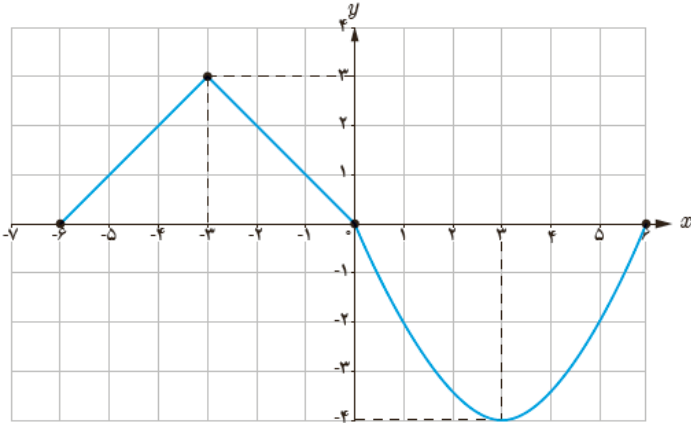
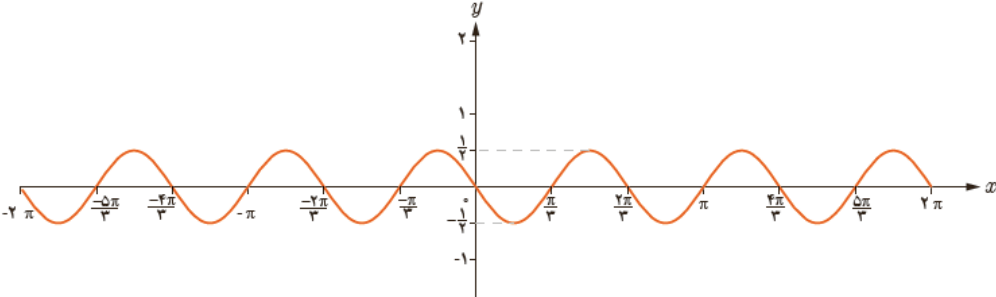
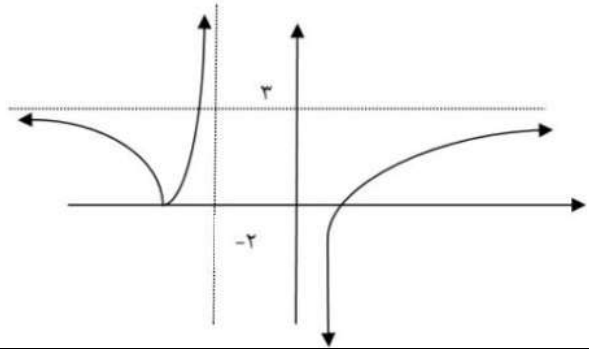
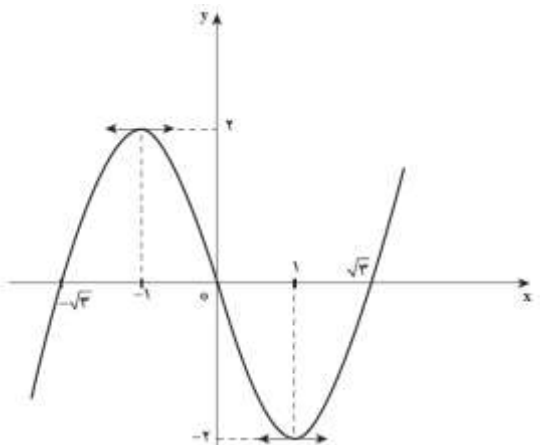


بسمه تعالی

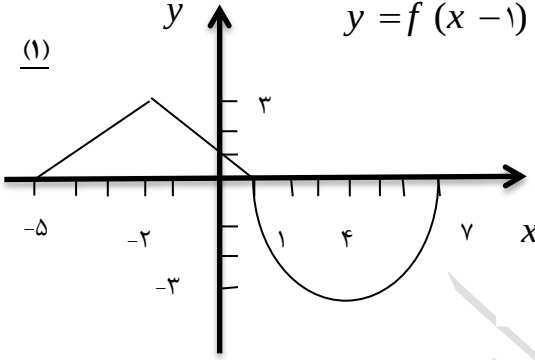
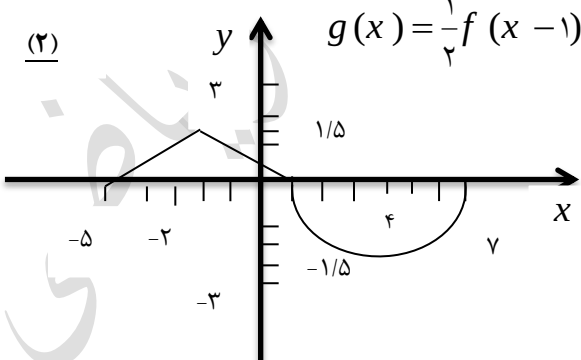
سؤالات - صفحه یک		رشته: ریاضی فیزیک	ساعات شروع: ۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:		تاریخ امتحان:	تعداد صفحه: ۳	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه
دانش آموزان روزانه سراسر استان گیلان ۱۳۹۷		معاونت متوسطه آموزش و پرورش استان گیلان		
ردیف	سؤالات - صفحه یک	ردیف		
۱	درستی یا نادرستی عبارات های زیر را مشخص کنید. الف - جواب های کلی معادله $\cos X = \cos \alpha$ به صورت $X = 2k\pi \pm \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$) می باشند. ☐ درست ☐ نادرست ب - آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[0, 1]$ همواره بیشتر از شیب آن منحنی در نقطه است. ☐ درست ☐ نادرست پ - هر تابع پیوسته بر یک بازه بسته دارای اکسترمم های مطلق است. ☐ درست ☐ نادرست ت - هر نقطه ای که در آن مقدار "f" برابر صفر شود، یک نقطه عطف است. ☐ درست ☐ نادرست			
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف - تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ مشتق پذیر نیست و خط $x = 0$ را منحنی می نامیم. ب - شیب خط مماس بر نمودار $y = \frac{1}{3}x^2 - 1$ در نقطه $x = 9$ برابر است با	۰/۵		
۳	نمودار تابع f به صورت شکل زیر است.  الف - نمودار تابع $g(x) = \frac{1}{2}f(x-1)$ را رسم کنید. ب - دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید. پ - تابع $g(x)$ در چه فاصله ای اکیداً نزولی است؟	۱/۲۵		
۴	a و b را طوری تعیین کنید که $f(x) = x^2 + ax + b$ بر $x + 2$ بخش پذیر بوده و باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x - 1$ برابر ۳ باشد. (ادامه سؤالات صفحه بعد)	۱/۲۵		

ردیف	سؤالات - صفحه دو	نمره
۵	با توجه به شکل، ضابطه مربوط به نمودار داده شده را بنویسید. 	۱
۶	معادله مقابل را حل کنید. $\tan 3x = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$	۰/۷۵
۷	a و b را چنان تعیین کنید که داشته باشیم: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + 3}{bx^2 - (a-2)x + 1} = 1$	۰/۷۵
۸	مجانِب قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 16}$ را بدست آورید.	۱
۹	برای نمودار تابع f که نمودار آن داده شده است، موارد زیر را بدست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ پ) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ 	۰/۷۵
۱۰	معادله خط مماس بر نمودار تابع $y = -2 \sin 3x$ را در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ واقع بر منحنی بنویسید.	۱/۵
۱۱	نشان دهید که مشتق تابع $f(x) = x^2 - 4 $ در $x = 2$ موجود نیست و در صورت امکان معادله های نیم مماس راست و چپ را در نقطه $x = 2$ بنویسید.	۲/۵
۱۲	بالنی را از هوا پرمی کنیم. آهنگ تغییر حجم بالن هنگامی که شعاع آن ۱۰ سانتی متر است را بیابید.	۰/۷۵
۱۳	الف) اگر $f(x) = \frac{3}{x-1}$، تابع مشتق و دامنه آن را بدست آورید. ب) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن در تمام نقاط یکسان و مقداری منفی باشد.	۱ ۰/۵

ردیف	سؤالات - صفحه سه	نمره
۱۴	مساحت بزرگترین مستطیلی را بیابید که در نیم دایره ای به شعاع R محاط شده است و یک ضلع آن روی قطر نیم دایره قرار داشته باشد.	۲
۱۵	اگر $(0,0)$ نقطه عطف تابع درجه سومی با ضابطه $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است، a ، b و c را پیدا کنید.	۱/۵
		
۱۶	جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{2x + 3}{3x + 5}$ را رسم کنید.	۲
۲۰	موفق و سربلند باشید	جمع نمرات

رشته: ریاضی فیزیک		راهنمای تصحیح سؤالات امتحان حسابان ۲- خرداد ماه	
تعداد صفحه ۵	تاریخ امتحان	سال..... آموزش متوسطه	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		استان گیلان	

ردیف	راهنمای تصحیح- صفحه ۱	نمره
------	-----------------------	------

	«با عرض سلام و خسته نباشید ، همکار گرامی در صورت ارائه پاسخ صحیح مشابه، لطفاً نمره سؤال را منظور فرمایید.»		
۱	الف) درست (۰/۲۵)؛ ب) نادرست (۰/۲۵)؛ پ) درست (۰/۲۵)؛ ت) نادرست (۰/۲۵)	۱	
۰/۵	الف) مماس قائم (۰/۲۵)؛ ب) $\frac{2}{3} \times 9 = 6$ (۰/۲۵)	۲	
۱/۲۵	الف) ۳ (۱)  (۰/۲۵) (۲)  (۰/۲۵) ابتدا نمودار را روی محور X ها یک واحد به سمت راست انتقال می دهیم (شکل ۱) و سپس عرض تمام نقاط نمودار را در $\frac{1}{2}$ ضرب می کنیم (شکل ۲). ب) برد $R_f = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ (۰/۲۵) ، دامنه $D_g = [-5, 7]$ (۰/۲۵) پ) تابع $g(x)$ درباره $[-2, 4]$ اکیدا نزولی است. (۰/۲۵)	۳	
۱/۲۵	(۱) $f(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^2 + a(-2) + b = 0$ (۰/۲۵) (۲) $f(-1) = 3 \Rightarrow 1 + a(-1) + b = 3$ (۰/۲۵) پس از حل دستگاه (۱) و (۲) $\Rightarrow \begin{cases} -2a + b = -4 \\ a + b = 2 \end{cases}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a = 2$ (۰/۲۵) و $b = 0$ (۰/۲۵)	۴	
۱	$T = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{ b } \Rightarrow b = 3 \Rightarrow b = \pm 3$ (۰/۲۵) (ادامه در صفحه بعد)	۵	

ردیف	راهنمای تصحیح - صفحه ۲	نمره
۵	(ادامه جواب سوال ۵) $\left. \begin{aligned} \max &= \frac{1}{2} = a + c \\ \min &= -\frac{1}{2} = - a + c \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = \frac{\max + \min}{2} = 0 \quad (0/25)$ $ a = \frac{\max - \min}{2} = \frac{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2} \quad (0/25)$ با توجه به نمودار داده شده، ضابطه به صورت $y = -\frac{1}{2} \sin 3x$ می باشد (۰/۲۵)	۱
۶	$\tan 3x = \tan(x - \frac{\pi}{2})$ $\Rightarrow 3x = k\pi + x - \frac{\pi}{2} \quad (0/25) \Rightarrow 3x - x = k\pi - \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (0/25) \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \quad (0/25)$	۰/۷۵
۷	می دانیم حاصل حد داده شده وقتی برابر یک مقدار عددی است که درجه صورت و درجه مخرج برابر باشند، بنابراین باید $b = 0$ (۰/۲۵) و $\frac{a}{-(a-2)} = 1 \quad (0/25) \Rightarrow a = -a + 2 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \quad (0/25)$	۰/۷۵
۸	۱ $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$ (۰/۲۵) حدس می زنیم $x = -4$ و $x = 4$ مجانب های قائم باشند. شرایط مجانب قائم را برای دو خط مذکور بررسی می کنیم: $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{(x-4)(x-1)}{(x-4)(x+4)} = \frac{-5}{0^+} = -\infty \quad (0/25)$ $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{(x-4)(x-1)}{(x-4)(x+4)} = \frac{-5}{0^-} = +\infty \quad (0/25)$ پس خط $x = -4$ مجانب قائم منحنی تابع f می باشد. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x-1)}{(x-4)(x+4)} = \frac{5}{8} \quad (0/25)$ پس خط $x = 4$ شرایط مجانب قائم را ندارد.	۱
۹	الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ (۰/۲۵) ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ (۰/۲۵) پ) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ (۰/۲۵)	۰/۷۵
۱۰	پس نقطه $(\frac{\pi}{3}, 0)$ روی نمودار تابع قرار دارد. $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y = -2 \sin \frac{3\pi}{3} = 0 \quad (0/25)$ $y' = -2 \times 3 \cos 3x \quad (0/25)$ (ادامه در صفحه بعد)	۱/۵

ردیف	راهنمای تصحیح - صفحه ۳	نمره
۱۰	(ادامه سؤال ۱۰) $y' = -2 \times 3 \cos 3\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \times 3 \times (-1) = 6 \quad (۰/۵)$ معادله خط مماس در نقطه $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$: $y - 0 = 6\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow y = 6x - 2\pi \quad (۰/۲۵)$ نقطه $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ و شیب $m = 6$	۱/۵
۱۱	$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ x^2 - 4 - 0}{x - 2} \quad (۰/۲۵)$ $\Rightarrow \begin{cases} f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+2) = 4 \quad (۰/۲۵) \\ f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -(x+2) = -4 \quad (۰/۲۵) \end{cases}$ چون $f'_+(2) \neq f'_-(2)$ پس $f'(2)$ (مشتق تابع f در نقطه $x = 2$) موجود نیست. $(۰/۲۵)$ $f(2) = 0$ و $f'_+(2) = 4 \Rightarrow y - 0 = 4(x - 2); x \geq 2 \Rightarrow y = 4x - 8; x \geq 2 \quad (۰/۵)$ $f'_-(2) = -4 \Rightarrow y - 0 = -4(x - 2); x \leq 2 \Rightarrow y = -4x + 8; x \leq 2 \quad (۰/۵)$	۲/۵
۱۲	$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V' = \frac{4}{3}\pi r^3 \times 3 = 4\pi r^2 \Rightarrow V'(1) = 4\pi(1)^2 = 4\pi \quad (۰/۲۵)$ $(۰/۲۵)$	۰/۲۵
۱۳	$f'(x) = \frac{0 \times (x-1) - 1 \times 3}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \quad D_{f'} = \mathbb{R} - \{1\} \quad (۰/۲۵)$ (الف)	۱
۱۴	(ب) سؤال باز پاسخ می باشد و یکی از جواب ها به صورت نمودار زیر است $f(x) = y = -2x + 1 \Rightarrow y' = -2$ نمودار تابع $f(x)$ نمودار مشتق تابع $f'(x)$	۰/۵
۱۴	مستطیلی به طول y و عرض x که در دایره ای به شعاع R محاط شده است را مطابق شکل زیر در نظر می گیریم. (ادامه در صفحه بعد)	۲

نمره	
	(ادامه جواب ۱۴) مستطیلی به طول y و عرض x که در دایره ای به شعاع R محاط شده است را مطابق شکل بالا در نظر می گیریم. $o\overset{\Delta}{AB} : x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow y = 2\sqrt{R^2 - x^2} \quad (۰/۲۵)$ $S = xy = 2x\sqrt{R^2 - x^2} = 2\sqrt{R^2x^2 - x^4} \quad (۰/۲۵)$ $\underbrace{(0 \leq x \leq R)}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow S' = 2\left(\frac{2R^2x - 4x^3}{2\sqrt{R^2x^2 - x^4}}\right) = \frac{2R^2x - 4x^3}{\sqrt{R^2x^2 - x^4}} \quad (۰/۲۵)$ برای یافتن نقاط بحرانی در بازه $[0, R]$ قرار می دهیم $S' = 0$، بنابراین خواهیم داشت: $2R^2x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 2x(R^2 - 2x^2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{یا} \quad R^2 - 2x^2 = 0 \quad (۰/۲۵)$ $x = 0 \quad \text{یا} \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}R \quad (۰/۲۵) \Rightarrow y = \sqrt{2}R \quad (۰/۲۵) \Rightarrow S = xy = R^2 \quad (۰/۲۵)$ از طرفی $S(0) = 0$ و $S(R) = 0$، بنابراین تابع S به ازای $x = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ بیشترین مقدار مساحت که برابر R^2 می باشد را خواهد داشت.
۱/۵	۱۵ ابتدا $(0, 0)$ را در ضابطه $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ جایگذاری می کنیم. $(0, 0) \Rightarrow 0^3 + a(0)^2 + b(0) + c = 0 \Rightarrow c = 0 \quad (۰/۲۵)$ می دانیم که مشتق به ازای طول نقاط $\max$ و $\min$ برابر صفر است، پس با توجه به نمودار داریم: $\max(-1, 2)$ و $\min(1, -2)$ $f'(x) = y' = 3x^2 + 2ax + b \quad (۰/۲۵)$ $f'(-1) = 0 \Rightarrow 3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \quad (۱) \quad (۰/۲۵)$ $f'(1) = 0 \Rightarrow 3(1)^2 + 2a(1) + b = 0 \quad (۲) \quad (۰/۲۵)$ $\underline{(۱)} \text{ و } \underline{(۲)} \Rightarrow \begin{cases} -2a + b = -3 \\ 2a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = 0 \quad (۰/۲۵) \quad \text{و} \quad b = -3 \quad (۰/۲۵)$ $y = x^3 + 0 \times x^2 - 3x + 0 \Rightarrow y = x^3 - 3x$ ضابطه تابع برابر است با:
۲	۱۶ دامنه این تابع $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{3}\right\}$ است. (۰/۲۵). ابتدا مجانب های منحنی را بدست می آوریم $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x + 3}{3x + 5} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3} \quad \text{مجانب افقی:} \quad (۰/۲۵)$ از طرفی ریشه مخرج کسر برابر $x = -\frac{5}{3}$ می باشد و داریم: $\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{3}} \frac{2x + 3}{3x + 5} = \pm\infty \quad (۰/۲۵)$ پس خط $x = -\frac{5}{3}$ مجانب قائم نمودار این تابع می باشد. حال مشتق تابع را بدست می آوریم: $y' = \frac{1}{(3x + 5)^2}; \quad x \neq -\frac{5}{3} \quad (۰/۲۵)$ می بینیم که $y' > 0$ و در نتیجه تابع در بازه های $(-\infty, -\frac{5}{3})$ و $(-\frac{5}{3}, +\infty)$ همواره صعودی است. (ادامه در صفحه بعد)

(ادامه جواب ۱۶)

۱۶

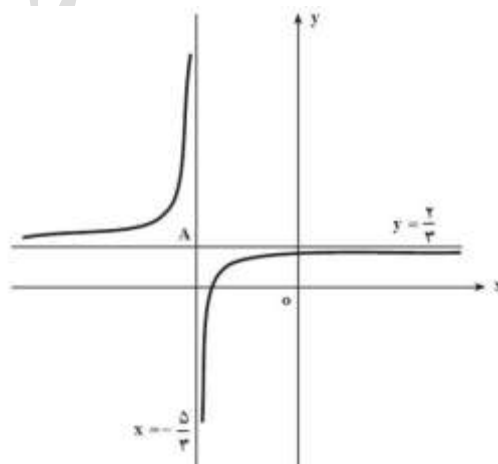
$$y'' = \frac{-6(3x+5)}{(3x+5)^4} \quad (۰/۲۵)$$

چون مخرج $(3x+5)^4$ همواره مثبت است، پس علامت y'' با عبارت $-6(3x+5)$ هم علامت است. جدول رفتار تابع به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	$+\infty$
y'	+		+
y''	+ تقعر رو به بالا		- تقعر رو به پایین
y	$\frac{2}{3} \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow \frac{2}{3}$

(۰/۵)

نمودار $y = \frac{2x+3}{3x+5}$ به صورت زیر است:



(۰/۲۵)