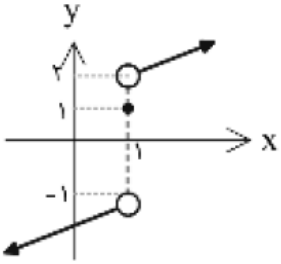
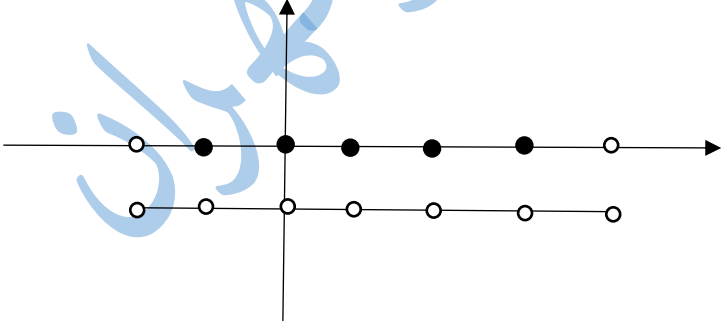


فصل پنجم

ردیف	سؤال و پاسخ	منطقه
۱	درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید الف) دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ یک همسایگی محذوف برای صفر است. ب) تابع $y = \sqrt{x-1}$ در $x=1$ حد ندارد پاسخ: الف) درست ب) درست	۱۳
۲	گزینه صحیح را انتخاب کنید: اگر $(a-1, 3a+1)$ یک همسایگی از $x=1$ باشد مقدار a کدام است؟ ۱) $0 < a < 2$ ۲) $0 < a < 4$ ۳) $1 < a < 2$ ۴) $-2 < a < 0$ پاسخ: گزینه ۱	۱۳
۳	گزینه صحیح را انتخاب کنید: همسایگی چپ کدام نقطه در دامنه تابع $y = \frac{\sqrt{x}}{[x]-2}$ قرار ندارد؟ ۱) $x=1$ ۲) $x=2$ ۳) $x=3$ ۴) $x=4$ پاسخ: گزینه ۳	۱۳
۴	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است، مقدار $A = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + f(1)$ را به دست آورید. پاسخ:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + f(1) = 2 - (-1) + 1 = 4$	۱۳

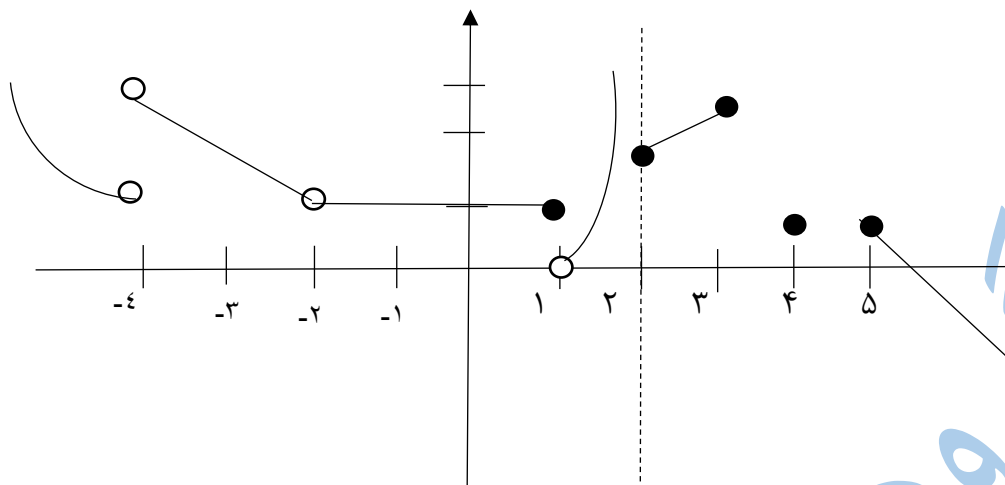
۱۳	نمودار تابعی را رسم کنید که : در همسایگی محذوف $x=-3$ تعریف شده باشد و $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x) = 0$ باشد . پاسخ:	۵
۱۳	نمودار $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x + 2 & -2 < x < 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3 & 0 \leq x \end{cases}$ را رسم کنید سپس حاصل حدود زیر را بیابید . ۱) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ۲) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ۳) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$ ۴) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ پاسخ: ۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ناموجود ۴) ۰	۶
۱۲	۱۳- با توجه به نمودار تابع ، درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید . ۱) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0$ ۲) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$ ۳) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وجود ندارد ۴) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(-1)$ پاسخ:	۷

	(۱) درست	(۲) نادرست	(۳) درست	(۴) نادرست	
۸	نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل مقابل است مطلوب است : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(1-x)$				پاسخ: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(1-x) = f(1-0^+) = f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$
۹	اگر $f(x) = [x] + [-x]$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را به دست آورید . پاسخ: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 - 2 = -1$ $1 < x < 2 \rightarrow -2 < -x < -1$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 - 1 = -1$ $0 < x < 1 \rightarrow -1 < -x < 0$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$				
۱۰	۹ _ مقادیر a و b را چنان بیابید که $f(x)$ در ۳ و -۳ دارای حد باشد : $f(x) = \begin{cases} 2x - a & x < -3 \\ ax + 2b & -3 \leq x \leq 3 \\ b - 5x & x > 3 \end{cases}$ پاسخ: $\lim_{x \rightarrow 3^+} b - 5x = b - 15$ $\lim_{x \rightarrow 3^-} ax + 2b = 3a + 2b$ $\rightarrow 3a + 2b = b - 15 \rightarrow 3a + b = -15$ $\lim_{x \rightarrow -3^+} ax + 2b = -3a + 2b$ $\lim_{x \rightarrow -3^-} 2x - a = -6 - a$				

	$-3a + 2b = -6 - a \rightarrow -2a + 2b = -6$ $\rightarrow \begin{cases} 3a + b = -15 \\ -2a + 2b = -6 \end{cases}$ $a = -3 \text{ و } b = -6$	
۱۲	۱۵- آیا حد راست تابع $f(x) = \sqrt{2-x}$ در $x = 2$ موجود است؟ چرا؟ پاسخ: $2-x \geq 0 \rightarrow x \leq 2 \rightarrow D_f = (-\infty, 2]$ خیر زیرا با توجه به دامنه همسایگی راست ۲ در دامنه موجود نیست.	۱۱
۱۳	اگر $f(x) = \begin{cases} ax-1 & x < 1 \\ x^2+2a & x \geq 1 \end{cases}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ مقدار a را بدست آورید. پاسخ: $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2a) - \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - 1) = -1$ $1 + 2a - a + 1 = -1 \rightarrow a = -3$	۱۲
۱۳	تابع $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ را در نظر بگیرید. الف) نمودار آن را در بازه $(-2, 4)$ رسم کنید. ب) با استفاده از نمودار $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x)$ را بدست آورید.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x) = -1$	۱۳

۱۳

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. این تابع در چه نقطه ای حد ندارد؟



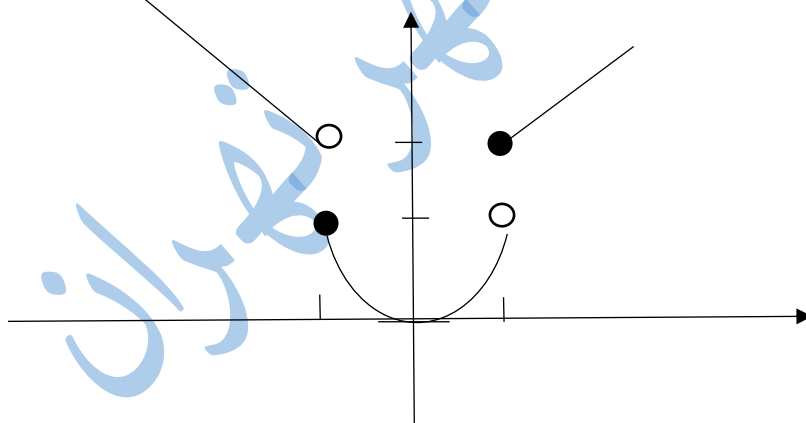
پاسخ:

$$x = -4, x = 1, x = 2, x = 3, x = 4, x = 5$$

۱۳

با توجه به نمودار مقابل حدود زیر را بدست آورید.

۱) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ۲) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ ۳) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$



پاسخ:

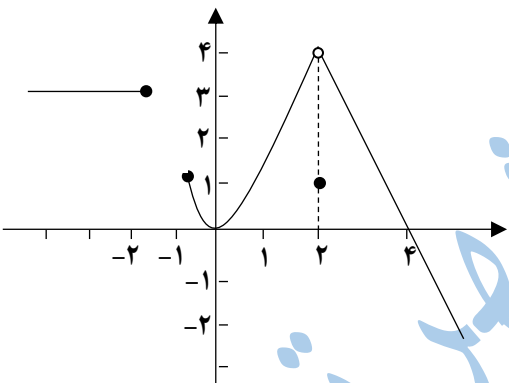
۱) ۲ ۲) ۲ ۳) ۰

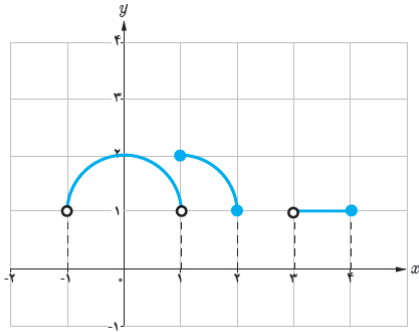
۱۲

حاصل حد زیر را بدست آورید.

۱۶

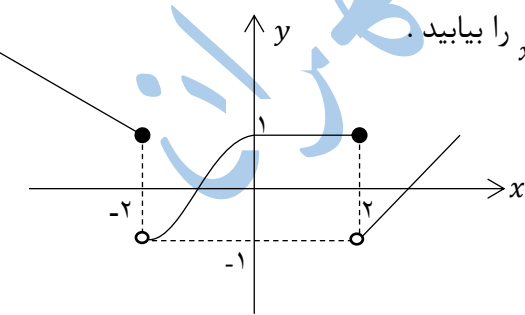
	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+8}}{[x]}$ $= \frac{\sqrt{1+8}}{1} = 3$	پاسخ:	
۱۳	الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 6}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 1}$ الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x^2+2x+3)} = \frac{3}{11}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{1}{6}$	پاسخ:	۱۷
۱۳	اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3x}{x^2-x-b} = a$ و $a \neq 0$ باشد، مقدار b و a را بدست آورید. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{3}{5} = a$ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{0}{0-b} \rightarrow b = 6$	پاسخ:	۱۸
۱۲	تابع $f(x) = \frac{ x-1 }{a+[x]}$ داده شده، مقدار a را از رابطه زیر بیابید. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{a-1}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{a}$ $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$ $(a-1)a = 2 \rightarrow a = 2 \text{ یا } a = -1$	پاسخ:	۱۹

۱۳	۲۰ حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{ \cos \pi x }{1 - \sqrt{2}x}$ را بدست آورید. پاسخ: $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} -\frac{\cos \pi x}{1 - \sqrt{2}x} \times \frac{1 + \sqrt{2}x}{1 + \sqrt{2}x} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{-\cos \pi x (1 + \sqrt{2}x)}{1 - 2x} \rightarrow 2x - 1 = t \rightarrow x = \frac{t+1}{2}$ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{2}) (1 + \sqrt{t+1})}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin \frac{\pi t}{2}}{-t} \times \lim_{t \rightarrow 0} (1 + \sqrt{t+1}) = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$	۲۰
۱۶	۲۱ پیوستگی تابع $f(x) = [x]$ در نقطه $x=3$ را بررسی کنید. پاسخ: ابتدا حد چپ، راست و مقدار تابع در این نقطه را بدست می آوریم. $f(3) = [3] = 3$ $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3$ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$ با توجه به اینکه $f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ نتایج می شود در این نقطه تابع تنها از سمت راست پیوسته است و تابع پیوسته نیست.	۲۱
۱۳	۲۲ در شکل زیر نمودار تابع f رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x+1) + \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)$ را بدست آورید.  $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x+1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x+2) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$ $\rightarrow 1 + 0 = 1$	۲۲

۲۳	نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. پیوستگی تابع f در نقطه $x=1$ را بررسی کنید. 
۲۴	پاسخ: با توجه به نمودار تابع، تابع در نقطه $x=1$ دارای حد چپ به مقدار ۱ و دارای حد راست به مقدار ۲ است. همچنین مقدار تابع f در این نقطه برابر ۲ است. پس نتیجه می‌شود تابع f در نقطه $x=1$ از سمت راست پیوسته است ولی تابع پیوسته نیست و در این نقطه ناپیوسته است. به ازای کدام مقدار a، تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - [x] & x < 2 \\ a & x = 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases}$ در نقطه $x=2$ پیوسته است؟ پاسخ: ابتدا حد چپ و حد راست تابع f در نقطه $x=2$ را حساب می‌کنیم. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$ از آن‌جا که تابع f در نقطه $x=2$ حد ندارد، پس تابع f در نقطه $x=2$ پیوسته نیست و به ازای هر مقدار a تابع ناپیوسته است. یعنی هیچ مقداری برای a یافت نمی‌شود که تابع f در نقطه $x=2$ پیوسته باشد.
۲۵	پاسخ: ابتدا حد چپ و حد راست تابع f در نقطه $x=1$ را حساب می‌کنیم. به ازای کدام مقدار a، تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x < 1 \\ a & x = 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$ در نقطه $x=1$ پیوسته است؟ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\sqrt{x}+1) = 2$ با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ و $f(1) = a$، پس نتیجه می‌شود در صورتی که مقدار $a=2$ باشد تابع f در نقطه $x=1$ پیوسته است.
۲۶	تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \frac{x-5}{x^2+5}$ را بدست آورید.

	پاسخ: با توجه به اینکه تابع گویا است و مخرج آن ریشه ندارد، پس تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته است. یعنی تعداد نقاط ناپیوستگی صفر است.	
۱۳	مقدار a را چنین تعیین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 6}{x - \sqrt{x+2}} & x > 2 \\ ax - 1 & x \leq 2 \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد. پاسخ: ۱) $f(2) = 2a - 1 = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ ۲) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 6}{x - \sqrt{x+2}} \times \frac{x + \sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6}{(x-2)(x+1)} = 4$ ۳) $2a - 1 = 4 \rightarrow a = \frac{5}{2}$	۲۷
۱۳	تابع $f(x) = (x^2 + ax + b)[x]$ در تمام نقاط بازه $(1, 4)$ حد دارد. مقدار a و b را بدست آورید. پاسخ: $y = x^2 + ax + b \xrightarrow{\text{ریشه هستند } x=2 \text{ و } x=3} \begin{cases} 4 + 2a + b = 0 \\ 9 + 3a + b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = +6 \end{cases}$	۲۸
۱۰	مقدار حد زیر را بدست آورید. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$ حل: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = 0$	۲۹
۱۰	مقدار حد زیر را بدست آورید. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1}$ حل: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{(x-1)} = 5$	۳۰
۱۰	مقدار حد زیر را بدست آورید. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x - 1}$ حل:	۳۱

	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)}{x - 1} = 5$	$x^3 + x^2 - 2$ بر $x - 1$ تقسیم می کنیم:	
۱۰	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x + \tan x}$	حد زیر را بدست آورید.	۳۲
	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x + \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan 2x}{2x} \cdot 2x}{x + \frac{\tan x}{x} \cdot x} = 1$	حل:	
۱۰	$\lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x \cot 3x$	حد زیر را بدست آورید.	۳۳
	$\cot 3x = \frac{1}{\tan 3x}$	حل:	
	$\lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x \cot 3x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2x}{\frac{\tan 3x}{3x} \cdot 3x} = \frac{2}{3}$		
۱۵	پیوستگی تابع $f(x) = x[x]$ را در نقطه $x = 0$ به چه صورت است؟ الف) پیوستگی راست دارد ب) پیوستگی چپ دارد پ) پیوسته نیست ت) پیوسته است	حل:	۳۴
	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x[x] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x[x] = 0, \quad f(0) = 0 \Rightarrow f \text{ در } x = 0 \text{ پیوسته است}$		
۱۵	$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x }{x^2 - x } & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$	مقدار a را طوری به دست آورید که تابع زیر در $x = 0$ پیوسته باشد.	۳۵
	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x }{x^2 - x } = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = -1$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x }{x^2 - x } = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = -1, \quad f(0) = a = -1$	حل:	

۱۵	به ازای کدام مقدار a تابع زیر در بازه $[0, 3]$ پیوسته است؟ $f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & x < 2 \\ a + 2 \sin \frac{\pi}{x} & x \geq 2 \end{cases}$ حل: $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1)[x] = 1 \times 1 = 1, \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(a + 2 \sin \frac{\pi}{x} \right) = a + 2 \sin \frac{\pi}{2} = a + 2 = f(1) \rightarrow a + 2 = 1 \rightarrow a = -1$	۳۶
۱۵	تابع $f(x) = [2x + 1]$ در بازه $[0, k)$ پیوسته است. بیشترین مقدار k کدام است؟ حل: نمودار تابع $f(x) = [2x + 1]$ دارای پاره خط هایی به طول $\frac{1}{2} = \frac{1}{ a }$ است این تابع در فاصله $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ پیوسته است. پس بیشترین مقدار k، $\frac{1}{2}$ است	۳۷
۱۵	پیوستگی تابع زیر را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید. $\begin{cases} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \cos x} & x > 0 \\ \frac{[x] \sin 2x}{ x } & x < 0 \end{cases}$ حل: در $x = 0$ پیوسته نیست ولی پیوستگی چپ دارد	۳۸
۱۴	نمودار تابع f به صورت زیر می باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} (f(x) + f(-x))$ را بیابید.  حل: $x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow -x \rightarrow (-2)^+ \Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + \lim_{t \rightarrow (-2)^+} f(t) = 1 + (-1) = 0$	۳۹

۱۴	هر گاه تابع f با ضابطه $y = \frac{x[x] + a x }{[1-2x]}$ در $x = -1$ حد داشته باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ چقدر است؟ حل: $L_1 = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \frac{(-1)(-1) + a(1)}{2} = \frac{1+a}{2}$ $= \frac{(-1)(-2) + a(1)}{3} = \frac{2+a}{3}$ $x \rightarrow (-1)^+ \Rightarrow x > -1 \Rightarrow -2x < 2 \Rightarrow 1 - 2x < 3$ $x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow -2x > 2 \Rightarrow 1 - 2x > 3$ $L_1 = L_2 \Rightarrow \frac{1+a}{2} = \frac{2+a}{3} \Rightarrow 3+3a = 4+2a \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{1+1}{2} = 1$	۴۰
۱۴	حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ 3x+1 - 1-4x }{2x + [-x^2] + 1}$ را بیابید. حل: $x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow -x^2 < -4$ $L = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(3x+1) + (1-4x)}{2x - 5 + 1} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x+2}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)}{2(x-2)} = -\frac{1}{2}$	۴۱
۱۴	تابع با ضابطه $y = [\cos x]$، در چه نقاطی از فاصله $(0, 2\pi)$ حد ندارد؟ (از رسم نمودار تابع استفاده کنید) حل: این تابع در فاصله $(0, 2\pi)$، در دو نقطه به طولهای $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ حد ندارد	۴۲
۱۴	اختلاف حدود چپ و راست تابع f با ضابطه $y = \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}$ در $x = 0$ چقدر است؟ حل:	۴۳

	$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}} \times \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2} \sin 2x}{ x } = \sqrt{2} \times \frac{2}{1} = 2\sqrt{2}$ $L_2 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2} \sin 2x}{ x } = \sqrt{2} \times \frac{2}{-1} = -2\sqrt{2}$ $\Rightarrow L_1 - L_2 = 2\sqrt{2} - (-2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$	
۱۴	مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x} - \sqrt{x}$ را بدست آورید . حل: حد وجود ندارد $\Rightarrow x \rightarrow 1^- \Rightarrow x \in (0, 1) \Rightarrow x < \sqrt{x} \Rightarrow x - \sqrt{x} < 0$	۴۴
۱۴	با توجه به نمودار تابع $f(x)$، حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} [f(x)] \times \lim_{x \rightarrow (-2)^+} [f(x)]$ را بدست آورید . حل: $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} [f(x)] \times \lim_{x \rightarrow (-2)^+} [f(x)] = [1] \times [-2] = 1 \times (-2) = -2$	۴۵
۱۴	حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left[\frac{2x+1}{x-2} \right]$ را بدست آورید . حل: $\frac{2x+1}{x-2} = 2 + \frac{5}{x-2}$ $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left[\frac{2x+1}{x-2} \right] = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left[2 + \frac{5}{x-2} \right] = 2 + \left[\frac{5}{3^+ - 2} \right] = 2 + \left[\frac{5}{1^+} \right] = 2 + [5^-] = 2 + 4 = 6$	۴۶
۶	درستی یا نادرستی هر قسمت را با ذکر دلیل کوتاه، مشخص کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{\sin x}{x} \right] = -1$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ x^2 - 4 }{x - 2} = 4$ حل:	۴۷

	الف) درست، با توجه به نمودار $y = \frac{\sin x}{x}$ که در کتاب درسی رسم شده: $0 < \frac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow -1 < -\frac{\sin x}{x} < 0$ ب) نادرست $x < 2 \Rightarrow x^2 - 4 < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ x^2 - 4 }{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{(x-2)} = -4$	
۶	مقدار حدهای زیر را در صورت وجود، بیابید. الف) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{ x - 3 }$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\sqrt{x} - 1)}{x - 1}$ حل: الف) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{ x - 3 } = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(x+1)}{-(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{-1} = -4$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)} \times \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	۴۸
۶	اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{3x^2 + mx + 2} = n$ و $n \neq 0$ باشد، مقادیر m و n را تعیین کنید. حل: چون $n \neq 0$ پس صورت و مخرج کسر حد گرفته شده، عامل $(x - 2)$ دارند. پس $3x^2 + mx + 2$ باید به صورت حاصل ضرب $(x - 2)(3x - 1)$ باشد. پس $(x - 2)(3x - 1) = 3x^2 - 7x + 2 \Rightarrow m = -7$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{3x^2 + mx + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)x}{(3x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{3x-1} = \frac{2}{5} = n$	۴۹
۶	مقدار حدهای زیر را در صورت وجود، بیابید. الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + x}{x + 1}$	۵۰

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^3 - 8}$$

حل:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = -2$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^3 - 8} \times \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{1}{12}$$

۶

مقدار حدهای زیر را در صورت وجود، بیابید.

۵۱

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{\sqrt{4x-3} - 3}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} \frac{\sqrt{1 - \sin 2x}}{\cos 2x}$$

حل:

الف)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{\sqrt{4x-3} - 3} \times \frac{\sqrt{4x-3} + 3}{\sqrt{4x-3} + 3} \times \frac{\sqrt{5x+1} + 4}{\sqrt{5x+1} + 4} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x - 15}{4x - 12} \times \frac{\sqrt{4x-3} + 3}{\sqrt{5x+1} + 4} = \frac{5}{4} \times \frac{6}{8} = \frac{15}{16}$$

ب)

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} \frac{\sqrt{1 - \sin 2x}}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} \frac{\sqrt{(\cos x - \sin x)^2}}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} \frac{(\cos x - \sin x)}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

توجه: $0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos x > \sin x$

۶

مقدار حدهای زیر را در صورت وجود، بیابید.

۵۲

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + \sqrt{x} - 6}{x - 4}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi}$$

حل:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + \sqrt{x} - 6}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{5}{4}$$

$$x - \frac{\pi}{6} = t \Rightarrow 6x - \pi = 6t, \quad x = t + \frac{\pi}{6}$$

$$\text{ب) } \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin(t + \frac{\pi}{6}) - 1}{6t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t \cos \frac{\pi}{6} + 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos t - 1}{6t} =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3} \sin t}{6t} + \frac{\cos t - 1}{6t} = \frac{\sqrt{3}}{6} + 0 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

۸

مقدار حد تابع $f(x) = \frac{x}{[x]}$ را در نقطه $x=0$ بررسی کنید.

حل:

$$۱) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{[.+] } = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{.} = \text{نشده تعریف}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{[.-] } = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-۱} = \frac{.}{-۱} = .$$

از ۱ و ۲ نتیجه می گیریم حد این تابع در نقطه $x=0$ تعریف نشده است.

۸

دو تابع f, g را مثال بزنید که هیچکدام در $x=2$ حد نداشته باشند، ولی تابع $f+g$ در $x=2$ حد داشته باشد.

حل:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x > 2 \\ 4 & x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$$

پس تابع $f(x)$ در $x=2$ حد ندارد

$$g(x) = \begin{cases} 5 & x > 2 \\ 4 & x < 2 \end{cases}$$

	$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 5$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 4$ پس تابع $g(x)$ در $x=2$ حد ندارد $(f+g)(x) = \begin{cases} 8 & x > 2 \\ 8 & x < 2 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 2} (f+g)(x) = 8$ پس تابع $f+g(x)$ در $x=2$ حد دارد و حد آن برابر ۸ است.	
۸	اگر $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2mx^2 + 3x - m) = 10$ آنگاه مقدار m را بیابید. حل: $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2mx^2 + 3x - m) = 10 \Rightarrow 8 - 8m + 6 - m = 10 \Rightarrow$ $14 - 10 = 9m \Rightarrow m = \frac{4}{9}$	۵۵