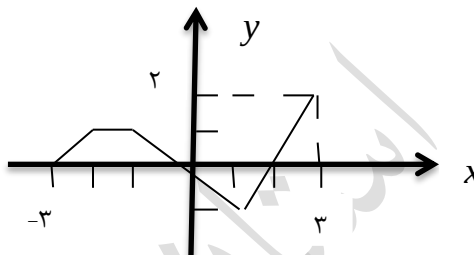


بسمه تعالی

سوالان امتحان نهایی درس: حسابان ۲		رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		نام و نام خانوادگی:	تاریخ امتحان:	تعداد صفحه: ۲
دانش آموزان روزانه سراسر استان گیلان ۱۳۹۷		معاونت متوسطه آموزش و پرورش استان گیلان		
ردیف	سؤالات - صفحه یک	ردیف		
۱	درستی یا نادرستی عبارات های زیر را مشخص کنید. الف - هر تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است. ب- اگر $f(x) = 3x$، نمودار مشتق آن خط راستی با شیب منفی است. پ- فرض کنیم تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته و بازه (a, b) مشتق پذیر باشد، در این صورت اگر به ازای هر x در (a, b) داشته باشیم $f'(x) > 0$ آنگاه تابع f بر $[a, b]$ صعودی اکید است. ت- هر نقطه بحرانی تابع f یک نقطه اکسترمم نسبی f است. درست ☐ نادرست ☐ درست ☐ نادرست ☐ درست ☐ نادرست ☐ درست ☐ نادرست ☐	۱		
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف- اگر دامنه تابع $f(x)$ برابر $[-7, 5]$ باشد، دامنه تابع $y = f(2x + 1)$ برابر است با ب- اگر f'' در یک بازه منفی باشد، تقعر منحنی تابع f در آن بازه رو به است.	۲		
۳	نمودار تابع f به صورت روبرو است.  الف- تابع در چه فاصله هایی اکیداً صعودی است؟ ب- در چه بازه ای تابع مثبت بوده ولی اکیداً نزولی است؟ پ- نمودار تابع $g(x) = f(-x)$ را رسم کنید.	۳		
۴	مقدار m طوری بدست آورید که باقی مانده تقسیم $f(x) = x^2 - 2mx - 3$ بر $x - 2$ برابر یک باشد.	۴		
۵	دوره تناوب و ماکزیمم و مینیمم تابع $y = -\cos \frac{x}{2} + 2$ را بدست آورید.	۵		
۶	مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب $\sqrt{3}$ و ۴ سانتی متر باشد، آنگاه چه مثلث هایی با این خاصیت ها می توان ساخت؟	۶		
۷	حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x - 1]}{x - 1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x + \pi}{\tan x}$ (ادامه سؤالات صفحه بعد)	۷		

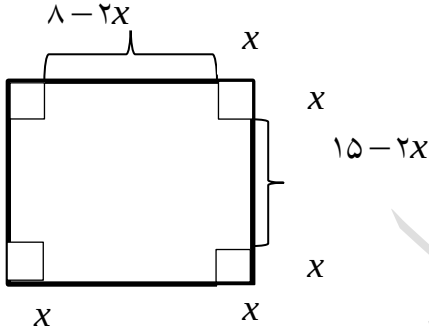
ردیف	سؤالات - صفحه دو	ردیف
۸	مجانِب های افقی و قائم تابع $f(x) = \frac{3x+4}{-2x+1}$ را بدست آورید.	۱
۹	با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = x^2 - 4x$ را در نقطه $x=1$ بیابید.	۱
۱۰	تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & x \geq 2 \\ x^2 & x < 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. اگر این تابع در $x=2$ مشتق پذیر باشد، مقادیر a و b را بدست آورید.	۲
۱۱	مشتق تابع های زیر را بدست آورید (ساده کردن الزامی نیست). الف) $y = (x + \sqrt{x})^3$ ب) $y = \frac{x^2 + 3x}{4x - 1}$	۲
۱۲	مشتق مرتبه دوم تابع $y = 3x^2 - \cos x$ را بدست آورید.	۱
۱۳	معادله حرکت متحرکی بر یک محور افقی به صورت $d(t) = t^2 - 3t + 2$ می باشد. سرعت لحظه ای متحرک را در ثانیه $t=5$ بدست آورید.	۰/۷۵
۱۴	جعبه ای در باز از یک مقوای 15×8 سانتی متر طوری بسازید که بیشترین حجم را داشته باشد.	۱/۵
۱۵	اگر $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، ضرایب a, b, c و d را چنان تعیین کنید که این تابع در $(3, 0)$ دارای یک اکسترمم نسبی باشد و نمودار تابع در نقطه $(-1, 1)$ یک نقطه عطف داشته باشد.	۲
۱۶	جدول رفتار و نمودار تابع $y = x^3 - x^2 + 3x - 3$ را رسم کنید.	۱/۷۵
۲۰	موفق و سربلند باشید جمع نمرات	

رشته: ریاضی فیزیک		راهنمای تصحیح سؤالات امتحان حسابان ۲- خرداد ماه	
تعداد صفحه ۴	تاریخ امتحان	سال..... آموزش متوسطه	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		استان گیلان	

ردیف	راهنمای تصحیح- صفحه ۱	نمره
------	-----------------------	------

	«با عرض سلام و خسته نباشید ، همکار گرامی در صورت ارائه پاسخ صحیح مشابه، لطفاً نمره سؤال را منظور فرمایید.»		
۱	الف) درست (۰/۲۵) ؛ ب) نادرست (۰/۲۵) ؛ پ) درست (۰/۲۵) ؛ ت) نادرست (۰/۲۵)		۱
۰/۵	الف) $[-۴, ۲]$ (۰/۲۵) ؛ ب) پایین (۰/۲۵)		۲
۱/۲۵	الف) تابع در بازه های $[-۳, -۲]$ و $[۱, ۳]$ اکیداً صعودی می باشد. (۰/۵) ب) در بازه $[-۱, ۰]$ (۰/۲۵) پ) (۰/۲۵) (۱) (۲)		۳
۰/۷۵	$x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$ و $f(۲) = ۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow f(۲) = ۲^۳ - ۲m(۲) - ۳ = ۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۴m = ۴ \Rightarrow m = ۱$ (۰/۲۵)		۴
۰/۷۵	$a = -۱, b = \frac{1}{2}$ و $c = ۲$ $T = \frac{۲\pi}{ b } = \frac{۲\pi}{\frac{1}{2}} = ۴\pi$ (۰/۲۵) $\max = a + c = ۱ + ۲ = ۳$ (۰/۲۵) $\min = - a + c = -۱ + ۲ = ۱$ (۰/۲۵)		۵
۱/۲۵	$S = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin x \Rightarrow ۳ = \frac{1}{2} \times \sqrt{۳} \times ۴ \times \sin x$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۳}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{۳} \\ x = \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$ (۰/۲۵)		۶
دو مثلث با این خاصیت ها می توان ساخت (۰/۲۵).			

ردیف	راهنمای تصحیح - صفحه ۲	نمره
۷	الف) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x-1]}{x-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$ (۰/۲۵) $x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x-1 < 0 \Rightarrow [x-1] = -1$ (۰/۲۵) ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+\pi}{\tan x} = \frac{\frac{3\pi}{2}}{\pm\infty} = 0$ (۰/۲۵) زیرا $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ پس طبق قضیه داریم: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+\pi}{\tan x} = 0$ (۰/۵)	۱/۵
۸	مجانِب افقی: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x+4}{-2x+1} = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$ (۰/۵) $\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{3x+4}{-2x+1} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{3x+4}{-2x+1} &= +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $X = \frac{1}{2}$ خط $X = \frac{1}{2}$ مجانب قائم منحنی تابع است. (۰/۵)	۱
۹	$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x - (-3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x - 3}{x-1}$ (۰/۲۵) $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-3) = 1-3 = -2$ (۰/۲۵)	۱
۱۰	می دانیم اگر تابعی در نقطه ای مشتق پذیر باشد، در آن نقطه پیوسته نیز هست. ابتدا پیوستگی تابع $f(x)$ را در نقطه $x=2$ بررسی می کنیم. شرط پیوستگی: $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ $\left. \begin{aligned} f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax^2 + bx + 1) &= 4a + 2b + 1 \quad (۰/۲۵) \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 &= 2^2 = 4 \quad (۰/۲۵) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4a + 2b + 1 = 4$ $\Rightarrow 4a + 2b = 3$ (۰/۲۵) (۱) باید مشتق راست و چپ تابع با هم برابر باشند. پس داریم: $\left. \begin{aligned} f'_+(x) = 2ax + b &\Rightarrow f'_+(2) = 4a + b \quad (۰/۲۵) \\ f'_-(x) = 2x &\Rightarrow f'_-(2) = 2(2) = 4 \quad (۰/۲۵) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4a + b = 4$ (۰/۲۵) (۲) $\underline{(۱)} \text{ و } \underline{(۲)} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 3 \\ 4a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{4} \quad (۰/۲۵) \text{ و } b = -5 \quad (۰/۲۵)$	۲

ردیف	راهنمای تصحیح- صفحه ۳	نمره															
۱۱	۲ الف) $y' = \underset{(\cdot/25)}{3} \times \underbrace{(x + \sqrt{x})^2}_{(\cdot/25)} \times \underbrace{(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})}_{(\cdot/25)}$ ب) $y' = \frac{\overbrace{(2x + 3)}^{(\cdot/5)} \underbrace{(4x - 1)}^{(\cdot/5)} - \underbrace{4(x^2 + 3x)}_{(\cdot/25)}}{\underbrace{(4x - 1)^2}_{(\cdot/25)}}$																
۱۲	۱ $y' = 6x - (-\sin x) = 6x + \sin x \quad (\cdot/5)$ $y'' = 6 + \cos x \quad (\cdot/5)$																
۱۳	۰/۷۵ $d'(t) = 2t - 3 \quad (\cdot/5)$ $d'(5) = 2 \times 5 - 3 = 7 \quad (\cdot/25)$																
۱۴	۱/۵  $V(x) = (15 - 2x)(8 - 2x)x \Rightarrow V(x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x \quad (\cdot/25)$ $0 < 2x < 8 \Rightarrow 0 < x < 4 \Rightarrow D_V = [0, 4] \quad (\cdot/25)$ $V'(x) = 12x^2 - 92x + 120 = 0 \quad (\cdot/25)$ $\Rightarrow 4(3x^2 - 23x + 30) = 0 \Rightarrow \Delta = (-23)^2 - 4(3)(30) = 169$ $\Rightarrow x = \frac{23 \pm \sqrt{169}}{6} = \begin{cases} 6 \notin [0, 4] & \text{غ ق} \\ \frac{5}{3} & \text{ق ق} \end{cases} \quad (\cdot/25)$ $V(\frac{5}{3}) = \frac{2800}{27}$ <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$\frac{5}{3}$</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>V'</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>+</td></tr><tr><td>V</td><td></td><td>$\frac{2800}{27}$</td><td></td><td></td></tr></table> (۰/۵)	x	0	$\frac{5}{3}$	4	6	V'	+	0	-	+	V		$\frac{2800}{27}$			
x	0	$\frac{5}{3}$	4	6													
V'	+	0	-	+													
V		$\frac{2800}{27}$															

نمره	راهنمای تصحیح - صفحه ۴	ردیف																								
۲	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(0, 3) \Rightarrow f'(0) = 0 \quad (0/25)$ $(1, -1) \Rightarrow f''(1) = 0 \quad (0/25)$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ و $f'(0) = 3a(0)^2 + 2b(0) + c = 0 \Rightarrow c = 0 \quad (0/25)$ $f''(x) = 6ax + 2b, f''(1) = 6a(1) + 2b = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0 \quad (1) \quad (0/25)$ $(0, 3) \Rightarrow f(0) = a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = 3 \Rightarrow d = 3 \quad (0/25)$ $(1, -1) \Rightarrow \left. \begin{aligned} f(1) &= a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d = -1 \\ d &= 3, c = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + b = -4 \quad (2) \quad (0/25)$ $(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \begin{cases} 6a + 2b = 0 \\ a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow a = +2 \quad (0/25) \text{ و } b = -6 \quad (0/25)$	۱۵																								
۱/۷۵	$y = x^3 - x^2 + 3x - 3 = (x^2 + 3)(x - 1) \quad D = \mathbb{R} \quad (0/25)$ $y = 0 \Rightarrow (x^2 + 3)(x - 1) = 0$ و $x^2 + 3 \neq 0$ همواره $\Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad (0/25)$ پس نقطه $(1, 0)$ محل برخورد نمودار تابع با محور x است. $x = 0 \Rightarrow y = -3 \quad (0/25)$ پس نقطه $(0, -3)$ محل برخورد نمودار تابع با محور y است. $y' = 0 \quad \Delta_{y'} = -32 < 0$ مشتق دارای ریشه حقیقی نیست و بنابراین تابع اکسترمم نسبی ندارد و چون $a = 3 > 0$ پس مشتق همواره مثبت و تابع همواره صعودی است. $y'' = 6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ و از طرفی $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 30%;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>0</td> <td>$\frac{1}{3}$</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td></td> <td></td> <td>+</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>y''</td> <td></td> <td></td> <td>-</td> <td>+</td> <td></td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>$-\infty$</td> <td>-3</td> <td>$-\frac{56}{27}$</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </table> $(0/5)$	x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	y'			+			y''			-	+		y	$-\infty$	-3	$-\frac{56}{27}$	0	$+\infty$	۱۶
x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$																					
y'			+																							
y''			-	+																						
y	$-\infty$	-3	$-\frac{56}{27}$	0	$+\infty$																					