{8} \quad (۴) \quad k\pi + \frac{\pi}{8}$$

۳۱. جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟ (تجربی ۹۴ خارج)

$$(۱) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (۲) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (۳) \quad k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۴) \quad k\pi + \frac{\pi}{4}$$

۳۲. جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x$ ، کدام است؟ (ریاضی ۹۴ خارج)

$$(۱) \quad \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16} \quad (۲) \quad \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16} \quad (۳) \quad \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \quad (۴) \quad \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

۳۳. جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۵)

$$(۱) \quad 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (۲) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۳) \quad 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \quad (۴) \quad k\pi - \frac{\pi}{3}$$

۳۴. مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$ ، در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟ (ریاضی ۹۵)

$$(۱) \quad \frac{7\pi}{4} \quad (۲) \quad \frac{9\pi}{4} \quad (۳) \quad \frac{5\pi}{2} \quad (۴) \quad \frac{11\pi}{3}$$

۳۵. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$ ، در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(ریاضی ۹۵ خارج)

$$(۱) \quad \frac{3\pi}{4} \quad (۲) \quad \frac{5\pi}{4} \quad (۳) \quad \frac{3\pi}{2} \quad (۴) \quad \frac{7\pi}{4}$$

۳۶. جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۶)

$$(۱) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۲) \quad 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (۳) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۴) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

۳۷. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(تجربی ۹۶ خارج)

(۱) $\frac{14\pi}{3}$ (۲) 4π (۳) $\frac{9\pi}{2}$ (۴) 5π

۳۸. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\tan x \tan 3x = 1$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۷)

(۱) $\frac{k\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$ (۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

۳۹. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۷ خارج)

(۱) $\frac{k\pi}{5}$ (۲) $\frac{2k\pi}{5}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{5}$ (۴) $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

۴۰. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

(۱) $\frac{5\pi}{2}$ (۲) $\frac{7\pi}{2}$ (۳) 2π (۴) 3π

۴۱. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{2}$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸ خارج)

(۱) $\frac{5\pi}{2}$ (۲) 3π (۳) $\frac{7\pi}{2}$ (۴) 4π

۴۲. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\tan 3x \tan x = 1$ در بازهٔ $[\pi, 2\pi]$ کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

(۱) 5π (۲) 6π (۳) $\frac{9\pi}{2}$ (۴) $\frac{11\pi}{2}$

۴۳. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x$ ، کدام است؟ (ریاضی ۹۹ خارج)

(۱) $\frac{2k\pi}{3}$ (۲) $\frac{k\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۴۴. تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos^2 x - \sin^2 x \cos(3x) = 1$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶

۴۵. تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $5\sin^2 x + 2\cos(3x) = -2$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ کدام است؟

(تجربی ۱۴۰۰ خارج)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴) ۷

۴۶. تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $8\cos x - \tan^2 x = 1$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

(۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۴۷. تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(تجربی ۱۴۰۱ خارج)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۸. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$ در بازه $[-\pi, 2\pi]$ کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{7\pi}{3}$ (۳) $\frac{9\pi}{4}$ (۴) $\frac{11\pi}{6}$

۴۹. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(ریاضی ۱۴۰۱ خارج)

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{3\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{5\pi}{4}$

پاسف‌نامه

شماره	پاسخ	شماره	پاسخ	شماره	پاسخ	شماره	پاسخ	شماره	پاسخ
۱	۳	۲	۳	۳	۱	۴	۱	۵	۴
۶	۳	۷	۱	۸	۳	۹	۱	۱۰	۳
۱۱	۴	۱۲	۱	۱۳	۱	۱۴	۴	۱۵	۴
۱۶	۱	۱۷	۳	۱۸	۳	۱۹	۳	۲۰	۲
۲۱	۲	۲۲	۳	۲۳	۴	۲۴	۴	۲۵	۳
۲۶	۳	۲۷	۲	۲۸	۴	۲۹	۲	۳۰	۱
۳۱	۱	۳۲	۲	۳۳	۱	۳۴	۳	۳۵	۱
۳۶	۳	۳۷	۴	۳۸	۴	۳۹	۲	۴۰	۱
۴۱	۴	۴۲	۲	۴۳	۱	۴۴	۴	۴۵	۲
۴۶	۴	۴۷	۲	۴۸	۳	۴۹	۲	۵۰	